ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

LAURENT DANIELO

Construction de métriques d'Einstein à partir de transformations biconformes

Tome XV, nº 3 (2006), p. 553-588.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2006_6_15_3_553_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XIV, n° 3, 2006
pp. 553–588

Construction de métriques d'Einstein à partir de transformations biconformes[*]

LAURENT DANIELO[1]

RÉSUMÉ. — L'objectif de cet article est de proposer une nouvelle méthode de construction de métriques d'Einstein. Le procédé consiste à considérer un morphisme harmonique $\varphi : (M, g) \to (N, h)$; on déforme ensuite biconformément la métrique g en $\widetilde{g}$, en conservant l'harmonicité, ce qui simplifie le calcul de la courbure de Ricci. L'équation $\widetilde{\mathrm{Ric}} = C\widetilde{g}$ se traduit alors en un système différentiel en termes des paramètres de la déformation. On montre d'abord l'existence de solutions par un procédé dynamique. Puis, on résout ce système dans des exemples en dimension 4, exhibant ainsi des métriques d'Einstein.

ABSTRACT. — We give a new method for constructing Einstein metrics as follows. Given a harmonic morphism $\varphi : (M, g) \to (N, h)$, we deform the metric g biconformally in such a way as to preserve harmonicity. The condition that the new metric be Einstein determines a first order system in terms of the scaling factors of the deformation. By choosing our initial metric g conveniently, and with assumptions on the scaling factors, this system corresponds to a dynamical system. In such cases we are able to establish local existence of solutions. We describe some explicit cases which correspond to Einstein metrics in dimension 4.

0. Introduction

Le cadre général de cet article est celui des variétés riemanniennes admettant des morphismes harmoniques. Un morphisme harmonique est une application qui préserve l'équation de Laplace (on peut aussi le caractériser comme préservant le mouvement brownien, cf. [2]). On choisit ici est la caractérisation donnée par Fuglede [5] et Ishihara [11] :

Soit M et N deux variétés riemanniennes, munies respectivement des métriques g et h. L'application $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ est un morphisme har-

(*) Reçu le 30 août 2004, accepté le 27 septembre 2005

(1) Université de Bretagne Occidentale, Laboratoire de Mathématiques (UMR 6205), 6 avenue Victor Le Gorgeu, 29238 BREST Cedex 3, France.
E-mail : Laurent.Danielo@univ-brest.fr

monique si et seulement si φ est à la fois semi-conforme (ou horizontalement faiblement conforme) et harmonique.

Définition 0.1. — *Soit* $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ *une application lisse. On dit que* φ *est* semi-conforme *si, pour tout* $x \in M$ *,*

ou bien $\mathrm{d}\varphi_x = 0$ *(i.e.* x *est un point singulier),*

ou bien $\mathrm{d}\varphi_x$ *est surjective et il existe* $\Lambda(x) \neq 0$ *, tel que*

$$h\big(\mathrm{d}\varphi_x(X), \mathrm{d}\varphi_x(Y)\big) = \Lambda(x)\, g(X,Y) \ , \ \text{où } X, Y \in \big(\mathrm{Ker}(\mathrm{d}\varphi_x)\big)^{\perp} .$$

En posant $\Lambda(x) = 0$ *si* x *est un point singulier, la fonction* $\lambda = \sqrt{\Lambda}$ *est appelée la* dilatation *de* φ*.*

Les travaux de Gudmundsson (cf. [7] et [8]) puis de Radu Pantilie (cf. [13] et [14]) ont montré qu'il était possible d'exprimer la courbure de Ricci d'une variété riemannienne admettant un morphisme harmonique submersif en fonction de la courbure de Ricci du codomaine et de la dilatation. De façon générale, il convient de faire des hypothèses pour faciliter ce calcul (une possibilité, étudiée par L.Bérard-Bergery, est de supposer des symétries dans le groupe des isométries de la variété, voir [1] ou [3])

La construction proposée est la suivante :

Soit $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ un morphisme harmonique submersif. Soit $\mathcal{V} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}\varphi$ et $\mathcal{H} = \mathcal{V}^{\perp}$, les distributions verticale et horizontale. On déforme triconformément les métriques respectives de M et de N en $\widetilde{g}$ et $\widetilde{h}$ (i.e. on fait un changement conforme sur h et chacune des composantes de g sur les distributions $\mathcal{V}$ et $\mathcal{H}$) :

$$\widetilde{g} = \sigma^{-2}\, g^{\mathcal{H}} + \rho^{-2}\, g^{\mathcal{V}} \quad \text{et} \quad \widetilde{h} = \bar{\nu}^{-2}\, h \,.$$

On suppose que le changement conserve l'harmonicité de φ. L'équation $\widetilde{\mathrm{Ric}} = C\widetilde{g}$ fournit alors un système différentiel vérifié par les fonctions σ, ρ et ν ($\nu = \bar{\nu} \circ \varphi$). Ce système, associé à la condition d'harmonicité, est *a priori* surdéterminé.

Le but de ce papier est de montrer l'existence de solutions, et de résoudre explicitement ce système dans des cas précis où les fibres sont de dimension 1.

Dans une première partie, on rappelle quelques résultats sur les applications semi-conformes et sur les morphismes harmoniques, parmi lesquels les différentes formules pour la courbure de Ricci. En deuxième partie, on définira les changements biconformes et triconformes. On donnera l'expression de la nouvelle connexion de Levi-Cevita obtenue sur $(M,\widetilde{g})$, ainsi que les modifications du Laplacien et des autres opérateurs présents dans la formule de la courbure.

La troisième partie sera l'occasion de décrire l'obtention de l'expression de la courbure de Ricci de $(M,\widetilde{g})$, à partir des courbures initiales de (M,g) et (N,h), et des paramètres du changement. La méthode est ensuite développée dans deux exemples où l'on déforme la métrique euclidienne : le premier est la projection $\mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $(t,x_2,x_3,x_4) \longmapsto (t,x_2,x_3)$; le deuxième est l'application de Hopf de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$. Dans les deux cas, on suppose que les fonctions σ, ρ et ν ne dépendent que d'un paramètre horizontal (t pour la projection, et le rayon r pour l'application de Hopf). Tout d'abord, on prouve, par une méthode dynamique, que le système différentiel ordinaire obtenu admet localement des solutions pour tout C, i.e. la « classe biconforme » de la métrique euclidienne contient des métriques d'Einstein de constante quelconque.

Plus précisément, la résolution directe dans le cas de la projection donne le résultat suivant :

Théorème 0.2. — *Soit $\varphi : (t,x_2,x_3,x_4) \mapsto (t,x_2,x_3)$, de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$, munis de leurs métriques euclidiennes g et h. Soit $\widetilde{g} = \sigma^{-2}(\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2) + \rho^{-2}\mathrm{d}x_4^2$ et $\widetilde{h} = \nu^{-2} h$, où σ, ρ et ν sont des fonctions positives de t. Alors, $\varphi : (\mathbf{R}^4,\widetilde{g}) \longrightarrow (\mathbf{R}^3,\widetilde{h})$ est un morphisme harmonique et $\widetilde{g}$ est une métrique d'Einstein, de constante C, si et seulement si (σ,ρ,ν) vérifie les deux propriétés suivantes :*

(I) *σ est solution de l'équation elliptique $(\sigma')^2 = A\,\sigma^3 - \dfrac{C}{3}$ (résolue par la fonction $\wp$ de Weierstrass), avec A une constante,*

(II) $(\ln\rho)' = -\dfrac{1}{2}\,\Big(\dfrac{\sigma'}{\sigma}+\dfrac{C}{\sigma\,\sigma'}\Big)$, *et* $\nu = a\,\sigma\,\rho$, *avec $a>0$ une constante.*

Pour la fibration de Hopf définie dans un système de coordonnées adaptées par $\varphi\big(r(\cos s)\,e^{i\alpha}, r(\sin s)\,e^{i\kappa}\big) = r^2\,\big(\cos 2s\,,(\sin 2s)\,e^{i(\alpha-\kappa)}\big)$, on obtient en particulier des solutions de la forme :

$\sigma = k\,r^2/(1{+}ar^4)^{1/2}$, $\rho = k\,r^2(1{+}ar^4)^{1/2}/(1{-}ar^4)$, avec $a,k>0$ constantes,

correspondant à une famille de métriques Ricci-plates sur la boule $B^4(a^{-\frac{1}{4}})$

(dégénérées sur le bord) :

$$\begin{aligned}\widetilde{g} \;&=\; \frac{1+a\,r^4}{k^2\,r^4}\,\Big(\mathrm{d}r^2+r^2\,\mathrm{d}s^2+\frac{r^4}{4}\,\sin^2(2s)\,(\mathrm{d}\kappa-\mathrm{d}\alpha)^2\,\Big)\\ &\qquad +\,\frac{(1-a\,r^4)^2}{k^2\,r^2(1+a\,r^4)}\,(\cos^2 s\,\mathrm{d}\kappa+\sin^2 s\,\mathrm{d}\alpha)^2\,.\end{aligned}$$

En complément, on propose d'autres exemples avec des fibres de dimension 2. Dans ces derniers, les solutions ne sont pas toujours explicites ; cependant, on peut trouver des familles de solutions à partir d'un système différentiel d'ordre 1 dans le plan.

1. Morphismes harmoniques et courbure

Pour cette partie qui traite de la théorie des morphismes harmoniques, on se réfère au chapitre 11 du livre de Paul Baird et John C. Wood [4].

1.1. Définitions et notations

Dans la suite, $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ désignera une application semi-conforme entre les variétés riemanniennes M et N, de dimensions respectives m et n, telles que $1 \leqslant n \leqslant m$, et munies des métriques g et h.

Notations 1.1. — Soit $\mathcal{V} = \operatorname{Ker} \mathrm{d}\varphi$ et $\mathcal{H} = \mathcal{V}^\perp$, les distributions verticale et horizontale.

E, F, G désigneront des champs de vecteurs quelconques de TM, X, Y, Z, T des champs horizontaux et U, V, W, des champs verticaux (le long des fibres de φ).

Pour $x \in M$, $\{e_i\}_{i=1,\dots,m}$ désigne une base orthonormée en x ; de même $\{e_a\}_{a=1,\dots,n}$ et $\{e_r\}_{r=n+1,\dots,m}$ désignent des bases orthonormées horizontale et verticale en x, adaptées aux distributions $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$.

$\mathcal{H}E$ et $\mathcal{V}E$ désignent les projections orthogonales de E sur les distributions $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$.

Soit E un champ de vecteurs et f une fonction, la dérivée de f le long du champ E sera indifféremment notée $\mathrm{d}f(E)$ ou $E(f)$.

∇^M (ou ∇ s'il n'y a pas d'ambiguïté) est la connexion de Levi-Cevita de (M, g).

L'opérateur de Laplace Δ sur (M,g) est choisi avec la convention de signe : $\Delta f = +\sum_i \big(e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)\big)$.

On note respectivement Ric^M, Ric^N et $\mathrm{Ric}^{\mathcal{V}}$, les courbures de Ricci de M, de N et des fibres de φ.

DÉFINITION 1.2. — *Les secondes formes fondamentales des distributions horizontales et verticales sont appelées A et B, définies par :*

$$A_E F = \mathcal{V}(\nabla^M_{\mathcal{H}E}\mathcal{H}F)\ , \quad B_E F = \mathcal{H}(\nabla^M_{\mathcal{V}E}\mathcal{V}F)\,.$$

Remarque 1.3. — A et B sont tensoriels. La distribution verticale étant intégrable, B est symétrique en E et F. De plus, B est identiquement nul si et seulement si les fibres de φ sont totalement géodésiques.

DÉFINITION 1.4. — *On désigne par I le tenseur d'intégrabilité de la distribution horizontale $\mathcal{H}$: $I(X,Y) = \mathcal{V}[X,Y]$.*

DÉFINITION 1.5. — *Les adjoints des applications linéaires A_E et B_E sont notés A^*_E et B^*_E. Ainsi,*

$$A^*_E F = -\mathcal{H}(\nabla^M_{\mathcal{H}E}\mathcal{V}F)\ , \quad B^*_E F = -\mathcal{V}(\nabla^M_{\mathcal{V}E}\mathcal{H}F)\,.$$

1.2. Courbure de Ricci

Dans le cadre décrit dans le paragraphe précédent, on peut calculer la courbure de Ricci.

THÉORÈME 1.6 (Pantilie, Baird-Wood). — *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ un morphisme harmonique submersif, de dilatation λ. Pour $x \in M$, soit X, Y des vecteurs horizontaux en x et U, V des vecteurs verticaux en x. Alors,*

$$\begin{aligned}
\text{(i)}\quad \mathrm{Ric}^M(U,V) \;=\;& \mathrm{Ric}^{\mathcal{V}}(U,V) + \sum_a g\big((\nabla_{e_a} B^*)_U e_a, V\big)\\
&+2(n-1)\mathrm{d}\ln\lambda(B_U V) + n\nabla\mathrm{d}\ln\lambda(U,V)\\
&-n\,U(\ln\lambda)V(\ln\lambda)\\
&+\frac{1}{4}\sum_{a,b} g\big(U, I(e_a,e_b)\big)\, g\big(V, I(e_a,e_b)\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)}\quad \mathrm{Ric}^M(X,U) &= 2\nabla \mathrm{d}\ln\lambda(U,X)+(n-2)\,\mathrm{d}\ln\lambda(B_U^*X)\\
&\quad -n\,\mathrm{d}\ln\lambda(A_X^*U)-\sum_r g\big((\nabla_{e_r}B)_U e_r, X\big)\\
&\quad +\sum_a g\big(B_U^* e_a, I(X,e_a)\big)+\sum_a g\big((\nabla_{e_a}A)_X e_a, U\big)\\
\text{(iii)}\quad \mathrm{Ric}^M(X,Y) &= \mathrm{Ric}^N(\mathrm{d}\varphi(X),\mathrm{d}\varphi(Y))+g(X,Y)\Delta\ln\lambda\\
&\quad -(n-2)X(\ln\lambda)Y(\ln\lambda)-\sum_r g(B_{e_r}^*X, B_{e_r}^*Y)\\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_a g\big(I(X,e_a),I(Y,e_a)\big)\,.
\end{aligned}$$

Dans la suite de cette partie, on s'intéresse au cas des fibres de dimension 1, où $\varphi : M^{n+1} \to N^n$.

Définition 1.7. — *Soit $\varphi : M^{n+1} \to N^n$ une submersion semi-conforme de dilatation λ. Étant choisie une orientation locale sur les fibres. Soit U le champ de vecteurs vertical, unitaire, orienté positivement. $V = \lambda^{n-2}U$ est appelé* le champ de vecteurs vertical fondamental.

Lemme 1.8. — *En prenant les notations précédentes, φ est un morphisme harmonique si et seulement si $[X,V] = 0$ pour tout champ de vecteurs de base horizontal X de TM.*

Définition 1.9. — *On note θ la 1-forme duale du champ V. Soit $\Omega = \mathrm{d}\theta$. Cette 2-forme Ω est appelée* forme d'intégrabilité.

Lemme 1.10. — *Soit X, Y deux champs de vecteurs horizontaux et W un champ de vecteurs vertical, en un point. Alors,*

(i) $\quad \Omega(X,Y) = -g(V,[X,Y])/|V|_g^2$

(ii) $\quad i_W\Omega = 0, \quad$ *i.e.* $\quad \Omega(X,W) = 0\,.$

Définition 1.11. — *Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée, e_a et e_b désignant des vecteurs horizontaux. La divergence et la norme de Ω sont données par :*

$$-\mathrm{d}^*\Omega = \sum_i (\nabla_{e_i}\Omega)(e_i,\,.\,)\ ,\ \text{ et }\quad |\Omega|_g^2 = \sum_{a,b}\Omega(e_a,e_b)^2\ .$$

On est alors en mesure d'exprimer la courbure de Ricci en termes de Ω.

Théorème 1.12 (Pantilie, Baird-Wood). — *Soit $\varphi : (M^{n+1}, g) \longrightarrow (N^n, h)$ un morphisme harmonique submersif de dilatation λ. Une orientation des fibres étant donnée, soit X, Y des champs de vecteurs horizontaux, U le champ de vecteurs unitaire vertical orienté positivement, et $V = \lambda^{n-2}U$ le champ de vecteurs vertical fondamental. Alors,*

$$\begin{array}{rrcl}
\text{(i)} & \mathrm{Ric}^M(U,U) & = & -(n-2)\Delta \ln\lambda + 2(n-1)U\big(U(\ln\lambda)\big) \\
 & & & -n(n-1)|\mathcal{V}\mathrm{grad}_g \ln\lambda|_g^2 + \dfrac{1}{4}\lambda^{2n-4}|\Omega|_g^2 \\
\text{(ii)(a)} & \mathrm{Ric}^M(X,U) & = & (n-1)\nabla\mathrm{d}\ln\lambda(X,U) - (n-1)X(\ln\lambda)U(\ln\lambda) \\
 & & & +\dfrac{1}{2}\lambda^{2n-4}\big\{\mathrm{d}^*\Omega(X) + (3n-5)\Omega(X, \mathrm{grad}_g \ln\lambda)\big\} \\
\text{(ii)(b)} & \mathrm{Ric}^M(X,V) & = & -(n-1)(n-2)X(\ln\lambda)V(\ln\lambda) \\
 & & & +(n-1)X\big(V(\ln\lambda)\big) \\
 & & & +\dfrac{1}{2}\lambda^{n-2}\big\{\mathrm{d}^*\Omega(X) + 2(n-2)\Omega(X, \mathrm{grad}_g \ln\lambda)\big\} \\
\text{(iii)} & \mathrm{Ric}^M(X,Y) & = & \mathrm{Ric}^N(\mathrm{d}\varphi(X), \mathrm{d}\varphi(Y)) + g(X,Y)\Delta\ln\lambda \\
 & & & -(n-1)(n-2)X(\ln\lambda)Y(\ln\lambda) \\
 & & & -\dfrac{1}{2}\lambda^{2n-4}g(i_X\Omega, i_Y\Omega)\,.
\end{array}$$

Par la suite, on cherche à déterminer ce que deviennent les formules précédentes après changement triconforme de g et h.

2. Transformations biconformes et triconformes

Les transformations biconformes généralisent les changements conformes sur une variété riemannienne admettant des distributions orthogonales, en permettant de faire varier indépendamment les composantes horizontale et verticale de sa métrique.

2.1. Conservation des propriétés des morphismes harmoniques

Définition 2.1. — *Soit (M^m, g) une variété riemannienne dont l'espace tangent admet une décomposition orthogonale du type $TM = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$.*

Soit $g = g^{\mathcal{H}} + g^{\mathcal{V}}$ une décomposition adaptée de la métrique. On appelle transformation biconforme *de g, tout changement $g \mapsto \widetilde{g}$ tel que*

$$\widetilde{g} = \sigma^{-2} g^{\mathcal{H}} + \rho^{-2} g^{\mathcal{V}}$$

où σ, ρ sont des fonctions réelles positives sur M.

Définition 2.2 *Soit $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une submersion semi-conforme, de dilatation λ. On considère la décomposition suivante de la métrique de M, $g = g^{\mathcal{H}} + g^{\mathcal{V}}$, en ces composantes horizontale et verticale. On définit alors des nouvelles métriques sur M et N par*

$$\text{(a)}\quad \widetilde{g} = \sigma^{-2} g^{\mathcal{H}} + \rho^{-2} g^{\mathcal{V}}\,, \qquad \text{(b)}\quad \widetilde{h} = \bar{\nu}^{-2} h\,, \tag{2.1}$$

où σ, ρ sont des fonctions positives sur M et $\bar{\nu}$ est une fonction positive sur N.

(i) *Une telle transformation est appelée* triconforme.

(ii) *Si $\bar{\nu} \equiv 1$, on parle simplement de transformation biconforme de g.*

Remarques 2.3. —

(i) Si $\sigma = \rho$, on est ramené à un simple changement conforme sur M. Les formules pour la courbure de Ricci sont alors connues (cf. par exemple Besse [3] ou Hebey [9])

(ii) Un changement biconforme ou triconforme préserve la semi-conformalité (et les distributions $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$).

Lemme 2.4. — *Soit $\varphi : M \to N$, comme à la définition 2.2. On considère un changement triconforme $g \mapsto \widetilde{g}$ et $h \mapsto \widetilde{h}$. Soit $\nu = \bar{\nu} \circ \varphi$. Alors, $\varphi : (M^m, \widetilde{g}) \to (N^n, \widetilde{h})$ est une application semi-conforme de dilatation $\widetilde{\lambda} = \lambda \sigma \nu^{-1}$.*

En revanche, l'harmonicité n'est pas nécessairement conservée.

Proposition 2.5 (Mo [12], Baird-Wood [4]). — *Soit $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ un morphisme harmonique submersif. On considère un changement triconforme donné par (2.1). Alors, l'application $\varphi : (M^m, \widetilde{g}) \to (N^n, \widetilde{h})$ est un morphisme harmonique si et seulement si* $\mathrm{grad}(\sigma^{2-n} \rho^{n-m} \nu^{n-2})$ *est vertical, i.e. si et seulement si la fonction $\sigma^{2-n} \rho^{n-m} \nu^{n-2}$ est constante le long des courbes horizontales.*

2.2. Changement de connexion par une transformation biconforme.

Soit (M,g) une variété riemannienne ayant les mêmes propriétés qu'à la définition 2.1. On change biconformément la métrique en $\widetilde{g} = \sigma^{-2}g^{\mathcal{H}} + \rho^{-2}g^{\mathcal{V}}$. On calcule alors $\widetilde{\nabla}$ la connexion de Levi-Cevita de $(M,\widetilde{g})$ en fonction de ∇. De même, on notera $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ les secondes formes fondamentales des distributions horizontale et verticale pour $\widetilde{g}$. On suppose de plus que $\mathcal{V}$ est intégrable.

On pose $\widetilde{e}_a = \sigma e_a$, et $\widetilde{e}_r = \rho e_r$, les vecteurs de base horizontaux et verticaux pour $\widetilde{g}$.

Proposition 2.6. — *Les composantes de la connexion $\widetilde{\nabla}$ sont données par :*

$$\begin{array}{lrcl}
\text{(i)(a)} & g(e_c, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_b) & = & \sigma^2\, g(e_c, \nabla_{e_a}e_b) + \sigma e_c(\sigma)\, g(e_a,e_b) \\
& & & -\sigma e_b(\sigma)\, g(e_c,e_a) \\
\text{(ii)(a)} & g(e_r, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_b) & = & \dfrac{1}{2}(\sigma^2+\rho^2)\, g(e_r, \nabla_{e_a}e_b) \\
& & & -\dfrac{1}{2}(\sigma^2-\rho^2)\, g(e_r, \nabla_{e_b}e_a) + \rho^2 e_r(\ln\sigma)\, g(e_a,e_b) \\
\text{(iii)(a)} & g(e_a, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_r}\widetilde{e}_b) & = & \rho\sigma\, g(e_a, \nabla_{e_r}e_b) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sigma}{\rho}(\sigma^2-\rho^2)\, g(e_a, \nabla_{e_b}e_r) \\
& & & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\sigma}{\rho}(\sigma^2-\rho^2)\, g(e_b, \nabla_{e_a}e_r) \\
\text{(iv)(a)} & g(e_a, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_b}\widetilde{e}_r) & = & \dfrac{1}{2}\dfrac{\sigma}{\rho}(\sigma^2+\rho^2)\, g(e_a, \nabla_{e_b}e_r) \\
& & & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\sigma}{\rho}(\sigma^2-\rho^2)\, g(e_b, \nabla_{e_a}e_r) \\
& & & +\rho e_r(\sigma)\, g(e_a,e_b) \\
\text{(i)(b)} & g(e_t, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_r}\widetilde{e}_s) & = & \rho^2\, g(e_t, \nabla_{e_r}e_s) + \rho e_t(\rho)\, g(e_s,e_r) \\
& & & -\rho e_s(\rho)\, g(e_t,e_r) \\
\text{(ii)(b)} & g(e_a, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_r}\widetilde{e}_s) & = & \sigma^2\, g(e_a, \nabla_{e_r}e_s) + \sigma^2 e_a(\ln\rho)\, g(e_r,e_s) \\
\text{(iii)(b)} & g(e_r, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_s) & = & \sigma\rho\, g(e_r, \nabla_{e_a}e_s) \\
\text{(iv)(b)} & g(e_r, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_s}\widetilde{e}_a) & = & \sigma\rho\, g(e_r, \nabla_{e_s}e_a) - \sigma e_a(\rho)\, g(e_r,e_s)\,.
\end{array}$$

Démonstration . — Les formules (*)(b) se déduisent des formules (*)(a), « par symétrie », en transposant a,b,c en r,s,t , σ en ρ et inversement.

La simplification des termes dans (ii)(b), (iii)(b) et (iv)(b) viennent de l'intégrabilité de $\mathcal{V}$. Il suffit donc de prouver les quatre premières égalités.

L'argument principal de la preuve est l'invariance de la dérivée de Lie, notée $\mathcal{L}$, quelle que soit la connexion ∇ ou $\widetilde{\nabla}$. On détaille les calculs pour (i)(a) :

Soit f une fonction,

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{L}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_b\big)(f) &= \widetilde{e}_a\big(\widetilde{e}_b(f)\big)-\widetilde{e}_b\big(\widetilde{e}_a(f)\big) = \sigma e_a\big(\sigma e_b(f)\big)-\sigma e_b\big(\sigma e_a(f)\big) \\ &= \sigma^2\mathcal{L}_{e_a}e_b(f)+\sigma e_a(\sigma)e_b(f)-\sigma e_b(\sigma)e_a(f)\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathcal{L}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_b = \sigma^2\mathcal{L}_{e_a}e_b+\sigma e_a(\sigma)e_b-\sigma e_b(\sigma)e_a\,. \tag{2.2}$$

Par ailleurs,

$$\widetilde{g}(\widetilde{e}_c,\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_b) = \frac{1}{2}\big(\widetilde{g}(\widetilde{e}_c,\mathcal{L}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_b)+\widetilde{g}(\widetilde{e}_b,\mathcal{L}_{\widetilde{e}_c}\widetilde{e}_a)-\widetilde{g}(\widetilde{e}_a,\mathcal{L}_{\widetilde{e}_b}\widetilde{e}_c)\big)\,. \tag{2.3}$$

Les vecteurs $\widetilde{e}_a=\sigma e_a$ (de même pour b et c) sont horizontaux ; donc

$$\widetilde{g}(\widetilde{e}_a,\,.\,)=\widetilde{g}^{\mathcal{H}}(\widetilde{e}_a,\,.\,)=\frac{1}{\sigma^2}\,g(\sigma e_a,\,.\,)=\frac{1}{\sigma}\,g(e_a,\,.\,)\,.$$

Ainsi, en remplaçant dans (2.3) les expressions de $\mathcal{L}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_b$, de $\mathcal{L}_{\widetilde{e}_c}\widetilde{e}_a$, et de $\mathcal{L}_{\widetilde{e}_b}\widetilde{e}_c$ par celles obtenues par la formule (2.2), on obtient, après simplifications, la formule (i)(a) :

$$\begin{aligned}g(e_c,\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_b) &= \sigma\,\widetilde{g}(\widetilde{e}_c,\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_b) \\ &= \sigma^2\,g(e_c,\nabla_{e_a}e_b)+\sigma e_c(\sigma)\,g(e_a,e_b)-\sigma e_b(\sigma)\,g(e_c,e_a)\end{aligned}$$

Les autres formules sont obtenues par une méthode similaire. □

On exprime, à présent, les tenseurs $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$, et leurs adjoints $\widetilde{A}^*$ et $\widetilde{B}^*$.

Proposition 2.7. — *Pour $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$, on a*

$$\begin{aligned}
(\mathrm{a_{ii}})\quad \widetilde{A}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_b &= \frac{1}{2}(\sigma^2+\rho^2)\,\mathcal{V}(\nabla_{e_a}e_b)-\frac{1}{2}(\sigma^2-\rho^2)\,\mathcal{V}(\nabla_{e_b}e_a) \\
&\quad +\rho^2\,g(e_a,e_b)\,\mathcal{V}(\operatorname{grad}\ln\sigma) \\
(\mathrm{a_{iv}})\quad \widetilde{A}^*_{\widetilde{e}_b}\widetilde{e}_r &= \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\rho}(\sigma^2+\rho^2)\,\mathcal{H}(\nabla_{e_b}e_r)-\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\rho}(\sigma^2-\rho^2)\sum_a g(e_b,\nabla_{e_a}e_r)\,e_a \\
&\quad +\rho e_r(\sigma)\,e_b \\
(\mathrm{b_{ii}})\quad \widetilde{B}_{\widetilde{e}_r}\widetilde{e}_s &= \sigma^2\,\mathcal{H}(\nabla_{e_r}e_s)+\sigma^2\,g(e_r,e_s)\,\mathcal{H}(\operatorname{grad}\ln\rho) \\
(\mathrm{b_{iv}})\quad \widetilde{B}^*_{\widetilde{e}_s}\widetilde{e}_a &= -\sigma\rho\,\mathcal{V}(\nabla_{e_s}e_a)+\sigma e_a(\rho)\,e_s\,.
\end{aligned}$$

Démonstration . — Les expressions (a_{ii}), (a_{iv}), (b_{ii}), et (b_{iv}) se déduisent des formules (ii)(a), (iv)(a), (ii)(b) et (iv)(b) de la proposition 2.6, respectivement.

On montre, par exemple, la première (a_{ii}).

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_b &= \mathcal{V}(\widetilde{\nabla}_{\mathcal{H}\widetilde{e}_a}\mathcal{H}\widetilde{e}_b) = \mathcal{V}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_b) = \sum_r \underbrace{g(e_r, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_b)}_{\text{connu par (ii)(a)}} \; e_r \\
&= \sum_r \Big[\frac{1}{2}(\sigma^2+\rho^2)\, g(e_r, \nabla_{e_a}e_b) - \frac{1}{2}(\sigma^2-\rho^2)\, g(e_r, \nabla_{e_b}e_a) \\
&\qquad + \rho^2 e_r(\ln\sigma)\, g(e_a,e_b)\Big]\, e_r \\
&= \frac{1}{2}(\sigma^2+\rho^2)\, \mathcal{V}(\nabla_{e_a}e_b) - \frac{1}{2}(\sigma^2-\rho^2)\, \mathcal{V}(\nabla_{e_b}e_a) \\
&\qquad + \rho^2\, g(e_a,e_b)\, \mathcal{V}(\operatorname{grad}\ln\sigma)\,.
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.8. — *Les quatre autres formules de la proposition* 2.6 *donnent aussi les expressions suivantes.*

$$\begin{aligned}
(\mathrm{a_i}) \quad \mathcal{H}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_b) &= \sigma^2\, \mathcal{H}(\nabla_{e_a}e_b) + \sigma^2\, g(e_a,e_b)\, \mathcal{H}(\operatorname{grad}\ln\sigma) - \sigma e_b(\sigma)\, e_a \\
(\mathrm{a_{iii}}) \quad \mathcal{H}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_r}\widetilde{e}_b) &= \sigma\,\rho\, \mathcal{H}(\nabla_{e_r}e_b) + \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\rho}(\sigma^2-\rho^2)\, \mathcal{H}(\nabla_{e_b}e_r) \\
&\quad - \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\rho}(\sigma^2-\rho^2) \sum_a g(e_b, \nabla_{e_a}e_r)\, e_a \\
(\mathrm{b_i}) \quad \mathcal{V}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_r}\widetilde{e}_s) &= \rho^2\, \mathcal{V}(\nabla_{e_r}e_s) + \rho^2\, g(e_s,e_r)\, \mathcal{V}(\operatorname{grad}\ln\rho) - \rho e_s(\rho)\, e_r \\
(\mathrm{b_{iii}}) \quad \mathcal{V}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_s) &= \sigma\rho\, \mathcal{V}(\nabla_{e_a}e_s)\,.
\end{aligned}$$

2.3. Laplacien et changement biconforme

Pour cette section, on reprend les notations de la section précédente 2.2, avec (M,g) une variété riemannienne et $\widetilde{g}$ une nouvelle métrique obtenue par transformation biconforme.

Définition 2.9. — *Soit $f : M \to \mathbf{R}$ une fonction lisse. Pour tout $x \in M$, on définit le Laplacien vertical de f en x par*

$$\Delta^{\mathcal{V}} f = \Delta^F(f|_F)\,.$$

où $F = \varphi^{-1}(\varphi(x))$ est la fibre de f en x, et où Δ^F est le Laplacien sur F.

Proposition 2.10. — *Soit $\widetilde{\Delta}$ l'opérateur de Laplace sur $(M,\widetilde{g})$. Soit f une fonction sur M. Alors,*

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta} f &= \sigma^2\,\Delta f + (\rho^2-\sigma^2)\Big(\Delta^{\mathcal{V}} f - \mathrm{d}f\big(\mathrm{Tr}^{\mathcal{H}} A\big)\Big)\\ &\quad -\sigma^2\,\mathrm{d}f\big(\mathcal{H}\mathrm{grad}\ln(\sigma^{n-2}\,\rho^{m-n})\big) - \rho^2\,\mathrm{d}f\big(\mathcal{V}\mathrm{grad}\ln(\sigma^{n}\,\rho^{m-n-2})\big)\,.\end{aligned}$$

Démonstration . — On sépare l'expression du Laplacien en termes horizontaux et verticaux.

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta} f &= \sum_a \big(\widetilde{e}_a(\widetilde{e}_a(f)) - (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_a)(f)\big) + \sum_r \big(\widetilde{e}_r(\widetilde{e}_r(f)) - (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_r}\widetilde{e}_r)(f)\big)\\ &= \sum_a \Big(\sigma^2 e_a(e_a(f)) + \sigma^2 e_a(\ln\sigma)e_a(f) - \mathrm{d}f\big(\mathcal{H}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_a)\big) - \mathrm{d}f\big(\mathcal{V}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_a)\big)\Big)\\ &\quad+\sum_r \Big(\rho^2 e_r(e_r(f)) + \rho^2 e_r(\ln\rho)e_r(f) - \mathrm{d}f\big(\mathcal{H}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_r}\widetilde{e}_r)\big) - \mathrm{d}f\big(\mathcal{V}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_r}\widetilde{e}_r)\big)\Big)\,.\end{aligned}$$

Avec les formules des propositions du 2.2, on obtient $\mathcal{H}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_a)$, $\mathcal{V}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}_a)$, $\mathcal{H}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_r}\widetilde{e}_r)$, et $\mathcal{V}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_r}\widetilde{e}_r)$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta} f &= \sigma^2\sum_a \Big(e_a(e_a(f)) - \big(\mathcal{H}(\nabla_{e_a}e_a)\big)(f)\Big) + \sigma^2 \underbrace{\sum_a \big(2e_a(\ln\sigma)e_a(f)\big)}_{=2\mathrm{d}f(\mathcal{H}(\mathrm{grad}\ln\sigma))}\\ &\quad -\sigma^2\,n\,\mathrm{d}f(\mathcal{H}(\mathrm{grad}\ln\sigma))\\ &\quad -\rho^2\sum_a \big(\mathcal{V}(\nabla_{e_a}e_a)\big)(f) - n\,\rho^2\,\mathrm{d}f(\mathcal{V}(\mathrm{grad}\ln\sigma))\\ &\quad +\rho^2\sum_r \Big(e_r(e_r(f)) - \big(\mathcal{V}(\nabla_{e_r}e_r)\big)(f)\Big) + \rho^2 \underbrace{\sum_r \big(2e_r(\ln\rho)e_r(f)\big)}_{=2\mathrm{d}f(\mathcal{V}(\mathrm{grad}\ln\rho))}\\ &\quad -\rho^2\,(m-n)\,\mathrm{d}f(\mathcal{V}(\mathrm{grad}\ln\rho))\\ &\quad -\sigma^2\sum_r \big(\mathcal{H}(\nabla_{e_r}e_r)\big)(f) - (n-m)\,\sigma^2\,\mathrm{d}f(\mathcal{H}(\mathrm{grad}\ln\rho))\\ &= \sigma^2\sum_a \Big(e_a(e_a(f)) - \big(\mathcal{H}(\nabla_{e_a}e_a)\big)(f)\Big) - \rho^2\sum_a \big(\mathcal{V}(\nabla_{e_a}e_a)\big)(f)\\ &\quad +\rho^2\sum_r \Big(e_r(e_r(f)) - \big(\mathcal{V}(\nabla_{e_r}e_r)\big)(f)\Big) - \sigma^2\sum_r \big(\mathcal{H}(\nabla_{e_r}e_r)\big)(f)\\ &\quad -(n-2)\,\sigma^2\mathrm{d}f(\mathcal{H}(\mathrm{grad}\ln\sigma)) - (n-m)\,\sigma^2\,\mathrm{d}f(\mathcal{H}(\mathrm{grad}\ln\rho))\\ &\quad -n\,\rho^2\,\mathrm{d}f(\mathcal{V}(\mathrm{grad}\ln\sigma)) - (m-n-2)\,\mathrm{d}f(\mathcal{V}(\mathrm{grad}\ln\rho))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \sigma^2 \sum_a e_a(e_a(f)) - \sigma^2\, \mathrm{d}f\big(\mathcal{H}(\Sigma_i \nabla_{e_i} e_i)\big) \\
& +\rho^2 \sum_r e_r(e_r(f)) - \rho^2\, \mathrm{d}f\big(\mathcal{V}(\Sigma_i \nabla_{e_i} e_i)\big) \\
& -\sigma^2\, \mathrm{d}f\big(\mathcal{H}\mathrm{grad}\ln(\sigma^{n-2}\,\rho^{m-n})\big) - \rho^2\, \mathrm{d}f\big(\mathcal{V}\mathrm{grad}\ln(\sigma^{n}\,\rho^{m-n-2})\big)\,.
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\Delta^{\mathcal{V}} f = \sum_r e_r(e_r(f)) - \big(\mathcal{V}(\nabla_{e_r} e_r)\big)(f)\ , \ \text{ et } \quad \mathrm{Tr}^{\mathcal{H}} A = \mathcal{V}(\Sigma_a \nabla_{e_a} e_a)\ .$$

Soit $Z = \sigma^2\,\Delta f + (\rho^2 - \sigma^2)\big(\Delta^{\mathcal{V}} f - \mathrm{d}f(\mathrm{Tr}^{\mathcal{H}} A)\big)$. Alors,

$$\begin{aligned}
Z \quad = \quad & \sigma^2 \sum_a e_a(e_a(f)) \\
& +\sigma^2 \sum_r e_r(e_r(f)) - \sigma^2 \mathrm{d}f\big(\mathcal{H}(\Sigma_i \nabla_{e_i} e_i)\big) - \sigma^2 \mathrm{d}f\big(\mathcal{V}(\Sigma_i \nabla_{e_i} e_i)\big) \\
& +(\rho^2 - \sigma^2)\Big(\sum_r e_r(e_r(f)) - \underbrace{\mathrm{d}f\big(\mathcal{V}(\Sigma_r \nabla_{e_r} e_r)\big) - \mathrm{d}f\big(\mathcal{V}(\Sigma_a \nabla_{e_a} e_a)\big)}_{=\mathrm{d}f(\mathcal{V}(\Sigma_i \nabla_{e_i} e_i))}\Big) \\
= \quad & \sigma^2 \sum_a e_a(e_a(f)) - \sigma^2\, \mathrm{d}f\big(\mathcal{H}(\Sigma_i \nabla_{e_i} e_i)\big) \\
& +\rho^2 \sum_r e_r(e_r(f)) - \rho^2\, \mathrm{d}f\big(\mathcal{V}(\Sigma_i \nabla_{e_i} e_i)\big)\,.
\end{aligned}$$

D'où, la formule du Laplacien demandée. □

Dans la troisième partie, on utilisera la formule générale pour la courbure de Ricci pour un morphisme harmonique, dans le cas où les fibres sont de dimension 1. Aussi, convient-il d'écrire le Laplacien dans le cadre d'une application semi-conforme.

COROLLAIRE 2.11. — *Soit $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application semi-conforme, de dilatation λ. Soit $\widetilde{g}$ une métrique obtenue par transformation biconforme. Alors,*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta} f \quad = \quad & \sigma^2\,\Delta f + (\rho^2 - \sigma^2)\,\{\Delta^{\mathcal{V}} f - \mathrm{d}f\big(\mathcal{V}\mathrm{grad}\ln(\lambda^n)\big)\} \\
& -\sigma^2\, \mathrm{d}f\big(\mathcal{H}\mathrm{grad}\ln(\sigma^{n-2}\,\rho^{m-n})\big) - \rho^2\, \mathrm{d}f\big(\mathcal{V}\mathrm{grad}\ln(\sigma^{n}\,\rho^{m-n-2})\big)\,. \quad (2.4)
\end{aligned}$$

La démonstration vient de la proposition précédente, et du lemme suivant :

Lemme 2.12. — *Soit* $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ *une application semi-conforme submersive de dilatation* λ. *Alors,* $\mathrm{Tr}^{\mathcal{H}} A = \mathcal{V}(\Sigma_a \nabla_{e_a} e_a) = \mathcal{V}\mathrm{grad}\ln(\lambda^n)$.

Démonstration . — Soit S le tenseur énergie-impulsion.

$$S(\varphi) = \frac{1}{2} n\lambda^2 \, g - \varphi^* h \,.$$

Sa divergence est nulle sur le vertical : $\operatorname{div} S(\varphi)(e_r) = 0$.

En outre,

$$\operatorname{div} S(\varphi)(e_r) = \frac{1}{2} n \, e_r(\lambda^2) - \lambda^2 \sum_a g(\nabla_{e_a} e_a, e_r) \,.$$

Donc, $\frac{1}{2} n \, e_r(\lambda^2) - \lambda^2 \, g(\Sigma_a \nabla_{e_a} e_a, e_r) = 0$.

D'où,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\Sigma_a \nabla_{e_a} e_a) &= \sum_r g(\Sigma_a \nabla_{e_a} e_a, e_r) \, e_r = \sum_r \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda^2} n \, e_r(\lambda^2) \, e_r \\ &= \sum_r n \, e_r(\ln \lambda) \, e_r = \mathcal{V}\mathrm{grad}\ln(\lambda^n) \,. \end{aligned}$$

□

3. Exemples de métriques d'Einstein en dimension 4

La première étape de cette partie est de calculer la courbure de Ricci ($\widetilde{\mathrm{Ric}}^M$) d'une variété $(M, \widetilde{g})$, obtenue après un changement biconforme ou triconforme, préservant un morphisme harmonique $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$. Dans le cas général, le système composé de la condition d'harmonicité et de l'équation d'Einstein $\widetilde{\mathrm{Ric}}^M = C \, \widetilde{g}$ fournit un système différentiel (en général surdéterminé). Ce dernier apparaît relativement complexe. Ainsi, la seule existence de solutions n'est pas facile à montrer.

Cependant, en prenant des exemples précis et bien connus de morphismes harmoniques, on peut non seulement conclure sur l'existence de solutions, mais aussi exhiber explicitement des métriques d'Einstein. Les deux cas, qui sont présentés ici, sont en dimension 4, avec σ, ρ et ν des fonctions d'une seule variable. Le premier est une simple projection $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$. Le second est inspiré de la fibration de Hopf.

3.1. Changement triconforme pour la courbure de Ricci

On considère une transformation triconforme définie par (2.1). En reprenant les formules pour la courbure de Ricci, on peut alors établir ce que devient cette courbure après le changement, en fonction des courbures initiales et des paramètres du changement.

Par le théorème 1.6, on a pour la première formule sur le vertical :

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Ric}}^{M}(U,V) \;=\; & \widetilde{\mathrm{Ric}}^{\mathcal{V}}(U,V) + \sum_a \widetilde{g}\big((\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_a}\widetilde{B}^*)_U \widetilde{e}_a, V\big) + 2(n-1)\,\mathrm{d}\ln\widetilde{\lambda}(\widetilde{B}_u V)\\ & + n\,\widetilde{\nabla}\mathrm{d}\ln\widetilde{\lambda}(U,V) - n\,U(\ln\widetilde{\lambda})\,V(\ln\widetilde{\lambda})\\ & + \frac{1}{4}\sum_{a,b}\widetilde{g}\big(U,\widetilde{I}(\widetilde{e}_a,\widetilde{e}_b)\big)\,\widetilde{g}\big(V,\widetilde{I}(\widetilde{e}_a,\widetilde{e}_b)\big)\end{aligned}$$

Par exemple, les termes en $\widetilde{B}$ et en $\widetilde{I}$ peuvent s'écrire en fonction de ∇, et de σ, ρ et ν. Il en est de même pour les autres formules.

Cas des fibres de dimension 1

Remarque 3.1. — R. Pantilie et J.C. Wood (cf. [15]) ont classifié les morphismes harmoniques à fibres de dimension 1, sur une variété d'Einstein de dimension supérieure ou égale à 5. Ces applications sont seulement de deux sortes : de type *p*roduit tordu (i.e. $\mathrm{grad}\,\lambda$ est vertical et $\mathcal{H}$ est intégrable) ou de type *K*illing (i.e. le champ vertical fondamental V est un champ de Killing : $\mathcal{L}_V g = 0$). En dimension 4, on trouve un type intermédiaire appelé type 3 ou (T), où $\mathcal{V}\mathrm{grad}\,\lambda$ est une fonction non nulle de λ (cf. R. Pantilie [14]).

Désormais, on se place dans le cadre du théorème 1.12, où $\varphi : (M^{n+1}, g) \to (N^n, h)$ est un morphisme harmonique submersif de dilatation λ, où $V = \lambda^{n-2}U$ est le champ de vecteurs vertical fondamental, et où Ω est la 2-forme d'intégrabilité associée.

Proposition 3.2. — *Soit $\widetilde{U} = \rho U$ champ de vecteurs vertical unitaire orienté positivement sur $(M, \widetilde{g})$. Soit $\widetilde{\Omega} = \mathrm{d}\widetilde{\theta}$, où $\widetilde{\theta}$ est la 1-forme duale du champ de vecteurs vertical fondamental $\widetilde{V} = \widetilde{\lambda}^{n-2}\widetilde{U} = \lambda^{n-2}\sigma^{n-2}\rho\,\nu^{2-n}\,U$. Alors, pour X et Y des champs de vecteurs horizontaux,*

$$\widetilde{\Omega}(X,Y) = \sigma^{2-n}\,\rho^{-1}\,\nu^{n-2}\,\Omega(X,Y)\,. \tag{3.1}$$

Remarque 3.3. — On retrouve la fonction $\sigma^{2-n}\,\rho^{n-m}\,\nu^{n-2}$ de la proposition 2.5, avec $m-n=1$.

Démonstration . — (Proposition précédente). Par définition de $\widetilde{\Omega}$ (lemme 1.10),

$$\widetilde{\Omega}(X,Y) = -\widetilde{g}(\widetilde{V},[X,Y])/|\widetilde{V}|^2_{\tilde{g}}\ ,$$

pour X et Y des champs horizontaux.

$$\widetilde{V} = \widetilde{\lambda}^{n-2}\widetilde{U} = \lambda^{n-2}\,\sigma^{n-2}\,\nu^{2-n}\,\rho U = \sigma^{n-2}\,\nu^{2-n}\,\rho V\,.$$

Donc, $|\widetilde{V}|^2_{\tilde{g}} = \sigma^{2n-4}\,\nu^{4-2n}\,\widetilde{g}(\rho V,\rho V) = \sigma^{2n-4}\,\nu^{4-2n}\,|V|^2_g$. De cela, il vient que

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega}(X,Y) &= -\sigma^{4-2n}\,\nu^{2n-4}\ \widetilde{g}(\sigma^{n-2}\,\nu^{2-n}\,\rho V,[X,Y])/|V|^2_g\\ &= -\sigma^{2-n}\,\nu^{n-2}\rho^{-1}\ g(V,[X,Y])/|V|^2_g\\ &= \sigma^{2-n}\,\rho^{-1}\,\nu^{n-2}\,\Omega(X,Y)\,.\end{aligned}$$

□

On exprime à présent les formules du théorème 1.12 pour $\widetilde{Ric}$.

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Ric}}^M(\widetilde{U},\widetilde{U}) &= -(n-2)\widetilde{\Delta}\ln\widetilde{\lambda} + 2(n-1)\widetilde{U}\big(\widetilde{U}(\ln\widetilde{\lambda})\big)\\ &\quad -n(n-1)|\mathcal{V}\mathrm{grad}_{\tilde{g}}\ln\widetilde{\lambda}|^2_{\tilde{g}} + \frac{1}{4}\widetilde{\lambda}^{2n-4}|\widetilde{\Omega}|^2_{\tilde{g}} \qquad (3.2)\\ \widetilde{\mathrm{Ric}}^M(X,\widetilde{U}) &= (n-1)\widetilde{\nabla}\mathrm{d}\ln\widetilde{\lambda}(X,\widetilde{U}) - (n-1)X(\ln\widetilde{\lambda})\widetilde{U}(\ln\widetilde{\lambda})\\ &\quad +\frac{1}{2}\widetilde{\lambda}^{2n-4}\big\{\widetilde{\mathrm{d}}^*\widetilde{\Omega}(X) + (3n-5)\widetilde{\Omega}(X,\mathrm{grad}_{\tilde{g}}\ln\widetilde{\lambda})\big\} \qquad (3.3)\\ \widetilde{\mathrm{Ric}}^M(X,\widetilde{V}) &= -(n-1)(n-2)X(\ln\widetilde{\lambda})\widetilde{V}(\ln\widetilde{\lambda}) + (n-1)X\big(\widetilde{V}(\ln\widetilde{\lambda})\big)\\ &\quad +\frac{1}{2}\widetilde{\lambda}^{n-2}\big\{\widetilde{\mathrm{d}}^*\widetilde{\Omega}(X) + 2(n-2)\widetilde{\Omega}(X,\mathrm{grad}_{\tilde{g}}\ln\widetilde{\lambda})\big\} \qquad (3.4)\\ \widetilde{\mathrm{Ric}}^M(X,Y) &= \widetilde{\mathrm{Ric}}^N(\mathrm{d}\varphi(X),\mathrm{d}\varphi(Y)) - (n-1)(n-2)X(\ln\widetilde{\lambda})Y(\ln\widetilde{\lambda})\\ &\quad +\widetilde{g}(X,Y)\,\widetilde{\Delta}\ln\widetilde{\lambda} - \frac{1}{2}\widetilde{\lambda}^{2n-4}\widetilde{g}(i_X\widetilde{\Omega},i_Y\widetilde{\Omega})\,. \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Chaque terme peut s'écrire en fonction des opérateurs exprimés dans la métrique initiale g et des paramètres du changement σ, ρ et ν.

Seule l'obtention de $\widetilde{\mathrm{Ric}}^N(\mathrm{d}\varphi(X),\mathrm{d}\varphi(Y))$ n'a pas encore été précisée. Il s'agit, sur N, d'un simple changement conforme : $h \mapsto \bar{\nu}^{-2}\,h$.

Proposition 3.4 (Hebey [9]). — *La courbure* $\widetilde{\mathrm{Ric}}^N$ *est alors donnée par :*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Ric}}^N \quad = \quad & \mathrm{Ric}^N + (n-2)(\nabla^N)^2 \ln \bar{\nu} + (n-2)\, \nabla^N \ln \bar{\nu} \otimes \nabla^N \ln \bar{\nu} \\ & + (\Delta_h \ln \bar{\nu} - (n-2)\, |\nabla^N \ln \bar{\nu}|_h^2\,)\, h\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

On ne développe pas ici le système $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}\mathrm{grad}(\sigma^{2-n}\rho^{-1}\nu^{n-2}) = 0 \\ \widetilde{\mathrm{Ric}}^M \;\; = C\,\widetilde{g} \end{array} \right.$, pour un changement quelconque. De manière générale, il n'est pas simple d'établir qu'il existe des solutions. Malgré tout, si l'on prescrit $\mathrm{Ric}^{\mathcal{V}}$ le long des fibres de φ, on peut montrer par exemple que l'équation (3.2) donne une équation elliptique en σ.

Dans la suite de ce texte, on se contentera de cas particuliers où g est simple et sa courbure de Ricci connue. Ainsi, on se demande comment déformer biconformément la métrique euclidienne standard sur $\mathbf{R}^4$ en une autre métrique d'Einstein.

3.2. Projection de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$

Soit l'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & (\mathbf{R}^4, g) & \longrightarrow & (\mathbf{R}^3, h) \\ & (t, x_2, x_3, x_4) & \longmapsto & (t, x_2, x_3)\,, \end{array}$$

où g et h sont les métriques euclidiennes sur $\mathbf{R}^4$ et $\mathbf{R}^3$.

Lemme 3.5. — *φ est un morphisme harmonique de dilatation $\lambda = 1$.*

Notations 3.6. — Une base canonique orthonormée en un point de $\mathbf{R}^4$ est notée (e_1, e_2, e_3, e_4). Pour $\mathbf{R}^3$, on prend (f_1, f_2, f_3).

Pour alléger les expressions, on notera ∂_t le champ de vecteurs $e_1 = \frac{\partial}{\partial t}$. De même, $\partial_i = e_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, pour $i \in \{2; 3; 4\}$.

Le champ e_4 donne la distribution verticale. En adoptant les notations de la partie précédente, $U = e_4$.

On considère alors le changement triconforme suivant :

$$\widetilde{g} = \frac{1}{\sigma^2}\,(\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2) + \frac{1}{\rho^2}\,\mathrm{d}x_4^2\,, \;\text{ et }\;\; \widetilde{h} = \frac{1}{\bar{\nu}^2}\,(\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2)\,.$$

Hypothèse. — *Les fonctions σ, ρ et ν ne dépendent que de t.*

Par ailleurs, $\nu = \bar{\nu} \circ \varphi$. Vues comme fonctions de t, $\bar{\nu}(t) = \nu(t)$. Pour f une fonction de t, on écrira sa dérivée $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f)$, ou f' (s'il n'y a pas d'ambiguïté).

Notations 3.7. — On pose $\gamma = (\ln \sigma)'$, $\beta = (\ln \rho)'$, $\delta = (\ln \nu)'$.

Lemme 3.8. —

(i) *La condition d'harmonicité (voir la proposition 2.5) s'écrit* $\gamma + \beta - \delta = 0.$

(ii) *La dilatation,* $\widetilde{\lambda} = \lambda\, \sigma\, \nu^{-1} = \sigma\, \nu^{-1}$ *, vérifie* $(\ln \widetilde{\lambda})' = \gamma - \delta = -\beta$ *.*

(iii) $W(\widetilde{\lambda}) = 0$ *, pour tout champ vertical* W*.*

Remarque 3.9. — Comme la distribution horizontale initiale (pour g) est intégrable ($[e_i, e_j] = 0$ pour tout $i, j = 1, 2, 3$), $\Omega = 0$. Donc, $\widetilde{\Omega} = 0$

En conséquence du lemme et de la remarque précédents, la courbure de Ricci de $(\mathbf{R}^4, \widetilde{g})$ s'exprime ainsi, grâce aux formules (3.2), (3.4), et (3.5) :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Ric}}^M(\widetilde{U}, \widetilde{U}) &= -\widetilde{\Delta} \ln \widetilde{\lambda} \\
\widetilde{\mathrm{Ric}}^M(X, \widetilde{V}) &= 0 \\
\widetilde{\mathrm{Ric}}^M(X, Y) &= \widetilde{\mathrm{Ric}}^N(\mathrm{d}\varphi(X), \mathrm{d}\varphi(Y)) - 2\, X(\ln \widetilde{\lambda}) Y(\ln \widetilde{\lambda}) + \widetilde{g}(X, Y)\, \widetilde{\Delta} \ln \widetilde{\lambda} .
\end{aligned}$$

Lemme 3.10. — *Laplacien de la dilatation :* $\widetilde{\Delta} \ln \widetilde{\lambda} = -\sigma^2\, \beta' + \sigma^2\, \delta\beta$ *.*

Démonstration . — D'après la formule (2.4) du corollaire 2.11, puis en utilisant le lemme précédent et la condition d'harmonicité,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta} \ln \widetilde{\lambda} &= \sigma^2\, \Delta \ln \widetilde{\lambda} - \sigma^2\, \mathrm{d} \ln \widetilde{\lambda} \big(\mathcal{H}\mathrm{grad} \ln(\sigma\rho)\big) \\
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^{4} e_i(e_i(\ln \widetilde{\lambda})) - \sigma^2\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \big(\ln(\sigma\rho)\big)\, \partial_t(\ln \widetilde{\lambda}) \\
&= \sigma^2\, (\ln \widetilde{\lambda})'' - \sigma^2\, (\gamma + \beta)\, (\ln \widetilde{\lambda})' \\
&= -\sigma^2\, \beta' + \sigma^2\, \delta\, \beta .
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.11. — *Courbure de Ricci de* $(\mathbf{R}^3, \widetilde{h})$ *après le changement conforme.*

$$\begin{array}{rcl}
\widetilde{\mathrm{Ric}}^N(\mathrm{d}\varphi(e_1), \mathrm{d}\varphi(e_1)) & = & 2\,\delta' \\
\widetilde{\mathrm{Ric}}^N(\mathrm{d}\varphi(e_2), \mathrm{d}\varphi(e_2)) & = & \widetilde{\mathrm{Ric}}^N(\mathrm{d}\varphi(e_3), \mathrm{d}\varphi(e_3)) = \delta' - \delta^2 \\
\widetilde{\mathrm{Ric}}^N(\mathrm{d}\varphi(e_1), \mathrm{d}\varphi(e_2)) & = & \widetilde{\mathrm{Ric}}^N(\mathrm{d}\varphi(e_1), \mathrm{d}\varphi(e_3)) \\
 & = & \widetilde{\mathrm{Ric}}^N(\mathrm{d}\varphi(e_2), \mathrm{d}\varphi(e_3)) = 0\,.
\end{array}$$

Démonstration .— Grâce à la formule (3.6), on a

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}^N = \mathrm{Ric}_h + (\nabla^h)^2 \ln\nu + \nabla^h \ln\nu \otimes \nabla^h \ln\nu + (\Delta_h \ln\nu - |\nabla^h \ln\nu|_h^2\,)\,h\,,$$

où ∇^h désigne la connexion sur $(\mathbf{R}^3, h)$, qui est euclidien. Et donc $\mathrm{Ric}_h = 0$.

De plus, la fonction ne dépend que de t. Donc, pour $i, j = 1, 2, 3$,

$$\begin{array}{rcl}
\widetilde{\mathrm{Ric}}^N(\mathrm{d}\varphi(e_i), \mathrm{d}\varphi(e_j)) & = & \widetilde{\mathrm{Ric}}^N(f_i, f_j) \\
 & = & f_i(f_j(\ln\nu)\,) + f_i(\ln\nu)\,f_j(\ln\nu) \\
 & & +\big((\ln\nu)'' - (\ln\nu)'^2\big)\,h(f_i, f_j) \\
 & = & \varepsilon_{i1}\,\varepsilon_{j1}(\delta' + \delta^2) + (\delta' - \delta^2)\,\varepsilon_{ij}\,,
\end{array}$$

où ε_{ij} désigne le symbole de Kronecker ($\varepsilon_{ij} = 1$ si $i = j$, nul sinon). □

Proposition 3.12. — *La métrique* $\widetilde{g}$ *est une métrique d'Einstein, de constante* C*, si et seulement si les équations suivantes sont vérifiées*

$$\begin{array}{rcll}
\sigma' & = & \sigma\,(\delta - \beta) & (3.7) \\
\beta' & = & \beta\,\delta + C\,\sigma^{-2} & (3.8) \\
\delta' & = & \beta^2 + C\,\sigma^{-2} & (3.9) \\
\delta' & = & \delta^2 + 2\,C\,\sigma^{-2}\,. & (3.10)
\end{array}$$

Démonstration .— L'équation (3.7) est la condition d'harmonicité : $\gamma = \delta - \beta$.

La métrique $\widetilde{g}$ est d'Einstein, de constante C, si et seulement si $\widetilde{\mathrm{Ric}}^M = C\,\widetilde{g}$.

Sur le vertical, on obtient

$$C = C\,\widetilde{g}(\widetilde{U}, \widetilde{U}) = \widetilde{\mathrm{Ric}}^M(\widetilde{U}, \widetilde{U}) = -\widetilde{\Delta}\ln\widetilde{\lambda} = \sigma^2\,\beta' - \sigma^2\,\delta\beta\,.$$

D'où l'équation (3.8).

Par ailleurs, pour X horizontal et $\widetilde{V}$, on a $\widetilde{\mathrm{Ric}}^M(X,\widetilde{V}) = 0$. Donc, $\widetilde{\mathrm{Ric}}^M(X,\widetilde{V}) = C\,\widetilde{g}(X,\widetilde{V}) = 0$ est toujours vérifié.

Enfin, sur l'horizontal, on obtient, pour $i,j = 1,2,3$,

$$\begin{aligned}
C\,\sigma^{-2}\,g(e_i,e_j) &= C\,\widetilde{g}(e_i,e_j) = \widetilde{\mathrm{Ric}}^M(e_i,e_j) \\
&= \widetilde{\mathrm{Ric}}^N(\mathrm{d}\varphi(e_i),\mathrm{d}\varphi(e_j)) - 2\,e_i(\ln\widetilde{\lambda})\,e_j(\ln\widetilde{\lambda}) \\
&\quad + \widetilde{g}(e_i,e_j)\,\underbrace{\widetilde{\Delta}\ln\widetilde{\lambda}}_{=-C} \\
&= \varepsilon_{i1}\,\varepsilon_{j1}(\delta' + \delta^2) + (\delta' - \delta^2)\,\varepsilon_{ij} - 2\,\varepsilon_{i1}\,\varepsilon_{j1}\,\beta^2 \\
&\quad - C\,\sigma^{-2}\,g(e_i,e_j) \\
&= \varepsilon_{i1}\,\varepsilon_{j1}\,(\delta' + \delta^2 - 2\,\beta^2) + (\delta' - \delta^2)\,\varepsilon_{ij} - C\,\sigma^{-2}\,g(e_i,e_j)\,.
\end{aligned}$$

Ce qui équivaut à

$$2\,C\,\sigma^{-2}\,\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{i1}\,\varepsilon_{j1}\,(\delta' + \delta^2 - 2\,\beta^2) + (\delta' - \delta^2)\,\varepsilon_{ij}\,.$$

Si $i \neq j$, l'équation est toujours vérifiée : $0 = 0$.

Si $i = j = 1$, on a $\qquad 2\,C\,\sigma^{-2} = 2\delta' - 2\beta^2\,.$

Si $i = j = 2$ ou 3, on a $\qquad 2\,C\,\sigma^{-2} = \delta' - \delta^2\,.$

Ce qui donne les équations (3.9) et (3.10). $\square$

Existence de solutions par une méthode dynamique

Le système d'équations de la proposition 3.12 est en fait faussement surdéterminé. Soit (S1) le système dynamique constitué par les trois équations (3.7), (3.8) et (3.10) :

$$\text{(S1)} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \sigma' &=& \sigma\,(\delta - \beta) \\ \beta' &=& \beta\,\delta + C\,\sigma^{-2} \\ \delta' &=& \delta^2 + 2\,C\,\sigma^{-2} \end{array} \right. .$$

On définit également F comme étant la différence des seconds membres des équations (3.9) et (3.10) : $F = \beta^2 - \delta^2 - C\,\sigma^{-2}$.

Résoudre le problème revient alors à trouver des courbes intégrables du système (S1) qui annulent F.

L'argument clé vient du fait que la dérivée de F est proportionnelle à F.

LEMME 3.13. — *Si* (S1) *est vérifié, alors* $F' = 2\,\delta\,F$.

Démonstration . — On calcule la dérivée : $F' = 2\,\beta\,\beta' - 2\,\delta\,\delta' + 2\,C\,\sigma^{-2}\,\frac{\sigma'}{\sigma}$.

On exprime β', δ' et $\dfrac{\sigma'}{\sigma}$ grâce à (3.8), (3.10) et (3.7). D'où,

$$\begin{aligned} F' &= 2\,\beta\,(\beta\,\delta + C\,\sigma^2) - 2\,\delta\,(\delta^2 + 2\,C\,\sigma^{-2}) + 2\,C\,\sigma^{-2}\,(\delta - \beta) \\ &= 2\,\delta\,\beta^2 - 2\,\delta^3 - 2\,C\,\delta\,\sigma^{-2} \;=\; 2\,\delta\,F\,. \qquad \square \end{aligned}$$

Remarque 3.14. — En conséquence du lemme précédent, si F s'annule en un point, alors F s'annule partout.

Par ailleurs, pour des conditions initiales données (par exemple en $t = 0$), on peut résoudre le système dynamique (S1). C'est un système dynamique autonome car indépendant de t (on peut appeler t la variable « temps »). Il admet des solutions locales (cf. Hirsch et Smale [10], chapitre 8).

En posant $\zeta = (\sigma, \beta, \delta)$, on peut ainsi écrire (S1) de la forme : $\zeta' = S(\zeta)$, où S est bien fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (pour $\sigma > 0$). Alors, pour $\zeta_0 = (\sigma_0, \beta_0, \delta_0)$ (avec $\sigma_0 > 0$), il existe, au voisinage de 0, une unique solution ζ ayant pour conditions initiales $\zeta(0) = \zeta_0$.

THÉORÈME 3.15. — *Soit* $\varphi : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ *la projection :* $(t, x_2, x_3, x_4) \mapsto (t, x_2, x_3)$*, avec* $\mathbf{R}^4$ *et* $\mathbf{R}^3$ *munis de leurs métriques euclidiennes* g *et* h*. Pour tout réel* C*, il existe* σ*,* ρ *et* ν *des fonctions positives de* t *telles que, dans un voisinage* $\mathcal{A}$ *de l'hyperplan :* $t = 0$, $\widetilde{g} = \sigma^{-2}(\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2) + \rho^{-2}\mathrm{d}x_4^2$ *soit une métrique d'Einstein de constante* C*, et* $\varphi : (\mathcal{A}, \widetilde{g}) \longrightarrow (\mathbf{R}^3, \widetilde{h})$ *soit un morphisme harmonique, où* $\widetilde{h} = \nu^{-2}\,h$.

Démonstration . — Soit C réel donné. On choisit $\sigma_0 = 1$ et β_0, δ_0 tels que $F_0 = \beta_0^2 - \delta_0^2 - C\,\sigma_0^{-2} = 0$ (exemple : pour $C = 1$, on peut prendre $\beta_0 = \sqrt{2}$ et $\delta_0 = 1$).

Ces conditions initiales étant déterminées, il existe $a > 0$ et une solution (σ, β, δ) du système (S1), définie sur $]-a; a[$, telle que $(\sigma, \beta, \delta)(0) = (\sigma_0, \beta_0, \delta_0)$.

Alors, $F(0) = \beta_0^2 - \delta_0^2 - C\,\sigma_0^{-2} = 0$.

D'après la remarque 3.14, la fonction F s'annule alors partout. Donc, (σ, β, δ) est solution du système complet de la proposition 3.12. En intégrant les deux équations : $\rho' = \beta\,\rho$ et $\nu' = \delta\,\nu$, avec les conditions initiales $\rho(0) = 1$ et $\nu(0) = 1$, on trouve un changement triconforme satisfaisant les conclusions du théorème. $\square$

Remarques 3.16. —

(i) La « classe biconforme » de la métrique euclidienne contient des métriques d'Einstein de constante quelconque.

(ii) Pour une constante C donnée, il y a plusieurs choix pour les conditions initiales β_0 et δ_0. Par exemple : pour $C = 1$, $\sigma_0 = 1$, $\beta_0 = 5/4$ et $\delta_0 = 3/4$ conviennent également.

Résolution directe, solutions explicites

On réécrit tout d'abord les équations de la proposition 3.12.

Lemme 3.17. — *$\widetilde{g}$ est une métrique d'Einstein, de constante C, équivaut au système d'équations suivant :*

$$
\begin{aligned}
0 &= \gamma + \beta - \delta && (3.11)\\
C &= \sigma^2\,(\beta' - \beta\,(\gamma + \beta)\,) && (3.12)\\
0 &= \gamma' + \gamma\,\beta && (3.13)\\
C &= \sigma^2\,(-\gamma^2 - 2\,\gamma\,\beta)\,. && (3.14)
\end{aligned}
$$

Démonstration . — L'équation (3.11) est la condition d'harmonicité. L'équation (3.12) vient de (3.8). De même, avec $\delta = \gamma + \beta$, les équations (3.9) et (3.10) deviennent

$$
\begin{aligned}
\gamma' + \beta' &= \beta^2 + C\,\sigma^{-2} && (3.15)\\
\gamma' + \beta' &= \delta^2 + 2\,C\,\sigma^{-2}\,. && (3.16)
\end{aligned}
$$

Lorsque l'on fait (3.16)-(3.15), on obtient l'équation (3.14).

En remplaçant dans (3.15) β' par la valeur obtenue dans (3.12), on a

$$\gamma' + \beta\,\gamma + \beta^2 + C\,\sigma^{-2} = \beta^2 + C\,\sigma^{-2}\,,$$

i.e. l'équation (3.13). $\square$

THÉORÈME 3.18. — *Soit* $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ *la projection :* $(t, x_2, x_3, x_4) \mapsto (t, x_2, x_3)$, *avec* $\mathbf{R}^4$ *et* $\mathbf{R}^3$ *munis de leurs métriques euclidiennes* g *et* h. *Soit les nouvelles métriques* $\widetilde{g} = \sigma^{-2}(\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2) + \rho^{-2}\mathrm{d}x_4^2$ *et* $\widetilde{h} = \nu^{-2}\, h$, *où* σ, ρ *et* ν *sont des fonctions positives de* t. *Alors,* $\varphi : (\mathbf{R}^4, \widetilde{g}) \to (\mathbf{R}^3, \widetilde{h})$ *est un morphisme harmonique et* $\widetilde{g}$ *est une métrique d'Einstein, de constante* C, *si et seulement si* (σ, ρ, ν) *vérifie les deux propriétés suivantes :*

(I) σ *est solution de l'équation elliptique* $(\sigma')^2 = A\,\sigma^3 - \dfrac{C}{3}$ *(résolue par la fonction* $\wp$ *de Weierstrass), avec* A *une constante,*

(II) $(\ln \rho)' = -\dfrac{1}{2}\,(\dfrac{\sigma'}{\sigma} + \dfrac{C}{\sigma\,\sigma'})$, *et* $\nu = a\,\sigma\,\rho$, *avec* $a > 0$ *une constante.*

Remarque 3.19. — On peut exhiber des solutions particulières.

(i) *Hypothèses :* $A = 0$ *et* $C = 0$. *Alors* $\sigma \equiv a$, $\rho(t) = b\,(t + c)^{-1}$, *et* $\nu = e\,\rho$, *où* a, b, c *et* e *sont des constantes* $(a, b, e > 0)$.

(ii) *Hypothèses :* $A \neq 0$ *et* $C = 0$. *Alors,* $\sigma(t) = a\,(t + c)^{-2}$, $\rho(t) = b\,(t + c)$, *et* $\nu = e\,\rho^{-1}$, *où* a, b, c *et* e *sont des constantes* $(a, b, e > 0)$. *La métrique* $\widetilde{g}$ *est Ricci-plate.*

(iii) *Hypothèses :* $A = 0$ *et* $C \neq 0$. *Alors,* $\sigma(t) = at$, $\rho(t) = bt$, *et* $\nu(t) = c\,t^2$, *avec* a, b *et* c *des constantes* $(a, b, c > 0)$. *La métrique* $\widetilde{g}$ *est hyperbolique, et* $C = -3\,a^2$.

Démonstration (Théorème). — D'après l'équation (3.13), $\gamma\,\beta = -\gamma'$. En remplaçant dans (3.14), on déduit que

$$(2\,\gamma' - \gamma^2 - \frac{C}{\sigma^2}) = 0\,.$$

Comme $\gamma = \sigma'/\sigma$, on a $\quad 2\,\sigma\,\sigma'' - 3\,(\sigma')^2 - C = 0\,.$

Soit $y = (\sigma')^2$ et $x = \sigma$. Vue comme une fonction de x, $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\sigma''$. Donc, $x\,y' - 3\,y - C = 0$. Les solutions sont de la forme $y = A\,x^3 - \dfrac{C}{3}$, avec A une constante. D'où, l'équation pour σ :

$$(\sigma')^2 = A\,\sigma^3 - \frac{C}{3}\,.$$

En divisant par σ^2, on a

$$\gamma^2 = \frac{(\sigma')^2}{\sigma^2} = A\,\sigma - \frac{C}{3\,\sigma^2}$$

Par (3.14), on trouve β :

$$\beta = -\frac{1}{2}\,(\gamma + \frac{C}{\gamma\,\sigma^2}) = -\frac{1}{2}\,(\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{C}{\sigma\,\sigma'})\,.$$

Enfin, $\delta = \gamma + \beta$.

Réciproquement, il est aisé de voir que de telles fonctions vérifient le système de la proposition précédente. $\square$

Remarque 3.20. — Le morphisme φ est de type Killing. Par ailleurs, il est possible de voir cet exemple comme un produit tordu modifié (en considérant la projection sur $\mathbf{R}$, car $\mathcal{H}$ est intégrable). Pour cela, on prend sur $\mathbf{R}^3$ la métrique $\breve{g} = \sigma^2\, g^{eucl}$, et sur $\mathbf{R}$ la métrique $\hat{g}_0 = g^{eucl}$. Trouver $\widetilde{\mathrm{Ric}}$ revient alors à chercher la courbure de Ricci du produit $(\mathbf{R}^3 \times_{f^2} \mathbf{R},\ \breve{g} + f^2\,\hat{g}_0)$, avec $f = 1/\rho$. La construction est un peu plus complexe qu'un produit classique (cf. [3] chap. 9, J), car il faut déjà faire une transformation conforme sur la base pour avoir $\breve{g}$.

D'autre part, il est possible de généraliser un peu cet exemple en permettant une liberté supplémentaire sur le paramètre vertical :

Hypothèse *(bis). — σ et ν ne dépendent que de t ; et ρ dépend de t et de x_4.*

On pose $\gamma = (\ln\sigma)'$ et $\delta = (\ln\nu)'$.

De même qu'au lemme 3.17, on établit le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & \gamma + \partial_t(\ln\rho) - \delta \\ C & = & \sigma^2\,(\partial_t^2(\ln\rho) - (\gamma + \partial_t(\ln\rho)\,)\,\partial_t(\ln\rho)\,) \\ 0 & = & \gamma' + \gamma\,\partial_t(\ln\rho) \\ C & = & \sigma^2\,(-\gamma^2 - 2\,\gamma\,\partial_t(\ln\rho)\,) \end{array}\right.$$

Les solutions du théorème précédent sont encore valables. Mais, on peut en trouver d'autres en utilisant les cas particuliers de la remarque 3.19.

Théorème 3.21. — *Soit $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ la projection : $(t, x_2, x_3, x_4) \mapsto (t, x_2, x_3)$, avec $\mathbf{R}^4$ et $\mathbf{R}^3$ munis de leurs métriques euclidiennes g et h. Soit les nouvelles métriques $\widetilde{g} = \sigma^{-2}(\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2) + \rho^{-2}\mathrm{d}x_4^2$ et $\widetilde{h} = \nu^{-2}\,h$, où σ, ν sont des fonctions positives de t, et ρ dépend de t et de x_4. Alors, $\varphi : (\mathbf{R}^4, \widetilde{g}) \to (\mathbf{R}^3, \widetilde{h})$ est un morphisme harmonique et $\widetilde{g}$ est une métrique d'Einstein, de constante C, si l'on est dans l'un des trois cas suivants :*

(i) *(bis)* $\sigma \equiv a$, $\rho(t,x_4) = f(x_4)\,(t+c)^{-1}$, *et* $\nu = b\,(t+c)^{-1}$, *où* a, b *et* c *sont des constantes* $(a,b>0)$ *et* f *est une fonction positive de* x_4. $C=0$.

(ii) *(bis)* $\sigma(t) = a\,(t+c)^{-2}$, $\rho(t,x_4) = f(x_4)\,(t+c)$, *et* $\nu = b\,(t+c)^{-1}$, *où* a, b *et* c *sont des constantes* $(a,b>0)$ *et* f *est une fonction positive de* x_4. $C=0$.

(iii) *(bis)* $\sigma(t) = at$, $\rho(t) = f(x_4)\,t$, *et* $\nu(t) = c\,t^2$, *avec* a, c *des constantes* $(a,c>0)$ *et* f *est une fonction positive de* x_4. $C = -3\,a^2$.

3.3. Application de Hopf de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$

Soit $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'application de Hopf, donnée par

$$\varphi(z,w) = (|z|^2 - |w|^2, 2z\,\overline{w})\,, \quad \text{avec } (z = x_1 + ix_2, w = x_3 + ix_4)\,.$$

On fait un changement triconforme des métriques euclidiennes g et h, de $\mathbf{R}^4$ et $\mathbf{R}^3$ respectivement, avec les paramètres σ, ρ et ν.

Soit $r = |x|$, pour $x \in \mathbf{R}^4$.

HYPOTHÈSE. — *σ, ρ et ν ne dépendent que de r.*

On choisit un système de coordonnées adaptées. φ peut ainsi s'écrire :

$$\varphi\big(r(\cos s)\ e^{i\alpha}, r(\sin s)\ e^{i\kappa}\big) = r^2\,\big(\cos 2s, (\sin 2s)\ e^{i(\alpha-\kappa)}\big)\ .$$

La distribution verticale est engendrée par le champ $\partial_\alpha + \partial_\kappa$ (les fibres sont données par $\alpha - \kappa$ constant).

L'horizontal est engendré par ∂_r , ∂_s , et $X_3 = -(\tan s)\,\partial_\alpha + (\cot s)\,\partial_\kappa$.

Une base horizontale orthonormée est alors donnée par $(\partial_r, \frac{1}{r}\partial_s, \frac{1}{r}X_3)$.

LEMME 3.22. — Premières propriétés de g et φ.

(i) $g = dr^2 + r^2\,(ds^2 + (\cos^2 s)\ d\alpha^2 + (\sin^2 s)\ d\kappa^2)$.

(ii) *φ est un morphisme harmonique de dilatation* $\lambda = |\varphi_*(\partial_r)| = 2\,r$.

(iii) *Le champ vertical unitaire est* $U = \frac{1}{r}(\partial_\alpha + \partial_\kappa)$. *Et,* $V = \lambda U = 2(\partial_\alpha + \partial_\kappa)$.

(iv) *La forme duale de V est ainsi* $\theta = \frac{1}{2}\left((\cos^2 s)\,\mathrm{d}\alpha + (\sin^2 s)\,\mathrm{d}\kappa\right)$.

(v) $\Omega = \mathrm{d}\theta = (\sin s)(\cos s)\,\mathrm{d}s \wedge (\mathrm{d}\kappa - \mathrm{d}\alpha)$.

(vi) $|\Omega|_g^2 = 2/r^4$.

Après le changement triconforme, on obtient la nouvelle dilatation $\widetilde{\lambda}$ et la nouvelle 2-forme $\widetilde{\Omega}$.

$$\widetilde{\lambda} = \lambda\,\sigma\,\nu^{-1} = 2r\,\sigma\,\nu^{-1} \quad , \text{ et } \quad \widetilde{\Omega} = \sigma^{-1}\,\rho^{-1}\,\nu\,\Omega \ .$$

Remarque 3.23. — Les fonctions σ, ρ, ν, λ et $\widetilde{\lambda}$ ne dépendent que du rayon r. Leur gradient vertical est donc nul. Pour toutes les fonctions f, que l'on va considérer, $W(f) = 0$, pour tout champ vertical W. Et, $\partial_r f = f'$.

LEMME 3.24. — *La condition d'harmonicité est* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\sigma^{-1}\,\rho^{-1}\,\nu\right) = 0$.

En posant, comme au premier exemple, $\gamma = (\ln\sigma)'$, $\beta = (\ln\rho)'$, $\delta = (\ln\nu)'$, la condition devient $\gamma + \beta - \delta = 0$.

COROLLAIRE 3.25. — $(\ln\widetilde{\lambda})' = \frac{1}{r} - \beta$.

D'après la formule (2.4) du corollaire 2.11, on déduit le Laplacien d'une fonction de r, dans la nouvelle métrique

LEMME 3.26. — *Pour f une fonction sur M, dépendant uniquement de r.*

$$\widetilde{\Delta} f = \sigma^2\left(f'' + (\frac{3}{r} - \gamma - \beta)\,f'\right) \tag{3.17}$$

Démonstration (Lemme précédent). — Tous les termes verticaux de la formule (2.4) sont nuls. Il ne reste que

$$\widetilde{\Delta} f = \sigma^2\,\Delta f - \sigma^2\,\mathrm{d}f\underbrace{\left(\mathcal{H}\mathrm{grad}\,\ln(\sigma\rho)\right)}_{=(\ln(\sigma\rho))'\,\partial_r} = \sigma^2\,\Delta f - \sigma^2\,(\gamma+\beta)f' \ .$$

Par ailleurs, on peut calculer le Laplacien Δf en coordonnées cartésiennes. Avec $\partial_r = \frac{1}{r}\left(x_1\,\partial_{x_1} + x_2\,\partial_{x_2} + x_3\,\partial_{x_3} + x_4\,\partial_{x_4}\right)$, on a

$$\Delta f = f'' + \frac{3}{r}\,f' \ .$$

D'où l'expression (3.17). $\square$

Grâce à la seule dépendance horizontale des fonctions, on peut simplifier une première fois les formules de la courbure de Ricci donnée par les formules (3.2), (3.4) et (3.5).

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Ric}}^M(\widetilde{U},\widetilde{U}) &= -\widetilde{\Delta}\ln\widetilde{\lambda} + \frac{1}{4}\widetilde{\lambda}^2|\widetilde{\Omega}|^2_{\tilde g} && (3.18)\\
\widetilde{\mathrm{Ric}}^M(X,\widetilde{V}) &= \frac{1}{2}\widetilde{\lambda}\big\{\widetilde{\mathrm{d}}^*\widetilde{\Omega}(X) + 2(n-2)\,\widetilde{\Omega}(X,\mathrm{grad}_{\tilde g}\ln\widetilde{\lambda})\big\} && (3.19)\\
\widetilde{\mathrm{Ric}}^M(X,Y) &= \widetilde{\mathrm{Ric}}^N(\mathrm{d}\varphi(X),\mathrm{d}\varphi(Y)) - 2\,X(\ln\widetilde{\lambda})Y(\ln\widetilde{\lambda})\\
&\quad +\tilde g(X,Y)\,\widetilde{\Delta}\ln\widetilde{\lambda} - \frac{1}{2}\widetilde{\lambda}^2\,\tilde g(i_X\widetilde{\Omega},i_Y\widetilde{\Omega})\,. && (3.20)
\end{aligned}$$

◇ *Sur le vertical.*

Grâce à la proposition 3.2, $|\widetilde{\Omega}|^2_{\tilde g} = \sigma^{-2}\,\rho^{-2}\,\nu^2\,|\Omega|^2_{\tilde g} = \sigma^{-2}\,\rho^{-2}\,\nu^2\,\sigma^4\,|\Omega|^2_{g}\,.$

Donc, d'après le lemme 3.22.(vi),

$$\widetilde{\lambda}^2|\widetilde{\Omega}|^2_{\tilde g} = (2\,r)^2\,\sigma^2\,\nu^{-2}\times\sigma^2\,\rho^{-2}\,\nu^2\,(2/r^4) = 8\,\sigma^4\,\rho^{-2}\,r^{-2}\,.$$

En outre, avec (3.17), on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}\ln\widetilde{\lambda} &= \sigma^2\Big((\ln\widetilde{\lambda})'' + (\frac{3}{r}-\gamma-\beta)\,(\ln\widetilde{\lambda})'\Big)\\
&= \sigma^2\Big((\frac{1}{r}-\beta)' + (\frac{3}{r}\underbrace{-\gamma-\beta}_{=-\delta})\,(\frac{1}{r}-\beta)\Big)\\
&= \sigma^2\Big(-\frac{1}{r^2}-\beta' + (\frac{3}{r}-\delta)\,(\frac{1}{r}-\beta)\Big)\,.
\end{aligned}$$

D'où l'expression de la courbure de Ricci sur le vertical,

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}^M(\widetilde{U},\widetilde{U}) = \sigma^2\Big(\frac{1}{r^2}+\beta' - (\frac{3}{r}-\delta)\,(\frac{1}{r}-\beta) + 2\,\sigma^2\,\rho^{-2}\,r^{-2}\Big)\,. \qquad (3.21)$$

◇ *Entre horizontal et vertical.*

Lemme 3.27. — *Soit f une fonction de r. Alors, pour tout champ horizontal X, $\widetilde{\Omega}(X,\mathrm{grad}_{\tilde g} f) = 0$.*

Démonstration. — En effet, $\widetilde{\Omega} = \sigma^{-1}\,\rho^{-1}\,\nu\,(\sin s)(\cos s)\,\mathrm{d}s\wedge(\mathrm{d}\kappa - \mathrm{d}\alpha)\,.$ Et, $\mathrm{grad}_{\tilde g} f = \sigma^2\,f'\,\partial_r\,.$ □

Corollaire 3.28. — *Pour tout champ horizontal X,* $\widetilde{\mathrm{Ric}}^M(X,\widetilde{V}) = 0.$

◇ *Sur l'horizontal.*

Il reste à expliciter les termes en $\widetilde{\mathrm{Ric}}^N(\mathrm{d}\varphi(X),\mathrm{d}\varphi(Y))$ après un changement conforme $\widetilde{h} = \bar{\nu}^{-2}\,h$, sur N.

On choisit les coordonnées (u,t,ψ) sur N. Ainsi, $(u,t,\psi) = \varphi(r,s,\alpha,\kappa) = (r^2, s, \alpha-\kappa)$. La métrique sur N s'écrit $h = \mathrm{d}u^2 + u^2\,(\mathrm{d}t^2 + (\sin^2 t)\,\mathrm{d}\psi^2)$.

Par la proposition 3.4, on trouve la courbure de Ricci pour $\widetilde{h}$.

Lemme 3.29. — *Soit $f = \ln\bar{\nu}$ (c'est une fonction de r, ou de u).*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Ric}}^N &= (\partial_u^2 f + (\partial_u f)^2)\,\mathrm{d}u^2 + u\,\partial_u f\,\mathrm{d}t^2 + u\,(\sin^2 t)\,\partial_u f\,\mathrm{d}\psi^2\\ &\quad +(\partial_u^2 f + \frac{2}{u}\,\partial_u f - (\partial_u f)^2)\,h\,.\end{aligned}$$

Lemme 3.30. — $\widetilde{\mathrm{Ric}}^M(\partial_r,\partial_s) = \widetilde{\mathrm{Ric}}^M(\partial_r, X_3) = \widetilde{\mathrm{Ric}}^M(\partial_s, X_3) = 0\,.$

Lemme 3.31. — *Sur les vecteurs de base choisis,*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Ric}}^M(\partial_r,\partial_r) &= 8\,r^2\,(\partial_u^2 f + (1/u)\,\partial_u)f + \sigma^{-2}\widetilde{\Delta}\ln\widetilde{\lambda}\\ &\quad -2\,((\ln\widetilde{\lambda})')^2 &(3.22)\\ \widetilde{\mathrm{Ric}}^M(\partial_s,\partial_s) &= 4\,u^2(\partial_u^2 f + (3/u)\,\partial_u f - (\partial_u f)^2)\\ &\quad +r^2\,\sigma^{-2}\widetilde{\Delta}\ln\widetilde{\lambda} - 2\sigma^2\,\rho^{-2} &(3.23)\\ \widetilde{\mathrm{Ric}}^M(X_3,X_3) &= \widetilde{\mathrm{Ric}}^M(\partial_s,\partial_s)\,.\end{aligned}$$

Proposition 3.32. — *Alors, l'équation $\widetilde{\mathrm{Ric}}^M = C\,\widetilde{g}$ fournit le système surdéterminé suivant :*

$$\begin{aligned}\rho' &= \beta\,\rho &(3.24)\\ \sigma' &= \sigma\,(\delta-\beta) &(3.25)\\ \beta' &= \frac{C}{\sigma^2} - \frac{1}{r^2} + \left(\frac{3}{r}-\delta\right)\left(-\beta+\frac{1}{r}\right) - 2\,\sigma^2\,\rho^{-2}\,r^{-2} &(3.26)\\ \delta' &= \frac{2\,C}{\sigma^2} - \frac{5\,\delta}{r} + \delta^2 &(3.27)\\ \delta' &= -\delta^2 + \frac{3\,\delta}{r} + 2\left(\beta-\frac{1}{r}\right)^2 - 2\,\sigma^2\,\rho^{-2}\,r^{-2} &(3.28)\end{aligned}$$

Démonstration . — La première équation vient des notations.

L'équation (3.25) est la condition d'harmonicité.

L'équation (3.26) vient de la formule (3.21) sur le vertical.

Pour deux champs, un horizontal et un vertical, $\widetilde{\mathrm{Ric}}^M(X, \widetilde{V}) = 0 = \widetilde{g}(X, \widetilde{V})$ est toujours vérifié.

De même, sur l'horizontal, quand les vecteurs de base sont orthogonaux.

Les équations (3.27) et (3.28) se déduisent de (3.22) et (3.23). En utilisant le fait que $\partial_u f = (1/2r)\,\partial_r(\ln\nu) = (1/2r)\,(\ln\nu)'$. $\square$

Existence de solutions par une méthode dynamique

Le procédé de résolution du premier exemple peut s'adapter à ce nouveau système, qui est aussi faussement surdéterminé. Soit (S2) le système dynamique constitué des quatre premières équations (3.24), (3.25), (3.26) et (3.27)

$$(\mathrm{S2}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \rho' &=& \beta\,\rho \\ \sigma' &=& \sigma\,(\delta - \beta) \\ \beta' &=& \dfrac{C}{\sigma^2} - \dfrac{1}{r^2} + \left(\dfrac{3}{r} - \delta\right)\left(-\beta + \dfrac{1}{r}\right) - 2\,\sigma^2\,\rho^{-2}\,r^{-2} \\ \delta' &=& \dfrac{2\,C}{\sigma^2} - \dfrac{5\,\delta}{r} + \delta^2 \end{array} \right. .$$

Comme dans l'exemple précédent, on définit F comme étant la différence des seconds membres des équations (3.27) et (3.28) :

$$F = 2\,\delta^2 - \frac{8\,\delta}{r} - 2\left(\beta - \frac{1}{r}\right)^2 + 2\,\sigma^2\,\rho^{-2}\,r^{-2} + 2\,C\,\sigma^{-2}\,.$$

La fonction F et sa dérivée F' sont encore proportionnelles.

Lemme 3.33. — *Si* (S2) *est vérifié, alors* $F' = 2\left(\delta - \dfrac{3}{r}\right)F\,.$

Démonstration . — On dérive F :

$$\begin{array}{rcl} F' &=& 4\,\delta\,\delta' - \dfrac{8\,\delta'}{r} + \dfrac{8\,\delta}{r^2} - 4\left(\beta - \dfrac{1}{r}\right)\left(\beta' + \dfrac{1}{r^2}\right) - 4\,\sigma^2\,\rho^{-2}\,r^{-3} \\ && -4\,\sigma^2\,\underbrace{(\rho'/\rho)}_{=\beta}\,\rho^{-2}\,r^{-2} + 4\,\sigma\,\sigma'\,\rho^{-2}\,r^{-2} - 4\,C\,\sigma'\,\sigma^{-3}\,. \end{array}$$

En remplaçant β', δ' et σ' par leurs expressions obtenues au système (S2), et en mettant $\left(\delta - \frac{3}{r}\right)$ en facteur, on obtient après simplification :

$$\frac{1}{4} F' = \left(\delta - \frac{3}{r}\right) \left(\delta^2 - \frac{4\,\delta}{r} - \left(\beta - \frac{1}{r}\right)^2 + \sigma^2 \rho^{-2} r^{-2} + C\,\sigma^{-2}\right) = \frac{1}{2} \left(\delta - \frac{3}{r}\right) F\,.$$

$\square$

Ainsi, la remarque 3.14 s'applique à nouveau. Pour trouver des solutions du système complet de la proposition 3.32, il faut et il suffit de résoudre (S2) avec des conditions initiales $(\rho_1, \sigma_1, \beta_1, \delta_1)$ en $r = 1$ telles que

$$F_1 = 2\,\delta_1^2 - \frac{8\,\delta_1}{1} - 2\left(\beta_1 - \frac{1}{1}\right)^2 + 2\,\sigma_1^2\,\rho_1^{-2}\,1^{-2} + 2\,C\,\sigma_1^{-2} = 0\,.$$

En effet, F, s'annulant en 1, serait nulle partout, et les solutions donneraient alors des métriques d'Einstein biconformes à g.

La méthode est similaire à celle du premier exemple. Il faut cependant préciser la résolution de (S2). C'est un système dynamique non-autonome, car il dépend de r. Si on l'écrit de la forme :

$$\zeta'(r) = S(r, \zeta)\,, \text{ avec } \zeta = (\rho, \sigma, \beta, \delta)\,,$$

alors, pour qu'il existe des solutions, il suffit que l'application S soit localement lipschitzienne en ζ, à r fixé (cf. Hirsch et Smale [10], chapitre 15).

La fonction S est bien de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (pour $\rho, \sigma > 0$). Elle est donc localement lipschitzienne en ζ (il faut juste s'éloigner de l'origine en $r = 0$). Alors, pour $\zeta_1 = (\rho_1, \sigma_1, \beta_1, \delta_1)$ (avec $\rho_1, \sigma_1 > 0$), il existe localement (proche de 1) une unique solution ζ ayant pour conditions initiales $\zeta(1) = \zeta_1$.

Théorème 3.34. — *Soit $\varphi : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'application de Hopf, avec $\mathbf{R}^4$ et $\mathbf{R}^3$ munis de leurs métriques euclidiennes g et h. Pour tout réel C, il existe σ, ρ et ν des fonctions positives de r telles que, dans un voisinage $\mathcal{A}$ de la sphère $r = 1$, la métrique $\widetilde{g}$, obtenue par changement biconforme de paramètres ρ et σ (sur $(\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}\varphi)^\perp$ et $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}\varphi$ respectivement), soit une métrique d'Einstein de constante C, et $\varphi : (\mathcal{A}, \widetilde{g}) \longrightarrow (\mathbf{R}^3, \widetilde{h})$ soit un morphisme harmonique, où $\widetilde{h} = \bar{\nu}^{-2}\,h$ et $\nu = \bar{\nu} \circ \varphi$.*

Démonstration . — La preuve est identique à celle du théorème 3.15. Il s'agit juste de montrer que l'on peut choisir des conditions initiales en $r = 1$ qui annulent F_1.

On prend $\rho_1 = \sigma_1 = 1$. Il faut alors choisir β_1 et δ_1 tels que

$$0 = F_1 = 2\,\delta_1^2 - 8\,\delta_1 - 2\left(\beta_1 - 1\right)^2 + 2 + 2\,C\,,$$

c'est-à-dire

$$C = \beta_1\,(\beta_1 - 2) + \delta_1\,(4 - \delta_1)\,.$$

Quand (β_1, δ_1) décrit $\mathbf{R}^2$, $\beta_1\,(\beta_1 - 2) + \delta_1\,(4 - \delta_1)$ décrit $\mathbf{R}$ tout entier. Donc, il y a un choix possible de (β_1, δ_1) pour tout réel C. □

Remarques 3.35. —

(i) *Le choix de* (β_1, δ_1) *n'est pas unique pour un* C *donné. Par exemple, pour* $C = 3$ *, les couples* $(0;1)$, $(0;3)$, $(2;1)$, $(2;3)$, $(-1;0)$, $(-1;4)$, $(2;0)$, $(2;4)$ *conviennent.*

Pour $C = -1$, *on peut prendre* $(1;0), (1;4)$ *ou* $(1+\sqrt{5};-1)$ *(parmi d'autres).*

(ii) *Les solutions s'obtiennent sur une « couronne sphérique ». On peut la choisir aussi proche que l'on veut de l'origine, en prenant des conditions initiales en* $r_0 > 0$ *tendant vers* 0. *Dans la suite, on trouve même des solutions sur une boule privée de* 0.

Des solutions particulières explicites

Théorème 3.36. — *On trouve les solutions suivantes :*

(i) $\sigma = \rho = 1 + r^2$, $\nu = \sigma\rho$. *Alors,* $\widetilde{g}$ *est une métrique sphérique et* $C = 3$.

(ii) $\sigma = \rho = 1 - r^2$, $\nu = \sigma\rho$. *Alors,* $\widetilde{g}$ *est hyperbolique et* $C = -3$.

(iii) $\sigma = \rho = r^2$, $\nu = \sigma\rho$. *Alors,* $\widetilde{g}$ *est euclidienne et* $C = 0$.

(iv) $\sigma = k\,r^2/(1+ar^4)^{1/2}$, $\rho = k\,r^2(1+ar^4)^{1/2}/(1-ar^4)$, $\nu = l\,\sigma\rho$, *avec* a, k, l *des constantes positives. Alors* $C = 0$.

Le cas (iv) *donne une famille de métriques Ricci-plates, définies sur la boule* $B^4(a^{-\frac{1}{4}})$ *par :*

$$\widetilde{g} = \frac{1 + a\,r^4}{k^2\,r^4}\;g^{\mathcal{H}} + \;\frac{4\,(1 - a\,r^4)^2}{k^2\,r^2(1 + a\,r^4)}\,\theta^2\,.$$

Remarque 3.37. — Dans le cas (iv), si $k = l = 1$ et $a = 0$, on retrouve le cas (iii) de l'inversion.

Démonstration (Théorème précédent). — Les cas (i), (ii) et (iii) sont des cas connus ; ce sont des changements conformes standards. Il est aisé de voir qu'ils satisfont le système de la proposition 3.32.

Le cas (iv) est lui plus intéressant (peut-être nouveau). Plutôt que de vérifier simplement les équations, on présente comment on est parvenu à considérer cette famille de métriques.

L'idée de départ est de chercher des métriques Ricci-plates, vérifiant le système. En effet, en supposant $C = O$, la deuxième équation devient :

$$\delta' = -\frac{5\delta}{r} + \delta^2 \,.$$

C'est une équation de Bernoulli, dont les solutions sont de la forme :

$$\delta = \frac{4}{r(1 - a\,r^4)} \ , \ \text{avec } a \text{ une constante}.$$

En combinant les première et troisième équations (grâce au terme $-2\sigma^2\rho^{-2}r^{-2}$), on a

$$\beta' + 2\,\beta^2 - (\delta + \frac{1}{r})\,\beta + \frac{9}{r}\,\delta - 2\,\delta^2 = 0\,.$$

En remplaçant δ par sa valeur, l'équation devient :

$$\beta' + 2\,\beta^2 + \frac{ar^4 - 5}{r(1 - ar^4)}\,\beta + \frac{4 - 36\,ar^4}{r^2(1 - ar^4)^2} = 0\,.$$

C'est une équation de Ricatti, dont on cherche une solution particulière β_0 telle que $r(1 - ar^4)\,\beta_0$ soit polynomiale. On trouve :

$$\beta_0 = \frac{1 + 4\,\sqrt{a}r^2 - ar^4}{r(1 - ar^4)}\,.$$

Soit $\beta = y + \beta_0$. La fonction y est alors solution d'une équation de Bernoulli :

$$y = \frac{r(1 - \sqrt{a}\,r^2)^3}{(1 + \sqrt{a}\,r^2)\,(b(1 + \sqrt{a}\,r^2)^4 + r^2(1 + ar^4))}\,,$$

avec b une constante.

D'où, la forme générale de β. Mais, tout β n'est pas convenable pour le système. On peut essayer de simplifier l'expression de y en choisissant b de façon adéquate : par exemple $b = -1/8\sqrt{a}$, mais cette solution ne vérifie plus les autres équations pour σ.

En fait, le cas $b = 0$ semble être le seul cas simple qui conduise à des solutions. Alors,

$$\beta = \frac{1 + 6\,ar^4 + a^2\,r^8}{r(1 - a^2\,r^8)} + \frac{1}{r}\,.$$

On en déduit ρ ; de δ, on déduit ν ; et $\sigma = K\,\rho^{-1}\,\nu$ (avec K constante).

$$\sigma = k'\,r^2/(1{+}ar^4)^{1/2}\,,\quad \rho = k\,r^2(1{+}ar^4)^{1/2}/(1{-}ar^4)\,,\quad \nu = l\,r^4/(1{-}ar^4)$$

La condition $k' = k$ provient du fait que, d'après les 1° et 2° équations,

$$2\,\sigma^2\,\rho^{-2}\,r^{-2} = 2\,(\beta - \frac{1}{r})^2 - 2\delta^2 + \frac{8}{r}\,\delta\,.$$

On est bien alors dans le cas (iv).

La métrique $\widetilde{g}$ s'écrit alors $\widetilde{g} = \sigma^{-2}\,g^{\mathcal{H}} + \rho^{-2}\,g^{\mathcal{V}} = \sigma^{-2}\,g^{\mathcal{H}} + \rho^{-2}\,\lambda^2\,\theta^2$. Comme $\lambda = 2\,r$,

$$\widetilde{g} = \frac{1 + a\,r^4}{k^2\,r^4}\;g^{\mathcal{H}} + \frac{4\,(1 - a\,r^4)^2}{k^2\,r^2(1 + a\,r^4)}\,\theta^2\,. \qquad \square$$

Dans le cas (iv), on peut exprimer $\widetilde{g}$ en fonction des coordonnées (r, s, α, κ). Il reste seulement à trouver la formule duale η du vecteur $\dfrac{1}{r}X_3$:

$$\eta = \frac{4}{r^2}\;\sin(2s)\,(\mathrm{d}\kappa - \mathrm{d}\alpha)\,.$$

De plus, $\theta = \dfrac{1}{2}\,\big((\cos^2 s)\,\mathrm{d}\alpha + (\sin^2 s)\,\mathrm{d}\kappa\big)$.

Donc,

$$\begin{aligned}
\widetilde{g} &= \frac{1 + a\,r^4}{k^2\,r^4}\;\big(\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}s^2 + \eta^2\big) + \frac{4\,(1 - a\,r^4)^2}{k^2\,r^2(1 + a\,r^4)}\,\theta^2 \\
\widetilde{g} &= \frac{1 + a\,r^4}{k^2\,r^4}\;\Big(\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}s^2 + \frac{r^4}{4}\;\sin^2(2s)\,(\mathrm{d}\kappa - \mathrm{d}\alpha)^2\;\Big) \\
&\qquad + \frac{(1 - a\,r^4)^2}{k^2\,r^2(1 + a\,r^4)}\;(\cos^2 s\,\mathrm{d}\kappa + \sin^2 s\,\mathrm{d}\alpha)^2\,. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Remarques 3.38. — La métrique $\widetilde{g}$ définie par (3.29) sur la boule $B^4(a^{-\frac{1}{4}})$ est complète à l'origine (elle se comporte comme l'inversion).

Par ailleurs, il y a une symétrie de la métrique : en faisant le changement de variables $t = \dfrac{1}{\sqrt{a}\, r}$ ($t = r$ sur la frontière de la boule), on obtient la même métrique à l'extérieur de $B^4(a^{-\frac{1}{4}})$:

$$\widetilde{g} = \frac{1 + a\, t^4}{k^2\, t^4} \left(\mathrm{d}t^2 + t^2\, \mathrm{d}s^2 + \frac{t^4}{4} \sin^2(2s)\, (\mathrm{d}\kappa - \mathrm{d}\alpha)^2 \right) + \frac{4\,(1 - a\, t^4)^2}{k^2\, t^2 (1 + a\, r^4)}\, \theta^2 \,.$$

En revanche, la métrique est dégénérée sur le bord de la boule.

Remarque 3.39. — Les exemples construits ici sont à nouveau de type Killing, car λ ne dépend que de paramètres sur l'horizontal. Une autre construction connue de métriques d'Einstein dans le cas de l'existence de champ de Killing a été exposée par Gibbons et Hawking (cf. [6]). Cependant, cette méthode demande que $(N^3, \widetilde{h})$ soit à courbure constante. Cela n'est pas vérifié dans la famille d'exemples (iv) du théorème 3.36. En effet, on a alors la courbure scalaire sur N :

$$\mathrm{Scal}^N_{\tilde{h}} = \frac{k\, u^2}{(1 - a\, u^2)^3}\,, \text{ où } k > 0 \text{ est constante et } u = r^2\,, \text{ la norme sur } \mathbf{R}^3.$$

Ce qui n'est pas constant. Ces métriques échappent ainsi au procédé de Gibbons et Hawking.

3.4. Compléments : exemples de M^4 dans N^2

Soit $\varphi : (M^4, g) \to (N^2, h)$. On change biconformément la métrique, avec les facteurs σ et ρ. On cherche à résoudre, $\widetilde{\mathrm{Ric}} = C\, \widetilde{g}$.

1° exemple.

Soit $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$, définie par $\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = (x_1, x_2)$. On suppose que σ et ρ ne dépendent que de t. On obtient le système surdéterminé :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} C & = & -(\rho')^2 + \rho\rho'' - \frac{2\sigma'\rho\rho'}{\sigma} \\ C & = & -(\rho')^2 + \rho\rho'' + \frac{2\sigma'\rho\rho'}{\sigma} + \frac{2\sigma''\rho^2}{\sigma} - \frac{4(\sigma')^2\rho^2}{\sigma^2} \\ C & = & \frac{\rho^2\sigma''}{\sigma} - \frac{3\rho^2(\sigma')^2}{\sigma^2} \end{array} \right.$$

THÉORÈME 3.40. — *On trouve les solutions suivantes :*

(i) $\sigma = \rho = t\,,\ C = -3$ *(métrique hyperbolique).*

(ii) $\sigma = a\,t^{-1/2}\,, \rho = b\,t^{1/4}\,,\ C = 0$ *(Ricci-plate).*

(iii) $\rho^2 = A\sigma^2/\sigma'\,,$ *où* σ *est solution du système du premier ordre :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sigma' & = & \delta \\ \delta' & = & \frac{3\delta^2+b\delta}{\sigma} \end{array}\right.$$

avec b *une constante. Ce dernier se résout à partir d'un portrait de phase.*

2° exemple.

Soit $\varphi : R^4 \setminus \{0\} \to S^2$, définie par $\varphi(z,w) = [z,w] \in \mathbf{CP}^1 = S^2$ (on note : $z = x_1 + ix_2, w = x_3 + ix_4$). Soit $r = |x|$. On suppose que σ et ρ ne dépendent que de r. On obtient le système surdéterminé :

$$\left\{\begin{array}{lcl} C & = & \rho\rho'' - (\rho')^2 + \frac{\rho\rho'}{r} + 2\rho\rho'\left(\frac{\sigma'}{\sigma} - \frac{1}{r}\right) + \frac{2\rho^2}{\sigma^2}\left(\sigma\sigma'' - (\sigma')^2\right) \\ & & \qquad + \frac{2\rho^2}{r^2} - 2\rho^2\left(\frac{\sigma'}{\sigma} - \frac{1}{r}\right)^2 \\ C & = & \rho\rho'' - (\rho')^2 + \frac{\rho\rho'}{r} + \frac{2\rho^2}{r}\left(\frac{\sigma'}{\sigma} - \frac{1}{r}\right)\left(1 - \frac{r\rho'}{\rho}\right) + \frac{2\sigma^4}{\rho^2 r^2} \\ C & = & \frac{4\sigma^2}{r^2} + \rho^2\left(\frac{\sigma\sigma''-(\sigma')^2}{\sigma^2}\right) + \frac{\rho^2}{r^2} - \rho^2\left(\frac{2\sigma'}{\sigma} - \frac{3}{r}\right)\left(\frac{\sigma'}{\sigma} - \frac{1}{r}\right) - \frac{2\sigma^4}{\rho^2 r^2} \end{array}\right.$$

Les métriques sphérique, hyperbolique et euclidienne (obtenues par changement conforme) sont des solutions évidentes. Mais, il reste à déterminer l'existence d'autres solutions.

Remerciements. — L'auteur tient à remercier Paul Baird, pour ses conseils et l'intérêt qu'il porte à cette recherche, ainsi que le rapporteur de ce texte, pour ses remarques et ses précisions.

Bibliographie

[1] BÉRARD-BERGERY (L.). — Sur de nouvelles variétés d'Einstein, Publications de l'Institut E.Cartan (Nancy), 4, p. 1-60 (1982).

[2] BERNARD (A.), CAMPBELL (E.A.), DAVIE (A.M.). — Brownian motion and generalized analytic and inner functions, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 29 (1), p. 207-28 (1979).

[3] Besse (A.L.). — Einstein Manifolds, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 10, Springer, Berlin (1987).

[4] Baird (P.), Wood (J.C.). — Harmonic morphisms between Riemannian manifolds, London Math. Soc. Monogr.(N.S.), Oxford Univ. Press (2003).

[5] Fuglede (B.). — Harmonic morphisms between Riemannian manifolds, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 28 (2), p. 107-44 (1978).

[6] Gibbons (G.W.), Hawking (S.W.). — Gravitational multi-instantons, Phys. Lett. B., 78, p. 430-2 (1978).

[7] Gudmundsson (S.). — On the geometry of harmonic morphisms, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 108, p. 461-6 (1990).

[8] Gudmundsson (S.). — The geometry of harmonic morphisms, Ph.D. Thesis, University of Leeds (1990).

[9] Hebey (E.). — Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés, Diderot (1997).

[10] Hirsch (M.W.), Smale (S.). — Differential equations, dynamical systems and linear algebra, Academic Press, New York (1974).

[11] Ishihara (T.). — A mapping of Riemannian manifolds which preserves harmonic functions, J. Math. Kyoto. Univ., 19, p. 215-29 (1979).

[12] Mo (X.). — On the geometry of horizontally homothetic maps and harmonics morphisms, Adv. Math. Beijing, 23, p. 282-3 (1994).

[13] Pantilie (R.). — Harmonic morphisms with one-dimensional fibres, Internat. J. Math., 10, p. 457-501 (1999).

[14] Pantilie (R.). — Harmonic morphisms with one-dimensional fibres on 4-dimensional Einstein manifolds, Comm. Anal. Geom., 10 (4), p. 779-814 (2002).

[15] Pantilie (R.), Wood (J.C.). — Harmonic mrophisms with one-dimensional fibres on Einstein manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., 354, p. 4229-43 (2002).