

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

CHARLES DELORME

Sur la formule d'inversion de Lagrange

Tome XVI, n° 2 (2007), p. 247-252.

http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2007_6_16_2_247_0

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Sur la formule d'inversion de Lagrange^(*)

CHARLES DELORME⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — On se propose de démontrer que la formule d'inversion de Lagrange est encore valide sur un anneau commutatif, même pour une série ayant quelques termes à coefficients nilpotents avant le terme de degré 1 (dont le coefficient est inversible). On n'use que de techniques algébriques.

ABSTRACT. — We extend the Lagrange inversion formula to the case of a commutative ring and series having some nilpotent terms in front of the term of degree 1. The method is purely algebraic.

1. Le cadre de ce travail

On a un anneau A de base, commutatif et unitaire. On utilise l'algèbre $A[[T]]$ et sa localisée $A[[T]][[T^{-1}]]$.

Les séries formelles g avec $g(0)$ inversible forment un groupe pour la multiplication dans $A[[T]]$. Il s'ensuit que, dans $A[[T]][[T^{-1}]]$, toutes les séries dont le premier terme non nul est inversible sont inversibles pour la multiplication.

Les séries formelles g de $A[[T]]$ avec $g(0) = 0$ et $g'(0)$ inversible constituent un groupe pour la composition.

L'inversion de Lagrange est une formule qui lie les coefficients des puissances de g et ceux des puissances de $g^{<-1>}$ pour la multiplication, où $g^{<-1>}$ est l'inverse pour la composition de g (on utilise ici la notation de Comtet [3, t. 1, p.159]). On va en donner une présentation et un schéma de preuve foncièrement algébriques.

(*) Reçu le 12 juillet 2005, accepté le 17 janvier 2006

(1) Laboratoire de Recherche en Informatique, B. 490 Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex.
Charles.Delorme@lri.fr

2. Le cas usuel

On considère aussi l'algèbre des matrices sur A aux lignes et colonnes indexées par \mathbb{Z} , avec $m_{ij} = 0$ si $j - i < k$, où k dépend de m .

Soient donc

- X la matrice avec $X_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,
- D la matrice avec $D_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,
- $g(X)$, matrice «de Toeplitz» avec $[g(X)]_{ij} = g_{j-i}$, le coefficient de T^{j-i} dans une série g .
- M_g la matrice dont le coefficient M_{ij} est le coefficient de t^j dans $g(t)^i$

Soit f une série, elle est représentée par la matrice-ligne L_f . Diverses applications linéaires se traduisent par des produits de matrices. En particulier

$$\begin{array}{ll} f \mapsto fh & \text{se traduit par } L_f \mapsto L_f h(X) \text{ pour toute série } h \\ f \mapsto f \circ h & \text{par } L_f \mapsto L_f M_h \text{ pour toute série } h \text{ avec } h(0) = 0 \\ & \text{et } h'(0) \text{ inversible dans } A \\ f \mapsto Tf' & \text{par } L_f \mapsto L_f D \end{array}$$

On a donc, pour toutes séries h et g l'égalité $h(X)g(X) = (hg)(X)$. D'autre part, pour toutes séries h et g de $A[[T]]$, avec $h(0) = g(0) = 0$ et $h'(0)$ et $g'(0)$ inversibles dans A , on a $M_{g \circ h} = M_g M_h$ et donc M_g est inversible et M_g^{-1} (triangulaire supérieure aussi) a pour coefficient $(M_g^{-1})_{ij}$ le coefficient de t^j dans $(g^{<-1>}t)^i$.

La matrice MD a pour colonne i le produit de la colonne i de M par i .

On introduit la symétrie S avec M^S la matrice telle que $M_{ij}^S = M_{-j,-i}$. On a, si l'on veut, $M^S = ZM^T Z$, avec l'exposant T pour la transposition et Z la matrice avec $Z_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = -i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Cette symétrie S est un anti-automorphisme pour l'algèbre des matrices, c'est-à-dire $(MN)^S = N^S M^S$. En particulier $D = -D^S$ et $X^{-1} = X^T$ et $X^S = X$.

THÉORÈME 2.1 (LAGRANGE). — *Avec ces outils, la formule d'inversion de Lagrange (appelée aussi de Lagrange et Bürmann) s'énonce*

$$MD + (M^{-1}D)^S = 0.$$

Notons que les indices $i < 0, j > 0$ sont pris en compte ici

On peut noter que $DX - XD = X$ et donc $DX^n - X^nD = nX^n$. Par conséquent $Dg(X) - g(X)D = Xg'(X)$. On a aussi, en traduisant que $(g^n)' = ng^{n-1}g'$, l'égalité $M_gD = DX^{-1}M_gXg'(X)$.

La matrice M_g se caractérise par le fait que

- sa ligne 0 est nulle, sauf le coefficient $M_{0,0}$ qui vaut 1
- $M_g(X) = XM$ (en d'autres termes la ligne i de $M_g(X)$ est la ligne $i + 1$ de M),

D'autre part $g(X)M^{-1} = M^{-1}X$. La matrice $N = M_g^{-1}$ se caractérise par le fait que

- sa ligne 0 est nulle, sauf le coefficient $N_{0,0}$ qui vaut 1
- $g(X)N = NX$ (ainsi, chaque colonne de N se calcule linéairement à partir de la colonne précédente)

En effet, l'inverse de M_g vérifie évidemment les conditions. Vérifions l'implication inverse. La matrice $P = M_gN$ a sa ligne 0 nulle égale à celle de N , donc nulle sauf le terme en colonne 0 qui vaut 1. De plus $PX = M_gNX = M_gg(X)N = XM_gN = XP$, donc le coefficient P_{ij} ne dépend que de $i - j$, donc P est la matrice unité.

Du fait que $M_gM_h = M_{g \circ h}$ et $(M_g^{-1})^S(M_h^{-1})^S = ((M_gM_h)^{-1})^S$ il suffit pour prouver la formule de le faire pour un système de générateurs du groupe. On considère donc

- $g(X) = aX$, avec a inversible dans A . On a alors M_g diagonale avec $M_g(i, i) = a^i$ et l'égalité est évidemment vérifiée.
- $g(X) = X/(1 + aX)$, avec a quelconque dans A . Alors la matrice M a pour coefficients

$$M_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i \\ \binom{-i}{j-i}(a)^{j-i} & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

avec $\binom{i}{\ell} = \prod_{1 \leq u \leq \ell} \frac{1+i-u}{u}$ pour $\ell \geq 0$ (ce qui fait 1 si $\ell = 0$).

La matrice inverse correspond à $g^{<-1>}(X) = X/(1 - aX)$ et l'égalité est vérifiée.

- Plus généralement $g(X) = X/(1 + aX^k)$. Alors la matrice M a pour coefficients

$$M_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i \text{ ou si } j - i \text{ n'est pas multiple de } k \\ \binom{-i}{\ell}(a)^\ell & \text{si } j = i + k\ell \text{ avec } \ell \geq 0 \text{ entier} \end{cases}$$

et satisfait $XM(1 + aX^k) = MX$.

La matrice N qui a pour coefficients

$$N_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i \text{ ou si } j - i \text{ n'est pas multiple de } k \\ 1 & \text{si } i = j \\ \binom{j}{\ell} - k\binom{j-1}{\ell-1} a^\ell & \text{si } i = j - k\ell \text{ et } \ell > 0 \end{cases}$$

est l'inverse de M car elle satisfait $(1 + aX^k)X^{-1}N = NX^{-1}$ (c'est-à-dire $N_{i,j} = N_{i-1,j-1} + aN_{i+k-1,j-1}$) et sa ligne 0 est la bonne (c'est-à-dire $N_{0,j} = 1$ si $j = 0$ et 0 sinon).

Ces coefficients ont une interprétation combinatoire, au moins pour les valeurs positives de i et j ; voir par exemple [2] et [4, p.361].

La formule générale peut être maintenant démontrée «par approximations successives»; on fait apparaître $g(t)$ comme composition de $a_0t(1 - a_1t) \circ (1 - a_2t^2) \circ \dots \circ (1 - a_k t^k) \circ \dots$ où la k -ième composée $g_k = a_0t(1 - a_1t) \circ (1 - a_2t^2) \circ \dots \circ (1 - a_k t^k)$ diffère de g par un multiple de t^{k+1} ; les matrices M_{g_k} et $M_{g_k}^{-1}$ correspondant à g_k ne diffèrent de M_g et M_g^{-1} qu'en les termes i, j avec $j - i > k$.

Ainsi donc l'égalité est vérifiée pour toute série dont le terme de degré 1 est inversible et précédé de termes nuls uniquement.

3. Extension de l'égalité

On va étendre l'égalité de Lagrange où cas où la série à inverser présente un nombre fini de termes nilpotents en degré < 1 devant son terme de degré 1, dont le coefficient est inversible.

Les outils sont toujours les mêmes. Toutefois M n'est plus triangulaire supérieure.

LEMME 3.1. — *Si dans un anneau commutatif on a un ensemble fini d'éléments nilpotents a_x d'ordres respectifs au plus α_x (i.e. $a_x^{\alpha_x} = 0$), tout monôme en les a_i de degré $\geq \alpha = 1 + \sum_x (\alpha_x - 1)$ est nul. Autrement dit, l'idéal engendré par les a_x est lui-même nilpotent d'ordre au plus α ,*

LEMME 3.2. — *Une série ayant un terme inversible précédé d'un nombre fini de termes nilpotents est encore inversible pour la multiplication.*

En effet, on peut faire apparaître un telle série comme $s + n$ avec s commençant par un terme inversible aT^p (donc s inversible) et n une somme finie de termes nilpotents $a_x T^{m_x}$ avec $m_x < p$ et a_x nilpotent d'ordre α_x . Dans ce cas la somme $n = \sum_x a_x T^{m_x}$ est nilpotente d'ordre au plus α . Alors $(s + n)^k = s^k \sum_{i=0}^{\alpha} n \binom{k}{i} n^i s^{-i}$ et donc $(s + n)^k$ comporte avant le degré pk des termes nilpotents en nombre au plus égal à $\alpha(\max(p - m_i))$.

LEMME 3.3. — *Une série ayant son terme de degré 1 inversible, précédé d'un nombre fini de termes nilpotents, est inversible pour la composition.*

En effet, on écrit la série $n + s$ avec s_1 inversible et n somme finie de termes nilpotents $a_i T^{m_i}$ avec $m_i < 1$ et on forme la matrice M dont les lignes contiennent les coefficients des puissances correspondantes de $n + s$. Elle s'écrit $S - N$ avec $S_{ij} = M_{ij}$ si $j \geq i$ et 0 sinon, et S est inversible, et les coefficients de N sont des polynômes sans termes constants en les a_i . En outre, les coefficients N_{ij} sont nuls si $i - j \geq \alpha(\max(p - m_i))$. On a $(S - N) \sum_{i=0}^{\alpha-1} S^{-1} (NS^{-1})^i = I - (NS^{-1})^\alpha = I$ car les coefficients de $(NS^{-1})^\alpha$ sont des polynômes formés de monômes de degré au moins α en les termes de n .

Ainsi, M est inversible, et la ligne i de M^{-1} donne h^i où h est la série inverse pour la composition de $s + n$.

Reste à voir que dans ce cas on a encore $MD + (MD)^S = 0$.

On a un cas qui se déduit simplement du cas sans termes nilpotents en bas degré. à savoir quand $g = aX + \sum_{i=1}^n a_i X^{1-i}$ avec a inversible et les a_i nilpotents, car alors $ZM_g Z = M_h$ avec $h = X/(a + \sum a_i X^i)$. On a donc alors $Z(M_g^{-1}D)^S + M_g D Z = M_h^{-1}(-D) + M_h(-D) = 0$, vu que $M \mapsto ZMZ$ est un automorphisme de l'algèbre des matrices «à $j - i$ borné des deux côtés» et $ZDZ = -D$. Donc la relation est satisfaite.

Dans le cas général, introduisons l'idéal J (nilpotent d'ordre au plus α) engendré par les nilpotents a_i et l'anneau A/J . L'image de M_g par le morphisme naturel dans les matrices sur A/J coïncide avec celle de M_s . Donc $M_{g_1} = M_g M_s^{-1}$ diffère de I par des éléments de J , en d'autres termes $g_1 = T(1 + p_1(T) + T^{-1}q_1(T^{-1}))$ avec p_1 série à coefficients dans J et q_1 polynôme à coefficients dans J . On utilise alors pour $1 \leq i \leq \alpha$ $g_{i+1} = g_i \circ (T(1 + p_1(T))^{<-1>}$ ce qui donne $g_{i+1} = T(1 + p_{i+1}(T) + T^{-1}q_{i+1}(T^{-1}))$ avec p_{i+1} série à coefficients dans J^{i+1} et q_{i+1} polynôme à coefficients dans J .

Après α itérations, on arrive à $p_\alpha = 0$. Ces inversions successives donnent lieu à des paires de matrices inverses qui satisfont l'égalité de Lagrange. A

ce moment on sait que l'inversion de $T + q_\alpha(T^{-1})$ donne lieu à une dernière paire qui satisfait ladite égalité.

On peut donc conclure, en utilisant le même argument sur les produits que plus haut, que les matrices inverses M_g et M_g^{-1} satisfont l'égalité de Lagrange.

4. Conclusion

Cette preuve est assez proche de celle de Barnabei *et al.* [1], mais nous ne supposons pas A intègre. Il est vraisemblable que l'on puisse encore étendre l'égalité à d'autres situations.

Bibliographie

- [1] BARNABEI (M.), BRINI (A.), NICOLETTI (G.). — Recursive matrices and umbral calculus. *J. Algebra* 75, p. 546-573 (1982).
- [2] BANDERIER (C.), FLAJOLET (P.). — Basic analytic combinatorics of directed lattice paths, *Theor. Comput. Sci.* 281, p. 37-80 (2002).
- [3] COMTET (L.). — Analyse combinatoire I et II, Presses Universitaires de France (1970).
- [4] GRAHAM (R. L.), KNUTH (D. E.), PATASHNIK (O.). — Concrete mathematics: a foundation for computer science, 2nd ed. Addison-Wesley (1994).