MÉMOIRES DE LA S. M. F.

BERNARD HANOUZET

Problèmes aux limites elliptiques dans des ouverts non bornés

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 191-199
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__191_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 191-199.

PROBLÈMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES DANS DES OUVERTS NON BORNÉS

par

Bernard HANOUZET

On se propose de résoudre le problème de Dirichlet pour des opérateurs elliptiques définis dans des ouverts non bornés. Les ouverts considérés sont de deux types :

(1) ouvert complémentaire de l'adhérence d'un ouvert borné très régulier (ou éventuellement $\mathbb{R}^n$) .

(2) demi espace : $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = y > 0\}$.

Les opérateurs considérés sont elliptiques et peuvent être dégénérés à l'infini, c'est-à-dire que les coefficients de la partie principale peuvent tendre vers 0 ou vers l'infini quand $\rho^2(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ tend vers l'infini ; par exemple, on étudiera :

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^n D_i((1+\rho^2)^\alpha D_i u) + (1+\rho^2)^{\alpha-1} u = f \\ \gamma_o u = g \quad . \end{cases}$$

Quand la frontière de l'ouvert est une variété compacte, la difficulté principale est le comportement des solutions à l'infini. Dans le cas de $\mathbb{R}^n_+$, on aura de plus à étudier les traces sur un hyperplan pour donner un sens aux conditions aux limites.

Parmi les travaux effectués dans la même direction, nous pouvons citer ceux de J. BARROS-NETTO [1] qui étudie dans un demi espace des opérateurs elliptiques "homogènes" :

$$\sum_{|\lambda| = |\mu| = m} D^\lambda(a_{\lambda\mu} D^\mu) \; .$$

Citons aussi L.D. KUDRJAVECV [2] qui étudie des opérateurs dont les coefficients de la partie principale tendent vers zéro à l'infini.

Le plan est le suivant :

I. - Définition et étude d'espaces de Sobolev avec poids, le poids étant fonction de la distance à l'origine.

II. - Etude des traces sur un hyperplan.

III. - Problème de Dirichlet inhomogène dans des ouverts du type (1) ou (2).

Certains des résultats énoncés ici sont annoncés dans [3]. Ils feront l'objet d'une publication plus détaillée ultérieure.

I - Espaces de Sobolev avec poids.

1°)

DEFINITION 1. - Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, $1<p<\infty$, $m \in \mathbb{N}$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, on pose :
$W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \forall \lambda \in \mathbb{N}^n , |\lambda| \leqslant m , (1+\rho^2)^{\frac{\alpha+|\lambda|-m}{2}} D^\lambda u \in L^p(\Omega)\}$.

Cette définition n'a d'intérêt que si Ω est un ouvert non borné (sinon, quel que soit α , l'espace coïncide avec $W^{m,p}(\Omega)$, espace de Sobolev habituel). $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme naturelle :

$$|u|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\lambda| \leqslant m} |(1+\rho^2)^{\frac{\alpha+|\lambda|-m}{2}} D^\lambda u|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}} .$$

Pour $p=2$, c'est un espace de Hilbert que nous notons $W_\alpha^m(\Omega)$.
On a immédiatement :

1) $W_o^{o,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$

2) $W_\alpha^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\Omega) \ldots \hookrightarrow W_{\alpha-m}^{o,p}(\Omega)$

3) $W_\alpha^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{loc}^{m,p}(\Omega)$.

On utilise cette dernière propriété pour démontrer un résultat de densité des fonctions régulières :

PROPOSITION 1. - $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$.

2°) Comparons $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$.

PROPOSITION 2. - $W^{m,p}_{\alpha}(\Omega)$ coïncide algébriquement et topologiquement avec l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

Ce résultat est immédiat si Ω est du type (1). Si $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ la méthode de Babich permet de construire un opérateur de prolongement linéaire continu de $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

Comme $W^{m,p}_{\alpha}(\Omega)$ coïncide localement avec $W^{m,p}(\Omega)$, pour $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $m \geqslant 1$, $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}_{\alpha}(\Omega)$. On introduit donc :

DEFINITION 2. - Pour $m \in \mathbb{N}$, $1<p<\infty$, $a \in \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}_{\alpha}(\Omega)$ désigne l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}_{\alpha}(\Omega)$.

On note

$$W^{-m,p'}_{-\alpha}(\Omega) = (\overset{\circ}{W}{}^{m,p}_{\alpha}(\Omega))' \ , \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \ .$$

Toute distribution $T \in W^{-m,p'}_{-\alpha}(\Omega)$ peut s'écrire

$$T = \sum_{|\lambda| \leqslant m} D^{\lambda} f_{\lambda}$$

où $f_{\lambda} \in W^{o,p}_{-\alpha+m-|\lambda|}(\Omega)$.

3°) Comparons $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}_{o}(\Omega)$ au complété de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme de Dirichlet d'ordre m (espace noté $D^{m,p}(\Omega)$) .

THEOREME 1. - Pour $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, les espaces $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}_{o}(\Omega)$ et $D^{m,p}(\Omega)$ coïncident algébriquement et topologiquement.

Démonstration : Pour $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a évidemment :

$$|u|_{D^{m,p}} = \Big(\sum_{|\lambda| = m} |D^{\lambda} u|^{p}_{L^p} \Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant |u|_{\overset{\circ}{W}{}^{m,p}_{o}(\Omega)} \ .$$

Réciproquement, la condition $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, permet de démontrer en utilisant l'inégalité de Hardy, que pour $|\lambda| < m$, on a :

$$|(1+\rho^2)^{\frac{|\lambda|-m}{2}} D^{\lambda} u|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \ |u|_{D^{m,p}(\Omega)} \ .$$

Notons d'autre part que l'application :

$$u \to (1+\rho^2)^{\frac{\beta}{2}} u$$

est un isomorphisme de $W^{m,p}_{\alpha}(\Omega)$ sur $W^{m,p}_{\alpha-\beta}(\Omega)$.

Par suite, pour $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, les expressions

$$\Big(\sum_{|\lambda| \leqslant m} |(1+\rho^2)^{\frac{\alpha-m+|\lambda|}{2}} D^{\lambda}u|^p_{L^p}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Big(\sum_{|\lambda| = m} |D^{\lambda}(1+\rho^2)^{\frac{\beta}{2}} u|^p_{L^p}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

définissent sur $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}_{\alpha}(\Omega)$ des normes équivalentes.

Nous pouvons remarquer que l'inégalité de Hardy a joué ici le rôle de l'inégalité de Poincaré valable pour un ouvert borné dans une direction.

II - Etude des traces.

Si Ω est du type (1), l'étude des traces est classique.
Pour $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, les traces de $u \in W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$ sur $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ sont localement dans $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Pi)$.

Il reste à étudier le comportement à l'infini des traces ; nous devons pour cela introduire de nouveaux espaces.

DEFINITION 3. - Pour $s \in \mathbb{R}_+$, $1 < p < \infty$, on pose :

$$W^{s,p}_{o}(\mathbb{R}^n) = \{ u \in W^{[s],p}_{[s]-s}(\mathbb{R}^n)^{(*)} \mid$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n \ , \ |\lambda| = [s] \ \text{et} \ \forall i = 1,\dots,n :$$

$$\int_0^{+\infty} t^{-1-(s-[s])p} \, dt \int_{\mathbb{R}^n} |D^{\lambda}u(x+te_i) - D^{\lambda}u(x)|^p \, dx < \infty \}^{(**)}$$

et plus généralement

$$W^{s,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) = \{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid (1+\rho^2)^{\frac{\alpha}{2}} u \in W^{s,p}_{o}(\mathbb{R}^n)\} .$$

(*) $[s]$ désigne la partie entière de s .
(**) $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Enonçons le résultat principal :

THEOREME 2. - <u>Il existe une application linéaire continue</u> $\gamma = (\gamma_o, \dots, \gamma_{m-1})$ <u>de</u> $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ <u>dans</u> $\prod_{j=0}^{m-1} W_\alpha^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Pi)$ <u>telle que</u> :

A) <u>Pour</u> $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, $\gamma u = \{ u(x', o), \frac{\partial u}{\partial y}(x',o), \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial y^{m-1}}(x',o)\}$.

B) γ <u>est surjective.</u>

C) $\gamma^{-1}(o) = \overset{o}{W}{}_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$.

<u>Démonstration</u> : Notons tout d'abord que les traces sur Π de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ ne dépendent pas du comportement à l'infini dans la direction x_n . Plus précisément, si on pose :

$$X_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n) =' \{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n) \mid \forall \lambda \in \mathbb{N}^n, \ |\lambda| \leqslant m \ , \ (1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{\alpha-m+|\lambda|}{2}} D^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}_+^n)\}$$

où $\rho_{n-1}^2(x') = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$ on a :

PROPOSITION 3. - <u>Les espaces</u> $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ <u>et</u> $X_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ <u>ont les mêmes traces sur l'hyperplan</u> $\Pi =' \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = y = o\}$.

On vérifie ce résultat grâce à une troncature d'un type particulier : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ telle que $\varphi(t) = 1$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\varphi(t) = 0$ pour $t \geqslant 2$ et posons :

$$\psi(x) = \varphi((1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-\frac{1}{2}} y)$$

pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ on a évidemment $\gamma(\psi u) = \gamma u$ et on vérifie que l'application

$$u \to \psi u$$

est linéaire continue de $X_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ et de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $X_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$.
Il suffit donc de vérifier le théorème pour $X_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ et comme l'application

$$u \to (1+\rho_{n-1}^2)^\alpha u$$

est un isomorphisme de $X_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ sur $X_o^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$, il suffit de vérifier que le théorème pour $\alpha = o$ c'est-à-dire de montrer que :

<u>il existe une application linéaire continue</u>

$$\gamma = (\gamma_o, \dots, \gamma_{m-1}) \text{ de } X_o^{m,p}(\mathbb{R}_+^n) \text{ sur } \prod_{j=o}^{m-1} W_o^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$$

<u>vérifiant</u> :

A) Pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, $\gamma u = {}' \{ u(x',o), \ldots, \dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial y^{m-1}} (x',o) \}$.

B) γ est surjective.

C) $\gamma^{-1}(o) = \overset{o}{X}{}^{m,p}_{o}(\mathbb{R}^n_+)$.

Les méthodes basées sur la théorie des semi-groupes (voir Lions [4]) ne semblent pas pouvoir s'appliquer directement. On donne donc une démonstration directe de ce théorème, en particulier on construit explicitement des relèvements pour démontrer la partie B.

Pour la démonstration des points A et C, on adapte les méthodes usuelles. Pour le point B, il suffit de construire un relèvement pour chaque composante. On combine un relèvement construit par noyau régularisant (voir [5] par exemple) avec une troncature.

Soient $R \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{R}(x')\, dx' = \int_{|s|<1} \mathbb{R}(s)\, ds = \frac{1}{j!}$$

et $\varphi \in \mathcal{D}\,([o, \frac{1}{2(n-1)}[)$ telle que $\varphi(o) = 1$.

Pour $u \in W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$ on vérifie que

$$v(x',y) = \varphi((1+\rho^2_{n-1}(x'))^{-\frac{1}{2}} y)\, y^j \int_{|s|<1} R(s)\, u(sy+x')\, ds$$

convient.

III - Problèmes aux limites.

On se propose d'étudier certains problèmes de Dirichlet dans des ouverts du type (1) et (2). On ne s'intéresse qu'à des problèmes posés par la méthode variationnelle, l'essentiel des résultats porte sur l'étude de la régularité de solutions. Ces résultats sont obtenus en approchant le problème dans l'ouvert par une famille de problèmes tronqués et en démontrant des inégalités à priori sur les solutions de ces problèmes tronqués.

Soit $a(u,v)$ une forme intégrodifférentielle définie sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ par

$$(1) \qquad a(u,v) = \sum_{\substack{|i|\leqslant 1\\ |j|\leqslant 1}} \int_{\Omega} (1+\rho^2)^{\frac{\alpha+|i|+|j|}{2}} a_{ij}(x)\, D^i u\, \overline{D^j v}\, dx$$

avec

(2) $a_{ij} \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$

(3) a est $\overset{o}{W}{}^1_{\alpha+1}(\Omega)$-coercitive .

Par le théorème de Lax Milgramm, on obtient alors que l'opérateur

(4) $$A(x,D) = \sum_{\substack{|i|\leq 1\\|j|\leq 1}} (-1)^{|j|}\, D^j\big((1+\rho^2)^{\frac{\alpha+|i|+|j|}{2}}\, a_{ij}\, D^i\big)$$

est un isomorphisme de $\overset{o}{W}{}^1_{\alpha+1}(\Omega)$ sur $W^{-1}_{-\alpha-1}(\Omega)$.

On suppose de plus, que :

(5) $\forall \lambda \in \mathbb{N}^n$, $\exists\, C > o \mid\ |D^\lambda a_{ij}| \leq (1+\rho^2)^{-\frac{|\lambda|}{2}}$.

On obtient alors :

THEOREME 3. - <u>Si</u> Ω <u>est du type</u> (1), <u>pour tout</u> $k \geq 1$, <u>l'opérateur</u> $(A(x,D), \gamma_o)$ <u>est un isomorphisme de</u> $W^k_{k+\alpha}(\Omega)$ <u>sur</u> $W^{k-2}_{k-2-\alpha}(\Omega) \times H^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Si on ajoute de plus l'hypothèse :

(6) $\exists\, \gamma > o \mid \forall x \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$, $i = j = (o,\dots, o,1)$, $|a_{ij}(x)| \geq \gamma$.

On obtient alors :

THEOREME 4. - <u>Dans</u> $\mathbb{R}^n_+$, <u>pour tout</u> $k \geq 1$, <u>l'opérateur</u> $(A(x,D), \gamma_o)$ <u>est un isomorphisme de</u> $W^k_{k+\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$ <u>sur</u> $W^{k-2}_{k-2-\alpha}(\mathbb{R}^n_+) \times W^{k-\frac{1}{2}}_{k+\alpha}(\Gamma)$.

Ces théorèmes se généralisent à des opérateurs d'ordre $2m$.

<u>Remarques sur l'hypothèse</u> (3) :

1) Pour que (3) soit réalisée, **il suffit** que $\mathrm{Re}\, a_{oo}$ soit suffisamment grand et

(7) $$\exists\, \delta > o \mid \forall \xi \in \mathbb{C}^n ,\ \forall x \in \overline{\Omega} ,\quad \mathrm{Re} \sum_{|i|=|j|=1} a_{ij}(x)\, \xi^i\, \overline{\xi^j} \geq \delta\, |\xi|^2$$

2) En dimension $n \geq 3$, l'hypothèse (7) suffit pour assurer la coercivité d'un opérateur homogène pour $\alpha = -1$, c'est-à-dire la $\overset{o}{W}{}^1_o(\Omega)$ coercivité (cf. théorème 1). Pour le laplacien, on obtient donc :

l'opérateur (Δ, γ_o) est un isomorphisme de

$$W^k_{k-1}(\Omega) \text{ sur } W^{k-2}_{k-3}(\Omega) \times H^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma), \text{ (resp. de}$$

$$W^k_{k-1}(\mathbb{R}^n_+) \text{ sur } W^{k-2}_{k-3}(\mathbb{R}^n_+) \times W^{k-\frac{1}{2}}_{k-1}(\Gamma)) .$$

3) Supposons A donné avec l'hypothèse (7) ; soit $\beta \in \mathbb{R}$, il existe une constante a_o telle que, pour $a \geqslant a_o$, l'opérateur $A + a(1+\rho^2)^\alpha I$ est un isomorphisme de $W^k_{k+\alpha+\beta}(\Omega)$ sur $W^{k-2}_{k-2-\alpha+\beta}(\Omega) \times H^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, (resp. $W^k_{k+\alpha+\beta}(\mathbb{R}^n_+)$ sur $W^{k-2}_{k-2-\alpha+\beta}(\mathbb{R}^n_+) \times W^{k-\frac{1}{2}}_{k+\alpha+\beta}(\Gamma))$.

Ce dernier résultat peut s'appliquer par exemple à des données à croissance polynomiale.

Donnons une idée de la démonstration dans le cas $\alpha = o$, $\Omega = \mathbb{R}^n$. On doit montrer que A est un isomorphisme de $W^k_k(\mathbb{R}^n)$ sur $W^{k-2}_{k-2}(\mathbb{R}^n)$. On montre d'abord que $A(W^2_2(\mathbb{R}^n)) = L^2(\mathbb{R}^n)$. Si $u \in W^1_1(\mathbb{R}^n)$ et $Au \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $u \in H^2_{loc}(R^n)$; on utilise ce résultat en introduisant un problème tronqué. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $o \leqslant \psi \leqslant 1$, telle que

$$\psi(x) = 1 \quad \text{pour} \quad \rho(x) \leqslant 1$$
$$\psi(x) = o \quad \text{pour} \quad \rho(x) \geqslant 2 \quad .$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\psi_k(x) = \psi(\frac{x}{k})$ et $u_k = \psi_k u$, et on introduit :

$$(p_k) \ Au_k = \psi_k \, Au + [A, \psi_k] \, u = g_k \ .$$

On vérifie les inégalités à priori :

$$\exists \, C>o \, , \ \forall k \in \mathbb{N} \, , \ |g_k|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \ \{|u|_{W^1_1(\mathbb{R}^n)} + |Au|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \, , \ |(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}} Du_k|_{W^1_1(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \ \{|u|_{W^1_1(\mathbb{R}^n)} + |Au|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\} \ .$$

On obtient le résultat pour $k=2$ par argument de compacité faible de la boule unité de $W^1_1(\mathbb{R}^n)$.

La démonstration se termine ensuite par récurrence.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARROS-NETO (J.). - Inhomogeneous boundary value problems in a half space. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 19 (1965), 331-365.

[2] KUDRJAVCEV (L. D.). - Imbedding theorems for functions defined on unbounded regions. Soviet Math. Dokl., 4 (1963), 1715-1717.

[3] HANOUZET (B.). - Espaces de Sobolev avec poids et interpolation. C. R. Acad. Sc. Paris, 271, (1970), 26-29.

[4] LIONS (J. L.). - Théorèmes de traces et d'interpolation. Math. Annalen, 151 (1963), 42-56.

[5] NECAS (J.). - Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Paris (1967).

Département de Mathématiques
et Informatique
Université de Rennes
Avenue du Général Leclerc
35 - RENNES (France)