

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

GEORGES DUVAUT

## **Problèmes unilatéraux en élasticité**

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 31-32 (1972), p. 151-158

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1972\\_\\_31-32\\_\\_151\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__151_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROBLÈMES UNILATÉRAUX EN ÉLASTICITÉ

par

**Georges DUVAUT**

I. - Introduction.

Nous donnons ici un résumé des résultats et méthodes mathématiques pour l'étude des problèmes classiques et non classiques d'élasticité linéaire. Nous distinguons trois parties dans cet exposé :

- i) Notations et problèmes classiques.
- ii) Deux types de problèmes unilatéraux stationnaires (Frottement et Signorini).
- iii) Les cas dynamiques correspondants. Un problème mal posé.

Les résultats annoncés dans i) remontent à des travaux de K.O. Friedrichs [4]. L'existence d'une solution au problème de Signorini, exposé au ii), a été obtenue directement par G. Fichera [3] et résulte aussi d'un théorème abstrait de J. L. Lions et G. Stampacchia [6]. Le problème avec conditions de frottement à la frontière et les situations évoquées au iii) ont été étudiés par G. Duvaut et J.L. Lions [1] [2] ; on trouvera également dans cette dernière référence les démonstrations détaillées.

II. - Notations.

On désigne par  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  de frontière  $\Gamma$  régulière ( $N = 2$  ou  $3$ ) ; la normale extérieure unitaire à  $\Gamma$  est  $\vec{n}$  de composantes  $n_i$ ,  $i = 1 \dots N$ . Les indices  $i, j, \dots$  qui interviennent dans la suite prennent toujours les valeurs  $1$  à  $N$  et on utilise la convention de sommation sur les couples d'indices répétés (exemple :  $x_i y_i = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ ).

L'ouvert  $\Omega$  est l'emplacement occupé par le corps élastique avant déformation ; on cherche, compte-tenu des contraintes imposées, le champ des vecteurs déplacements  $u = \{u_i\}$  des points de  $\Omega$  et le champ des déformations  $\{\epsilon_{ij}(u)\}$  et des contraintes  $\{\sigma_{ij}\}$  dans  $\Omega$ .

On a les équations :

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + f_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{eq. d'équilibre}).$$

$$(2) \quad \sigma_{ij} = a_{ijkh} \epsilon_{kh}(u) .$$

$$(3) \quad \epsilon_{kh}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right) ,$$

les coefficients d'élasticité  $a_{ijkh}$  satisfaisant

$$(4) \quad a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{khij} , \quad a_{ijkh} \epsilon_{kh} \epsilon_{ij} \geq \alpha \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} ,$$

( $\alpha$  constante  $> 0$ ) .

Dans les cas dynamiques, on remplace (1) par :

$$(1 \text{ bis}) \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + f_i .$$

Dans tous les cas  $\{f_i\}$  représente une densité volumique de forces données.

#### Problèmes classiques.

Ce sont ceux où on se donne les conditions aux limites suivantes sur  $\Gamma$  :

$$\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_F , \quad \Gamma_U \cap \Gamma_F = \emptyset ,$$

$$(5) \quad u_i = U_i \text{ sur } \Gamma_U \quad (U_i : \text{déplacements donnés sur } \Gamma_U)$$

$$(6) \quad \sigma_{ij} n_j = F_i \text{ sur } \Gamma_F \quad (F_i : \text{densité de forces données sur } \Gamma_F) .$$

On établit alors que : si  $u(x)$  est un champ de vecteurs solution du problème

(1)  $\rightarrow$  (6) alors  $u(x)$  minimise

$$I_1(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{ijkh} \epsilon_{kh}(v) \epsilon_{ij}(v) dx - \int_{\Omega} f_i v_i dx - \int_{\Gamma_F} F_i v_i d\Gamma$$

parmi les  $v$  tels que  $v_i = U_i$  sur  $\Gamma_U$  .

Cette propriété formelle permet de poser le problème de façon précise.

On introduit :

$$(7) \quad v = (H^1(\Omega))^N$$

$$(8) \quad \begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ijkh} \epsilon_{kh}(u) \epsilon_{ij}(v) dx \\ (f, g) = \int_{\Omega} f_i g_i dx \end{cases}$$

$$(9) \quad L_1(v) = \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma_F} F_i v_i d\Gamma$$

et on suppose que les données satisfont

$$(10) \quad \begin{cases} f_i \in L^2(\Omega) , F_i \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) & (**) \\ U_i \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) & (**), a_{ijkh} \in L^\infty(\Omega) . \end{cases}$$

On pose :

$$(11) \quad \mathcal{U}_{ad} = \{ v | v \in V , v_i|_{\Gamma_U} = U_i \}$$

et on vérifie que  $\mathcal{U}_{ad}$  est un ensemble convexe fermé de  $V$  (espace linéaire affine).

On peut alors formuler le problème en termes précis :

PROBLEME 1 :

Trouver  $u \in \mathcal{U}_{ad}$  qui minimise  $I_1(v)$  donné par :

$$(12) \quad I_1(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L_1(v)$$

sur  $\mathcal{U}_{ad}$  ,

ou bien (énoncé équivalent),

Trouver  $u \in \mathcal{U}_{ad}$  tel que :

$$(13) \quad a(u, v-u) \geq L_1(v-u) , \forall v \in \mathcal{U}_{ad} .$$

On résoud de la façon suivante :

α) L'espace  $V$  est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|v\| = \left( \int_{\Omega} v_i v_i dx + \int_{\Omega} \epsilon_{ij}(v) \epsilon_{ij}(v) dx \right)^{1/2}$$

qui est équivalente à la norme classique sur  $(H^1(\Omega))^3$  , d'après l'inégalité de Korn (\*\*\*) .

β) Si  $\text{Mes } \Gamma_U > 0$  , alors  $I_1(v)$  est infinie à l'infini sur  $\mathcal{U}_{ad}$  .

On en déduit immédiatement existence et unicité d'une solution du problème 1.

(\*\*) Lire :  $F_i$  (resp.  $U_i$ ) est restriction à  $\Gamma_F$  (resp.  $\Gamma_U$ ) d'un élément de  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  (resp.  $H^{1/2}(\Gamma)$ ) .

(\*\*\*) Ce résultat a été obtenu pour la première fois par K. O. Friedrichs [4]. La démonstration la plus générale est due à Gobert [5]. Lorsque  $\Gamma$  est régulière, on a une démonstration un peu plus simple et valable pour  $\Omega$  non borné, (cf. Duvaut-Lions [2]).

$\gamma$ ) Si  $\Gamma_U = \emptyset$ , on introduit

$$(14) \quad \mathcal{R} = \{v \mid v = a + b \cdot x, a \in \mathbb{R}^N, b \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, b \text{ antisymétrique}\}.$$

On a alors une condition nécessaire sur les données pour qu'il y ait une solution,

$$(15) \quad \int_{\Omega} f_i \rho_i dx + \int_{\Gamma} F_i \rho_i d\Gamma = 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R},$$

ce qui exprime que l'ensemble des forces appliquées constitue un torseur équivalent à zéro.

La forme bilinéaire  $a(u, v)$  et  $L_1(v)$  sont alors définies sur l'espace quotient  $V/\mathcal{R}$ , qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$\left( \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

équivalente à la norme quotient.

Alors il est immédiat que le problème 1 possède une solution unique dans  $V/\mathcal{R}$ .

### III. - Les problèmes unilatéraux.

#### 3.1 - Condition de frottement sur $\Gamma$ .

On conserve (1)  $\rightarrow$  (4) et on pose, pour tout champ de vecteur  $v$  sur  $\Gamma$ ,

$$v_N = v_i n_i, \quad v_T = v - v_N n;$$

$v_N n$  (resp.  $v_T$ ) est la composante normale (resp. tangentielle) de  $v$  sur  $\Gamma$ .

De plus, on désigne par  $\sigma$  le vecteur de composantes  $\{\sigma_i\}$ ,  $\sigma_i = \sigma_{ij} n_j$  sur  $\Gamma$ .

Les conditions à la frontière sont alors :

$$(16) \quad \sigma_N = F_N \quad (F_N \text{ donné } < 0 \text{ sur } \Gamma),$$

$$(17) \quad \begin{cases} |\sigma_T| < g & \Rightarrow u_T = 0 \\ |\sigma_T| = g & \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } u_T = -\lambda \sigma_T. \end{cases}$$

La condition (17) traduit la loi de frottement de Coulomb dans le cas statique

(dans le cas dynamique on remplacera  $u_T$  par  $\frac{\partial}{\partial t} u_T$  dans (17). Le scalaire positif  $g$  est égal à  $f|F_N|$  où  $f$  est le coefficient de frottement.

On a alors la propriété : si  $u$  est solution de (1) - (4), (16), (17), alors  $u$  minimise :

$$(18) \quad I_2(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L_2(v) + j(v)$$

parmi tous les  $v \in V$  ; (on a posé

$$(19) \quad L_2(v) = \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma} F_N v_N d\Gamma, \quad j(v) = \int_{\Gamma} g |v_T| d\Gamma.$$

Il en résulte une nouvelle formulation (précise) du problème.

PROBLEME 2 :

On donne  $F_N \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ,  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ,  $g > 0$ . Trouver  $u$  de  $V$  qui minimise  $I_2(v)$  dans  $V$ .

ou bien (énoncé équivalent)

Trouver  $u \in V$  tel que

$$(20) \quad a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq L_2(v-u), \quad \forall v \in V.$$

On déduit immédiatement de (20) la condition nécessaire pour l'existence d'une solution,

$$(21) \quad |L_2(o)| \leq \int_{\Gamma} g |\rho^T| d\Gamma, \quad \forall \rho \in \mathcal{R}.$$

Nous supposons que les données  $f_i$ ,  $F_N$ ,  $g$  satisfont à la condition plus forte

$$(22) \quad |L_2(o)| < \int_{\Gamma} g |\rho^T| d\Gamma, \quad \forall \rho \in \mathcal{R} - \{0\}.$$

Moyennant l'hypothèse (22) on montre que  $I_2(v)$  tend vers  $+\infty$  si  $\|v\|_V$  tend vers  $+\infty$ , donc il existe  $u \in V$  solution du problème 2. L'unicité de la solution n'est pas établie, mais si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux solutions, alors  $u_1 - u_2 \in \mathcal{R}$  et par conséquent les champs de déformations et contraintes sont uniques.

3.2 - Problème de Signorini.

Il s'agit d'un ancien problème posé par Signorini [7]. Un corps élastique qui occupe une région  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  dans son état non déformé, est en contact avec un support  $S$  rigide par une partie  $\Gamma_S$  de sa frontière  $\Gamma$  (Mes  $\Gamma_S > 0$ ). On pose  $\Gamma_F = \Gamma - \Gamma_S$ . On soumet le corps élastique à des forces  $\{f_i\}$  sur  $\Omega$  et

'  $\{F_i\}$  sur  $\Gamma_F$ , et on cherche  $u$  qui satisfasse (1) - (4), (6) et

$$(23) \quad \sigma_T = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_S ,$$

$$(24) \quad u_N \leq 0 , \quad \sigma_N \leq 0 , \quad u_N \sigma_N = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_S .$$

On est alors conduit à formuler le

PROBLEME 3 :

Trouver  $u$  qui minimise

$$(25) \quad I_3(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L_3(v)$$

parmi tous les  $V$  tels que  $v \in V$ ,  $v_N \leq 0$  sur  $\Gamma_S$  ; (on a posé

$$L_3(v) = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_S} F_i v_i \, d\Gamma ;$$

ou bien (énoncé équivalent) :

Trouver  $u \in V$ ,  $u_N \leq 0$  sur  $\Gamma_S$  tel que,

$$(26) \quad a(u, v-u) \geq L_3(v-u), \quad \forall v \in V, v_N \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_S .$$

On obtient alors (cf. G. Fichera [3] ou Lions-Stampacchia [6]) .

Si les données  $\{f_i\}$  et  $\{F_i\}$  satisfont

$$(27) \quad L_3(0) < 0 \quad \forall \rho \in \mathbb{R} - \{0\}, \rho_N \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_S$$

il existe  $u$  solution du problème 3. Les champs de déformations et contraintes associés sont uniques.

#### IV. - Cas dynamiques.

##### 4.1 - Problème de frottement.

On est conduit, remplaçant l'équation (1) par (1 bis) à trouver  $u = \{u_i(x,t)\}$  qui satisfasse

$$(28) \quad (u''(t), v-u'(t)) + a(u(t), v-u'(t)) + j(v) - j(u'(t)) \geq L_2(v-u'(t))$$

$$\forall v \in V \quad (\text{on a posé} \quad u''(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}),$$

avec des conditions initiales

$$(29) \quad u(0) = u'(0) = 0 .$$

On obtient alors le résultat (cf. Duvaut-Lions [2]).

Si les données  $f_i, F_N, g$  sont choisies dans la classe,

$$f_i, f_i', f_i'' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

$$F_N, F_N', F_N'' \in L^2(0, T; L^2(\Gamma))$$

$$g \text{ indépendant de } t, g \in L^2(\Gamma),$$

alors il existe u unique avec

$$u, u' \in L^\infty(0, T; V), u'' \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^N)$$

solution de (27) et (28).

#### 4.2 - Problème de Signorini dynamique.

Introduisons l'ensemble convexe fermé  $K \subset V$ ,

$$(30) \quad K = \{v \mid v \in V, v_N \leq 0 \text{ sur } \Gamma_S\}.$$

On est alors conduit à chercher  $u = \{u_i(x, t)\}$  tel que ,

$$(31) \quad u(t) \in K,$$

$$(32) \quad (u''(t), v - u(t)) + a(u(t), v - u(t)) \geq L_2(v - u(t)) \quad \forall v \in K$$

$$(33) \quad u(0) = u'(0) = 0.$$

Le problème (31), (32), (33) est ouvert, de surplus mal posé très probablement, comme on peut s'en convaincre en examinant une situation analogue de la théorie des inéquations différentielles ordinaires. Considérons un point matériel M de coordonnées  $x_i, \{x_i\} \in \mathbb{R}^N$ , soumis à un champ de forces  $\{f_i\}$  et assujetti à rester dans un convexe fermé K de  $\mathbb{R}^N$ . Le contact du point M avec la frontière  $\partial K$  ayant lieu sans frottement, on est conduit à trouver  $x(t) = \{x_i(t)\}$  tel que :

$$(34) \quad \begin{aligned} &x(t) \in K \\ &(x''(t), \xi - x(t)) \geq (f, \xi - x(t)) \quad \forall \xi \in K \\ &x(0) = x'(0) = 0. \end{aligned}$$

Si on complète (34) en imposant une loi de réflexion de M sur  $\partial K$  qui permette de calculer la vitesse réfléchie en fonction de la vitesse incidente, on obtient une solution unique sous des conditions classiques de régularité des données. On a donc autant de solutions de (34) que de lois de réflexion imaginables.

Il y a alors tout lieu de penser que le système (31) - (33), de même nature que (34), est également un système incomplet.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] DUVAUT (G.), LIONS (J.L.). - Elasticité avec frottement. Journal de Mécanique. Vol. 10, n° 3, Sept. 1971. p. 409 - 420.
- [2] DUVAUT (G.), LIONS (J.L.). - Les inéquations en Mécanique et en physique. Dunod. (1972).
- [3] FICHERA (G.). - Problemi elastostatici con vincoli unilaterali il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno. Mem. Accad. Naz. Lincei, 8 (7), 1964, p. 91-140.
- [4] FRIEDRICHS (K.O.). - On the boundary value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality. Annals of Math. , Vol. 48, 1947.
- [5] GOBERT. - Une inégalité fondamentale de la théorie de l'élasticité. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, n° 3 et 4, 1962.
- [6] LIONS (J.L.), STAMPACCHIA (G.). - Variational inequalities. Com. m. pure applied Math. XX, (1967), p. 493-519.
- [7] SIGNORINI (A.). - Sopra alcune questioni di elastostatica. Atti. della Soc. Ital. per il progresso delle Scienze, 1933.

Université de Paris  
Faculté des Sciences  
Mécanique Théorique  
Tour 66 - 9 Quai Saint-Bernard  
75 - PARIS 5ème (France)

---