ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

LUC GUYOT

Estimations de dimensions de Minkowski dans l'espace des groupes marqués

Tome XVI, nº 1 (2007), p. 107-124.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2007_6_16_1_107_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XVI, n° 1, 2007
pp. 107–124

Estimations de dimensions de Minkowski dans l'espace des groupes marqués(*)

Luc Guyot (1)

Résumé. — Dans cet article, on montre que l'espace des groupes marqués est un sous-espace fermé d'un ensemble de Cantor dont la dimension de Hausdorff est infinie. On prouve que la dimension de Minkowski de cet espace est infinie en exhibant des sous-ensembles de groupes marqués à petite simplification dont les dimensions de Minkowski sont arbitrairement grandes. On donne une estimation des dimensions de Minkowski de sous-espaces de groupes à un relateur. On démontre enfin que les dimensions de Minkowski du sous-espace des groupes commutatifs marqués et d'un ensemble de Cantor défini par Grigorchuk sont nulles.

Abstract. — In this article we show that the space of marked groups is a closed subspace of a Cantor space whith infinite Hausdorff dimension. We prove that the Minkowski dimension of this space is infinite by exhibiting subsets of marked groups with small cancellation the dimension of which are arbitrarly large. We give estimates of the Minkowski dimensions of subsets of marked groups with one relator. Eventually, we prove that the Minkowski dimensions of the subspace of abelian marked groups and a Cantor space defined by Grigorchuk are zero.

1. Introduction

L'étude de la généricité de différentes classes de groupes a donné lieu à de nombreux travaux depuis le théorème de généricité des groupes hyperboliques énoncé par Gromov [8]. Un nouvel aspect dans la caractérisation de cette généricité a été développé par Champetier [2] en considérant l'espace topologique des groupes marqués à m générateurs et les catégories de Baire de parties spécifiques de cet espace.

(*) Reçu le 12 avril 2005, accepté le 9 février 2006
(1) Ce travail est soutenu par le Fond National Suisse, No. PP002-68627.
Section de Mathématiques de Genève, 2-4, rue du Lièvre, Case Postale 240, CH-1211 Genève 24
Luc.Guyot@math.unige.ch

Dans l'idée de caractériser cette généricité d'un point de vue métrique et de mesurer l'importance relative de certaines classes de groupes, on s'intéresse ici à l'estimation des dimensions de Minkowski et de Hausdorff de l'espace des groupes marqués à m générateurs et de certaines de ses parties, qu'on munit de la métrique employée par Champetier [2].

On décrit dans un premier temps un plongement isométrique naturel de l'espace des groupes marqués dans un Cantor dont on montre que la dimension de Hausdorff est infinie. On considère ensuite la partie $PS = PS(m, k, \lambda)$ formée des groupes à k relateurs de même longueur vérifiant la condition de petite simplification $C'(\lambda)$:

Théorème 1.1. — *Lorsque $m \geqslant 2$ et $\lambda \in]0, \frac{1}{6}]$, on a l'encadrement des dimensions inférieure et supérieure de Minkowski suivant*

$$k \log_2(2m-1) \leqslant \underline{\dim}_M PS \leqslant \overline{\dim}_M PS \leqslant \frac{k}{1-3\lambda} \log_2(2m-1).$$

Corollaire 1.2. — *La dimension de Minkowski inférieure de l'espace des groupes marqués à m générateurs ($m \geqslant 2$) est infinie.*

On introduit après cela la partie $UR = UR(m, q)$ des groupes à un relateur et dont le relateur est une puissance q-ème, partie pour laquelle on montre le

Théorème 1.3. — *Lorsque $q \geqslant 2$, on a l'encadrement $\frac{\log_2(2m-1)}{q} \leqslant \underline{\dim}_M UR \leqslant \overline{\dim}_M UR \leqslant \frac{\log_2(2m-1)}{q-1}$.*

Dans le cas de $m = 4$ générateurs, on s'intéresse au sous-espace $\mathfrak{B}$ défini par Grigorchuk [7] dont on rappelle en détail la construction au chapitre 7 et pour lequel on montre

Théorème 1.4. — *La dimension de Minkowski supérieure de l'espace $\mathfrak{B}$ est nulle.*

On montre enfin le

Théorème 1.5. — *La dimension de Minkowski supérieure du sous-espace des groupes commutatifs est nulle.*

Les chapitres 2 et 3 sont deux chapitres préliminaires où toutes les définitions utiles regardant l'espace des groupes marqués et les dimensions métriques de Minkowski et de Hausdorff ont été rassemblées ainsi que quelques exemples. Dans le chapitre 4 on prouve, lorsque $m \geqslant 2$, que l'espace

$\mathcal{P}(\mathbb{L}_m)$ des parties de $\mathbb{L}_m$ dans lequel se plonge isométriquement $\mathcal{G}_m$ a une dimension de Hausdorff infinie. On y montre également que la dimension supérieure de Minkowski de $\mathcal{G}_1$ est nulle. Les chapitres 6 à 8 présentent dans l'ordre les démonstrations des quatre résultats principaux énoncés dans cette introduction.

2. Les espaces $\mathcal{G}(G)$ et $\mathcal{P}(G)$

Soit $\mathbb{L}_m$ le groupe libre de base $S = \{e_1, \ldots, e_m\}$. A chaque sous-groupe distingué de $\mathbb{L}_m$ correspond un quotient marqué de $\mathbb{L}_m$, c'est-à-dire un groupe muni d'un système de générateurs privilégié qui est l'image du système S par l'application quotient. L'ensemble $\mathcal{G}_m$ des sous-groupes distingués de $\mathbb{L}_m$, lorsqu'il est muni d'une topologie métrisable dite topologie de Cayley, est un espace compact appelé espace des groupes marqués à m générateurs.

La topologie de Cayley sur $\mathcal{G}_m$, est induite par une topologie métrisable sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{L}_m)$ des parties de $\mathbb{L}_m$ qui fait de $\mathcal{P}(\mathbb{L}_m)$ un espace de Cantor (un espace de Cantor est un espace topologique compact, totalement discontinu et sans points isolés ; un tel espace est homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor). On donne ci-dessous une construction plus générale qui permet de définir une topologie compacte et métrisable sur l'ensemble des parties d'un groupe de type fini ainsi que sur l'ensemble de ses sous-groupes distingués.

Soit G un groupe de type fini muni d'un système ordonné de générateurs $X = (g_1, \ldots, g_m)$. La longueur $|g|_X$ d'un élément $g \in G$ relativement à X est la longueur d'un mot irréductible le plus court en les lettres $X \cup X^{-1}$ qui représente g. On désigne par $B_X(r)$ l'ensemble des éléments de G de longueur inférieure ou égale à r.

Si R est une partie de G, on désigne par $\mathcal{N}(R)$ le plus petit sous-groupe distingué de G contenant R appelé clôture normale de R. On écrit $< R >$ pour le sous-groupe de G engendré par R. Si A est un ensemble fini, on désigne par $|A|$ le cardinal de A.

Définition 2.1. — *Une distance d sur un ensemble E vérifie l'inégalité ultra-métrique si*

$$d(x,z) \leqslant \max\{d(x,y), d(y,z)\}, \text{ pour tout } x, y \text{ et } z \text{ de } E.$$

Soit $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des parties de G. On définit sur $\mathcal{P}(G)$ la distance ultra-métrique $d_{\mathcal{P}}$ à partir de la « valuation »

$$\nu(A,B) = \max\{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \mid B_X(n) \cap A = B_X(n) \cap B\}$$

pour des parties A et B de G. On pose alors $d_{\mathcal{P}}(A,B) = 2^{-\nu(A,B)}$. Il est immédiat de vérifier que la topologie induite par $d_{\mathcal{P}}$ sur $\mathcal{P}(G)$ est aussi celle de la topologie produit sur $\{0,1\}^G$ où $\{0,1\}$ est muni de la topologie discrète. On montre sans peine que $(\mathcal{P}(G), d_{\mathcal{P}})$ est un espace de Cantor si G est infini et un espace discret fini sinon.

DÉFINITION 2.2. — *On désigne par $\mathcal{G}(G)$ l'ensemble des sous-groupes distingués de G. On considère sur $\mathcal{G}(G)$ la métrique $d_{\mathcal{G}}$ induite par $d_{\mathcal{P}}$. L'espace métrique $\mathcal{G}(G)$ est appelé espace des quotients marqués de G. Lorsque $G = \mathbb{L}_m$, on écrit $\mathcal{G}_m = \mathcal{G}(\mathbb{L}_m)$.*

L'espace $\mathcal{G}(G)$ est une partie fermée de $\mathcal{P}(G)$ qui possède des points isolés. Ainsi $\mathcal{G}(G)$ est un espace métrique compact totalement discontinu et donc de dimension topologique nulle, voir par exemple [2, 3] et [6]. Lorsque $G = \mathbb{L}_m$, on écrit $d_{\mathcal{G}} = d_m$.

3. Dimensions de Minkowski et de Hausdorff

Les dimensions de Minkowski et de Hausdorff sont des dimensions métriques qui renseignent sur les possibilités de plongement dans un espace métrique standard tel qu'un espace euclidien ou hyperbolique. Pour les notions de base concernant les dimensions métriques on se réfère au livre de Falconer [5].

On désigne par (E,d) un espace métrique. Pour toute partie A de E, $diam(A)$ est le diamètre de A. Un espace précompact est un espace métrique qui possède pour tout $\varepsilon > 0$ un recouvrement fini par des boules fermées de rayon ε.

Notations 3.1. — Soit (E,d) un espace métrique précompact. On désigne par $N(E,\varepsilon)$ le minimum des cardinaux des recouvrements de E par des boules fermées de rayon ε. On désigne par $P(E,\varepsilon)$ le nombre maximum de boules fermées de rayon ε disjointes.

DÉFINITION 3.2. — *Les dimensions de Minkowski inférieure et supérieure d'un espace métrique précompact (E,d) se définissent respectivement par les formules*

$$\underline{\dim}_M E = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(E,\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)},$$
$$\overline{\dim}_M E = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(E,\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

Ces dimensions métriques sont aussi connues sous les noms de dimensions fractales ou « box-counting dimensions » inférieure et supérieure.

Définition 3.3. — *La dimension de Hausdorff d'un ensemble $A \subset E$ est*

$$\dim_H A = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) > 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\}$$
$$= \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) < \infty\} = \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\},$$

où $\mathcal{H}^s$ est la mesure de Hausdorff de dimension s

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} diam(E_i)^s : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ E_i \subset E,\ diam(E_i) \leqslant \delta \right\}.$$

Les propriétés élémentaires suivantes sont vérifiées lorsque dim désigne soit $\underline{\dim}_M, \overline{\dim}_M$ ou $\dim_H$ (voir [5, Ch.2]).

Monotonie : Si $E_1 \subset E_2$ alors $\dim E_1 \leqslant \dim E_2$.
Ensemble fini : Si E est fini alors $\dim E = 0$.

La dimension de Minkowski supérieure est *finiment stable* , c'est-à-dire

$$\overline{\dim}_M \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \overline{\dim}_M E_i\,,\ \text{ pour } E_i \subset E, i = 1, 2, \ldots, n,$$

alors que la dimension de Hausdorff est *dénombrablement stable* , c'est-à-dire

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \sup_{i\geqslant 1} \dim_H E_i\,,\ \text{ pour } E_i \subset E, i = 1, 2, \ldots.$$

La dimension de Hausdorff d'un ensemble dénombrable est donc nulle. Si dim désigne l'une des dimensions de Minkowski, alors $\dim A = \dim \overline{A}$ où $\overline{A}$ est l'adhérence de $A \subset E$. Pour cette raison, dimension de Hausdorff et dimensions de Minkowski peuvent être très différentes.

Proposition 3.4 [10]. — *Pour tout espace métrique précompact E,*

$$\dim_{top} E \leqslant \dim_H E \leqslant \underline{\dim}_M E \leqslant \overline{\dim}_M E.$$

où $\dim_{top}$ désigne la dimension topologique ou dimension de recouvrement de Lebesgue.

3.1. Exemples

Si E est la boule unité d'un espace vectoriel normé de dimension n, munie de l'une quelconque de ses normes, alors ses dimensions de Hausdorff et de Minkowski sont toutes égales à n qui est aussi sa dimension topologique. Si

E est l'espace triadique de Cantor, construit dans le segment $[0,1]$ muni de la métrique euclidienne, ses dimensions de Minkowski et de Hausdorff valent toutes trois $\log(2)/\log(3)$ alors que sa dimension topologique est nulle.

Si $E = [0,1]$, muni de la métrique euclidienne, et si α est un réel strictement positif, alors

(1) $\underline{\dim}_M A = \overline{\dim}_M A = \frac{1}{1+\alpha}$ lorsque $A = \{\frac{1}{n^\alpha}\}_{n \geqslant 1}$,

(2) $\underline{\dim}_M A = \overline{\dim}_M A = 1$ lorsque $A = \{\frac{1}{\log n}\}_{n \geqslant 2}$,

(3) $\underline{\dim}_M A = \overline{\dim}_M A = 0$ lorsque $A = \{2^{-n}\}_{n \geqslant 0}$.

Dans chacun de ces cas, la dimension de Hausdorff est nulle. Ces résultats s'obtiennent directement à partir de la définition. Le troisième cas suggère que la dimension de Minkowski supérieure de l'ensemble des valeurs d'une suite qui converge vers son unique point d'accumulation à vitesse exponentielle, est nulle. C'est le cas dans l'espace $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$ où $d_1(n\mathbb{Z}, \{0\}) = 2^{-n}$ et où le sous-groupe distingué trivial est l'unique point d'accumulation de cet espace. Comme premier exemple de calcul, on montre dans la proposition 4.8 du chapitre suivant qu'effectivement $\overline{\dim}_M \mathcal{G}(\mathbb{Z}) = 0$. De manière générale, majorer la dimension de Minkowski supérieure de l'ensemble des valeurs d'une suite convergeant vers son unique point d'accumulation revient estimer la vitesse de convergence de cette suite.

4. Dimension de Hausdorff de l'espace $\mathcal{P}(\mathbb{L}_m)$

On considère, comme dans le chapitre 2, un groupe G muni d'un système ordonné de générateurs X ainsi que l'espace métrique $(\mathcal{P}(G), d_{\mathcal{P}})$. On pose $\beta(n) = |B_X(n)|$ et $\sigma(n) = \beta(n+1) - \beta(n)$. La limite $\omega(G,X) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta(n)}$ est appelée taux de croissance exponentiel du groupe G relativement à X. Si $\omega(G,X) > 1$, on dit que le groupe G est de *croissance exponentielle.* Cette dernière définition ne dépend pas du choix de X (voir [4, chap.VI.C]). On dit que deux points d'un espace métrique sont ε-distinguables si la distance qui les sépare est strictement supérieure à ε.

On exprime dans la propositon 4.3 les dimensions de Minkowski de $\mathcal{P}(G)$ en fonction de β. Le lemme 4.4 donne une condition suffisante portant sur la croissance de G pour que l'egalité ait lieu entre dimension de Hausdorff et dimension de Minkowski inférieure de l'espace $\mathcal{P}(G)$. Il en résulte immédiatement que la dimension de Hausdorff de $\mathcal{P}(\mathbb{L}_m)$ est infinie. La démonstration de ce premier lemme est laissée au lecteur.

LEMME 4.1. — *Soit (E, d) un espace ultra-métrique compact. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un unique recouvrement fini minimal $\mathcal{F}(E, \varepsilon)$ de E par des boules fermées de rayon ε, c'est-à-dire tel qu'aucune sous-famille propre de $\mathcal{F}(E, \varepsilon)$ n'est un recouvrement de E. De plus ce recouvrement est une partition et l'on a $|\mathcal{F}(E, \varepsilon)| = N(E, \varepsilon) = P(E, \varepsilon)$. En outre, $P(E, \varepsilon)$ est égal au nombre maximal de points ε-distinguables dans E.*

LEMME 4.2. — *Soit G un groupe de type fini muni d'un système ordonné de générateurs X. Si $(E, d) = (\mathcal{P}(G), d_{\mathcal{P}})$ ou $(\mathcal{G}(G), d_{\mathcal{G}})$ alors, pour tout entier $n \geqslant 0$, $N(E, 2^{-n})$ est le nombre de parties de la boule $B_X(n)$ qui s'obtiennent comme l'intersection d'un élément de E avec cette boule.*

Démonstration. — Supposons que $(E, d) = (\mathcal{P}(G), d_{\mathcal{P}})$. On se donne $n \geqslant 0$. Ayant posé $\varepsilon = 2^{-n}$, on considère le sous-ensemble $P_n = \mathcal{P}(B_X(n))$ de E formé des parties de la boule $B_X(n)$. Alors, l'ensemble des boules centrées en les points de P_n et de rayon ε est un recouvrement de E par des boules disjointes. C'est donc le recouvrement minimal $\mathcal{F}(E, \varepsilon)$ d'après le lemme 4.1. En effet, deux centres x_i et x_j distincts vérifient $d(x_i, x_j) > \varepsilon$. Si les boules associées n'étaient pas disjointes, elles seraient alors égales à une même boule de diamètre strictement supérieur à ε. Ceci est absurde puisque le diamètre d'une boule de rayon ε d'un espace ultra-métrique n'excède pas ε. Lorsque $(E, d) = (\mathcal{G}(G), d_{\mathcal{G}})$, la preuve reste en tout point semblable. □

PROPOSITION 4.3. — *Les dimensions de Minkowski inférieures et supérieures de l'espace métrique $\big(\mathcal{P}(G), d_{\mathcal{P}(G)}\big)$ sont données par les formules*

$$\underline{\dim}_M \mathcal{P}(G) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\beta(n)}{n}, \quad \overline{\dim}_M \mathcal{P}(G) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\beta(n)}{n}.$$

Démonstration. — Ayant fixé $n \geqslant 0$, on pose $\varepsilon = 2^{-n}$. Par le lemme 4.2,

$$N(\mathcal{P}(\mathbb{L}_m), \varepsilon) = 2^{|B_X(n)|} = 2^{\beta(n)}.$$

$$\text{D'où } \underline{\dim}_M \mathcal{P}(\mathbb{L}_m) = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(\mathcal{P}(\mathbb{L}_m), \varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\beta(n)}{n},$$

avec une formule analogue pour la dimension de Minkowski supérieure. □

Si d est une distance sur un ensemble E, on désigne par $val(d)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$ constitué des valeurs prises par d sur $E \times E$. Pour

x dans E et $\varepsilon > 0$, on désigne par $B(x, \varepsilon)$ la boule fermée de centre x et de rayon ε.

Le lemme suivant montre que sous une condition de contrôle uniforme des « s-volumes » $\varepsilon'^s N(B(x,\varepsilon),\varepsilon')$ des partitions régulières des boules, dimension de Hausdorff et dimension inférieure de Minkowski d'un espace ultra-métrique compact sont égales. On laisse au lecteur la preuve de ce lemme qui est élémentaire.

Lemme 4.4. — *Soit (E, d) un espace ultra-métrique compact vérifiant les deux hypothèses suivantes :*

(1) *pour toute boule B de rayon $r \in val(d)$, $diam(B) = r$,*

(2) *pour tout $s > 0$, il existe un nombre réel $\eta = \eta(s) > 0$ tel que l'une des deux inégalités*

(*i*) $\varepsilon^s \leqslant \varepsilon'^s N\left(B(x,\varepsilon),\varepsilon'\right)$,

(*ii*) $\varepsilon^s \geqslant \varepsilon'^s N\left(B(x,\varepsilon),\varepsilon'\right)$,
est vérifiée pour tout $x \in E$ et pour tout $\varepsilon' \leqslant \varepsilon \leqslant \eta$, $\varepsilon, \varepsilon' \in val(d)$.

Alors,

$$\dim_H E = \underline{\dim}_M E.$$

Remarque 4.5. — Si (E, d) est un espace ultra-métrique compact on peut montrer facilement que $val(d)$ est l'ensemble des valeurs d'une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ strictement décroissante et tendant vers 0. Les conditions (i) et (ii) du lemme précédent peuvent alors se reformuler de la manière suivante : Pour tout $s > 0$ il existe un entier $K = K(s)$ tel que l'une des deux inégalités

(*i*) $N(B(x,\varepsilon_n),\varepsilon_{n+1}) \geqslant \left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\right)^s$

(*ii*) $N(B(x,\varepsilon_n),\varepsilon_{n+1}) \leqslant \left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\right)^s$

est vérifiée pour tout $x \in E$ et pour tout $n \geqslant K$.

Proposition 4.6. — *Si la suite $(\sigma(n))_{n\geqslant 0}$ est stationnaire ou si elle tend vers l'infini, alors*

$$\dim_H \mathcal{P}(G) = \underline{\dim}_M \mathcal{P}(G).$$

En particulier, si G est de croissance exponentielle, alors $\dim_H \mathcal{P}(G) = \infty$.

Corollaire 4.7. — *Si* $m = 1$ *alors* $\dim_H \mathcal{P}(\mathbb{L}_m) = \dim_H \mathcal{P}(\mathbb{Z}) = 2\log 2$. *Si* $m \geqslant 2$ *alors* $\dim_H \mathcal{P}(\mathbb{L}_m) = \infty$.

Démonstration de la proposition 4.6. — On montre d'abord que $\mathcal{P}(G)$ remplit la condition (1) du lemme 4.4. Soit B une boule fermée de $\mathcal{P}(G)$ de rayon $r = 2^{-n} \in val(d_{\mathcal{P}})$ et dont le centre est une partie x de G. Si $B_X(n+1)\backslash x$ n'est pas vide, on pose $x' = x \cup \{g\}$, où g est un élément quelconque de $B_X(n+1)\backslash x$. Si $B_X(n+1) \subset x$, on pose $x' = B_X(n)$. Les parties x et x' sont deux points de B vérifiant $d_{\mathcal{P}}(x, x') = r$ si bien que $diam(B) = r$. Ce qui montre que $\mathcal{P}(G)$ vérifie (1).

On fixe maintenant $s > 0$ et l'on prouve que, si σ est croissante ou tend vers l'infini, alors la condition (2) du lemme 4.4 est aussi remplie. Soit n un entier positif ou nul. Alors $N\left(B(x, 2^{-n}), 2^{-n-1}\right) = 2^{|B_X(n+1)\backslash B_X(n)|} = 2^{\sigma(n)}$. Si σ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini, il existe $K = K(s)$ tel que $2^{\sigma(n)} \geqslant \left(\frac{2^{-n}}{2^{-n-1}}\right)^s = 2^s$ pour tout $n \geqslant K$. Dans ce cas (2.i) est vérifiée. Supposons que σ est stationnaire et prend la valeur constante $S < \infty$ pour tout $n \geqslant K$, pour un certain entier K. Si $s < \log 2^S$ (respectivement $s \geqslant \log_2 2^S$) alors $2^{\sigma(n)} \geqslant 2^s$ (respectivement $2^{\sigma(n)} \leqslant 2^S$) pour tout $n \geqslant K$. La condition (2) est donc satisfaite. Si G est de croissance exponentielle alors $\lim_{n\to\infty} \sigma(n) = \infty$ (voir [4, Ch.VI.C, Remarque 53.v]) et $\liminf_{n\to\infty} \frac{\beta(n)}{n} = \infty$. L'application des proposition 4.3 et lemme 4.4 conduit à l'égalité $\dim_H \mathcal{P}(G) = \infty$. □

Terminons ce chapitre avec le calcul de la dimension de Minkowski de $\mathcal{G}_1$. Ce calcul est une application du lemme 4.2.

Proposition 4.8. — *Lorsque* $m = 1$, $\mathcal{G}_m = \mathcal{G}(\mathbb{Z})$ *et l'on a*

$$\overline{\dim}_M \mathcal{G}(\mathbb{Z}) = 0.$$

Démonstration. — Fixons $n \geqslant 1$ et posons $\varepsilon = 2^{-n}$. Par le lemme 4.2, $N(\mathcal{G}(\mathbb{Z}), \varepsilon)$ est le cardinal de l'ensemble $\{P \subset \mathbb{Z} \,|\, P = k\mathbb{Z} \cap \{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Ainsi $N(\mathcal{G}(\mathbb{Z}), \varepsilon) = n + 1$, si bien que

$$\overline{\dim}_M \mathcal{G}(\mathbb{Z}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log N(\mathcal{G}(\mathbb{Z}), 2^{-n})}{\log 2^n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n} = 0.$$

□

Cette dernière proposition est aussi un cas particulier du théorème 8.1 démontré au chapitre 8.

5. Estimations des dimensions de Minkowski d'un sous-espace de groupes à petite simplification

On suppose $m \geqslant 2$. Un mot réduit $w = avb \in \mathbb{L}_m$ avec $a, b \in S \cup S^{-1}$ est cycliquement réduit si $a \neq b^{-1}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $cyc(n)$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathbb{L}_m$ qui sont cycliquement réduits et de longueur n. On trouve facilement

$$|B_S(n)| = \frac{m}{m-1}((2m-1)^n - 1) + 1 \, (n \geqslant 1). \tag{5.1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|cyc(n)|}{(2m-1)^n} = 1. \tag{5.2}$$

Soit u et v deux mots cycliquement réduits. Un sous-mot d'un conjugué cyclique de u ou de u^{-1} qui est aussi un sous-mot de l'un des conjugués cycliques de v ou de v^{-1} est appelé une *pièce* entre u et v. Soit $\lambda > 0$. Si R est une partie de $\mathbb{L}_m$ formée de mots cycliquement réduits telle que toute pièce p entre deux éléments de R vérifie $|p|_S < \lambda \min_{r \in R} |r|_S$, on dit que R vérifie *la condition de petite simplification* $C'(\lambda)$.

On suppose dorénavant que $\lambda \in]0, 1/6]$. Pour tout couple d'entiers n et k, on écrit $ps(n) = ps_{k,\lambda}(n)$ pour l'ensemble des k-uplets d'éléments de $cyc(n)$ vérifiant l'hypothèse métrique de petite simplification $C'(\lambda)$. On définit les sous-espaces

$$PS(n) = \{\mathcal{N}(r_1, \ldots, r_k)\, \mathbb{L}_m \,|\, (r_1, \ldots, r_k) \in ps(n)\} \text{ et } PS = \bigcup_{n \geqslant 1} PS(n).$$

Théorème 5.1. —

$$k \log_2(2m-1) \leqslant \underline{\dim}_M PS \leqslant \overline{\dim}_M PS \leqslant \frac{k}{1 - 3\lambda} \log_2(2m-1).$$

Le sous-espace PS est dénombrable et peut être regardé comme l'ensemble des valeurs d'une suite dans $\mathcal{G}_m$ dont la seule valeur d'adhérence est le groupe distingué trivial $\{1\}$. La majoration de la dimension supérieure de Minkowski de cet ensemble est rendue possible grâce à un théorème classique de la théorie de la petite simplification, le théorème de Greendlinger :

Théorème 5.1 [9, Ch.V,Th.4.4]. — *Soit $\mathcal{N}$ la clôture normale d'un ensemble de relateurs $R \subset \mathbb{L}_m$ vérifiant la condition $C'(\lambda)$, $\lambda \in]0, 1/6]$. Alors tout élément non trivial de $\mathcal{N}$ contient un sous-mot s d'un conjugué cyclique d'un élément $r \in R$ ou de r^{-1} avec $|s|_S > (1 - 3\lambda)|r|_S$.*

Le théorème précédent montre en effet que lorsque les relateurs de groupes à petite simplification sont suffisamment grands, les clôtures normales de ces relateurs ne sont plus ε-distinguables du sous-groupe trivial $\{1\}$ pour $\varepsilon > 0$ fixé. simplification ne sont Cette considération permet alors de majorer très simplement $P(PS, \varepsilon)$.

Minorer la dimension de Minkowski inférieure de PS s'obtient en minorant $P(PS, \varepsilon)$. Cette minoration repose sur trois observations. Tout d'abord, des clôtures normales distinctes de relateurs de longueurs suffisamment petites sont ε-distinguables. En suite, on sait par un résultat de Greendlinger que la clôture normale de relateurs vérifiant $C'(\lambda)$ détermine presque uniquement le choix de ces relateurs. Enfin, un résultat classique de généricité affirme que des k-uplets de tels relateurs ayant tous même longueur sont asymptotiquement aussi nombreux que les k-uplets de mots cycliquement réduits ayant tous même longueur.

Démonstration du théorème 5.1. — Démontrons en premier lieu que

$$\overline{\dim}_M PS \leqslant \frac{k}{1-3\lambda} \log_2(2m-1).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, fixons $\varepsilon = 2^{-n}$. Remarquons alors que les points de $\bigcup_{j > \frac{n}{1-3\lambda}} PS(j)$ ne sont pas ε-distinguables. En effet, soit $\mathcal{N}(r_1, \ldots, r_k) \in \bigcup_{j > \frac{n}{1-3\lambda}} PS(j)$; le théorème 5.1 implique que $\mathcal{N}(r_1, \ldots, r_k) \cap B_S(n) = \{1\}$ et donc $d_m(\mathcal{N}(r_1, \ldots, r_k), \{1\}) \leqslant \varepsilon$. Puisque d_m est ultra-métrique, la distance entre deux points quelconques de $\bigcup_{j > \frac{n}{1-3\lambda}} PS(j)$ est inférieure ou égale à ε. En conservant les notations du chapitre 3, il s'ensuit que

$$P(PS, \varepsilon) \leqslant |B_S\left(\frac{n}{1-3\lambda}\right)|^k \leqslant \left(\frac{m}{m-1}\right)^k (2m-1)^{\frac{kn}{1-3\lambda}}.$$

D'où : $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\log P(PS, 2^{-n})}{n \log 2} \leqslant \frac{k}{1-3\lambda} \log_2(2m-1)$.

Prouvons maintenant la minoration. Lorsque $\varepsilon = 2^{-n}$, les points de $PS(n)$ sont tous ε-distinguables. En effet, si $\mathcal{N}(r_1, \ldots, r_k)$ et $\mathcal{N}(r'_1, \ldots, r'_k)$ sont deux éléments de $PS(n)$ et si l'on suppose en outre que $d_m(\mathcal{N}(r_1, \ldots, r_k), \mathcal{N}(r'_1, \ldots, r'_k)) \leqslant \varepsilon$, il s'ensuit que

$$\mathcal{N}(r_1, \ldots, r_k) \cap B_S(n) = \mathcal{N}(r'_1, \ldots, r'_k) \cap B_S(n),$$

si bien que $\mathcal{N}(r_1, \ldots, r_k) = \mathcal{N}(r'_1, \ldots, r'_k)$. Majorons maintenant le cardinal d'une fibre de l'application

$$\begin{array}{ccc} ps(n) & \longrightarrow & PS(n) \\ (r_1, \ldots, r_k) & \longmapsto & \mathcal{N}(r_1, \ldots, r_k) \end{array}$$

Il est prouvé dans [11] que si l'on a

$$\mathcal{N}(r_1,\dots,r_k) = \mathcal{N}(t_1,\dots,t_k) \text{ avec } (r_1,\dots,r_k),(t_1,\dots,t_k) \in ps(n)$$

alors pour tout $i = 1,\dots,k$, r_i est un conjugué cyclique de l'un des t_j ou de son inverse. Donc le cardinal d'une fibre est majoré par $k!(2n)^k$, de sorte que $|PS(n)| \geqslant \frac{|ps(n)|}{k!(2n)^k}$. On observe ainsi que $P(PS,\varepsilon) \geqslant \frac{|ps(n)|}{k!(2n)^k}$. Puisque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|ps(n)|}{(2m-1)^{kn}} = 1, \tag{5.3}$$

par le lemme 10 de [1](voir aussi [2]), on en déduit que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log P(PS,\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \geqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \frac{|ps(n)|}{k!(2n)^k}}{n\log 2} = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \frac{(2m-1)^{kn}}{k!(2k)^n}}{n\log 2}$$
$$= k\log_2(2m-1).$$

□

Corollaire 5.2. — *Si $m \geqslant 2$ alors $\underline{\dim}_M \mathcal{G}_m = \infty$.*

6. Estimations des dimensions de Minkowski d'un sous-espace de groupes à un relateur

On suppose $m \geqslant 2$. Soit $q \geqslant 2$ un entier. On définit $UR(n) = \{\mathcal{N}(r^q)\,|r \in cyc(n)\}$ et $UR = \bigcup_{n\geqslant 1} UR(n)$. A nouveau, le sous-espace dénombrable UR est l'ensemble des valeurs d'une suite dans $\mathcal{G}_m$ dont la seule valeur d'adhérence est $\{1\}$.

Théorème 6.1. — $\frac{\log_2(2m-1)}{q} \leqslant \underline{\dim}_M UR \leqslant \overline{\dim}_M UR \leqslant \frac{\log_2(2m-1)}{q-1}$.

Le principe de majoration est le même que celui employé dans la preuve du théorème 5.1. Il s'agit d'une majoration du nombre d'éléments de UR qui sont ε-distinguables. Cette majoration repose sur un théorème de Neumann, analogue pour les groupes à un relateur avec torsion du théorème de Greendlinger.

Théorème 6.2 [9, Ch.II, Pr.5.28] . — *Soit un entier $q \geqslant 2$ et soit r un mot cycliquement réduit de $\mathbb{L}_m$. On considère le groupe à un relateur $G = \langle S|\, r^q\rangle$. Si w est un mot réduit de $\mathbb{L}_m$ dont l'image est triviale dans G, alors il existe un sous-mot réduit u de w qui est aussi un sous-mot de r^q ou de son inverse et vérifiant $|u|_S > (q-1)|r|_S$.*

La minoration des dimensions provient d'une minoration du nombre d'éléments ε-distinguables et tient en ces deux observations : des clôtures normales distinctes de relateurs suffisamment petits sont ε-distinguables ; deux mots cycliquement réduits et tels qu'eux même et leurs inverses ne sont pas conjugués ont des clôtures normales distinctes. Ce dernier fait est un résultat de Magnus.

Démonstration du théorème 6.1. — Pour $n \in \mathbb{N}$, fixons $\varepsilon = 2^{-n}$. Montrons que les points de $\bigcup_{i > \frac{n}{q-1}} UR(i)$ ne sont pas ε- distinguables. Si $\mathcal{N}(r^q)$ est tel que $r \in cyc(i)$ avec $i > \frac{n}{q-1}$, alors $d_m(\mathcal{N}(r^q), \{1\}) \leqslant \varepsilon$. En effet, le théorème 6.2 assure que tout mot $w \in \mathcal{N}(r^q)$ est tel que $|w|_S > (q-1)|r|_S$, si bien que $\mathcal{N}(r^q) \cap B_S(n) = \{1\}$. Puisque d_m est ultra-métrique, la distance entre deux points quelconques de $\bigcup_{i > \frac{n}{q-1}} UR(i)$ est inférieure ou égale à ε. Ainsi

$$P(UR, \varepsilon) \leqslant |\bigcup_{i \leqslant \frac{n}{q-1}} UR(i)| \leqslant |B_S\left(\frac{n}{q-1}\right)| \leqslant \frac{m}{m-1}(2m-1)^{\frac{n}{q-1}}. \quad (6.4)$$

Montrons maintenant que les points de $\bigcup_{i \leqslant \frac{n}{q}} UR(i)$ sont ε-distinguables. En effet, si $\mathcal{N}(r^q)$ et $\mathcal{N}(r'^q)$ sont des éléments de $\bigcup_{i \leqslant \frac{n}{q}} UR(i)$ tels que $d_m(\mathcal{N}(r^q), \mathcal{N}(r'^q)) \leqslant \varepsilon$, alors
$\mathcal{N}(r^q) \cap B_S(n) = \mathcal{N}(r'^q) \cap B_S(n)$, si bien que $\mathcal{N}(r^q) = \mathcal{N}(r'^q)$ puisque $|r^q|_S, |r'^q|_S \leqslant n$.

Par un résultat dû à Magnus [9, Ch.II, Pr. 5.8], on sait que lorsque r_1 et r_2 sont des éléments cycliquement réduits de $\mathbb{L}_m$ tels que $\mathcal{N}(r_1) = \mathcal{N}(r_2)$, alors r_1 est un conjugué cyclique de r_2 ou de r_2^{-1}. Le cardinal d'une fibre de l'application

$$\begin{array}{ccc} cyc([\frac{n}{q}]) & \to & UR([\frac{n}{q}]) \\ r & \mapsto & \mathcal{N}(r^q) \end{array}$$

est donc au plus $2[\frac{n}{q}]$, si bien que $|\bigcup_{i \leqslant \frac{n}{q}} UR(i)| \geqslant |UR(\frac{n}{q})| \geqslant \frac{|cyc([\frac{n}{q}])|}{2[\frac{n}{q}]}$. Ainsi,

$$P(UR, \varepsilon) \geqslant \frac{|cyc([\frac{n}{q}])|}{2[\frac{n}{q}]}. \quad (6.5)$$

Le théorème s'en déduit par passage à la limite lorsque n tend vers l'infini dans les inégalités (6.4) et (6.5) où l'on applique (5.2). $\square$

7. Dimension de Minkowski supérieure du Cantor $\mathfrak{B}$ de Grigorchuk

Dans ce chapitre on montre que la dimension de Minkowski supérieure de l'espace de Cantor construit par Grigorchuk dans [6, Ch.6] est nulle. Rappelons cette construction. Grigorchuk définit à partir d'un algorithme une famille de groupes $\widetilde{G}_\omega$ paramétrés par des suites ω de symboles pris dans l'ensemble $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$. Une sous-famille de ces groupes est formée de groupes de croissance intermédiaire qui répondent à une question posée par Milnor. Grigorchuk montre aussi [6, Ch.6, Pr. 6.2] que l'ensemble de tous ces groupes est un espace de Cantor lorsqu'on le munit de la topologie de Cayley.

On fixe l'alphabet $\{a, b, c, d\}$ et l'on définit $\overline{0} = (a, a, 1), \overline{1} = (a, 1, a)$ et $\overline{2} = (1, a, a)$ où 1 désigne le mot vide. On désigne par $\mathbb{F}(a, b, c, d)$ le groupe libre sur $\{a, b, c, d\}$, par $|w|$ la longueur d'un mot $w \in \mathbb{F}(a, b, c, d)$ relativement à $\{a, b, c, d\}$ et par Ω l'ensemble des suites d'éléments de $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$. On désigne par Ω' l'ensemble des suites où deux symboles, au moins, apparaissent une infinité de fois.

Pour tout mot $w \in \mathbb{F}(a, b, c, d)$, on considère la forme réduite positive $r(w) \in \mathbb{F}(a, b, c, d)$ obtenue en appliquant les règles de réécriture suivantes :

(i) $x^{-1} \to x$

(ii) $x^2 \to 1$

(iii) $xy \to z$

où $x, y, z \in \{a, b, c, d\}$ pour les deux premières règles et $x, y, z \in \{b, c, d\}$ et sont distincts pour la troisième. L'applications de ces règles à un mot w sont appelées *simplifications élémentaires.* Itérées jusqu'au moment où plus aucune règle ne s'applique, ces simplifications donnent une forme réduite positive $r(w)$ de w dans le groupe

$$\Gamma = \left\langle a, b, c, d \,|\, a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = bcd = 1 \right\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 * (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2).$$

Ainsi, $w \overset{\Gamma}{=} 1$ si et seulement si $r(w) = 1$.

Ayant fixé $\omega \in \Omega$, $\omega = (a_n, b_n, c_n)_{n \geqslant 1}$, on définit comme dans [6, Ch.6, pp 287-288], l'ensemble $\widetilde{S}_\omega$ des éléments de $\mathbb{F}(a, b, c, d)$ pour lesquels l'algorithme $\mathfrak{a}$ d'oracle ω ([6, Ch.2] et [7, pp 84-86]) que l'on décrit plus bas, conduit à un résultat positif. Pour tout mot positif $w = w(a, b, c, d)$ où la lettre a apparait un nombre pair de fois, on définit deux procédés de réécriture $\varphi_0^{(n)}$ et $\varphi_1^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Le résultat $\varphi_i^{(n)}(w)$ du i-ème processus de réécriture,

$i = 0, 1$, est un mot sur l'alphabet $\{a, b, c, d\}$ obtenu à partir de w en associant à chaque lettre de w un symbole de l'alphabet $\{a, b, c, d\}$ en observant les règles de substitutions suivantes :

$$\varphi_i^{(n)} : \begin{cases} a & \to & 1 \\ b & \to & b_n \\ c & \to & c_n \\ d & \to & d_n \end{cases}$$

si le nombre de lettres a dans w précédant le symbole courant auquel on applique la règle de substitution est pair lorsque $i = 0$ ou impair lorsque $i = 1$. De manière analogue,

$$\varphi_i^{(n)} : \begin{cases} a & \to & 1 \\ b & \to & b \\ c & \to & c \\ d & \to & d \end{cases}$$

si le nombre de lettres a dans w précédant le symbole courant auquel on applique la règle de substitution est impair lorsque $i = 0$ ou pair lorsque $i = 1$. L'algorithme $\mathfrak{a}$ d'oracle ω est le suivant :

Algorithme. — Pour décider si $\widetilde{S}_\omega$ contient le mot $w = w(a, b, c, d)$ on procède comme suit.

(1) On évalue la somme des exposants de la lettre a dans w. Si cette somme est impaire alors w n'est pas retenu. Si elle est paire on calcule $r(w)$. Si $r(w) = 1$, alors w est retenu et l'algorithme s'arrête. Si $r(w) \neq 1$ et si $|r(w)| = 1$ alors w n'est pas retenu et l'algorithme s'arrête. Si $|r(w)| > 1$, on procède à l'étape (2).

(2) On calcule $w_i = \varphi_i^{(1)}(r(w)), i = 0, 1$, et l'on retourne à l'étape (1) où les vérifications s'appliquent maintenant à deux mots $w_i, i = 0, 1$. Si l'algorithme se poursuit après $2n$ étapes, dans l'étape (1) les vérifications portent alors sur 2^n mots

$$w_{0\ldots0}, \ldots, w_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \ldots, w_{1\ldots1}$$

et l'on calcule ensuite dans l'étape (2), si elle a lieu,

$$\varphi_i^{(n+1)}(r(w_{0\ldots0})), \ldots, \varphi_i^{(n+1)}(r(w_{i_1 i_2 \ldots i_n})), \ldots, \varphi_i^{(n+1)}(r(w_{1\ldots1})),\ i = 0, 1.$$

Puisque $|\varphi_i^n(r(w))| \leqslant \frac{|w|+1}{2}$ pour $i = 0, 1$ et tout $n \geqslant 1$, un mot w est accepté ou rejeté au bout d'au plus $\log_2(|w|)$ applications recursives de cet algorithme. L'ensemble $\widetilde{S}_\omega$ est l'ensemble des mots $w = w(a,b,c,d)$ retenus par l'algorithme. On vérifie aisément que $\widetilde{S}_\omega$ est un sous-groupe distingué de $\mathbb{F}(a,b,c,d)$ contenant les relateurs qui définissent Γ.

Le groupe marqué $\widetilde{G}_\omega$ est le quotient $\mathbb{F}(a,b,c,d)/\widetilde{S}_\omega$ marqué par l'image des générateurs $\{a,b,c,d\}$. Pour simplifier on identifie $\mathcal{G}_4$ et $\mathcal{G}(a,b,c,d)$.

Un algorithme complémentaire décrit dans [6, Ch. 5], permet de reconstituer les n premiers symboles d'une suite ω de Ω' en connaissant les éléments de $\widetilde{S}_\omega$ de longueur inférieure ou égale à 2^{n+2}. Les deux algorithmes considérés par Grigorchuk conduisent aux résultats de la proposition 6.2 dont une reformulation est la suivante :

Proposition 7.1 [6, Ch.6]. —

(*i*) *Soit $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Si ω_1 et ω_2 coïncident sur les n premières coordonnées, alors $d_4(\widetilde{S}_{\omega_1}, \widetilde{S}_{\omega_2}) \leqslant 2^{-2^n}$.*

(*ii*) *Soit $\omega_1, \omega_2 \in \Omega'$. Si $d_4(\widetilde{S}_{\omega_1}, \widetilde{S}_{\omega_2}) \leqslant 2^{-2^{n+2}}$, alors ω_1 et ω_2 coïncident sur les n premières coordonnées.*

(*iii*) *Le sous-espace $\mathfrak{B} = \{\widetilde{S}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ de $\mathcal{G}_4$ est un espace de Cantor.*

Théorème 7.1. — *La dimension de Minkowski supérieure du sous-espace $\mathfrak{B} \subset \mathcal{G}_4$ est nulle.*

Démonstration du théorème 7.1. — Pour $n \in \mathbb{N}$, fixons $\varepsilon = 2^{-2^n}$. On considère dans $\mathcal{G}_4$ l'ensemble des boules de rayon ε centrées en les groupes $\widetilde{S}_\omega$ pour lesquels ω est constante à partir de la n-ième coordonnée. Il s'agit d'un recouvrement de $\mathfrak{B}$ en vertu du point (*i*) de la proposition 7.1. Le cardinal de ce recouvrement est au plus 3^n. Ainsi, $\frac{\log N(\mathfrak{B},\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \leqslant \frac{\log 3^n}{2^n \log 2}$. D'où $\overline{\dim}_M \mathfrak{B} = 0$. □

8. Dimension de Minkowski supérieure du sous-espace des groupes commutatifs marqués à m générateurs

Soit $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ l'ensemble ordonné des générateurs canoniques du groupe abélien libre $\mathbb{Z}^m$. On désigne par $B_\mathcal{A}(n)$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}^m$ de longueur inférieure ou égale à n relativement à $\mathcal{A}$. Soit b_n le cardinal de $B_\mathcal{A}(n)$. Il est immédiat de vérifier que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{n^m} = vol(K)$, où $vol(K) = \frac{2^m}{m!}$ est le volume de l'enveloppe convexe K de $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ dans $\mathbb{R}^m$. Il existe donc $C \geqslant 0$ tel que $b_n \leqslant Cn^m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On conserve les notations de l'introduction en considérant l'espace $\mathcal{G}(\mathbb{Z}^m)$ muni de la métrique $d_{\mathcal{G}}$. L'épimorphisme de $\mathbb{L}_m$ sur $\mathbb{Z}^m$ défini à partir de la bijection naturelle entre les ensembles de générateurs ordonnés S et $\mathcal{A}$ induit un plongement de $\mathcal{G}(\mathbb{Z}^m)$ dans $\mathcal{G}_m$ qui est isométrique sur son image. Cette image est l'ensemble des groupes commutatifs marqués.

THÉORÈME 8.1. — *La dimension de Minkowski supérieure de l'espace métrique $(\mathcal{G}(\mathbb{Z}^m), d_{\mathcal{G}})$ est nulle.*

Démonstration. — Soit n un entier supérieur ou égale à deux. Soit $\mathcal{P}_n = \{B_{\mathcal{A}}(n) \cap R \mid R \leqslant \mathbb{Z}^m\}$. Par le lemme 4.2, $N(\mathcal{G}(\mathbb{Z}^m), 2^{-n}) = |\mathcal{P}_n|$. Le cardinal de $\mathcal{P}_n$ est inférieur au nombre de sous-groupes de $\mathbb{Z}^m$ dont une base est dans la boule $B_{\mathcal{A}}(n)$. On a donc $|\mathcal{P}_n| \leqslant \sum_{l=0}^{m} \binom{b_n}{l} \leqslant b_n^{m+1}$. Il s'ensuit que

$$\overline{\dim}_M \mathcal{G}(\mathbb{Z}^m) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log N(\mathcal{G}(\mathbb{Z}^m), 2^{-n})}{n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n^{m(m+1)}}{n} = 0.$$

□

Remerciements. — Je tiens à remercier très chaleureusement Roland Bacher autant pour ses idées précieuses que ses remarques judicieuses. Je remercie également Goulnara Arjantseva et Pierre De La Harpe pour leurs relectures patientes et minutieuses, ainsi que Frédéric Mouton pour son aide opportune.

Bibliographie

[1] ARZHANTSEVA (G. N.), OL'SHANSKII (A. Yu.). — Generality of the class of groups in which subgroups with a lesser number of generators are free. (Russian) Mat. Zametki 59, No. 4, p. 489-496 (1996), 638; translation in Math. Notes 59, no. 3-4, p. 350-355 (1996).

[2] CHAMPETIER (C.). — L'espace des groupes de type fini, Topology 39, p. 657-680 (2000).

[3] CHAMPETIER (C.), GUIRARDEL (V.). — Limit groups as limits of free groups. Israel J. Math. 146, p. 1-75 (2005).

[4] DE LA HARPE (P.). — Topics in geometric group theory, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press (2000).

[5] FALCONER (K.). — Techniques in fractal geometry, John Wiley and sons (1997).

[6] GRIGORCHUK (R. I.). — Degrees of growth of finiteley generated groups and the theory of invariant means, Math USSR Iszvestiya 25 No. 2 (1985).

[7] GRIGORCHUK (R. I.). — An example of finitely presented amenable group not belonging to the class EG, Matematicheskiĭ Sbornik 189, p. 75-95 (1998).

[8] Gromov (M.). — Hyperbolic groups, Essays in Group Theory, ed. S. M. Gersten, MSRI series, Vol. 8, Springer-Verlag, p. 75-263 (1987).

[9] Lyndon (R.C.), Schupp (P.E.). — Combinatorial Group Theory, Springer (1977).

[10] Pertti (M.). — Geometry of sets and measures in euclidean spaces, fractals and rectifiability. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press (1995).

[11] Greendlinger (M.). — An analogue of a theorem of Magnus. Arch. Math 12, p. 94-96 (1961).