Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 136 (2016), 157–174
DOI 10.4171/RSMUP/136-11

Système d'équations décrivant certains mouvements stationnaires en une dimension d'un gaz visqueux et calorifère

Asma Ayachi (∗) – Mohamed Zine Aissaoui (∗∗) –
Hamza Guebbaï (∗∗∗) – Hisao Fujita Yashima (∗∗)

Résumé – Dans ce travail on considère le mouvement stationnaire, en une dimension, d'un gaz visqueux et calorifère avec une vitesse qui ne tend pas vers 0. Utilisant la petitesse des coefficients de viscosité et de thermoconductibilité – en utilisant l'idée de la perturbation singulière –, on démontre l'existence d'une solution dans le voisinage de la solution de l'équation sans viscosité et sans thermoconductibilité. On donne un exemple numérique qui montre la petitesse entre la solution avec viscosité et celle sans viscosité.

Mathematics Subject Classification (2010). Primary: 76N10; Secondary: 34B15, 76N15.

Keywords. Viscous heat-conductive gas, stationary solution, smallness of viscosity.

(∗) *Indirizzo dell'A.*: Laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation, Université 8 mai 1945, BP 401, Guelma, Algérie
E-mail: ayachi.asma87@gmail.com

(∗∗) *Indirizzo dell'A.*: Laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation, Université 8 mai 1945, BP 401, Guelma, Algérie
E-mail: aissaouizine@gmail.com

(∗∗∗) *Indirizzo dell'A.*: Laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation, Université 8 mai 1945, BP 401, Guelma, Algérie
E-mail: guebaihamza@yahoo.fr

(∗∗) *Indirizzo dell'A.*: Laboratoire de Mathématiques appliquées et de modélisation, Université 8 mai 1945, BP 401, Guelma, Algérie
E-mail: hisao.fujitayashima@unito.it

1. Introduction

Comme il est bien connu (voir par exemple [9] et [11]), pour les gaz habituels l'effet de la viscosité et de la conductibilité thermique est beaucoup plus petit que l'effet du gradient de la pression. Du point de vue physique, ou intuitivement, ça signifie que, en absence de turbulence, l'écoulement réel d'un gaz ne doit pas être éloigné de l'écoulement calculé sans viscosité et sans thermoconductibilité.

Du point de vue mathématique, la petitesse des coefficients de viscosité et de conductibilité thermique peut rendre difficile l'utilisation de la méthode habituelle basée sur les opérateurs elliptiques dûs à la viscosité et à la thermoconductibilité. En effet, par exemple pour le problème du mouvement stationnaire, dans les travaux mathématiques les auteurs exigeaient très souvent que toutes les données, y compris la vitesse, fussent très petites (voir [4], [10], [2], ect. . .). Il est vrai que dans le cas d'une seule dimension spatiale il y a une méthode puissante, celle des coordonnées lagrangiennes, dont l'utilisation a conduit à des résultats sur l'existence et l'unicité de la solution globale avec les conditions aux limites de la frontière libre ([7]) et avec celles de la frontière fixée et rigide ([8], voir aussi [1]). Mais l'application de cette méthode a été limitée, au moins pour le moment, au cas où il n'y a pas d'entrée ni de sortie du gaz du domaine considéré (qui n'est pas nécessairement fixé).

Si on considère l'écoulement constant d'un gaz dans une conduite et si on le décrit dans les coordonnées eulériennes, on a naturellement des équations indépendantes du temps t ; nous allons les rappeler *équations du mouvement stationnaire*, car les fonctions qui interviennent ne dépendent pas de t, même si la vitesse ne sera pas proche de 0. L'écoulement constant d'un gaz se considère non seulement dans une conduite, mais aussi un écoulement presque constant de l'air qui passe sur un terrain avec des reliefs nous intéresse (voir par exemple [3]) et peut être décrit, dans la première approximation, par des équations du mouvement stationnaire d'un gaz. Or les équations stationnaires de l'écoulement d'un gaz avec de petits coefficients de viscosité et de conductibilité thermique a une structure similaire aux problèmes étudiés dans le cadre de la théorie des perturbations singulières (voir [5], Chapitre V). En effet c'est dans cette structure que nous allons étudier le système d'équations d'un gaz. Plus précisément, dans le présent travail, en nous basant sur les propriétés d'une classe de systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires du second ordre, nous allons montrer que, pour l'équation monodimensionnelle du mouvement stationnaire d'un gaz visqueux et calorifère, la petitesse des coefficients de viscosité et de thermoconductibilité nous permet de trouver une solution avec la condition de l'entrée et de la sortie du domaine du gaz dans un voisinage de la solution de l'équation sans viscosité et thermoconductibilité. Or, même si l'idée générale de la théorie des perturbations singulières reste fondamentale, dans l'étude d'un cas concret, nous avons besoin des estimations spécifiques que nous devons obtenir dans les conditions spécifiques du problème. C'est ainsi que dans la suite nos raisonnements seront exposés d'une manière autonome sans faire recours explicitement à la théorie générale.

Pour mettre en évidence la petitesse de l'écart de la solution de l'équation avec la viscosité de celle de l'équation sans viscosité, dans le dernier paragraphe de ce travail nous présentons une comparaison numérique des deux solutions.

2. Position du problème pour une classe d'équations différentielles du second ordre

Dans la première partie, on va considérer l'équation différentielle ordinaire

$$\varepsilon u''(x) + \beta(x, u(x), u'(x)) = g(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

pour une fonction inconnue $u(x) \in \mathbb{R}^n$ avec les conditions aux limites

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

Dans (1), ε est une constante telle que $0 < \varepsilon \leq 1$ et $g(x)$ est une fonction donnée à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Pour la fonction $\beta(x, u, u') \colon [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nous supposons qu'elle est continûment dérivable par rapport à u et à u' et que

$$\beta(x, 0, 0) = 0; \tag{3}$$

cette dernière condition ne restreint pas la généralité; en effet, si $\beta(x, 0, 0) \neq 0$, alors il nous suffit de considérer $\beta(x, u, u') - \beta(x, 0, 0)$ au lieu de $\beta(x, u, u')$ et $g(x) - \beta(x, 0, 0)$ au lieu de $g(x)$ dans (1).

Compte tenu des conditions sur $\beta(x, u, u')$, nous réécrivons l'équation (1) dans la forme

$$\varepsilon u''(x) + B(x)u'(x) + C(x)u(x) = g(x) - R(x, u(x), u'(x)), \tag{4}$$

où

$$B(x) = (B_{ij}(x)), \quad B_{ij}(x) = \frac{\partial \beta_i(x, u, u')}{\partial u'_j}\Big|_{u=0, u'=0},$$

$$C(x) = (C_{ij}(x)), \quad C_{ij}(x) = \frac{\partial \beta_i(x, u, u')}{\partial u_j}\Big|_{u=0, u'=0},$$

$$R_i(x,u(x),u'(x)) = \beta_i(x,u(x),u'(x)) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\beta_i(x,u,u')}{\partial u'_j}\Big|_{u=0,u'=0} u'_j(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\beta_i(x,u,u')}{\partial u_j}\Big|_{u=0,u'=0} u_j(x).$$

Pour les matrices $B(x)$ et $C(x)$ nous supposons qu'il existe une matrice définie positive $D(x)$, une matrice Γ indépendante de $x \in [0,1]$ et une constante $K_0 > 0$ tels que

(5) $$D(x)\widetilde{B}(x) \text{ soit symétrique pour tout } x \in [0,1],$$

(6) $$u \cdot D(x)\widetilde{C}(x)u \le -K_0|u|^2 \quad \text{pour tous } u \in \mathbb{R}^n,\ x \in [0,1],$$

(7) $$\varepsilon\|D'\|^2_{L^\infty} < 4m_D\Big(K_0 - \|D\widetilde{B}\|_{L^\infty}\|E'\|_{L^\infty} - \frac{1}{2}\max_k \|\lambda'_k\|_{L^\infty}\Big),$$

où

- $m_D = \inf\{{}^t u D u \mid u \in \mathbb{R}^n,\ |u| = 1\}$,
- $\widetilde{B}(x) = B(x) - 2\varepsilon\Gamma$,
- $\widetilde{C}(x) = C(x) - B(x)\Gamma + \varepsilon\Gamma^2$,
- λ_k, $k = 1,\dots,n$, sont les valeurs propres de $D(x)\widetilde{B}(x)$,
- E est une matrice unitaire telle que $ED\widetilde{B}E^{-1}$ soit une matrice diagonale;

ici et dans la suite on désigne par ${}^tA$ la matrice transposée de A, de sorte que ${}^tu$ sera le vecteur ligne u.

D'autre part pour les fonctions $g(x)$ et $R(x,u,u')$ on suppose que

(i) il existe un $R_0 > 0$ tel que, si $|u| \le R_0$, alors on ait

(8) $$|R(x,u,u')| \le c_R(|u|^2 + |u||u'| + \varepsilon|u'|^2) \quad \text{pour tous } x \in [0,1],$$

où c_R est une constante indépendante de $x \in [0,1]$;

(ii) il existe $R_1 > 0$ tel que l'application $R(\cdot,u,u')\colon H^1_0 \to H^{-1}$ soit continue dans l'ensemble

$$\{u \in H^1_0 \mid \|u\|_{H^1_0} \le R_1\};$$

(iii) $g \in L^2(0,1;\mathbb{R}^n)$.

Avant d'entamer l'étude de l'équation (4), nous la transformons en une équation pour la fonction inconnue

$$\tilde{u}(x) = e^{x\Gamma}u(x) \quad \Big(e^{x\Gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k\Gamma^k}{k!}\Big).$$

En effet, en utilisant les notations $\widetilde{B}(x)$ et $\widetilde{C}(x)$ introduites ci-dessus, l'équation (4) se tranforme en

$$\varepsilon\tilde{u}''(x) + \widetilde{B}(x)\tilde{u}'(x) + \widetilde{C}(x)\tilde{u}(x) = \tilde{g}(x) - \widetilde{R}(x,\tilde{u},\tilde{u}'), \tag{9}$$

où

$$\tilde{g}(x) = e^{x\Gamma}g(x), \quad \widetilde{R}(x,\tilde{u},\tilde{u}') = e^{x\Gamma}R(x,u,u').$$

La condition (2) se transforme évidemment en

$$\tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0. \tag{10}$$

Il est clair que l'existence d'une solution $\tilde{u}(x)$ de l'équation (9) avec la condition (10) équivaut à celle d'une solution $u(x)$ de l'équation (4) avec la condition (2). Pour cette raison, pour simplifier les notations, nous allons écrire (9) sans « $\tilde{}$ », c'est-à-dire dans la forme

$$\varepsilon u''(x) + B(x)u'(x) + C(x)u(x) = g(x) - R(x,u(x),u'(x)), \tag{11}$$

sous les conditions

$$D(x)B(x) \text{ soit symétrique pour tout } x \in [0,1], \tag{12}$$

$$u \cdot D(x)C(x)u \leq -K_0|u|^2 \quad \text{pour tous } u \in \mathbb{R}^n,\ x \in [0,1], \tag{13}$$

$$\varepsilon\|D'\|^2_{L^\infty} < 4m_D\Big(K_0 - \|DB\|_{L^\infty}\|E'\|_{L^\infty} - \frac{1}{2}\max_k\|\lambda_k'\|_{L^\infty}\Big). \tag{14}$$

Les hypothèses (i)–(iii) sur $g(x)$ et $R(x,u,u')$ restent invariantes.

3. Equation linéarisée et estimations de sa solution

On considère d'abord l'équation linéarisée de (11)

$$\varepsilon u''(x) + B(x)u'(x) + C(x)u(x) = \gamma(x), \quad 0 < x < 1, \tag{15}$$

avec les conditions aux limites

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{16}$$

où γ est une fonction appartenant à la classe $L^2(0,1;\mathbb{R}^n)$.

On rappelle en premier lieu l'existence et l'unicité de la solution du problème (15)–(16) dans $H^1_0(0,1;\mathbb{R}^n)$.

Lemme 3.1. *Le problème* (15)–(16) *admet une solution* $u \in H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$ *et une seule et on a*

$$\varepsilon\alpha_1\|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \le c_1\|\gamma\|_{L^2}^2, \tag{17}$$

où α_1 *et* c_1 *sont deux constantes strictement positives indépendantes de* ε

Démonstration. Comme DB est une matrice symétrique (voir (12)), il existe une matrice unitaire E telle que $EDBE^{-1}$ soit une matrice diagonale, dont nous désignons par $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les éléments diagonaux ; on a donc

$$\begin{aligned}{}^t uDBu' &= {}^t(Eu)EDBE^{-1}(Eu)' - {}^t uDBE^{-1}E'u\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dx}(\lambda_k v_k^2) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k' v_k^2 - {}^t uDBE^{-1}E'u,\end{aligned}$$

où $v_k = (Eu)_k$. Cela étant, en multipliant l'équation (15) par ${}^t uD$ et en l'intégrant sur $[0,1]$ avec l'intégration par partie là où elle est utile, on obtient

$$\begin{aligned}&-\varepsilon\int_0^1 ({}^t u)'Du'dx - \varepsilon\int_0^1 {}^t uD'u'dx - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\lambda_k'(Eu)_k^2dx\\ &\qquad - \int_0^1 {}^t uDBE^{-1}E'udx + \int_0^1 {}^t uDCudx\\ &= \int_0^1 {}^t uD\gamma dx;\end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}&\varepsilon m_D\|u'\|_{L^2}^2 - \varepsilon\|D'\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|u'\|_{L^2}\\ &\qquad + \Big(K_0 - \frac{1}{2}\max_k\|\lambda_k'\|_{L^\infty} - \|DB\|_{L^\infty}\|E'\|_{L^\infty}\Big)\|u\|_{L^2}^2\\ &\le \|D\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|\gamma\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{18}$$

Or, d'après (14) il existe un nombre $0 < \beta \le 1$ tel que

$$\varepsilon\|D'\|_{L^\infty}^2 = 4(1-\beta)m_D\Big(K_0 - \frac{1}{2}\max_k\|\lambda_k'\|_{L^\infty} - \|DB\|_{L^\infty}\|E'\|_{L^\infty}\Big),$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}&\varepsilon\|D'\|_{L^\infty}^2\|u\|_{L^2}\|u'\|_{L^2}\\ &\le \sqrt{1-\beta}\,\varepsilon m_D\|u'\|_{L^2}^2\\ &\quad + \sqrt{1-\beta}\Big(K_0 - \frac{1}{2}\max_k\|\lambda_k'\|_{L^\infty} - \|DB\|_{L^\infty}\|E'\|_{L^\infty}\Big)\|u\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Donc, compte tenu des relations

$$1-\sqrt{1-\beta}>0,$$

$$\|D\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|\gamma\|_{L^2}\leq \nu\|u\|_{L^2}^2+\frac{\|D\|_{L^\infty}^2}{4\nu}\|\gamma\|_{L^2}^2 \quad \text{pour tous } \nu>0,$$

on déduit de (18) qu'il existe deux constantes $\alpha_1>0$ et $c_1>0$ telles que l'inégalité (17) soit vérifiée. L'inégalité (17) implique également l'existence et l'unicité de la solution $u\in H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$. □

LEMME 3.2. *Si u est la solution du problème* (15)–(16), *alors on a*

$$\alpha_2\varepsilon^3\|u''\|_{L^2}^2\leq c_1\|\gamma\|_{L^2}^2, \tag{19}$$

où α_2 une constante indépendante de ε.

DÉMONSTRATION. De l'équation (15), on obtient

$$\varepsilon\|u''\|_{L^2}\leq\|B\|_{L^\infty}\|u'\|_{L^2}+\|C\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}+\|\gamma\|_{L^2};$$

à partir de cette inégalité et l'inégalité (17) on déduit qu'il existe une constante α_2 indépendante de ε telle que l'inégalité (19) soit vérifiée. □

4. Existence d'une solution du système d'équations différentielles ordinaires non linéaires

Soit $\bar{u}$ une fonction donnée dans $H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$. On considère l'équation

$$\varepsilon u''(x)+B(x)u'(x)+C(x)u(x)=g(x)-R(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x)),\quad 0<x<1, \tag{20}$$

avec les conditions aux limites (16). Le lemme 3.1, joint à la condition (8), nous permet de définir l'opérateur $G\colon H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)\to H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$, qui, à $\bar{u}\in H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$, associe la solution $u\in H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$ de l'équation (20). Pour l'opérateur G on aura la relation suivante.

LEMME 4.1. *Si*

$$\|g\|_{L^2}\leq c_\alpha\varepsilon^{3/4}, \tag{21}$$

où

$$c_\alpha=\frac{\sqrt{3}\bar{\alpha}}{32c_1c_R},\quad \bar{\alpha}=\min(1,\alpha_1,\alpha_2), \tag{22}$$

alors on a

$$G(W_\varepsilon) \subset W_\varepsilon, \tag{23}$$

où

$$\begin{aligned} W_\varepsilon = \{u \in H^2(0,1;\mathbb{R}^n) \cap H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n) \mid \\ \varepsilon^3\alpha_2\|u''\|_{L^2}^2 + \varepsilon\alpha_1\|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon^{3/2}K\}, \end{aligned} \tag{24}$$

$$K = \frac{\bar{\alpha}^2}{64c_1c_R^2}. \tag{25}$$

Démonstration. On rappelle que, en vertu de (8), on a

$$\|R(\cdot,u,u')\|_{L^2} \leq c_R(\|u\|_{L^\infty}(\|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2}) + \varepsilon\|u'\|_{L^\infty}\|u'\|_{L^2}),$$

or, comme

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^2}^{1/2}\|u'\|_{L^2}^{1/2}, \quad \|u'\|_{L^\infty} \leq \|u'\|_{L^2}^{1/2}\|u''\|_{L^2}^{1/2},$$

on a, pour $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$\begin{aligned} \|R(\cdot,u,u')\|_{L^2} &\leq \frac{c_R}{\varepsilon^{3/4}}(\|u\|_{L^2}^{3/2}\varepsilon^{1/4}\|u'\|_{L^2}^{1/2} + \|u\|_{L^2}^{1/2}\varepsilon^{3/4}\|u'\|_{L^2}^{3/2} \\ &\qquad + \varepsilon^{3/4}\|u'\|_{L^2}^{3/2}\varepsilon^{3/4}\|u''\|_{L^2}^{1/2}) \\ &\leq 2c_R\frac{1}{\varepsilon^{3/4}}(\|u\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|u'\|_{L^2}^2 + \varepsilon^3\|u''\|_{L^2}^2), \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$\|g - R(\cdot,\bar{u},\bar{u}')\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2} + 2c_R\frac{1}{\varepsilon^{3/4}}(\|\bar{u}\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\bar{u}'\|_{L^2}^2 + \varepsilon^3\|\bar{u}''\|_{L^2}^2). \tag{26}$$

En appliquant le lemme 3.1 et en utilisant (26) et (21), on a

$$\varepsilon^3\alpha_2\|u''\|_{L^2}^2 + \varepsilon\alpha_1\|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \leq$$

$$\leq 4c_1\Big(c_\alpha^2\varepsilon^{3/2} + \frac{4c_R^2}{\bar{\alpha}^2\varepsilon^{3/2}}(\varepsilon^3\alpha_2\|\bar{u}''\|_{L^2}^2 + \varepsilon\alpha_1\|\bar{u}'\|_{L^2}^2 + \|\bar{u}\|_{L^2}^2)^2\Big),$$

ce qui implique que, si

$$\varepsilon^3\alpha_2\|\bar{u}''\|_{L^2}^2 + \varepsilon\alpha_1\|\bar{u}'\|_{L^2}^2 + \|\bar{u}\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon^{3/2}K$$

avec la constante K définie dans (25), alors on a

$$\varepsilon^3\alpha_2\|u''\|_{L^2}^2 + \varepsilon\alpha_1\|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon^{3/2}K,$$

c'est-à-dire la relation (23) est vérifiée. □

Proposition 4.2. *Si g vérifie la condition* (21)–(22)*, alors l'équation* (11) *admet au moins une solution u appartenant à $H^2(0,1;\mathbb{R}^n) \cap H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. On considère d'abord l'équation (15) avec deux fonctions données γ_1 et γ_2. En raisonnant de manière analogue à la démonstration du lemme 3.1, on obtient

$$\varepsilon \|v'\|_{L^2}^2 + \tilde{c}_1 \|v\|_{L^2}^2 \leq \tilde{c}_2 \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{H^{-1}},$$

où $\tilde{c}_1$ et $\tilde{c}_2$ sont deux constantes strictement positives et

$$v = u^{(1)} - u^{(2)},$$

$u^{(i)}$ étant la solution du problème (15)–(16) avec $\gamma = \gamma_i$, $i = 1, 2$. Cela étant, en rappelant l'hypothèse (ii), on peut conclure que l'opérateur G qui, à $\bar{u} \in W_\varepsilon$, associé la solution $u \in H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$ de l'équation (20) est continu (si on considère G comme opérateur : $H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n) \to H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$ restreint au domaine W_ε), pourvu que

$$\varepsilon^{3/2} K + \varepsilon^{1/2} \frac{K}{\alpha_1} \leq R_1^2. \tag{27}$$

Comme W_ε est borné dans $H^2(0,1;\mathbb{R}^n)$ et fermé aussi dans $H^1(0,1;\mathbb{R}^n)$, d'après le théorème de l'injection compacte, W_ε est compact dans $H^1(0,1;\mathbb{R}^n)$. Il est en outre convexe ; par suite, d'après le théorème de point fixe de Schauder (voir par exemple [6]), il existe un élément u de W_ε tel que

$$G(u) = u,$$

ce qui achève la démonstration. □

5. Equations du mouvement stationnaire d'un gaz visqueux et calorifère en une dimension

Considérons l'écoulement stationnaire d'un gaz visqueux et calorifère dans un tuyau – réel ou construit seulement dans l'esprit –. Il nous est commode de le décrire, dans une approximation, par le système d'équations en une dimension, en utilisant les variables spatiales représentant la position dans le tuyau dans la direction du tuyau. Une forme de système d'équations applicable à de différentes situations est

$$\frac{d}{dx}(\varrho S w) = 0, \tag{28}$$

$$\varrho w w' + p' = \varepsilon(a_0 w + a_1 w' + a_2 w'') + \varrho f + f_0, \tag{29}$$

$$\varrho c_v w T' + p w' = \varepsilon(b_0 T + b_1 T' + b_2 T'') + \varepsilon(d_0 w^2 + d_1 w w' + d_2 (w')^2) + \varrho h + h_0, \tag{30}$$

où $\varrho = \varrho(x)$, $w = w(x)$, $T = T(x)$ et $p = p(x)$ désignent la densité, la vitesse dans la direction du tuyau, la température et la pression, tendis que c_v et $S = S(x)$ sont la chaleur spécifique de gaz et la section du tuyau. Pour la pression, nous supposons que

$$p = R_1 \varrho T, \tag{31}$$

où R_1 est la constante universelle des gaz divisée par la masse molaire du gaz. Dans les équations (29) et (30) les termes $\varepsilon(a_0 w + a_1 w' + a_2 w'')$ et $\varepsilon(b_0 T + b_1 T' + b_2 T'')$ sont dûs à la viscosité et à la conductibilité thermique et le terme $\varepsilon(d_0 w^2 + d_1 w w' + d_2 (w')^2)$ doit correspondre à la source de la chaleur due à la friction interne du gaz, ε étant une constante positive. Nous supposons donc que

$$\inf_x a_2(x) > 0, \quad \inf_x b_2(x) > 0. \tag{32}$$

Dans (29)–(30) on suppose que les coefficients a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, d_0, d_1, d_2 ainsi que les fonctions f, f_0, h, h_0 sont réguliers et bornés.

Le système d'équations (28)–(31) est une version de (1.1) du chap. II de [1], version adaptée à l'éventuelle courbure du tuyau et à l'éventuelle présence des forces extérieures $\varrho f + f_0$ et des sources de la chaleurs $\varrho h + h_0$. Pour les propriétés physiques du système d'équations on peut consulter par exemple [9].

L'équation (28) nous permet de réduire $\varrho(x)$ à une fonction de $w(x)$, c'est-à-dire on aura

$$\varrho(x) = \frac{K_\varrho}{S(x) w(x)}, \tag{33}$$

où K_ϱ est une constante; sans restreindre la généralité on peut supposer que $K_\varrho > 0$ (le cas $K_\varrho = 0$ ne nous intéresse pas). En substituant (33) et (31) dans (29) et (30) on obtient le système d'équations ayant deux seules fonctions inconnues w et T

$$\frac{K_\varrho}{S} w' + R_1 K_\varrho \Big(\frac{T}{S w}\Big)' = \varepsilon(a_0 w + a_1 w' + a_2 w'') + \frac{K_\varrho}{S w} f + f_0, \tag{34}$$

$$\begin{aligned} &\frac{K_\varrho}{S} c_v T' + R_1 \frac{K_\varrho}{S} \frac{T}{w} w' \\ &\quad = \varepsilon(b_0 T + b_1 T' + b_2 T'') + \varepsilon(d_0 w^2 + d_1 w w' + d_2 (w')^2) + \frac{K_\varrho}{S w} h + h_0. \end{aligned} \tag{35}$$

Maintenant on considère les équations correspondantes à (34)–(35) avec $\varepsilon = 0$; en écrivant $\overline{w}$ et $\overline{T}$ pour les fonctions inconnues, on a à considérer

$$\frac{K_\varrho}{S}\overline{w}' + R_1 K_\varrho \Big(\frac{\overline{T}}{S\overline{w}}\Big)' = \frac{K_\varrho}{S\overline{w}} f + f_0, \tag{36}$$

$$\frac{K_\varrho}{S} c_v \overline{T}' + R_1 \frac{K_\varrho}{S}\frac{\overline{T}}{\overline{w}}\overline{w}' = \frac{K_\varrho}{S\overline{w}} h + h_0. \tag{37}$$

Nous supposons que le système d'équations (36)–(37) dans l'intervalle $[0,1]$ admet une solution $(\overline{w}, \overline{T})$ et que $\overline{w}$ et $\overline{T}$ appartiennent à $H^2(0,1)$ et vérifient les relations

$$\inf_{0\le x\le 1} \overline{T}(x) > 0, \qquad \inf_{0\le x\le 1} \overline{w}(x) > 0. \tag{38}$$

En posant

$$\overline{w}_0 = \overline{w}(0), \quad \overline{w}_1 = \overline{w}(1), \quad \overline{T}_0 = \overline{T}(0), \quad \overline{T}_1 = \overline{T}(1), \tag{39}$$

nous allons considérer le système d'équations (34)–(35) avec les conditions aux limites

$$w(0) = \overline{w}_0, \quad w(1) = \overline{w}_1, \quad T(0) = \overline{T}_0, \quad T(1) = \overline{T}_1. \tag{40}$$

Or, il nous est commode de transformer les équations (34)–(35) en des équations pour les fonctions inconnues

$$u = w - \overline{w}, \quad \vartheta = T - \overline{T}. \tag{41}$$

En effet, nous pouvons transformer (34)–(35) en

$$\varepsilon a_2 u'' + B_{11}u' + B_{12}\vartheta' + C_{11}u + C_{12}\vartheta = -\varepsilon A_1(\overline{w}) - N_1(u,\vartheta), \tag{42}$$

$$\varepsilon b_2 \vartheta'' + B_{21}u' + B_{22}\vartheta' + C_{21}u + C_{22}\vartheta = -\varepsilon A_2(\overline{T},\overline{w}) - N_2(u,\vartheta), \tag{43}$$

où

$$B_{11} = -\frac{K_\varrho}{S} + R_1 K_\varrho \frac{\overline{T}}{S\overline{w}^2} + \varepsilon a_1, \quad B_{12} = -R_1\frac{K_\varrho}{\overline{w}S},$$

$$B_{21} = -R_1 \frac{K_\varrho}{S}\frac{\overline{T}}{\overline{w}} + \varepsilon(d_1\overline{w} + 2d_2\overline{w}'), \quad B_{22} = -\frac{K_\varrho}{S}c_v + \varepsilon b_1,$$

$$C_{11} = R_1\frac{K_\varrho}{S}\frac{\overline{T}'}{\overline{w}^2} + R_1\frac{K_\varrho}{S^2}\frac{S'\overline{T}}{\overline{w}^2} - \frac{K_\varrho f}{S\overline{w}^2} + \varepsilon a_0, \quad C_{12} = R_1\frac{K_\varrho}{\overline{w}^2 S^2}(S\overline{w})',$$

$$C_{21} = R_1 \frac{K_\varrho}{S} \overline{T} \frac{\overline{w}'}{\overline{w}^2} - \frac{K_\varrho}{S\overline{w}^2} h + \varepsilon(2d_0\overline{w} + d_1\overline{w}'), \quad C_{22} = -R_1 \frac{K_\varrho}{S}\frac{\overline{w}'}{\overline{w}} + \varepsilon b_0,$$

$$\begin{aligned} N_1(u,\vartheta) = {} & -R_1 K_\varrho \Big[\Big(\frac{\overline{T}+\vartheta}{S(\overline{w}+u)} \Big)' - \Big(\frac{\overline{T}}{S\overline{w}} \Big)' + \frac{\overline{T}}{S\overline{w}^2} u' - \frac{\vartheta'}{S\overline{w}} \\ & \qquad + \Big(\overline{T}' \frac{1}{S} + \overline{T} \Big(\frac{1}{S}\Big)' \Big) \frac{u}{\overline{w}^2} + \frac{(S\overline{w})'}{S^2\overline{w}^2}\vartheta \Big] \\ & + \frac{K_\varrho}{S} f \Big[\frac{1}{\overline{w}-u} - \frac{1}{\overline{w}} + \frac{u}{\overline{w}^2} \Big], \\ N_2(u,\vartheta) = {} & \frac{-R_1 K_\varrho}{S} \Big[\frac{\overline{T}+\vartheta}{\overline{w}+u}(\overline{w}+u)' - \frac{\overline{T}}{\overline{w}}\overline{w}' - \frac{\overline{T}}{\overline{w}}u' - \frac{\overline{T}}{\overline{w}^2}\overline{w}'u - \frac{\overline{w}'}{\overline{w}}\vartheta \Big] \\ & + \frac{K_\varrho}{S} h \Big[\frac{1}{\overline{w}-u} - \frac{1}{\overline{w}} + \frac{u}{\overline{w}^2} \Big] + \varepsilon(d_0u^2 + d_1uu' + d_2(u')^2), \end{aligned}$$

$$A_1(\overline{w}) = a_0\overline{w} + a_1\overline{w}' + a_2\overline{w}'',$$

$$A_2(\overline{T},\overline{w}) = b_0\overline{T} + b_1\overline{T}' + b_2\overline{T}'' + d_1\overline{w}^2 + d_1\overline{w}\,\overline{w}' + d_2(\overline{w}')^2.$$

Le système d'équations (42)–(43) doit être envisagé avec les conditions aux limites

$$u(0) = u(1) = \vartheta(0) = \vartheta(1) = 0. \tag{44}$$

Proposition 5.1. *On suppose que*

$$\overline{w}, \overline{T} \in H^2([0,1]), \qquad \inf_{0\le x\le 1} \overline{w}(x) > 0 \tag{45}$$

$$2c_v \le \frac{R_1\overline{T}}{\overline{w}^2}(c_v + R_1), \quad \textit{pour tous } x \in [0,1], \tag{46}$$

$$S \in C^1([0,1]); \quad f, h \in C^0([0,1]), \qquad \inf_{0\le x\le 1} S(x) > 0. \tag{47}$$

Alors il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que, si $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, le système d'équations (42)–(43) avec les conditions aux limites (44) admet une solution (u, ϑ) appartenant à $H^2(0,1;\mathbb{R}^n) \cap H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$.

On rappelle que l'hypothèse (46) implique implicitement la condition

$$\inf_{0\le x\le 1} \overline{T}(x) > 0.$$

Démonstration. Par des calculs élémentaires et compte tenu des conditions (45) et (47), on peut constater que la fonction

$$R(\cdot, u, \vartheta, u', \vartheta') = (N_1(u, \vartheta), N_2(u, \vartheta))$$

vérifie les conditions (i) et (ii) de la section 2 (avec des modifications évidentes de notations).

D'autre part, en vertu de la condition (46), il existe une constante $\varepsilon_B > 0$ telle que la matrice $\widehat{B} = \int_0^1 B\,dx$ soit inversible. Donc dans cette condition on peut définir la matrice Γ indépendante de x donnée par

$$\Gamma = -[\bar{k} + 1]^+ \widehat{B}^{-1}, \quad \bar{k} = \sup_{|v|=1} {}^t v C v.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on définit les matrices $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$ et D données par

$$\widetilde{B}(x) = B(x) - 2\varepsilon\Gamma,$$

$$\widetilde{C}(x) = C(x) - B(x)\Gamma + \varepsilon\Gamma^2,$$

$$D(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_{21}/\widetilde{B}_{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme $\widetilde{B}_{21}/\widetilde{B}_{12} \to \overline{T}$ pour $\varepsilon \to 0$, il n'est pas difficile de voir qu'il existe un $\varepsilon_0^{(1)} > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0^{(1)}$ les conditions (5)–(7) soient vérifiées.

Pour appliquer la proposition 4.2, on pose

$$g = (g_1, g_2), \quad g_1 = \varepsilon A_1(\overline{w}), \quad g_2 = \varepsilon A_2(\overline{T}, \overline{w}).$$

Nous remarquons que $A_1(\overline{w})$ et $A_2(\overline{T}, \overline{w})$ ne dépendent pas de ε ; donc en vertu de la condition (45), on a

$$\|g_1\|_{L^2} \leq \varepsilon C_1, \quad \|g_2\|_{L^2} \leq \varepsilon C_2,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes indépendantes de ε. On a donc

$$\|g\|_{L^2} = (\|g_1\|_{L^2}^2 + \|g_2\|_{L^2}^2)^{1/2} \leq \varepsilon(C_1^2 + C_2^2)^{1/2},$$

ce qui implique qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_0^{(1)}$ et que pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ la condition (21) soit vérifée, c'est-à-dire

$$\|g\|_{L^2} \leq c_\alpha \varepsilon^{3/4}.$$

Donc, d'après la proposition 4.2, si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, le système d'équations (42)–(43) avec les conditions aux limites (44) admet une solution appartenant à l'ensemble $H^2(0, 1; \mathbb{R}^n) \cap H_0^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$. La proposition est démontrée. $\square$

De la proposition 5.1 résulte immédiatemment sa version relative aux équations (34)–(35).

COROLLAIRE 5.2. *Le système d'équations* (34)–(35) *avec les conditions aux limites* (40) *admet une solution* (w, T) *appartenant à* $H^2(0,1;\mathbb{R}^n)\cap H_0^1(0,1;\mathbb{R}^n)$.

On ce qui concerne l'unicité de la solution, la méthode utilisée ne nous permettra, dans l'immédiat, d'obtenir que l'existence d'une solution et il nous semble que la question de l'unicité de la solution devra être étudiée avec une nouvelle méthode.

6. Exemple numérique

Nous tenons à montrer que des exemples numériques illustrent bien le comportement de la solution des équations (34)–(35) démontré dans le corollaire de la propositions 5.1. En effet, considérons une fonction $h(x)$ donnée par

$$h(x) = \begin{cases} \Big(\dfrac{x-10^5}{4\cdot 10^4}+1\Big)^4\Big(\dfrac{x-10^5}{4\cdot 10^4}-1\Big)^4 & \text{si } 6\cdot 10^4 \le x \le 14\cdot 10^4, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

qui représentrait la hauteur de la surface de la Terre en $0 \le x \le 2\cdot 10^5\, m$ avec le sommet $h(x_1) = 1000(m),\ x_1 = 10^5(m)$. Si on tient compte de la friction avec la surface $-\alpha w$ et le gradient de la pression de base $-\gamma$ et si on pose $S(x)\equiv 1$, alors l'écoulement de l'air sur cette surface peut être décrit par l'équation de continuité de la masse

$$\frac{\varrho w}{\sqrt{1+h'^2}} = K_\varrho, \tag{48}$$

l'équation de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned} &\frac{\varrho}{\sqrt{1+h'^2}} w \frac{d}{dx} w + \frac{R}{\mu_m\sqrt{1+h'^2}}\frac{d}{dx}(\varrho T) \\ &= f_1\frac{d^2 w}{dx^2} + f_2 w - \frac{h'}{\sqrt{1+h'^2}}\varrho g - \alpha w + \gamma, \end{aligned} \tag{49}$$

et l'équation du bilan de l'énergie

$$\begin{aligned} &\varrho c_v \frac{w}{\sqrt{1+h'^2}}\frac{dT}{dx} + \frac{R}{\mu_m}\varrho T\frac{d}{dx}\Big(\frac{w}{\sqrt{1+h'^2}}\Big) \\ &= \kappa\frac{d^2T}{dx^2} + \Big(g_1\Big(\frac{d}{dx}w\Big)^2 + g_2 w\frac{d}{dx}w + g_3 w^2\Big), \end{aligned} \tag{50}$$

où

$$f_1 = \frac{1}{1+h'^2}\Big[\frac{\eta}{3}(3h'^2+4)+\zeta\Big],$$

$$f_2 = \frac{1}{(1+h'^2)^3}h''^2\Big[-\frac{\eta}{3}(h'^2+4)+\zeta(2h'^2-1)\Big]-h'\Big(\zeta+\frac{\eta}{3}\Big)h''',$$

$$g_1 = \frac{1}{1+h'^2}\Big(\eta\Big(\frac{4}{3}+h'^2\Big)+\zeta\Big),$$

$$g_2 = \frac{-2h'}{(1+h'^2)^2}h''\Big(\frac{\eta}{3}+\zeta\Big),$$

$$g_3 = \frac{1}{(1+h'^2)^3}h''^2\Big(\eta\Big(1+\frac{4}{3}h'^2\Big)+\zeta h'^2\Big)$$

($h'' = d^2/dx^2\, h(x)$, $h''' = d^3/dx^3\, h(x)$). Si on substitue (48) dans (49) et (50), celles-ci seront un cas des équations (34)–(35), qui décrirait l'écoulement de l'air dans le domaine $0 \leq x \leq 2\cdot 10^5\, m$.

Comme on le voit immédiatement, dans le cas où $\eta = \zeta = \kappa = 0$, le système d'équations se réduit à

$$\text{(51)}\qquad \frac{\varrho}{\sqrt{1+h'^2}}\overline{w}\frac{d}{dx}\overline{w}+\frac{R}{\mu_m\sqrt{1+h'^2}}\frac{d}{dx}(\varrho\overline{T}) = -\frac{h'}{\sqrt{1+h'^2}}\varrho g-\alpha\overline{w}+\gamma,$$

$$\text{(52)}\qquad \varrho c_v\frac{\overline{w}}{\sqrt{1+h'^2}}\frac{d\overline{T}}{dx}+\frac{R}{\mu_m}\varrho\overline{T}\frac{d}{dx}\Big(\frac{\overline{w}}{\sqrt{1+h'^2}}\Big) = 0.$$

Pour calculer la solution du système d'équations (51)–(52) (avec (48)) et celle de (49)–(50) (avec (48)), nous avons utilisé la méthode de différences finies avec l'approximation centrique

$$\frac{dw}{dx}\Big|_{x=i} \approx \frac{w(i+1)-w(i-1)}{2\delta},$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}\Big|_{x=i} \approx \frac{(w(i+1)-2w(i)+w(i-1))}{\delta^2},$$

$\delta = 2\cdot 10^5/N$, pour $i = 1,\dots,N-1$ et analoguement pour T ; nous avons également adopté l'approximation

$$g_1(i)\Big(\frac{w(i+1)-w(i-1)}{2\delta}\Big)^2 \approx g_1(i)\Big(\frac{w(i+1)-w(i-1)}{2\delta}\Big)\Big(\frac{w(i)-w(i-1)}{\delta}\Big)$$

du terme non-linéaire pour rendre explicite le schéma numérique.

Pour les valeurs des coefficients, nous avons pris les valeurs suivantes : l'accélération de la pesanteur $g = 9,8\,\mathrm{gm}^2/\mathrm{s}^2$, la constante universelle des gaz $R = 8,31{\cdot}10^7$ erg/mole$\cdot K$, la masse molaire moyenne de l'air $\mu_m = 28,96$ g/mole, la chaleur spécifique $c_v = 5/2\ R/\mu_m$, la pression au point initial ($i = 0$) 1013 mbar, le coefficient de friction $\alpha = 0,1$ et le gradient de pression de base $\gamma = 0,2$ [ça correspond à la différence de 0, 4 mbar de la pression en 200 km].

En divisant le domaine $0 \le x \le 2 \cdot 10^5\, m$ en $N = 200$ pas ($i = 0, 1, \dots, 200$), et en posant les valeurs initiales $\overline{w}(i = 0) = 2$ m/s, $\overline{T}(i = 0) = 293,150^{\mathrm{o}} K$, nous avons calculé la solution $(\overline{w}, \overline{T})$ des équations (51)–(52), dont les valeurs « finales » ont été $\overline{T}(i = 200) \approx 293,149^{\mathrm{o}} K$ et $\overline{w}(i = 200) \approx 2,0000$ m/s.

D'autre part, en choisissant $\eta = 120$, $\zeta = 40$ et $\kappa = 100$, et en posant les conditions aux limites

$$w(0) = \overline{w}(i = 0) = 2,0000\,\mathrm{m/s}, \quad w(i = 200) \approx \overline{w}(i = 200) = 2,0000\,\mathrm{m/s}\,,$$
$$T(0) = \overline{T}(i = 0) = 293,150^{\mathrm{o}} K, \quad T(i = 200) \approx \overline{T}(i = 200) = 293,149^{\mathrm{o}} K,$$

par la méthode de « shooting » nous avons obtenu la solution (w, T) de (49)–(50) (solution qui approche le mieux les valeurs finales $w(i = 200) = 2,0000$ m/s, $T(i = 200) = 293,149^{\mathrm{o}} K$).

Nous illustrons ci-dessous les valeurs de la solution $(\overline{w}(i), \overline{T}(i))$ du système d'équations avec $\eta = \zeta = \kappa = 0$ et celles de la solution $(w(i), T(i))$ du système d'équations avec $\eta = 120$, $\zeta = 40$, $\kappa = 100$, pour $i = 0,\ 50,\ 75,\ 100,\ 125,\ 150,\ 200$:

	SANS VISCOSITE	AVEC LA VISCOSITE
$i = 0$	$\overline{w} = 2.0000$	$w = 2.0000$
$i = 50$	$\overline{w} = 2.0000$	$w = 2.0000$
$i = 75$	$\overline{w} = 2.0239$	$w = 2.0248$
$i = 100$	$\overline{w} = 2.1768$	$w = 2.1766$
$i = 125$	$\overline{w} = 2.0239$	$w = 2.0224$
$i = 150$	$\overline{w} = 2.0000$	$w = 1.9995$
$i = 200$	$\overline{w} = 2.0000$	$w = 1.9997$
$i = 0$	$\overline{T} = 293.150$	$T = 293.150$
$i = 50$	$\overline{T} = 293.150$	$T = 293.149$
$i = 75$	$\overline{T} = 291.809$	$T = 291.949$
$i = 100$	$\overline{T} = 283.382$	$T = 283.366$
$i = 125$	$\overline{T} = 291.809$	$T = 291.642$
$i = 150$	$\overline{T} = 293.149$	$T = 293.121$
$i = 200$	$\overline{T} = 293.149$	$T = 293.149$

Ces résultats confirment, nous pensons, que dans le voisinage de la solution $(\bar{w}, \bar{T})$ du système d'équations sans viscosité et sans thermoconductibilité, on peut trouver une solution (w, T) du système d'équations avec viscosité et thermoconductibilté, pourvu que les coefficients de viscosité et de conductibilité thermiques soient suffisamment petits.

Références

[1] S. N. Antontsev – A. V. Kazhikhov – V. N. Monakhov, *Boundary value problems in mechanics of non homogeneous fluids,* North-Holland, Amsterdam etc. 1990. (Traduit du russe.)

[2] R. Benabidallah – L. Taleb – H. Fujita Yashima, *Existence d'une solution stationnaire d'un système d'équations d'un fluide visqueux compressible et calorifère modélisant la convection,* Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) **10** (2007), no. 3, bis, pp. 1101–1124.

[3] D. R. Durran, *Downslope winds,* dans *Encyclopedia of atmospheric sciences,* Academic Press, Amsterdam, 2003, pp. 644–650.

[4] R. Farwig, *Stationary solution of compressible Navier–Stokes equations with slip boundary conditions,* Comm. Partial Differential Equations **14** (1989), no. 11, pp. 1579–1606.

[5] J.-L. Lions, *Perturbations singulières dans les problemes aux limites et en contrôle optimal,* Lecture Notes in Mathematics, 323, Springer, Berlin etc., 1973.

[6] L. V. Kantorovitch – G. P. Akilov, *Analyse fonctionnelle,* tome 2, Mir, Moscou, 1981. (Traduit du russe.)

[7] A. V. Kazhikhov, *Sur la solubilité des problèmes monodimensionnels aux valeurs initiales-limitées pour les équations d'un gaz visqueux et calorifère.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **284** (1977), no. 5, pp. A317–A320.

[8] A. V. Kazhikhov – V. V. Shelukhin, Unique global solution with respect to time of initial-boundary value problems for one-dimensional equations of a viscous gas. Prikl. Mat. Meh. **41** (1977), no. 2, pp. 282–291. (En russe.) Traduction anglaise, J. Appl. Math. Mech. **41** (1977), no. 2, pp. 273–282.

[9] L. L. Landau – E. M. Lifchitz, *Mécanique des fluides* (*Physique théorique,* tome 6), Mir, Moscou, 1989. (Traduit du russe.)

[10] A. Novotny – M. Padula, *Existence and uniqueness of stationary solutions of equations of a compressible viscous heat-conducting fluid for large potential and small nonpotential external forces,* Sibirsk. Mat. Zh. **34** (1993), no. 5, pp. 120–146, iii, vii. (En russe.) Traduction anglaise, Siberian Math. J. **34** (1993), no. 5, pp. 898–922.

[11] B. L. Rozhdestvenskii – N. N. Yanenko, *Systèmes d'équations quasi-linéaires et leur applications à la dynamique des gaz,* Nauka, Moscou, 1978. (En russe.)

Manoscritto pervenuto in redazione il 22 ottobre 2014.