JEAN-PIERRE FERRIER

Intervention de la bornologie dans la convexité holomorphe

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 159-164
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__159_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 159-164.

INTERVENTION DE LA BORNOLOGIE DANS LA CONVEXITÉ HOLOMORPHE

par

Jean-Pierre FERRIER

---

1. Il est classique de parler de compacts convexes par rapport à certaines algèbres comme celles des polynômes, des fractions rationnelles, des fonctions holomorphes sur Ω ... On s'intéresse au contraire à des ouverts de $\mathbb{C}^n$, ou plus généralement à des fonctions poids définies sur des ouverts de $\mathbb{C}^n$. Les algèbres de fonctions holomorphes que l'on considère, sont celles introduites par L. Waelbroeck [5], puis, de façon indépendante, par L. Hörmander [3]. Rappelons quelques définitions : si δ est une fonction positive (au sens large) sur $\mathbb{C}^n$, lipschitzienne et telle que la fonction $|z|\delta$ soit bornée, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ désignant ici l'application identique de $\mathbb{C}^n$, on désigne par $\mathcal{O}(\delta)$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur l'ouvert $\delta>0$ telles que pour un certain entier N, la fonction $\delta^N f$ soit bornée sur cet ouvert. Autrement dit, $\mathcal{O}(\delta)$ est l'algèbre des fonctions holomorphes sur l'ouvert $\delta>0$ majorées par un multiple d'une puissance de $1/\delta$. Remarquons que si on remplace δ par une fonction δ_1 telle que pour $\varepsilon>0$ et un entier N on ait à la fois $\varepsilon\delta^N \leqslant \delta_1$ et $\varepsilon\delta_1^N \leqslant \delta$, les algèbres $\mathcal{O}(\delta)$ et $\mathcal{O}(\delta_1)$ (que l'on définit de façon analogue) sont identiques ; on dira alors que les fonctions δ et δ_1 sont équivalentes.

On utilisera en particulier la fonction $\delta_0 = (1 + |z|)^{1/2}$; d'après Liouville, $\mathcal{O}(\delta_0)$ est l'algèbre des polynômes. Si S est un ensemble ouvert de $\mathbb{C}^n$, la fonction δ_S définie par $\delta_S(\zeta) = \min(\delta_0(\zeta), d(\zeta, \complement S))$, a aussi les propriétés imposées.

On se donne maintenant deux fonctions δ, δ' ayant les propriétés indiquées. Les algèbres $\mathcal{O}(\delta)$, $\mathcal{O}(\delta')$ sont donc définies et, si $\delta' \geqslant \delta$, l'ouvert $\delta'>0$ contient l'ouvert $\delta>0$ et, par restriction, on obtient un homomorphisme d'algèbres $\mathcal{O}(\delta') \to \mathcal{O}(\delta)$. On supposera que l'ouvert $\delta'>0$ est connexe, ce qui permet d'identifier $\mathcal{O}(\delta')$ à une sous-algèbre de $\mathcal{O}(\delta)$. Dans quel cas dira-t-on que δ est convexe par rapport à $\mathcal{O}(\delta')$? Deux définitions semblent possibles :

1) δ est équivalente à δ_1 telle que $1/\delta_1$ soit l'enveloppe supérieure sur l'ouvert $\delta'>0$ d'une famille $|f_\alpha|$ où $f_\alpha \in \mathcal{O}(\delta')$.

2) δ est équivalente à δ_1 telle que $1/\delta_1$ soit l'enveloppe supérieure sur l'ouvert $\delta>0$ d'une famille $|f_\alpha|$ où $f_\alpha \in \mathcal{O}(\delta')$.

Clairement la première implique la seconde. Nous allons voir que si l'ouvert $\delta'>0$ est pseudoconvexe, elles sont en fait équivalentes.

2. Pour établir l'équivalence entre (1) et (2) on va montrer en réalité, que ces deux propriétés sont équivalentes à d'autres propriétés. Il était prévisible que la définition de la convexité de δ par rapport à $\mathcal{O}(\delta')$ aurait en particulier pour but d'étudier l'approximation des fonctions de $\mathcal{O}(\delta)$ par celles de $\mathcal{O}(\delta')$. Cela suppose que l'on a mis sur $\mathcal{O}(\delta)$ une structure, que l'on sache parler de l'adhérence $\overline{\mathcal{O}}(\delta')$ de $\mathcal{O}(\delta')$ dans $\mathcal{O}(\delta)$; moyennant cela, on pourra considérer la propriété d'approximation :

3) δ est équivalente à δ_1 telle que $-\log \delta_1$ soit p.s.h. sur l'ouvert $\delta>0$ et $\overline{\mathcal{O}}(\delta') = \mathcal{O}(\delta)$.

Il est assez naturel de voir aussi s'introduire la théorie spectrale ; en l'occurence ce sera celle des algèbres complètes de L. Waelbroeck [5]. La dernière propriété s'énonce :

4) δ appartient au spectre $\Delta(z ; \overline{\mathcal{O}}(\delta'))$ de $z = (z_1, \dots, z_n)$ dans $\overline{\mathcal{O}}(\delta')$.

La première chose à faire est de mettre une structure sur $\mathcal{O}(\delta)$; ce sera une bornologie : sont bornées les parties B de $\mathcal{O}(\delta)$ telles qu'il existe N entier et $M\geq 0$ pour lesquels $\delta^N|f|\leq M$ pour toute fonction f de B. De cette façon $\mathcal{O}(\delta)$ est une algèbre à bornés convexe complète, plus simplement une algèbre complète ou b-algèbre. En réalité, on interprète simplement $\mathcal{O}(\delta)$ comme la réunion des espaces de Banach ${}_N\mathcal{O}(\delta)$ où ${}_N\mathcal{O}(\delta)$ est le sous-espace de $\mathcal{O}(\delta)$ des fonctions f telles que $\delta^N|f|\leq M$ avec la norme $f \to \|\delta^N f\|_\infty$.

Il faut également définir l'adhérence $\overline{\mathcal{O}}(\delta')$ de $\mathcal{O}(\delta')$ dans $\mathcal{O}(\delta)$. Dans ma thèse, j'utilisais dans des circonstances analogues ce que l'on appelle maintenant la fermeture de $\mathcal{O}(\delta')$ dans $\mathcal{O}(\delta)$, fermeture que l'on obtient en itérant transfiniment l'opération appelée maintenant adhérence et qui consiste à prendre l'ensemble des limites de suites convergentes. Il est possible de faire mieux en introduisant une structure à bornés sur l'adhérence. Soit en effet, plus généralement, E un espace bornologique convexe (ou espace à bornés) et F un sous-espace vectoriel de E. Pour tout disque borné B de E, on désigne par E_B le sous-espace de E engendré par B, muni de la jauge de B et par $\overline{F\cap E_B}$ l'adhérence dans l'espace semi-normé E_B du sous-espace $F\cap E_B$. Alors $\overline{F}$ désigne simplement la limite inductive dans la catégorie des espaces vectoriels bornologiques, lorsque B varie, des espaces semi-normés $\overline{F\cap E_B}$. L'ensemble $\overline{F}$ est la réunion des $\overline{F\cap E_B}$ et c'est bien l'adhérence au sens usuel. Dans le cas qui nous intéresse $\overline{F}$ est la limite inductive des $\overline{\mathcal{O}(\delta')\cap {}_N\mathcal{O}(\delta)}$.

On a en général des morphismes

$$F \to \overline{F} \to E ,$$

mais la structure de $\overline{F}$ n'est en général pas induite par E, sinon $\overline{F}$ serait fermé, ce qui n'est pas vrai pour tout sous-espace vectoriel F, même si $E = \mathcal{O}(\delta)$. Ce qui est important, en revanche, est que $\overline{F}$ soit complet si E l'est.

Il reste enfin à rappeler la définition du spectre $\Delta(z ; \overline{\mathcal{O}}(\delta'))$ de z dans $\mathcal{O}(\delta')$. Suivant L. Waelbroeck [5], étant donnée une algèbre complète commutative à unité A et un élément $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de A^n, on définit le spectre $\Delta(a ; A)$ de a comme l'ensemble des fonctions positives φ sur $\mathbb{C}^n$ telles que l'on puisse trouver pour tout point s de $\mathbb{C}^n$ des éléments $u_o(s)$, $u_1(s), \ldots,$ $u_n(s)$ de A vérifiant :

$$1 = \varphi(s)u_o(s) + (a_1 - s_1)u_1(s) + \ldots + (a_n - s_n)u_n(s) ,$$

les fonctions u_o, $u_1, \ldots, u_n$ étant de plus localement bornées et à croissance polynômiale dans A.

Etant donnée une fonction φ de $\Delta(a ; A)$, lipschitzienne et telle que $|z|\delta$ soit bornée (le spectre possède d'ailleurs une base de telles fonctions), le calcul symbolique est un morphisme d'algèbres complètes de $\mathcal{O}(\varphi)$ dans A envoyant 1 sur 1 et $z = (z_1, \ldots, z_n)$ sur $a = (a_1, \ldots, a_n)$: à la fonction f de $\mathcal{O}(\delta)$ on associe l'élément $f(a)$ de A. Pour construire ce morphisme, il suffit en fait d'avoir $u_o(s)$, $u_1(s), \ldots, u_n(s)$ avec les propriétés souhaitées **pour** $\varphi(s)>0$.

On peut maintenant énoncer :

THEOREME.- <u>Sous l'hypothèse que</u> $\delta'>0$ <u>est pseudo-convexe, les assertions</u> (1), (2), (3), (4) <u>sont équivalentes</u>.

3. Voyons d'abord que l'assertion (2) implique l'assertion (3) ; on va démontrer en réalité en intermédiaire une partie de l'assertion (4), à savoir, l'existence d'éléments $u_o(s)$, $u_1(s), \ldots, u_n(s)$ pour $\delta(s)>0$, avec les propriétés souhaitées.

Pour tout point s tel que $\delta'(s)>0$, désignons par ${}^s\mathfrak{J}$ l'idéal de $\mathcal{O}(\delta')$ des fonctions qui s'annulent au point s. Soit B un disque borné de $\mathcal{O}(\delta)$ contenant la fonction 1 et les f_α qui interviennent dans (2). Considérons, pour tout point s tel que $\delta(s)>0$, dans l'espace E_B, la distance $\delta_B(s)$ de la fonction 1 au sous-espace ${}^s\mathfrak{J} \cap E_B$. Par Hahn-Banach, il existe une forme linéaire μ de norme inférieure à 1 sur E_B, nulle sur ${}^s\mathfrak{J} \cap E_B$ et telle que $\mu(1) = \delta_B(s)$. On a alors successivement :

$\mu(f_\alpha) = \mu(f_\alpha(s)+f - f_\alpha(s)) = f_\alpha(s)\ \mu(1) = f_\alpha(s)\ \delta_B(s)$, et par suite $|f_\alpha(s)|\delta_B(s) \leqslant 1$. En prenant l'enveloppe supérieure sur α , il en résulte que $\delta_B(s) \leqslant \delta_1$ sur l'ouvert $\delta>0$. Par définition de $\delta_B(s)$, on peut donc trouver pour tout s tel que $\delta(s)>0$, une fonction $u_o(s)$ de B telle que $1 - 2\ \delta_1(s)\ u_o(s) \in {}^s\mathfrak{J}$. L'existence de $u_1(s), \ldots, u_n(s)$ résulte alors aussitôt du :

THEOREME.- <u>On suppose que l'ouvert</u> $\delta'>0$ <u>est pseudo-convexe. Si</u> $f \in \mathfrak{G}(\delta')$ <u>est telle que</u> $f(s) = 0$, <u>on peut écrire</u> $f = (z_1-s_1)\ u_1 + \ldots + (z_n-s_n)\ u_n$ <u>où les fonctions</u> $u_1, \ldots, u_n$ <u>sont dans</u> $\mathfrak{G}(\delta')$ <u>et restent dans un ensemble borné de</u> $\mathfrak{G}(\delta)$ <u>lorsque</u> f <u>varie dans un ensemble borné de</u> $\mathfrak{G}(\delta)$ <u>et</u> s <u>dans l'ensemble</u> $\delta'>0$.

Cet énoncé a l'avantage de ne faire appel à aucune hypothèse de convexité de δ par rapport à $\mathfrak{G}(\delta')$. Naturellement, s'y ramener ne fait que repousser la difficulté. La démonstration utilise les majorations a priori de L. Hörmander [4] pour la $\bar\partial$-cohomologie, par le biais d'un théorème de I. Cnop. Donnons simplement une idée de la méthode employée.

D'abord, si $\delta = \delta'$ et si $-\log \delta$ est plurisousharmonique, bien qu'il n'y ait plus de problème d'approximation, le théorème de décomposition existe. On utilise le fait, dû à I. Cnop, que $\delta \in \Delta(z\ ;\ \mathfrak{G}(\delta))$ et on applique le calcul symbolique modulo un idéal complet. Pour obtenir la version citée, on remarque également que l'on peut toujours se ramener au cas où les fonctions $u_o, u_1, \ldots, u_n$ sont bornées dans l'algèbre.

Dans le cas général, la démonstration est plus compliquée : on introduit pour toute fonction f de $\mathfrak{G}(\delta')$, la régularisée lipschitzienne de $1/|f|$ prolongée par zéro hors de l'ouvert $\delta'>0$. On montre qu'à un facteur trivial près, si δ_f est cette régularisée, alors $-\log \delta_f$ est p.s.h., et on applique ce qui précède à δ_f . Ensuite, on fait varier f dans $\mathfrak{G}(\delta')$ de manière qu'elle reste bornée dans $\mathfrak{G}(\delta)$.

Cette partie de l'assertion (4) étant établie, on démontre l'égalité $\overline{\mathfrak{G}}(\delta') = \mathfrak{G}(\delta)$ en construisant un morphisme $\mathfrak{G}(\delta) \to \overline{\mathfrak{G}}(\delta')$ inverse du morphisme naturel $\overline{\mathfrak{G}}(\delta') \to \mathfrak{G}(\delta)$. Ce morphisme est précisément donné par le calcul symbolique de L. Waelbroeck.

Le fait que $-\log \delta_1$ soit p.s.h. étant immédiat, l'assertion (3) est donc établie.

Une autre démonstration de la densité $\overline{\mathfrak{G}}(\delta') = \mathfrak{G}(\delta)$ repose sur une méthode de B.A. Taylor, qui utilise les mêmes majorations de L. Hörmander.

4. L'assertion (3) implique l'assertion (4) : c'est une conséquence immédiate de la propriété $\delta \in \Delta(z\ ;\ \mathcal{O}(\delta))$ déjà citée.

5. Enfin l'assertion (4) implique l'assertion (1). D'abord, le fait que $\delta \in \Delta(z\ ;\ \overline{\mathcal{O}}(\delta'))$ implique l'existence de $u_o(s)$, $u_1(s)$,..., $u_n(s)$ dans $\overline{\mathcal{O}}(\delta')$ vérifiant :

$$1 = \delta(s)\, u_o(s) + (z_1 - s_1)\, u_1(s) + \ldots + (z_n - s_n)\, u_n(s)\ ,$$

et on peut supposer les fonctions u_o ,..., u_n bornées dans $\overline{\mathcal{O}}(\delta')$. Soit B un disque borné de $\mathcal{O}(\delta)$ tel que $u_o(s),\ldots, u_n(s)$ soient dans B et adhérent à $\mathcal{O}(\delta')$ au sens de E_B . Alors $\delta(s)$ majore la distance dans E_B de 1 à $\mathrm{idl}(z - s\ ;\ \mathcal{O}(\delta') \cap E_B)$, donc celle dans E_{B_1} à ${}^{s}\mathfrak{I} \cap E_{B_1}$, pour un disque borné B_1 contenant B et les ensembles $\delta_o(s)(z_i - s_i)\, B$, et : $\delta(s) \geqslant \delta_{B_1}(s)$. Si on pose, pour $\delta'(\zeta)>0$, $1/\delta_1(\zeta) = \sup\limits_{f \in \mathcal{O}(\delta') \cap B_1} |f(\zeta)|$,

la jauge de B_1 majore la semi-norme $f \to \sup\limits_{\delta'(\zeta)>0} |f(\zeta)|\ \delta_1(\zeta)$ sur $\mathcal{O}(\delta')$.
Par suite, pour $\delta'(s)>0$:

$$\delta_B(s) \geqslant \inf_{f \in {}^{s}\mathfrak{I}}\ \sup_{\delta'(\zeta)>0} |1 - f(\zeta)|\ \delta_1(\zeta) \geqslant \delta_1(s)\ ,$$

ce qui prouve que $\delta_1(s) \leqslant \delta(s)$ et donc que δ et δ_1 sont équivalentes sur l'ouvert $\delta'>0$.

<u>Remarque :</u> Il est possible de considérer $\mathcal{O}(\delta)$ comme un espace localement convexe en prenant simplement la topologie localement limite inductive des espaces de Banach ${}_{N}\mathcal{O}(\delta)$; il résulte du fait que $\mathcal{O}(\delta)$ est un espace de Silva, que la bornologie associée à cette topologie coïncide avec celle de départ. De cette manière, le point de vue topologique ne fait en apparence rien perdre. Toutefois, outre le fait que les voisinages de zéro de $\mathcal{O}(\delta)$ sont moins naturels que les parties bornées, d'une part ce point de vue est inadapté à la théorie spectrale, et d'autre part l'adhérence de $\mathcal{O}(\delta')$ dans $\mathcal{O}(\delta)$ pour la topologie coïncide avec la fermeture pour la bornologie. La densité topologique est ainsi plus faible et ne permet pas de boucler le cycle de propriétés équivalentes.

Ce qui précède est tiré du cours Peccot que j'ai donné en 1971 au Collège de France.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CNOP (I.). - Un problème de spectre dans certaines algèbres de fonctions holomorphes à croissance tempérée, C. R. Acad. Sc. Paris, A. 270, 1970, 1690-1691.

[2] CNOP (I.) . - A theorem concerning holomorphic functions with bounded growth (thesis).

[3] HÖRMANDER (L.). - Generators for some rings of analytic functions, Bull. Am. Math. Soc., 73, p. 943-949, 1967.

[4] HÖRMANDER (L.). - L^2- estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator, Acta Math., 113, p. 89-152, 1965.

[5] WAELBROECK (L.). - Etude spectrale des algèbres complètes, Mém. Cl. Sc. Acad. Roy. Belg., 31, fasc. 7, 1960.

[6] WAELBROECK (L.). - Lectures in spectral theory, Dep. Math. Univ. Yale, 1963.

12, rue Michel Ney
54 - NANCY
(France)