

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

MIREILLE MARTIN-DESCHAMPS

Biliaisons élémentaires en codimension 2

Tome XV, n° 2 (2006), p. 281-296.

http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2006_6_15_2_281_0

© Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques, 2006, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Biliaisons élémentaires en codimension 2^(*)MIREILLE MARTIN-DESCHAMPS ⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Un théorème de Strano montre que si une courbe gauche localement Cohen-Macaulay n'est pas minimale dans sa classe de biliaison, elle admet une biliaison élémentaire strictement décroissante. R. Hartshorne a récemment donné une nouvelle preuve de ce résultat en le plaçant dans un contexte plus général. Dans cet article on apporte une précision, en utilisant les techniques introduites par Hartshorne : on montre que si un sous-schéma de codimension 2 localement Cohen-Macaulay de \mathbb{P}^N n'est pas minimal dans sa classe de biliaison, il admet effectivement toute biliaison descendante qui est compatible avec ses caractéristiques numériques.

ABSTRACT. — A result of Strano says that a locally Cohen-Macaulay space curve which is not minimal in its biliaison class admits a strictly descending elementary biliaison. Recently, R. Hartshorne gave a new proof of this result, by working in a more general context. In this paper we use Hartshorne's techniques for giving a more precise result : we show that, if a locally Cohen-Macaulay subscheme of codimension 2 of \mathbb{P}^N is not minimal in its biliaison class, it admits every strictly descending elementary biliaison which is numerically possible.

0. Introduction

La notion de biliaison (ou liaison paire) introduite par Lazarsfeld et Rao [6] et développée d'abord par Rao [11], [12], puis par de nombreux autres auteurs, a joué un rôle important dans la classification des courbes localement Cohen-Macaulay de l'espace projectif \mathbb{P}^3 . Décrire les classes d'équivalence est possible : dans chaque classe, il y a des courbes minimales, essentiellement uniques, à déformation à cohomologie et module de Rao constants. De

(*) Reçu le 12 mai 2004, accepté le 8 décembre 2004

(1) Université de Versailles S^t Quentin en Yvelines

Laboratoire de Mathématiques, UMR 8100 du CNRS, 45 avenue des États-Unis, F-78035 Versailles Cedex.

E-mail : mmd@math.uvsq.fr

plus, toute courbe de la classe s'obtient à partir d'une courbe minimale par une suite de biliaisons élémentaires croissantes suivie d'une déformation à cohomologie et module de Rao constants. C'est ce qu'on appelle la propriété de Lazarsfeld-Rao.

R. Strano [13] a démontré récemment que toute courbe localement Cohen-Macaulay de \mathbb{P}^3 qui n'est pas minimale dans sa classe de biliaison admet une biliaison élémentaire strictement décroissante, sans qu'il soit nécessaire de la déformer au préalable. Depuis, R. Hartshorne [3] a replacé ce résultat dans un contexte beaucoup plus général lié aux propriétés de Lazarsfeld-Rao.

Cet article a pour but, en utilisant les techniques développées par R. Hartshorne, de compléter le résultat de Strano, en précisant sur quelles hypersurfaces exactement on peut faire la biliaison élémentaire (on se placera d'emblée dans le cas plus général des sous-schémas de codimension 2 de \mathbb{P}^N). Le résultat est que toute biliaison descendante numériquement possible est effectivement réalisable (2.5 et 2.8).

Notations

On désigne par k un corps algébriquement clos, par \mathbb{P}_k^N ou plus simplement \mathbb{P}^N l'espace projectif de dimension $N \geq 2$ et par S l'anneau de polynômes $k[X_0, \dots, X_N]$.

Si \mathcal{F} est un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -module on note $h^i \mathcal{F}$ la dimension de l'espace vectoriel $H^i \mathcal{F}$, et $H_*^i \mathcal{F}$ le S -module gradué $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^i \mathcal{F}(n)$.

Soient X un sous-schéma fermé de \mathbb{P}^N et \mathcal{I}_X son faisceau d'idéaux, on désigne par $s_0(X)$ le plus petit degré d'une hypersurface contenant X , c'est-à-dire $s_0(X) = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid h^0 \mathcal{I}_X(n) \neq 0\}$.

Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ une application. On définit :

- sa différence première ∂f par la formule $\partial f(n) = f(n) - f(n-1)$,
- dans le cas où f est nulle pour $n \ll 0$, sa primitive $f^\#$ par $f^\#(n) = \sum_{k \leq n} f(k)$.

On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, à support fini, est appelée un **caractère** [8] si elle vérifie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = 0$ et que la différence première d'une fonction à support fini est un caractère.

On fait les conventions suivantes sur les coefficients binômiaux :

$$\binom{n}{p} = 0 \text{ pour } n \in \mathbb{Z}, p \geq 0 \text{ et } n < p \quad , \quad \binom{n-1}{-1} = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec cette convention, la formule de Pascal $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ est valable pour tous $n > p \geq 0$.

1. Sous-schémas de codimension 2 de \mathbb{P}^N

Nous rappelons ici quelques propriétés des sous-schémas de codimension 2 de \mathbb{P}^N , en rassemblant des résultats qui sont connus parfois seulement pour $N = 3$ (courbes de \mathbb{P}^3), mais qui s'étendent sans difficulté au cas général. De plus, on trouve dans la littérature diverses notions liées aux propriétés numériques de ces sous-schémas qui peuvent donner lieu à des caractérisations s'exprimant de manières très différentes suivant les auteurs, bien qu'étant évidemment équivalentes. La proposition 1.16 fait le lien entre ces différentes notations dans le cas des sous-schémas ACM.

Résolutions

DÉFINITION 1.1. — [8] *Un faisceau cohérent est dissocié s'il est somme directe de faisceaux inversibles $\oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n_i)$.*

DÉFINITION 1.2. — [4] *Un faisceau cohérent \mathcal{N} est extraverti s'il vérifie $H_*^1(\mathcal{N}^\vee) = 0$ et $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{N}, \mathcal{O}_X) = 0$.*

On déduit de [4] et [3] le résultat suivant :

PROPOSITION 1.3. — *Soit X un sous-schéma de pure codimension 2 de \mathbb{P}^N , sans composante immergée, \mathcal{I}_X son faisceau d'idéaux. Il existe une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow 0$$

où \mathcal{L} est dissocié et \mathcal{N} extraverti.

Remarque 1.4. — Si X est localement Cohen-Macaulay, \mathcal{N} est un fibré [4]. Dans ce cas on retrouve la résolution de type N habituelle [8] [10].

Soit Q une hypersurface de degré s de \mathbb{P}^N . Tout sous-schéma de pure codimension 2 de \mathbb{P}^N , sans composante immergée, tracé sur Q , correspond à un diviseur généralisé effectif sur Q . Soit H le diviseur hyperplan de Q .

DÉFINITION 1.5. — [2] Soient X et X' deux sous-schémas fermés de pure codimension 2 de \mathbb{P}^N sans composante immergée, tracés sur Q , et soit $h \in \mathbb{Z}$. On dit que X' est obtenu par une biliaison élémentaire de hauteur h sur Q (ou encore une biliaison élémentaire (s, h)) à partir de X (ascendante si $h > 0$, descendante si $h < 0$) si on a une équivalence linéaire de diviseurs généralisés $X' \sim X + hH$, c'est-à-dire un isomorphisme de faisceaux d'idéaux relatifs $\mathcal{I}_{X'/Q} \simeq \mathcal{I}_{X/Q}(h)$. La relation d'équivalence engendrée par les biliaisons élémentaires est encore appelée biliaison.

Remarque 1.6. — [2] [7] Il revient au même de dire que X' est obtenu à partir de X par une double liaison par des intersections complètes d'idéaux (Q, S) et (Q, S') avec $\deg S' - \deg S = h$.

Remarque 1.7. — Si X admet une biliaison élémentaire (s, h) avec $h < 0$, il admet une biliaison élémentaire $(s, -1)$ sur la même surface. En effet, soit Q une surface de degré s contenant X et soit X' tel qu'on ait $X \sim X' - hH$. Soit X'' la réunion de X' et d'un diviseur équivalent à $(h + 1)H$. On a alors $X \sim X'' + H$.

Variation des résolutions par biliaison élémentaire

PROPOSITION 1.8. — Avec les notations précédentes, si on a une résolution :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\phi} \mathcal{N} \xrightarrow{p} \mathcal{I}_X \longrightarrow 0$$

où \mathcal{L} est dissocié et \mathcal{N} extraverti, on a aussi :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \oplus \mathcal{O}(-s) \xrightarrow{\phi'} \mathcal{N} \oplus \mathcal{O}(h - s) \xrightarrow{p'} \mathcal{I}_{X'}(h) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — [8] Soient q l'équation de Q et z une section de $\mathcal{N}(s)$ qui relève q . On a une résolution du faisceau d'idéaux relatifs $\mathcal{I}_{X/Q}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \oplus \mathcal{O}(-s) \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{N} \xrightarrow{p_1} \mathcal{I}_{X/Q} \longrightarrow 0$$

où ϕ_1 est défini par la matrice $\begin{pmatrix} \phi & z \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La suite des termes de bas degré de la suite spectrale des Ext donne :

$$0 \longrightarrow H_*^1(\mathcal{N}^\vee) \longrightarrow \text{Ext}_*^1(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \longrightarrow H_*^0(\text{Ext}^1(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})) \longrightarrow \dots$$

Le premier et le troisième terme s'annulent, donc on a $\text{Ext}_*^1(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = 0$ et l'isomorphisme $\mathcal{I}_{X/Q} \simeq \mathcal{I}_{X'/Q}(h)$ se relève en un homomorphisme $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{I}_{X'}(h)$.

On a donc un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{L} \oplus \mathcal{O}(-s) & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{I}_{X/Q} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(h-s) & \longrightarrow & \mathcal{I}_{X'}(h) & \longrightarrow & \mathcal{I}_{X'/Q}(h) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Par mapping cone on obtient alors la résolution annoncée de $\mathcal{I}_{X'}(h)$. □

Caractère de postulation

Comme nous l'avons dit plus haut, il existe différentes notions permettant de décrire les propriétés numériques. Nous définissons ici celle que nous avons choisie pour décrire la postulation.

DÉFINITION 1.9. — *Soit X un sous-schéma de pure codimension 2 de \mathbb{P}^N . On définit son caractère de postulation γ_X par la formule :*

$$\gamma_X(n) = \partial^N(h^0\mathcal{I}_X(n) - h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)).$$

Remarque 1.10. — On notera que la fonction $h^0\mathcal{I}_X(n) - h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ est l'opposée de la fonction de Hilbert de X , dimension de l'image de la flèche de restriction :

$$H^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n) \longrightarrow H^0\mathcal{O}_X(n).$$

Remarque 1.11. — La fonction $h^0\mathcal{I}_X(n) - h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ est nulle pour $n < 0$ et est égale à un polynôme de degré $N - 2$ pour $n \gg 0$. Sa différence $(N - 1)$ -ième est donc à support fini, et γ_X est un caractère.

Rappelons qu'on note $s_0(X) = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid h^0\mathcal{I}_X(n) \neq 0\}$. Alors, on a : $\gamma_X(n) = 0$ pour $n < 0$, $\gamma_X(n) = -1$ pour $0 \leq n < s_0(X)$, $\gamma_X(s_0(X)) = h^0\mathcal{I}_X(s_0(X)) - 1 \geq 0$.

Variation du caractère par biliaison élémentaire

Du point de vue cohomologique, deux biliaisons de type (s, h) ont des effets équivalents sur les invariants numériques. De même, si on a $h > 0$, une biliaison (s, h) est équivalente à h biliaisons $(s, 1)$. On pourra donc souvent se borner à expliciter les formules dans ce dernier cas.

PROPOSITION 1.12. — *Si X' est obtenue par une biliaison élémentaire de hauteur h sur Q à partir de X , on a, pour $n > 0$:*

$$\gamma_{X'}(n) = \gamma_X(n - h) + \binom{n - h}{0} - \binom{n}{0} + \binom{n - s}{0} - \binom{n - s - h}{0}.$$

En particulier, pour $h = 1$ on a :

$$\gamma_{X'}(n) - \gamma_X(n - 1) = \begin{cases} -1 & \text{pour } n = 0 \\ 1 & \text{pour } n = s \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — On utilise la relation $\mathcal{I}_{X/Q} \simeq \mathcal{I}_{X'/Q}(h)$ et les deux suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-s) \rightarrow \mathcal{I}_X \rightarrow \mathcal{I}_{X/Q} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-s) \rightarrow \mathcal{I}_{X'} \rightarrow \mathcal{I}_{X'/Q} \rightarrow 0.$$

On en déduit :

$$h^0\mathcal{I}_{X'}(n) = h^0\mathcal{I}_X(n - h) + \binom{n - s + N}{N} - \binom{n - s - h + N}{N}.$$

et :

$$\gamma_{X'}(n) = \gamma_X(n - h) + \binom{n - h}{0} - \binom{n}{0} + \binom{n - s}{0} - \binom{n - s - h}{0}.$$

Pour $h = 1$:

$$\gamma_{X'}(n) = \gamma_X(n-1) + \binom{n-s-1}{-1} - \binom{n-1}{-1}.$$

□

Remarque 1.13. — On en déduit facilement qu'on a $s_0(X') = s_0(X) + 1$ si $s > s_0(X)$ et $s_0(X') = s_0(X)$ si $s = s_0(X)$; dans ce cas, $\gamma_{X'}(s_0(X')) = 0$.

Cas des sous-schémas ACM

Lorsque X est arithmétiquement Cohen-Macaulay, il y a d'autres notions équivalentes à celle de caractère de postulation :

- le h -vecteur,
- le caractère numérique de Gruson-Peskine.

Nous rappelons ici brièvement comment on les construit et leur lien avec le caractère γ_X . Soit I_X l'idéal saturé de S qui définit X .

h-vecteur

[9] L'anneau S/I_X est Cohen-Macaulay de dimension $N - 1$. Si L_1, \dots, L_{N-1} sont des formes linéaires générales, l'anneau $S/I_X + (L_1, \dots, L_{N-1})$ est encore Cohen-Macaulay, de dimension 0. Sa fonction de Hilbert h_X est appelée le **h-vecteur** de X . On voit facilement qu'on a :

$$h_X(n) = \partial^{N-1}(h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n) - h^0 \mathcal{I}_X(n))$$

donc $\gamma_X = -\partial h_X$.

Caractère numérique de Gruson-Peskine

[1] On choisit une hypersurface Q de plus petit degré s_0 contenant X , d'équation q , qui ne passe pas par le point $(0, \dots, 0, 1)$ (on peut toujours se ramener à ce cas par un changement de coordonnées). Soit $S' = k[X_0, \dots, X_{N-1}]$. Puisque l'anneau S/I_X est de profondeur $N - 1$, donc de dimension projective 1, sur S' , l'idéal $I_X/(q)$ est un S' -module libre gradué.

De plus, l'anneau gradué $S/(q)$ est un S' module libre gradué de base $1, X_N, \dots, X_N^{s_0-1}$. On a donc des isomorphismes $S/(q) \simeq \bigoplus_{i=0}^{s_0-1} S'(-i)$ et $I_X/(q) \simeq \bigoplus_{i=0}^{s_0-1} S'(-n_i)$. La suite ordonnée d'entiers $n_0 \geq n_1 \geq \dots \geq n_{s_0-1}$ est appelée le **caractère numérique** de X .

On en déduit, en calculant la cohomologie de I_X , qu'on a [8] :

$$\gamma_X(n) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n < 0 \\ -1 & \text{pour } 0 \leq n < s_0 \\ \#\{i \mid n_i = n\} & \text{pour } n \geq s_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Le caractère se calcule facilement à partir d'une résolution :

PROPOSITION 1.14. — Soit

$$0 \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow 0$$

une suite exacte où

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n)^{a(n)} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n)^{b(n)}$$

sont des fibrés, et X un sous-schéma. Soit r la fonction définie par $r(0) = -1$, et $r(n) = a(n) - b(n)$ pour $n > 0$. Alors on a $\gamma_X(n) = \sum_{k \leq n} r(k) = r^\#(n)$.

De plus, le caractère est **positif** au sens suivant :

THÉORÈME 1.15. — Soit X un sous-schéma ACM de pure codimension 2 de \mathbb{P}^N . Alors on a $\gamma_X(n) \geq 0$ pour tout $n \geq s_0 = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid \gamma(n) \neq -1\}$.

Inversement, soit γ un caractère vérifiant $\gamma(n) = 0$ pour $n < 0$, $\gamma(0) = -1$, $\gamma(n) \geq 0$ pour tout $n \geq s_0 = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid \gamma(n) \neq -1\}$. Alors il existe un sous-schéma X de pure codimension 2 et ACM de \mathbb{P}^N tel qu'on ait $\gamma = \gamma_X$.

Démonstration. — La positivité découle immédiatement de la relation entre γ_X et le caractère numérique de Gruson-Peskine :

$$\gamma_X(n) = \#\{i \mid n_i = n\} \text{ pour } n \geq s_0.$$

La propriété inverse a été prouvée par [1], voir aussi [8]. \square

On trouve dans la littérature une autre forme de cette condition, qui utilise une écriture différente pour les fibrés \mathcal{A} et \mathcal{B} . La proposition suivante fait le lien entre ces deux écritures :

PROPOSITION 1.16. — Soient

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n)^{a(n)} = \bigoplus_{i=1}^{t+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-a_i) \quad \text{avec} \quad 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{t+1}$$

et

$$\mathcal{B} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n)^{b(n)} = \bigoplus_{i=1}^t \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-b_i) \quad \text{avec} \quad a_1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_t$$

deux fibrés de rangs respectifs $s+1$ et s . Soient r et γ les fonctions définies par $r(0) = -1$, et $r(n) = a(n) - b(n)$ pour $n > 0$, $\gamma_X(n) = r^\sharp(n)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\gamma(n) \geq 0$ pour tout $n \geq a_1 = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid \gamma(n) \neq -1\}$,
2. $b_i \geq a_{i+1} \quad \forall i = 1, \dots, s$.

Démonstration. — On remarque que $a(n)$ est le cardinal de $\{i \in [1, s+1] \mid a_i = n\}$, donc on a :

$$a^\sharp(n) = \#\{i \in [1, s+1] \mid a_i \leq n\} = \sup\{i \in [1, s+1] \mid a_i \leq n\}$$

et de même pour b . En particulier $a^\sharp(a_{i+1} - 1) \leq i$.

Supposons qu'on ait $a^\sharp(n) \geq b^\sharp(n) + 1$ pour tout $n \geq a_1$. Soit $i \in [1, s]$ fixé.

- Si $a_{i+1} = a_1$, on a $b_i \geq b_1 \geq a_1$.
- Si $a_{i+1} > a_1$, on peut appliquer l'hypothèse à $n = a_{i+1} - 1 \geq a_1$. On a :

$$b^\sharp(a_{i+1} - 1) < a^\sharp(a_{i+1} - 1) \leq i.$$

On en déduit :

$$b^\sharp(a_{i+1} - 1) = \sup\{j \in [1, s] \mid b_j \leq (a_{i+1} - 1)\} < i$$

donc $b_i > (a_{i+1} - 1)$.

Inversement supposons qu'il existe $n \geq a_1$ tel qu'on ait $\gamma(n) < 0$. Soit $i = a^\sharp(n)$. Alors on a $b^\sharp(n) \geq i$. On en déduit $a_i \leq n < a_{i+1}$ et $b_i \leq n < a_{i+1}$. \square

2. Biliaisons élémentaires descendantes effectives

Dans cette section, on étudie la question suivante : soit Y un sous-schéma fermé de pure codimension 2 de \mathbb{P}^N , sans composante immergée, qui a la même résolution (décrite en 1.8) ou la même cohomologie qu'un sous-schéma X' obtenu par une biliaison élémentaire (s, h) ascendante à partir d'un sous-schéma X . Peut-on faire sur Y une biliaison élémentaire descendante $(s, -h)$?

R. Hartshorne a montré (dans un contexte plus général que le notre) le résultat suivant :

PROPOSITION 2.1. — [3] *Soient X et Y deux sous-schémas fermés de pure codimension 2 de \mathbb{P}^N sans composante immergée avec des résolutions :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-a_i) \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{I}_X(a) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{B} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-b_i) \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{I}_Y(b) \longrightarrow 0$$

où \mathcal{N} est extraverti.

Supposons qu'on ait : $a_1 \leq a_2 \cdots \leq a_r$ et $b_1 \leq b_2 \cdots \leq b_r$ et soit k tel qu'on ait $a_i = b_i$ pour $i = 1, \dots, k-1$ et $a_k < b_k$. Alors Y admet une biliaison élémentaire descendante de hauteur $h = a_k - b_k$ sur une hypersurface de degré $b + a_k$.

Il en déduit en particulier le résultat de Strano [13] :

THÉORÈME 2.2. — *Tout sous-schéma fermé de pure codimension 2 de \mathbb{P}^N sans composante immergée qui n'est pas minimal dans sa classe de biliaison admet une biliaison élémentaire strictement descendante.*

Remarque 2.3 . — Si nous choisissons l'écriture $\mathcal{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n)^{a(n)}$, $\mathcal{B} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n)^{b(n)}$, le résultat de 2.1 s'exprime ainsi : soit $n_0 = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid a(n) \neq b(n)\}$; supposons $a(n_0) > b(n_0)$ et soit $n_1 = \inf\{n > n_0 \mid b(n) \neq 0\}$. Alors Y admet une biliaison élémentaire descendante de hauteur $h = n_0 - n_1$ sur une hypersurface de degré $b + n_0$.

Remarque 2.4 Au cours de la démonstration de 2.1, Hartshorne prouve en fait qu'on peut faire cette biliaison élémentaire descendante sur toute hypersurface générale de degré $b + a_k$ contenant Y .

Nous allons préciser le résultat de Hartshorne :

THÉORÈME 2.5. — *Soient X et Y deux sous-schémas fermés de pure codimension 2 de \mathbb{P}^N , sans composante immergée, dans la même classe de biliaison. Soit X' obtenu à partir de X par une biliaison élémentaire (s, h) avec $h > 0$. Si Y a la même cohomologie que X' , on peut faire sur Y h biliaisons élémentaires successives $(s, -1)$.*

Pour la démonstration nous aurons besoin du résultat suivant :

LEMME 2.6. — *Deux sous-schémas fermés de pure codimension 2 de \mathbb{P}^N , sans composante immergée, dans la même classe de biliaison, ont même cohomologie si et seulement si ils ont même résolution de type N (c'est-à-dire des résolutions qui font intervenir les mêmes fibrés). En particulier deux sous-schémas fermés ACM de pure codimension 2 de \mathbb{P}^N ont même fonction de Hilbert si et seulement si ils ont même résolution de type N .*

Démonstration. — Soient X et X' dans la même classe de biliaison, non ACM. Alors il existe des résolutions

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{I}_X(a) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{I}_{X'}(a') \longrightarrow 0$$

où \mathcal{L} et \mathcal{L}' sont dissociés et \mathcal{N} extraverti et non dissocié. D'après le critère d'Horrocks [5], il existe $i \in [1, N - 1]$ tel que $H_*^i \mathcal{N}$ ne soit pas nul. De plus, \mathcal{N} étant extraverti, $\text{Ext}_*^1(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$ est nul, et par dualité de Serre, $H_*^{N-1} \mathcal{N}$ l'est aussi, donc on peut supposer $i \leq N - 2$.

Si X et X' ont même cohomologie, on en déduit grâce aux deux suites exactes ci-dessus un isomorphisme de S -modules gradués (de longueur finie) : $H_*^i \mathcal{N} \simeq H_*^i \mathcal{N}(a - a')$, donc nécessairement $a = a'$. Alors pour tout n on a $h^0 \mathcal{L}(n) = h^0 \mathcal{L}'(n)$ donc $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}'$.

Supposons que X et X' soient ACM. Il existe des résolutions :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{I}_{X'} \longrightarrow 0$$

où \mathcal{L} , \mathcal{L}' , \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont dissociés. Quitte à remplacer \mathcal{F} et \mathcal{F}' par $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$, on peut supposer qu'on a $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$. On conclut alors comme précédemment. \square

Remarque 2.7. — Soient X un sous-schéma fermé de pure codimension 2 de \mathbb{P}^N , sans composante immergée, ayant une résolution de type N :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow 0$$

et X' dans la même classe de biliaison que X , ayant même cohomologie. Sachant que la résolution de type N est définie «à simplification près par des facteurs inversibles» [8], on en déduit qu'il existe un faisceau dissocié \mathcal{L}' et une résolution de type N :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{N} \oplus \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{I}_{X'} \longrightarrow 0$$

Démonstration (de 2.5). — Soit

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow 0$$

une résolution de type N de X . D'après 1.8 on obtient une résolution de X' :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \oplus \mathcal{O}(-s) \longrightarrow \mathcal{N} \oplus \mathcal{O}(h-s) \longrightarrow \mathcal{I}_{X'}(h) \longrightarrow 0.$$

et d'après 2.7 une résolution de Y :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \oplus \mathcal{O}(-s) \oplus \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{N} \oplus \mathcal{O}(h-s) \oplus \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{I}_Y(h) \longrightarrow 0.$$

On va la comparer avec la résolution de X :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \oplus \mathcal{O}(h-s) \oplus \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{N} \oplus \mathcal{O}(h-s) \oplus \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow 0$$

et utiliser 2.3. Notons a et b les fonctions des deux faisceaux dissociés $\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}(h-s) \oplus \mathcal{L}'$ et $\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}(-s) \oplus \mathcal{L}'$. Elles ne diffèrent que pour $n = s-h$ et $n = s$. En particulier on a $n_0 = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid a(n) \neq b(n)\} = s-h$ et $a(n_0) > b(n_0)$. On en déduit qu'on peut faire sur Y une biliaison élémentaire strictement descendante (dont la hauteur dépend des faisceaux \mathcal{L} et \mathcal{L}') sur une hypersurface de degré $s+h-h = s$, donc aussi une biliaison $(s, -1)$ d'après 1.7.

Soit Y' le sous-schéma obtenu. Si $h > 1$, il a la même cohomologie qu'un sous-schéma obtenu à partir de X par une biliaison élémentaire $(s, h-1)$ et on peut recommencer. \square

COROLLAIRE 2.8. — *Soit X un sous-schéma ACM de pure codimension 2 de \mathbb{P}^N de degré au moins égal à 2, γ_X son caractère. Pour tout s vérifiant $s = s_0(X)$ ou $\gamma_X(s) \geq 1$, on peut faire sur X une biliaison élémentaire $(s, -1)$.*

Démonstration. — On définit un caractère γ' de la manière suivante :

– si $s = s_0(X)$ et $\gamma_X(s_0(X)) = 0$, on pose :

$$\gamma'(n) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n < 0 \\ -1 & \text{pour } 0 \leq n < s_0(X) \\ \gamma_X(n+1) & \text{pour } n \geq s_0(X); \end{cases}$$

– dans le cas contraire, on pose :

$$\gamma'(n) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n < 0 \\ -1 & \text{pour } 0 \leq n < s_0(X) - 1 \\ \gamma_X(n+1) & \text{pour } n \geq s_0(X), n \neq s-1 \\ \gamma_X(n+1) - 1 & \text{pour } n = s-1. \end{cases}$$

D'après 1.15 il existe un sous-schéma ACM X' dont c'est le caractère, et il vérifie $s_0(X') = s_0(X)$ dans le premier cas, $s_0(X') = s_0(X) - 1$ sinon, donc il est contenu dans une hypersurface de degré $\leq s$. Soit X'' obtenu à partir de X' par une biliaison élémentaire $(s, +1)$. Il a même caractère, donc même cohomologie que X , et on peut conclure par 2.5. \square

Remarque 2.9. — On voit donc que si X est ACM de codimension 2, on peut toujours faire une biliaison élémentaire descendante sur une hypersurface de degré minimal $s_0(X)$. Ce résultat n'est pas vrai si X n'est pas ACM et n'est pas minimal comme le montre l'exemple suivant : soient C une courbe localement Cohen-Macaulay de \mathbb{P}^3 non ACM et minimale, et C' obtenue par une biliaison élémentaire $(s_0(C) + 2, +1)$. On a alors $s_0(C') = s_0(C) + 1$ (cf. 1.13). Si on peut faire une biliaison élémentaire descendante $(s_0(C) + 1, -1)$, on obtient une courbe C'' ayant même module de Rao que C , donc minimale, et n'ayant pas même caractère de postulation que C .

D'après 2.4, on peut ajouter aussi dans l'énoncé du théorème 2.5 qu'on peut faire la biliaison élémentaire descendante sur toute hypersurface générale de degré s contenant Y . On peut même préciser sur quelles hypersurfaces on ne peut pas faire de biliaison élémentaire descendante. Le résultat suivant n'a pas été publié, c'est pourquoi nous le redémontrons ici :

PROPOSITION 2.10. — [7] *Soit X un sous-schémas fermé de pure codimension 2 de \mathbb{P}^N , localement de Cohen-Macaulay, et $\omega_X = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^2(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}}) =$*

$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^2(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})(-N-1)$ son faisceau dualisant. Soit Q une hypersurface de degré s d'équation q contenant X . Alors X n'admet pas de biliaison élémentaire de hauteur -1 sur Q si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

- $H^0\omega_X(N-s)$ est nul,
- il existe une décomposition $q = q_1q_2$, où q_1 et q_2 ne sont pas constants, telle que q_1 annule $H^0\omega_X(N-s)$.

Pour la démonstration nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

LEMME 2.11. — *Pour tout entier h , on a un homomorphisme surjectif :*

$$\text{Hom}(\mathcal{I}_{X/Q}, \mathcal{O}_Q(h)) \rightarrow H^0\omega_X(N+1-s+h)$$

qui est un isomorphisme si h est négatif.

Démonstration. — On applique à la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{X/Q} \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Q}(\cdot, \mathcal{O}_Q)$. On a $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Q) = 0$ et $\omega_X = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Q}^1(\mathcal{O}_X, \omega_Q) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Q}^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Q)(s-N-1)$. On obtient donc une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{I}_{X/Q}, \mathcal{O}_Q) \rightarrow \omega_X(N+1-s+h) \rightarrow 0$$

et la suite exacte de cohomologie associée :

$$0 \rightarrow H^0\mathcal{O}_Q(h) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{I}_{X/Q}, \mathcal{O}_Q(h)) \rightarrow H^0\omega_X(N+1-s+h) \rightarrow 0.$$

Si h est négatif, $H^0\mathcal{O}_Q(h) = 0$ d'où le résultat. \square

LEMME 2.12. — *Soient h un entier négatif, $u : \mathcal{I}_{X/Q} \rightarrow \mathcal{O}_Q(h)$ un homomorphisme non nul et θ la section de $\omega_X(N+1-s+h)$ qui lui correspond. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- u n'est pas injectif,
- il existe une décomposition $q = q_1q_2$, où q_1 et q_2 ne sont pas constants, telle que $q_1\theta = 0$.

Démonstration. — Si u n'est pas injectif, il en est de même de l'homomorphisme de modules : $I_X/(q)(-h) \rightarrow S/(q)$ associé, qu'on désignera encore par u . Soient g un élément de I_X dont l'image \bar{g} est un élément non nul du noyau de u et q_1 le pgcd de q et g , de sorte qu'on a $q = q_1q_2$ et $g = q_1g'$, où q_2 et g' sont premiers entre eux. Puisque \bar{g} n'est pas nul, q_1 est un diviseur strict de q , et q_2 n'est pas une constante. Pour tout f dans I_X on a $gu(\bar{f}) = fu(\bar{g}) = 0$; on en déduit que si f' relève $u(\bar{f})$, $q = q_1q_2$ divise $gf' = q_1g'f'$, donc q_2 divise $g'f'$, q_2 divise f' , et q divise q_1f' . On a donc montré que $q_1u = 0$, ce qui implique que $q_1\theta = 0$. Puisque u n'est pas nul, ceci prouve aussi que q_1 n'est pas une constante.

Inversement si $q = q_1q_2$, soient Q_1 et Q_2 les hypersurfaces correspondantes, s_1 et s_2 leurs degrés. Pour tout $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$, si on note $p_i : \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{O}_{Q_i}$ la projection canonique on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{Q_i}(-s_j) \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{O}_{Q_j} \rightarrow 0$$

où la première flèche λ_j est telle que $\lambda_j p_i$ est la multiplication par $q_j : \mathcal{O}_Q(-s_j) \rightarrow \mathcal{O}_Q$.

Soit $j : \mathcal{I}_{X/Q} \rightarrow \mathcal{O}_Q(h)$ l'injection canonique. Si $q_1\theta = 0$, $q_1u : \mathcal{I}_{X/Q}(-h) \rightarrow \mathcal{O}_Q \rightarrow \mathcal{O}_Q(s_1)$ se prolonge à $\mathcal{O}_Q(-h)$, autrement dit il existe $v : \mathcal{O}_Q(-h) \rightarrow \mathcal{O}_Q(s_1)$ tel qu'on ait $q_1u = vj$. On a alors $p_1vj = 0$, donc p_1v se factorise par la projection $\mathcal{O}_Q(-h) \rightarrow \mathcal{O}_X(-h)$ composée avec un homomorphisme $\mathcal{O}_X(-h) \rightarrow \mathcal{O}_Q$ qui est nul pour des raisons de profondeur. Alors v se factorise également par $\lambda_1 : \mathcal{O}_{Q_2} \rightarrow \mathcal{O}_Q(s_1)$, donc il existe $w : \mathcal{O}_Q(-h) \rightarrow \mathcal{O}_{Q_2}$ tel qu'on ait $v = \lambda_1w$. Puisque h est négatif, w est nul ainsi que $q_1u = \lambda_1p_2u$ et p_2u . Mais un homomorphisme $\mathcal{I}_{X/Q}(-h) \rightarrow \mathcal{O}_{Q_1}(-s_2)$ ne peut pas être injectif, car le support schématique de $\mathcal{I}_{X/Q}$ contient strictement celui de \mathcal{O}_{Q_1} . \square

Démonstration (de 2.10). — Une biliaison élémentaire de hauteur h sur Q peut être vue comme un homomorphisme injectif $u : \mathcal{I}_{X/Q} \rightarrow \mathcal{O}_Q(h)$. Si X n'admet pas de biliaison élémentaire de hauteur -1 sur Q , pour tout θ non nul dans $H^0\omega_X(N+1-s+h)$, il existe une décomposition $q = q_{1,\theta}q_{2,\theta}$, où $q_{1,\theta}$ et $q_{2,\theta}$ ne sont pas constants, telle que $q_{1,\theta}\theta = 0$. On en déduit facilement le résultat, sachant que q n'a qu'un nombre fini de diviseurs. \square

Bibliographie

- [1] GRUSON (L.), PESKINE (C.). — Genre des courbes de l'espace projectif, LN 687, Springer Verlag 1977, 31-59.
- [2] HARTSHORNE (R.). — Generalized Divisors on Gorenstein Schemes, *K-Theory* 8, 287-339 (1994).
- [3] HARTSHORNE (R.). — On Rao's theorems and the Lazarsfeld-Rao property, *Annales de Toulouse*, Vol.XII, n°3, 375-393 (2003).
- [4] HARTSHORNE (R.), MARTIN-DESCHAMPS (M.), PERRIN (D.). — Un théorème de Rao pour les familles de courbes gauches, *Journal of Pure and Applied Algebra* 155, 53-76 (2001).
- [5] HORROCKS (G.). — Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring, *Proc. Lond. Math. Soc.* 14, 689-713 (1964).
- [6] LAZARSFELD (R.), RAO (A.P.). — Linkage of general curves of large degree, *Lecture Notes* 997, Springer Verlag, 1983, 267-289.
- [7] MARTIN-DESCHAMPS (M.). — Minimalité des courbes sous-canoniques, preprint AG/0102221, 2001.
- [8] MARTIN-DESCHAMPS (M.), PERRIN (D.). — Sur la classification des courbes gauches, *Astérisque*, Vol. 184-185, 1990.
- [9] MIGLIORE (J.). — Introduction to liaison theory and deficiency modules, *Progress in Mathematics* 165, Birkhäuser 1998.
- [10] NOLLET (S.). — Even linkage classes, *Trans. AMS* 348, 1137-1162 (1996).
- [11] RAO (A.P.). — Liaison among curves in \mathbb{P}^3 , *Invent. Math.*, Vol. 50, 205-217 (1979).
- [12] RAO (A.P.). — Liaison equivalence classes, *Math. Ann.* 258, 169-173 (1981).
- [13] STRANO (R.). — Biliaison classes of curves in \mathbb{P}^3 , *Proc. AMS* 132, 649-658 (2004).