ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

GUILLAUME DUVAL

De l'application des méthodes valuatives en algèbre différentielle

Tome XVII, nº 4 (2008), p. 673-717.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2008_6_17_4_673_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XVII, n° 4, 2008
pp. 673–717

De l'application des méthodes valuatives en algèbre différentielle(*)

Guillaume Duval(1)

Résumé. — La théorie des valuations née des travaux des géomètres et arithméticiens du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, fit une apparition tardive et encore peu connue au XX$^{\text{ème}}$ siècle en algèbre différentielle. Dans cet article, à travers les contributions de nombreux auteurs, nous présentons une synthèse des divers apports de la théorie des valuations à l'étude des équations différentielles. Nous insistons sur le caractère unificateur de la théorie des valuations en illustrant comment elles permettent de mettre en parallèle des résultats de géométrie et d'arithmétique avec des résultats concernant les équations différentielles.

Abstract. — Valuation theory is a classical achievement of the works of geometers and arithmeticians of the nineteen century. In contrast, its apparition in Differential Algebra is far to be well known and only appear in the second half of the twenty century. The aim of this paper is to give an overview of the use of valuations in Differential Algebra. Thanks to the contributions of many autors, we try to show how valuations might help to unify results coming from geometry, arithmetic and differrential equations.

1. Introduction

À notre connaissance, la première fois qu'apparaissent les valuations dans l'étude des équations différentielles date de 1959 à l'époque où Kolchin publia son article : *Rational approximation to solutions of algebraic differential equations* [24]. Viendront ensuite dans les années 70-80 les contributions

(*) Reçu le 26 mars 2007, accepté le 28 septembre 2007
(1) 1, Chemin du Chateau, 76 430 Les Trois Pierres (France)
dduuvvaall@wanadoo.fr

fondamentales de Rosenlicht qui inspirèrent ensuite les travaux de Matsuda, Singer, Seidenberg, Fortuny... Les thèmes abordés par ces différents auteurs sont très vastes et couvrent des sujets aussi variés du domaine des équations différentielles que la théorie algébrique de la résolubilité des équations différentielles, la théorie des singularités mobiles ou « Propriété de Painlevé », la théorie des corps de Hardy, celles des champs de vecteurs locaux réguliers ou singuliers à trajectoires réelles ou complexes.

Il paraît étonnant a priori que ces valuations, objets cantonnés à l'arithmétique (Hensel et les nombres p-adiques) et à la géométrie-algébrique sous les influences de Dedekind, Weber, Krull, Chevalley et Zariski, aient finalement fait leur apparition en algèbre différentielle. Cependant, ceci peut se comprendre a posteriori, et le but de ces notes sera essentiellement d'illustrer le caractère unificateur de cet objet mathématique. En effet, s'il est couramment admis que la notion de groupe est vraisemblablement l'un des concepts abstraits les plus structurants de notre science, nous nous emploierons à démontrer que les valuations jouissent aussi de cette capacité à fournir un langage commun propre à unifier des disciplines fort éloignées. Ainsi permettront elles de donner corps et rigueur à de nombreux rapprochements analogiques qui sans elles resteraient peu consistants.

Par ailleurs, presque cinquante ans après les premiers travaux de Kolchin, et alors que de nombreux ouvrages ont abondamment traité du rôle des valuations en arithmétique et en géométrie algébrique, leur présence en algèbre différentielle reste fort méconnue. Il nous a donc paru opportun de présenter un panorama aussi vaste que possible de cette rencontre féconde de part et d'autre entre l'algèbre valuative et la théorie des équations différentielles.

Conformément à ce qui vient d'être dit, nous procéderons comme suit. Chaque exposé d'une ou plusieurs découvertes des auteurs pré-cités ou d'autres, servira de prétexte à illustrer une manifestation possible de l'algèbre valuative dans le domaine mathématique considéré ; ceci permettant alors d'établir une correspondance avec un résultat semblable appartenant soit à l'arithmétique soit à la géométrie algébrique. En essayant de privilégier les idées sur les techniques, cet exposé contiendra assez peu de preuves complètes et peu de résultats personnels de l'auteur. À quelques exceptions près, les démonstrations complètes que nous inclurons seront celles qui, à nos yeux, seront le plus à même d'éclairer l'idée que nous souhaiterons transmettre.

2. L'algèbre différentielle et l'analyse

Ici nous présentons brièvement quelques principes d'algèbre différentielle. Soit (K, ∂) un corps différentiel abstrait, contenant un élément f vérifiant l'équation différentielle $\partial^2 y + y = 0$. Alors ∂f vérifie encore la même équation différentielle et $(\partial f)^2 + f^2$ est constante, c'est-à-dire de dérivée nulle. Par nature, ce fait est algébrique puisqu'il exprime des relations entre des quantités et ses dérivées ici f et ∂f qui ne dépendent pas de la spécialisation fonctionnelle de f. En ce sens, si les fonctions trigonométriques $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ paramétrisent le cercle S^1, la cause du phénomène résulte de la rencontre du théorème de Pythagore et du point d'algèbre différentielle cité plus haut.

De même, la formule d'addition de la fonction tangente peut s'écrire

$$\tan(c) = \frac{\tan(x+c) - \tan(x)}{1 + \tan(x+c)\tan(x)} \tag{2.1}$$

Par ailleurs, les fonctions $x \mapsto \tan(x + c)$ sont solutions de l'équation de Riccati

$$\partial t = 1 + t^2 \tag{2.2}$$

Maintenant dans un corps différentiel abstrait, nous pouvons vérifier que si t_1 et t_2 sont deux solutions de (2.2) alors, la quantité $\frac{t_2 - t_1}{1 + t_2 t_1}$ est constante. Cette observation permet d'expliquer pourquoi la formule d'addition (2.1) est conditionnée par l'équation différentielle (2.2).

Selon ce point de vue, on peut définir l'algèbre différentielle comme l'étude des relations algébriques conditionnées par des relations différentielles. Et l'on obtient alors la Théorie de Galois Différentielle par adjonction des automorphismes qui, commutant à la dérivation, préservent les identités différentielles et algébriques. Cette dernière, essentiellement développée dans le contexte des équations différentielles linéaires, peut être considérée comme un exemple fructueux de rencontre entre l'algèbre abstraite et l'analyse classique.

« The Differential Galois Theory, notent Singer et Van der Put (page 1 de [43]), is the analogue for linear differential equations of the classical Galois theory for polynomial equations ». En effet, écrivons une équation différentielle linéaire à coefficients dans (K, ∂) sous la forme

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0 \tag{2.3}$$

Formellement cela ressemble à l'équation polynomiale

$$P(r) = r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \tag{2.4}$$

Mais l'analogie va plus loin. Quand les coefficients de (2.3) sont des constantes complexes les solutions $y = e^{rx}$ de (2.3) se calculent en résolvant l'équation caractéristique (2.4). Dieudonné attribue cette découverte à Euler, (voir [11], page 41 pour plus d'informations).

Il semble que ce soit Joseph Liouville qui, à la lecture des oeuvres de Galois, eut le premier l'idée qu'il fallait penser la théorie des équations différentielles linéaires comme celle des équations polynomiales. En particulier lui revient le mérite d'avoir découvert le critère de résolubilité par les trois opérations élémentaires que l'on nomme maintenant « liouvilliennes » des équations d'ordre deux $y'' = r(x)y$ avec $r(x) \in \mathbb{C}(x)$, en terme de résolubilité du groupe de Galois différentiel (voir [43], Th 1.43 p. 33, ex 4 p. 29), pour les opérations liouvilliennes, et aussi la section 6 de ce texte. Le tableau suivant résume la correspondance entre les deux théories.

Tableau 1

Théorie de Galois Classique	Théorie de Galois Différentielle
K corps, $P(r) \in K[r]$	K, ∂ corps différentiel, $C = \bar{C} = \ker \partial \qquad L \in K[\partial]$
$\{P(r) = 0\} = \{r_1, \ldots, r_n\}$	$\{L(y) = 0\} = \mathrm{Vect}_C(y_1, \ldots, y_n)$
Déterminants de Vandermonde «V»	Déterminants de Wronsky «W»
$P(r) = \frac{V(r,r_1,\ldots,r_n)}{V(r_1,\ldots,r_n)}$	$L(y) = \frac{W(y,y_1,\ldots,y_n)}{W(y_1,\ldots,y_n)}$
F corps de décomposition de $P = 0$	F corps différentiel engendré par $\{L = 0\}$
F/K extension Galoisienne	F/K extension de Picard-Vessiot
$G = \mathrm{Gal}(F/K)$	$G = \mathrm{Gal}_\partial(F/K)$
G groupe fini	G groupe linéaire algébrique sur C
$[F/K] = \mathrm{card}(G) \leqslant n!$	$\mathrm{tr.}d(F/K) = \dim_C(G) \leqslant n^2$
Théorème de correspondance de Galois	Théorème de correspondance de Kolchin

Signalons que si la théorie de Galois classique telle qu'elle fut écrite par Emil Artin est celle qui s'apparente le plus aux traitements dus à Kolchin, Magid, Singer et Van der Put, l'approche Tannakienne de Bertrand et Deligne (voir [2] et [10]) est celle la plus proche de l'idée originelle de Galois de « Théorie de l'ambiguïté ». Et ceci, puisque l'approche Tannakienne permet de voir le groupe de Galois différentiel comme l'ensemble des automorphismes préservant les identités algébriques entre les solutions de l'équation différentielle initiale. Il est nécessaire pour notre propos de préciser un peu cette théorie de l'ambiguïté. La théorie de Galois, différentielle ou non, est une théorie de l'ambiguïté relative. Ici l'adjectif relatif se réfère à la « base K » dont le groupe de Galois dépend intrinsèquement sans la distinguer puisque son action sur cette dernière est triviale. La richesse de cette théorie provient donc peut-être du fait que le groupe de Galois ignore ce qui se passe sur la base tout en dépendant essentiellement de celle-ci. On comprend donc désormais l'intérêt qu'il y ait eu à examiner comment le groupe de Galois « resurgissait sur la base » dans les deux théories.

En théorie des nombres depuis Kronecker, Dedekind et Artin, quand $K = \mathbb{Q}$ le principe de cette résurgence sur la base s'obtient concrètement en réduisant modulo p l'équation polynomiale initiale. Les différentes réductions donnent alors des sous groupes d'inertie $I_{\mathfrak{P}}$ pour les différents points $\mathfrak{P}$ au dessus de $p \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Ces différents sous groupes d'inertie permettent alors de reconstruire le groupe de Galois dans le sens où ils l'engendrent. Ceci est le « théorème de la monodromie arithmétique », (voir [7], Th. 12.1 p. 235).

L'analogue direct en théorie de Galois différentielle de ce principe de fibration sur la base est l'étude des monodromies locales d'une équation différentielle linéaire $L(y) = 0$ à coefficients dans $K = \mathbb{C}(x)$. Ici, chaque groupe de monodromie locale $\mathcal{M}_\alpha$ autour d'un des points singuliers $\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de l'opérateur $L(y)$, est un sous groupe du groupe de Galois différentiel. Et le rôle des $\mathcal{M}_\alpha$ est alors exactement le même que celui des groupes d'inertie précédents. En effet quand l'opérateur $L(y)$ n'a que des singularités régulières sur $\mathbb{P}^1$, ce qu'affirme le théorème de Schlesinger (voir [43], Th 5.8 p. 154) est que l'on peut reconstruire le groupe de Galois différentiel global à partir des groupes de monodromie locaux, puisque dans ce contexte, ce dernier coïncide avec l'adhérence de Zariski de tous les $\mathcal{M}_\alpha$.

Cependant, il se passe en théorie de Galois différentielle deux phénomènes nouveaux par rapport à la théorie algébrique des nombres.

- Pour les équations différentielles linéaires sur $\mathbb{C}(x)$ avec des singularités irrégulières, le théorème de Schlesinger n'est plus vrai sous cette forme. Ramis découvrira alors grâce à sa théorie de la resommation ce qu'il fallait ajouter aux différentes monodromies pour combler cette lacune (voir [29], [30] et [43] Th 8.10 p. 247).
- Pour les extensions de Picard-Vessiot F/K de groupe de Galois différentiel connexe, il existe toujours des valuations de F invariantes sous l'action de $\mathrm{Gal}_\partial(F/K)$. Autrement dit, le groupe de décomposition coïncide avec le groupe tout entier (voir [12] et [13]).

Ce second point est l'un des intérêts à introduire les valuations en théorie de Galois différentielle. Ce phénomène suggère les questions suivantes étudiées dans [12] et [13] . Comment ces valuations invariantes permettent-elles au groupe de Galois différentiel de resurgir sur la base ? Existe-t'il des liens entre ces objets et les découvertes de Ramis ? Nous n'avons pas encore de réponses définitives à ces questions ! Mais nous tenterons d'en illustrer quelques aspects. Pour l'instant nous présentons brièvement la théorie classique des valuations en vue d'éclairer les correspondances entre les deux théories de Galois dont nous venons de parler.

3. Les valuations en arithmétique et en géométrie algébrique

Donnons tout d'abord la définition abstraite due à Krull dans les années 1930.

- Soit F un corps et $(\Gamma, +, <)$ un groupe abélien totalement ordonné. Une valuation de F est une application $\nu : F \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ vérifiant les relations :
  – $\nu(x) = \infty$ si et seulement si $x = 0$;
  – $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$;
  – $\nu(x + y) \geqslant \inf\{\nu(x), \nu(y)\}$.
- On lui attache alors son anneau de valuation R_ν, son idéal maximal m_ν, son groupe des unités $\mathcal{U}(R_\nu)$ et son corps résiduel k_ν. Ces objets étant définis par les formules :
  – $R_\nu = \{x \in F | \nu(x) \geqslant 0\}$;
  – $m_\nu = \{x \in F | \nu(x) > 0\}$;
  – $\mathcal{U}(R_\nu) = \{x \in F | \nu(x) = 0\}$;
  – $k_\nu = R_\nu / m_\nu$.
  L'anneau de valuation R_ν est alors un anneau local d'idéal maximal m_ν caractérisé par la propriété intrinsèque suivante : Pour tout $f \in F \backslash \{0\}$, f ou $\frac{1}{f}$ appartient à R_ν. En particulier, $m_\nu = \{f \in F | \frac{1}{f} \notin R_\nu\}$.
- Considérant alors le corps F comme un ensemble de fonctions, on associe alors à ν la place $\mathcal{P}$ qui lui correspond par le plongement :

  $$F \longrightarrow k_\nu \cup \{\infty\}, f \longrightarrow f(\mathcal{P}) = \bar{f}$$

  Cette notation délibérément fonctionnelle suggére bien l'idée que la notion de place consiste à évaluer une fonction en un point ici $\mathcal{P}$. Les éléments de F n'appartenant pas à R_ν seront dit avoir « un pôle en $\mathcal{P}$ » ($f(\mathcal{P}) = \infty$) ; Ceux de l'idéal maximal s'annuleront au point $\mathcal{P}$.

Ces trois points de vue, de valuations, d'anneaux de valuations et de places, sont équivalents et interchangeables, modulo la petite nuance suivante. Deux valuations ν et ν' sur F, définissent les mêmes anneaux de valuations $R_\nu = R_{\nu'}$ si et seulement si l'on passe de ν à ν' par un isomorphisme croissant de leurs groupes de valeurs. Il est donc plus exact de parler de classe d'isomorphismes de valuations mais nous commettrons toujours l'abus de langage évoquant la valuation attachée à une place ou à un anneau de valuation. Par ailleurs, nous dirons que la valuation est triviale si et seulement si de façons équivalentes nous avons soit $\Gamma_\nu = \{0\}$, soit $R_\nu = F$, soit $k_\nu = F$. Il y a beaucoup d'autre notions autour des valuations : rang, rang rationnel d'une valuation, algèbre de Rees associées, valuations discrètes etc... Nous renvoyons aux ouvrages généraux : [49], [48], [46], [25] pour plus de précisions et à [35] pour l'histoire de la théorie.

Le point de vue valuatif semble émerger pour la première fois en arithmétique des travaux de Hensel sur les nombres p-adiques. Où l'on définit la valuation p-adique ν_p sur $\mathbb{Q}$ de la façon suivante. Toute fraction non nulle $f \in \mathbb{Q}$ s'écrit de manière unique sous la forme $f = p^n \frac{a}{b}$ avec a et b premiers à p. On pose alors $\nu_p(f) = n$. Ainsi l'anneau de valuation associé est $\mathbb{Z}_{(p)}$ le localisé de $\mathbb{Z}$ en (p) et le corps résiduel est $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. L'idée des places correspondantes permet alors de voir $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ comme un espace géométrique et $\mathbb{Q}$ comme un espace de fonctions que l'on évalue aux différentes places $p \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Par exemple « la fonction » $f = \frac{9}{5}$ admet un zéro d'ordre deux en p=3 et un pôle simple en p=5. Cette notion de place contient donc une information de nature topologique. Ce sera l'une des idées d'Hensel qui associera la norme p-adique ultra-métrique définie par $|f|_p = 1/p^{\nu_p(f)}$.

Pour ces normes, on a la formule de normalisation

$$\forall f \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}, \prod_{p \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} |f|_p \times |f|_\infty = 1 \tag{3.1}$$

où la norme infinie considérée est la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$. Elle correspond à la place triviale sur $\mathbb{Q}$. Pour interpréter cette formule, citons sans démonstration un théorème dû à Ostrowski (voir [46] Th I.2.2, et [18] Th page 126).

Théorème 3.1. —

1. *L'ensemble des valuations non triviales de $\mathbb{Q}$ coïncide avec les valuations p-adiques. Autrement dit les places non triviales sur $\mathbb{Q}$ sont les points de* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.
2. *Si K est un corps algébriquement clos, l'ensemble des valuations non triviales de $K(x)$ triviales sur K est en bijection avec les points de $\mathbb{P}^1(K)$.*
3. *Dans le cas général, l'ensemble des valuations non triviales de $K(x)$ triviales sur K est constitué de la valuation à l'infini donnée par la formule explicite $\nu_\infty(\phi(x)) = -\deg_x(\phi(x))$ pour tout $\phi \in K(x)$ et de toutes les valuations $p(x)$-adique de factorisation par $p(x)$ dans l'anneau factoriel $K[x]$ pour les polynômes irréductibles unitaires $p(x)$.*

Dans l'analogie entre les énoncés 1 et 2, l'analogue de la formule (3.1) pour les fractions rationnelles complexes est, toute fraction rationnelle $f(x) \in \mathbb{C}(x)$ admet sur $\mathbb{P}^1$ autant de pôles que de zéros. Ainsi est-il tout à fait légitime de considérer (3.1) comme une formule des résidus.

L'idée géométrique des places

Le théorème suivant dû à Riemann, Weber et Dedekind (voir[17] Th 6.9 page 144), généralise le résultat d'Ostrowski.

Théorème 3.2. — *Soit K un corps algébriquement clos et F/K un corps de fonction en une variable. Il existe alors à isomorphisme près une et une seule courbe projective lisse $\mathcal{C}$ définie sur K telle que*

1. *F coïncide avec le corps des fonctions rationnelles définies sur $\mathcal{C}$.*
2. *L'ensemble des places de l'extension F/K est en bijection avec les points de $\mathcal{C}$. De manière équivalente, les anneaux de valuations non triviaux de F contenant K, coïncident avec les anneaux locaux des points de $\mathcal{C}$. Ici les valuations sont discrètes de groupe de valeurs isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

Cette découverte incitera Zariski à considérer l'ensemble des valuations d'une extension F/K comme un espace géométrique : la *surface de Riemann-Zariski* $S^*(F/K)$ dans le cas des courbes, la *variété de Riemann Zariski* en dimension plus grande. Cette dernière joue un rôle très important encore de nos jours dans l'étude des singularités des variétés algébriques X séparées admettant F comme corps des fonctions rationnelles. L'idée ici, est que les valuations ν de F/K généralisent comme dans le cas des courbes la notion de point sur X. Le principe est le suivant : pour le schéma X^s associé a X, regardons la collection de ses points p et des anneaux locaux $(\mathcal{O}, p) = \mathcal{O}_{X^s,p}$ correspondants. Il est alors possible que R_ν *domine* l'un d'eux c'est-à-dire que l'on ait

$$\mathcal{O} \subset R_\nu \text{ et } m_\nu \cap \mathcal{O} = p.$$

Si cela se produit, alors nécessairement le point $p \in X^s$ est unique et on dit que p est le centre de la valuation dans X. Si l'anneau local $\mathcal{O}$ est régulier, le point p est lisse. Si ce n'est pas le cas, le difficile problème de l'uniformisation locale, résolu en caractéristique zéro par Zariski et Hironaka et encore ouvert en caractéristique positive à ce jour, consiste à « résoudre la singularité p le long de la valuation ν ». Cela revient à prouver l'existence d'une autre variété X' birationnelle à X telle que le nouveau centre p' de la valuation dans X' soit lisse. Nous illustrerons plus tard au paragraphe 8 la permanence de cette idée dans l'étude des singularités de champs de vecteurs.

Cette théorie géométrique des places est le thème principale du livre fondateur de Chevalley [8] où, l'auteur jette les bases nécessaires à l'étude géométrique des extensions de corps de fonctions en une variable F/K quand K n'est plus nécessairement algébriquement clos. Le principe étant de réécrire toute la théorie classique des diviseurs, des différentielles, du théorème de Riemann-Roch non plus en termes de points sur une courbe mais en termes de places de F/K (voir aussi les références à [46] et [17] pré-citées). Ce point de vue est celui que nous utiliserons pour présenter l'étude des singularités mobiles des équations différentielles au paragraphe 9.

L'idée à retenir de ces considérations est que cette notion abstraite de valuation est d'abord un outil servant à observer des phénomènes locaux. Les valuations jouent un rôle de loupe algébrique pour observer aussi bien un nombre premier qu'un point d'un schéma. Par ailleurs, cette capacité des valuations à mesurer des grandeurs, nous allons la voir maintenant apparaître pour la première fois en algèbre différentielle dans un théorème d'approximation Diophantienne dû à Kolchin.

4. Transcendance arithmétique et différentielle d'après Liouville et Kolchin

Joseph Liouville avait découvert le premier exemple de nombre transcendant explicite sous la forme d'une série lacunaire à convergence ultra-rapide de la forme

$$l = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{10^{n!}}$$

Ce dernier nombre ne pouvait être algébrique dans le sens où ces derniers jouissent d'une mauvaise approximation Diophantienne par les nombres rationnels. Liouville démontrait le résultat suivant.

Théorème 4.1. — *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ algébrique de degré $n \geqslant 2$ sur $\mathbb{Q}$, il existe une constante réelle $c > 0$ telle que pour tous $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\backslash\{0\}$ on ait*

$$|\alpha - p/q| \geqslant c/q^n \tag{4.1}$$

Dans le même esprit, Kolchin dans [24], découvrait le théorème ci-dessous.

Théorème 4.2. — *Soit $S(X) = \sum_{k\geqslant 0} c_k X^{s_k} \in K[[X]]$ une série formelle à coefficients dans un corps K. Si elle est lacunaire dans le sens où : les coefficients c_k sont tous non nuls, la suite des exposants est strictement croissante et la suite des rationnels $k \longrightarrow s_{k+1}/s_k$ n'est pas bornée* *alors, $S(X)$ est différentiellement transcendante sur le corps différentiel $(K(X), \frac{d}{dX})$.*

Cela signifie qu'il n'existe aucune équation différentielle polynomiale non nulle $\Phi(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ à coefficients dans $K(X)$ dont $y = S(X)$ soit solution. Ce résultat découle d'une inégalité Diophantienne semblable à (4.1) que Kolchin décrit en terme d'une norme ultra-métrique associée à une valuation de rang un.

Outre le fait d'étendre à l'algèbre différentielle les principes de l'approximation Diophantienne, Kolchin introduit dans ce travail certaines notions importantes que nous verrons plus tard comme celle notamment de continuité d'une dérivation par rapport à la topologie induite par une valuation. Pour l'instant nous continuons à explorer les passerelles entre l'arithmétique et les équations différentielles en examinant comment l'algèbre valuative, prenant en compte une multitude d'informations locales, permet d'en déduire des informations de nature globale.

5. Du local au global, la conjecture de Grothendieck-Katz

Le problème de Kronecker et le théorème de Tchebotarev

Avant d'exposer la célèbre conjecture de Grothendieck-Katz qui traite des équations différentielles linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$, nous présentons le résultat d'arithmétique dont elle est l'analogue. Soit $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polynôme. Pour tout nombre premier p assez grand, $f(x)$ peut être réduit modulo p en un polynôme $f_p(x) = \bar{f} \in \mathbb{F}_p[x]$. Kronecker se posa alors la question de l'équivalence entre les deux assertions suivantes

i) $f(x)$ est scindé dans $\mathbb{Q}(x)$.

ii) Pour tout nombre premier p suffisamment grand, $f_p(x)$ est scindé dans $\mathbb{F}_p[x]$.

Évidement, (i)$\Rightarrow$(ii). Mais la réciproque (ii)$\Rightarrow$(i) est plus délicate et résulte du théorème de densité de Tchebotarev (voir [21]). La substance de ce théorème est de rendre consistante l'intuition de Kronecker selon laquelle l'extension galoisienne $K_f/\mathbb{Q}$ d'un polynôme $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ puisse être entièrement determinée par la connaissance de l'ensemble $\mathrm{Spl}(f)$ des nombres premiers tels que l'idéal $p\mathcal{O}_K$ se décompose totalement dans l'anneau des entiers algébriques $\mathcal{O}_K$ de K_f. Ici, l'hypothèse (ii) implique qu'à un nombre fini près de nombres premiers nous ayons $\mathrm{Spl}(f) = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ainsi, d'après le théorème de densité, $K_f = \mathbb{Q}$. Ainsi, $f(x)$ doit être scindé dans $\mathbb{Q}(x)$; d'où (ii)$\Rightarrow$(i). Ce bref argument met en valeur le caratère analytique de l'intuition de Kronecker. En effet, dans ([21] p 13), Jacob rapporte que le théorème de densité donne une réponse à la question posée par Kronecker, de savoir comment caractériser une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ en terme de nombres premiers, «*de la même façon que le théorème de Cauchy determine une fonction par ses valeurs sur le bord* ». Ce déplacement vers l'analyse que suggérait Kronecker fut effectué par Grothendieck.

La Conjecture de Grothendieck-Katz

Reprenons l'idée de Liouville selon laquelle les équations différentielles linéaires sont l'analogue des équations polynomiales. Soit $L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y$ un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$. Comme précédemment, on peut réduire $L(y)$ modulo p pour p assez grand et obtenir alors un opérateur linéaire $L_p \in \mathbb{F}_p(x)[\frac{d}{dx}]$. En analogie avec le problème de Kronecker, Grothendieck proposa l'étude de l'équivalence entre les deux assertions suivantes

a) Comme $\bar{\mathbb{Q}}$ espace vectoriel, il existe une base de solutions de $L(y) = 0$ dont tous les éléments sont algébriques sur $\mathbb{Q}(x)$.

b) Pour tout p assez grand, $L_p(y) = 0$ admet une base de solutions dans $\mathbb{F}_p(x)$.

Cette conjecture mérite quelques explications : Pour le point (b) précisons qu'il se passe en caractéristique p des choses surprenantes par rapport à la caractéristique nulle. Ici les corps des constantes des corps différentiels $\mathbb{F}_p(x)$ et $\mathbb{F}_p((x))$ sont très gros et respectivement égaux à $\mathbb{F}_p(x^p)$ et $\mathbb{F}_p((x^p))$. Ceci permet par exemple, de déduire l'existence d'une base de solutions de $L_p = 0$ dans $\mathbb{F}_p(x)$ d'une semblable dans $\mathbb{F}_p((x))$.

Le Critère de Convergence arithmétique d'Eisenstein, (a)⇒(b)

Contrairement à ce qui se passait précédemment, l'implication (a)⇒(b) (le comportement global implique les comportements locaux) est cette fois moins immédiate. Sa clef réside dans le «Critère de convergence arithmétique d'Eisenstein ». Supposons que $L(y) = 0$ admette une base de solutions algébriques sur $\mathbb{Q}(x)$. D'après le théorème de Newton-Puiseux chacune de ses solutions s'exprime comme une série formelle éventuellement ramifiée à coefficients algébriques complexes. Quitte à se centrer en un point régulier $\alpha \in \mathbb{Q}$ de l'opérateur L, on peut supposer qu'il n'y a pas de ramification. Ainsi pouvons nous écrire chacune de ses solutions sous la forme

$$\varphi(x) = \sum_{n \geqslant n_0} \varphi_n x^n \in \bar{\mathbb{Q}}((x)) \subset \mathbb{C}((x))$$

Bien entendu, φ n'est pas n'importe qu'elle série formelle à coefficients algébriques. En effet le théorème de Newton-Puiseux analytique affirme que φ est localement convergente à l'origine puisque les coefficients de son équation minimale le sont. Or d'après le critère de Cauchy, la convergence locale se traduit par les inégalités

$$\exists M > 0, \exists R > 0 | \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |\varphi_n| \leqslant MR^n \tag{5.1}$$

Eisenstein eut alors l'idée de généraliser le théorème de Newton-Puiseux analytique à tous les corps valués. En tenant compte alors de toutes les valuations p-adiques sur $\mathbb{Q}$ en plus de la place à l'infini, il obtint le résultat suivant (voir [7] Th 5.1 p 28).

Théorème 5.1. — *Si une série $\varphi(x) = \sum_{n \geqslant n_0} \varphi_n x^n \in \mathbb{C}((x))$ est algébrique sur $\mathbb{Q}(x)$ alors :*

1. *Il existe un corps de nombre $E/\mathbb{Q}$ tel que $\varphi(x) = \sum_{n \geqslant n_0} \varphi_n x^n \in E((x))$.*
2. *Il existe des entiers naturels non nuls A et D tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ dès que $n \geqslant n_0, AD^n \varphi_n$ soit un entier algébrique. Ou plus synthétiquement,*
$$A \cdot \varphi(Dx) \in \bar{\mathbb{Z}}((x)).$$

Ici, $\bar{\mathbb{Z}}$ désigne la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$. La condition (2) du théorème est précisément le critère de convergence arithmétique. En effet, pour une norme $\|\|$ prolongeant une norme p-adique à E, la condition (2) implique
$$\|\varphi_n\| \leqslant \frac{1}{\|A\|} \cdot \|\frac{1}{D}\|^n.$$
Il s'agit bien encore d'un critère de Cauchy du même type que (5.1). Concrètement cette condition signifie que les dénominateurs des coefficients $\varphi_n \in \mathbb{Q}$ d'une série algébrique aient une croissance au plus géométrique. Typiquement ceci explique qu'une série du type e^x ne puisse être algébrique.

Maintenant, l'argument de l'implication (a)⇒(b) est le suivant : supposons pour simplifier que $\varphi(x) \in \mathbb{Q}((x))$ soit une solution algébrique de $L = 0$. Alors pour tout nombre premier p suffisamment grand (p ne divise pas les quantités A et D du théorème), on peut grâce au critère réduire modulo p la série et obtenir ainsi une solution $\bar{y} = \varphi_p(x)$ non nulle de l'équation $L_p(\bar{y}) = 0$ avec $\bar{y} = \varphi_p(x) \in \mathbb{F}_p((x))$. Le reste de la preuve repose alors sur le lemme de Cartier (voir [43] chap 13).

L'implication (b)⇒(a)

En ceci consiste la partie difficile de la conjecture de Grothendieck-Katz, encore à ce jour non complètement démontrée. Cependant afin d'en illustrer la profondeur signalons les faits remarquables suivants :

- Qu'elle est vraie pour les équations du premier ordre $y' = a(x)y$ avec $a(x) \in \mathbb{Q}(x)$. Et ceci, car on prouve ici qu'elle est équivalente au théorème de Kronecker-Tchebotarev sous sa forme faible précitée (ii)$\Rightarrow$(i).
- Si L vérifie l'hypothèse (b), Katz a démontré que nécessairement L n'admettait que des singularités régulières sur $\mathbb{P}^1$. Ceci constitue un pas dans la preuve de la conjecture et illustre bien la pertinence des idées de Kronecker.
- En relation avec les observations que nous faisions à la fin de la section 2, signalons aussi que dans la contexte où L vérifie l'hypothèse (b), Katz a réussi à relier les informations locales arithmétiques aux informations locales analytiques. En effet, il démontra alors que nécessairement les groupes de monodromie locaux $\mathcal{M}_\alpha$ de L en ses points singuliers $\alpha \in \mathbb{P}^1$, sont finis. On voit donc ce qui manque alors pour prouver la conjecture. Puisque L est Fuchsien, il suffirait de pouvoir démontrer que les différents $\mathcal{M}_\alpha$ engendrent un groupe fini pour conclure grâce au théorème de Schlesinger.

Pour les travaux de Katz voir [23]. Et aussi pour un traitement plus élémentaire du même sujet voir [19].

6. La descente valuative de Rosenlicht

Rappelons la définition des trois opérations liouvilliennes. Soit (K, ∂) un corps différentiel abstrait et F/K une extension différentielle. Elle est dite liouvillienne si et seulement si elle est obtenue à partir d'une succession finie des trois extensions élémentaires suivantes

1. F/K est une extension algébrique finie.
2. Adjonction d'une primitive $F = K(t)$ avec $t' \in K$.
3. Adjonction d'une exponentielle d'intégrale $F = K(t)$ avec $t'/t \in K$.

En termes fonctionnels, cette définition signifie qu'une fonction f est liouvillienne relativement à une base de fonctions connues K, si elle peut être calculée succésivement au moyen d'équations algébriques, de primitives et d'exponentielles de primitives.

Le problème général de la descente liouvillienne

À partir de ces notions, ce problème peut s'énoncer ainsi : soit (K, ∂) un corps différentiel abstrait et $E = 0$ une équation différentielle polynomiale à coefficients dans K. Supposons que $E = 0$ ait une ou plusieurs solutions dans une extension liouvillienne de K. Peut on alors en déduire que nécessairement $E = 0$ admette une solution plus simple appartenant à l'une des trois extensions directes de K précédemment décrites ? Par exemple, quand il reprit les travaux de Liouville sur les équations différentielles linéaires d'ordre deux, Kolchin démontra que si $E=0$ est linéaire et admet un solution non nulle dans une extension liouvillienne, alors, elle admet une solution dont la dérivée logarithmique est algébrique sur K. Si de plus $E=0$ admet une base de solutions liouvilliennes alors son groupe de Galois différentiel est résoluble et la chaîne des extensions élémentaires permettant de calculer toutes les solutions est d'un type très particulier (voir [43] Chap 1, paragraphe 1.5 ou [27] proposition 6.7). Un autre résultat important que Kolchin obtint grâce à des arguments Galoisiens est que les fonctions $\mathcal{P}$ de Weierstrass ne soient pas liouvilliennes sur $\mathbb{C}(x)$ (voir [37] et [13]).

Le principe de descente inauguré par Rosenlicht est d'une toute autre nature. Il consiste à voir que si $E=0$ admet une solution algébrique sur $K(t)$ avec $t' \in K$ ou $t'/t \in K$, alors en regardant la forme de l'équation différentielle $E=0$ on puisse en déduire qu'elle admet nécessairement une solution algébrique sur K. Cette méthode permettant alors de descendre dans la chaîne des extensions élémentaires pour arriver jusqu'à la base de départ. À cette fin, Rosenlicht utilisa la méthode de *spécialisation valuative* que nous exposerons dans un contexte un peu plus générale que le sien car elle nous servira à la section 9 et aussi à étendre l'un de ses résultats.

La méthode de spécialisation valuative

Commençons par énoncer le résultat principal de [37] qui rendra les choses possibles.

Théorème 6.1. — *Soit $(F/K, \partial)$ une extension de corps différentiels de caractéristique zéro. Soit ν une valuation de F/K satisfaisant aux trois hypothèses suivantes*

a) *ν est discrète de rang un. C'est-à-dire que son groupe des valeurs $\Gamma_\nu \simeq \mathbb{Z}$.*

b) *Son corps résiduel k_ν est algébrique sur K.*

c) *La dérivation ∂ est continue par rapport à la topologie ν-adique. C'est-à-dire qu'il existe $\omega_0 \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $f \in F\backslash\{0\}, \nu(f'/f) \geqslant \omega_0$.*

Soient f et g deux éléments de F ayant des pôles ou des zéros à la place $\mathcal{P}$ associée à ν. Alors deux cas se présentent :

I. *Si $\nu(f'/f) \geqslant 0$, alors, $\nu(g'/g) \geqslant 0$, l'anneau de valuation R_ν est stable par la dérivation de même que son idéal maximal m_ν, et la place $R_\nu \longrightarrow k_\nu$ est un morphisme différentiel.*

II. *Si* $\nu(f'/f) < 0$ *alors,* $\nu(g'/g) = \nu(f'/f)$ *et on a la «Règle de l'Hôpital» :*

$$(f/g)(\mathcal{P}) = (f'/g')(\mathcal{P}).$$

Par ailleurs, dans ([36] lemma 1), Rosenlicht démontre que pour les extensions différentielles en une variable les conditions (a),(b),(c) du théorème sont satisfaites ce qui le rend applicable dans ce contexte.

Nous pouvons maintenant décrire la méthode de spécialisation valuative. Soit $(F/K, \partial)$ une extension différentielle de corps de fonction en une variable de caractéristique nulle, telle que l'équation différentielle polynomiale $E = 0$ à coefficients dans K admette une solution $z \in F$. Supposons qu'il existe une valuation non triviale ν de F/K telle que

- ν satisfasse le cas I du théorème 6.1.
- la solution z appartienne à R_ν.

Alors la spécialisation $z \longrightarrow \bar{z} = z(\mathcal{P}) \in k_\nu$ donne une solution $\bar{z}$ de $E = 0$, algébrique sur K puisque, k_ν/K est algébrique. Grâce à cette méthode, Rosenlicht prouva dans [37] le résultat suivant :

Théorème 6.2. — *Soit (K, ∂) un corps différentiel de caractéristique nulle et φ un polynôme en plusieurs variables à coefficients dans K de degré total inférieur à n. Alors si l'équation différentielle*

$$y^n = \varphi(y, y', y'', \ldots) \tag{6.1}$$

admet une solution dans une extension liouvillienne de K alors, elle admet une solution algébrique sur K.

Démonstration. — Le principe de descente valuative permet de réduire la preuve aux cas où l'équation (6.1) admet une solution dans un corps F où, F est une extension algébrique finie de l'un des corps $K(t)$ avec soit $t' \in K$ soit $t'/t \in K$. Dans les deux cas, soit ν une valuation de F/K telle que $\nu(t) < 0$.

Que l'on ait $t' \in K$ ou $t'/t \in K$, on aura dans les deux cas

$$\nu(t'/t) \geqslant 0$$

Ainsi, ν vérifie bien le cas I du théorème 6.1. Par conséquent pour tout $z \in F$, on a $\nu(z') \geqslant \nu(z)$. En effet, cette inégalité est vérifiée dès que $\nu(z) \neq 0$ et si $\nu(z) = 0$ elle l'est encore puisque R_ν est stable par la dérivation. Ainsi la suite $\{\nu(z^{(p)}), p \in \mathbb{N}\}$ est croissante dans $\Gamma_\nu \cup \{\infty\} = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

Maintenant si z est une solution non nulle de (6.1) dans F, grâce à la méthode de spécialisation valuative, il nous suffira de prouver que

$$\nu(z) \geqslant 0$$

pour pouvoir conclure.

Or, pour tout monôme $\mathcal{M} = z^{k_0} \times (z')^{k_1} \times \cdots \times (z^{(s)})^{k_s}$ intervenant dans l'expression de φ, nous avons

$$\nu(\mathcal{M}) = \sum k_p \nu(z^{(p)}) \geqslant \sum k_p \nu(z) = \deg(\mathcal{M})\nu(z).$$

Maintenant, si $\nu(z) < 0$, puisque $\deg(\mathcal{M}) < n$, nous aurions $\nu(\mathcal{M}) > n\nu(z)$. Et donc $\nu(\varphi) \geqslant \inf\{\nu(\mathcal{M})\} > n\nu(z)$. Ce qui contredirait le fait que

$$\nu(\varphi) = \nu(z^n) = n\nu(z).$$

□

En vue d'applications de ce résultat, on remarquera que les conditions du théorème sont satisfaites pour l'équation de la fonction $\mathcal{P}$ de Weierstrass et aussi pour l'équation des dérivées logarithmiques des solutions d'une équation différentielle linéaire.

Les contributions de Singer

Dans son article [45], tirant profit des idées de Rosenlicht, Singer démontre les résultats suivants. (Ici, la notation $K < w >$ désigne le corps différentiel engendré par w sur le corps différentiel K).

Théorème 6.3. —

1. *Supposons que dans une extension différentielle de caractéristique zéro F/K, un élément $w \in F$ vérifie une équation différentielle linéaire avec second membre $L(y) = b$ à coefficients dans K. S'il existe une valuation ν de $K < w > /K$ satisfaisant les hypothèses (a,b,c) du théorème 6.1, avec $\nu(w) < 0$. Alors, $\nu(\frac{w'}{w}) \geqslant 0$.*
2. *Supposons que dans une extension différentielle de caractéristique zéro F/K, un élément $w \in F$ vérifie une équation différentielle du type (6.1) et engendre sur K un corps différentiel de degré de transcendance égal à un. Alors, w ne peut satisfaire aucune équation différentielle linéaire avec second membre $L(y) = b$ à coefficients dans K.*
3. *Une fonction elliptique ne peut satisfaire aucune équation différentielle linaire dont les coefficients appartiennent à une extension liouvillienne de $\mathbb{C}$.*

Singer prouve que 1$\Rightarrow$ 2 $\Rightarrow$ 3. Signalons rapidement la preuve de 1. Si nous avions $\nu(w) < 0$ et $\nu(\frac{w'}{w}) < 0$ alors ν vérifierait le cas II du théorème 6.1. Ainsi la suite $p \mapsto \nu(w^{(p)})$ serait négative, arithmétique et strictement décroissante dans $\mathbb{Z}$. Or en écrivant $L(w) = w^{(n)} + a_{n-1}w^{(n-1)} + \cdots + a_0 w = b$, nous aurions

$$\nu(w^{(n)}) \geqslant \inf\{0, \{\nu(w^{(p)}) | 0 \leqslant p \leqslant n-1 \text{ et } a_p \neq 0\}\};$$

ce qui est contradictoire.

Signalons enfin que nous verrons une généralisation du troisième point du théorème 6.3 dans [12] et [13].

Les extensions de Rosenlicht

Définition 6.4. — *Nous dirons qu'une extension différentielle de caractéristique nulle, est de Rosenlicht si elle s'obtient à partir d'un nombre fini d'extensions algébriques et d'extensions différentielles de corps de fonctions en une variable pour lesquelles il existe à chaque fois une place satisfaisant le cas I du théorème 6.1.*

Remarque 6.5. —

- *Signalons, afin d'éviter les confusions de langage que la dénomination « Rosenlicht fields » existe déjà sous la plume de Shackell [42]; concernant les travaux de ces deux auteurs sur les corps de Hardy, elle est donc différente de la précédente (voir aussi [28]).*
- *Conformément à la preuve du théorème 6.2, les extensions de Rosenlicht englobent les extensions liouvilliennes. Par ailleurs les conclusions du théorème 6.2 restent vraies dans ce contexte plus général. Et l'on peut voir qu'il en est de même pour le troisième point du théorème 6.3.*

On peut fabriquer beaucoup d'extensions de Rosenlicht comme l'illustre la

Proposition 6.6. — *Sont de Rosenlicht les extensions différentielles de corps de fonctions en une variable F/K où $F = K(t, t')$ telles que l'équation minimale de t' sur $K(t)$ s'écrive*

$$(t')^n + a_1(t)(t')^{n-1} + \cdots + a_n(t) = 0$$

Où l'on a soit $\left\{ \begin{array}{l} a_k(t) = t^k b_k(t) \text{ avec } b_k(0) \neq \infty \text{ pour tout } 0 \leqslant k \leqslant n. \\ \text{ou } \deg_t(a_k(t)) \leqslant k \text{ pour tout } 0 \leqslant k \leqslant n. \end{array} \right.$

Démonstration. — Il suffit de voir que pour toute valuation ν de F/K, les conditions de la proposition entraînent

$$\nu(t) \neq 0 \Rightarrow \nu(t'/t) \geqslant 0$$

D'après le théorème 3.1, dire que $\nu(t) \neq 0$ signifie que la restriction de ν à $K(t)$ est soit la valuation t-adique ν_0 de factorisation par t soit, la valuation ν_∞ de factorisation par $1/t$. Or l'équation minimale de $\omega = t'/t$ est

$$\omega^n + \frac{a_1(t)}{t}\omega^{n-1} + \cdots + \frac{a_n(t)}{t^n} = 0$$

Ainsi pour être certain que $\nu(\omega) \geqslant 0$, il suffit que l'on ait

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \nu(\frac{a_k(t)}{t^k}) \geqslant 0$$

- Si $\nu|_{K(t)} = \nu_0 = \mathrm{ord}_t$, cette condition est équivalente à $\mathrm{ord}_t(a_k(t)) \geqslant k$. Cela donne la première possibilité de la proposition.
- Si $\nu|_{K(t)} = \nu_\infty$, cette condition s'écrit $\deg_t(a_k(t)) \leqslant k$. Et nous obtenons la deuxième possibilité. $\square$

Quand $n = 1$, l'équation minimale s'écrit $t' + a_1(t) = 0$. La condition, $\deg(a_1(t)) \leqslant 1$ redonne quand $a_1(t) \in K[t]$ toutes les extensions liouvilliennes, mais aussi beaucoup d'autres. Par exemple les extensions de genre zéro associées à des équations du type $t' = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta/t^{27} + 8$.

La condition $a_1(t) = tb_1(t)$ donne en particulier une sous famille des équations de Riccati ; celles qui s'écrivent $t' = \alpha t^2 + \beta t$. Ces considérations pourraient donner l'impression que les extensions de Rosenlicht sont très générales. En fait il n'en est rien. L'appartenance des extensions de Riccati à cette famille est conditionnée par la

Proposition 6.7. — *Soit $F = K(t)$ avec $t' = A(t)$ où $A(t) \in K[t]$ est un polynôme de degré $\geqslant 2$. Alors F/K est une extension de Rosenlicht si et seulement si l'équation $y' = A(y)$ admet une solution algébrique sur K.*

Démonstration. — Si $\deg(A) \geqslant 2$ alors, l'équation différentielle $y' = A(y)$ est du type (6.1) ainsi, si F/K est de Rosenlicht, elle admet une solution algébrique sur K d'après la remarque 6.5. Réciproquement, soit $\bar{K}$ la clôture algébrique de K et $x \in \bar{K}$ vérifiant $x' = A(x)$. Alors dans $\bar{K}[t]$ on a une factorisation

$$t' - x' = A(t) - A(x) = (t - x)B(t).$$

Donc si $\bar{\nu}$ est la valuation $(t-x)$-adique de $\bar{K}(t)$, on a

$$\bar{\nu}(t-x) = 1 \text{ et } \bar{\nu}(\frac{t'-x'}{t-x}) = \bar{\nu}(B(t)) \geqslant 0.$$

Ainsi en factorisant le polynôme minimal $p(t)$ de x sur K dans $\bar{K}[t]$, on voit que la dérivée logarithmique $\frac{p(t)'}{p(t)}$ n'admet pas de pôle en x. Par ailleurs, dans l'extension algébrique $K(t) \subset \bar{K}(t)$, la restriction ν de $\bar{\nu}$ à $K(t)$ est la valuation $p(t)$-adique d'après le théorème 3.1. Nous avons alors $\nu(p(t)) = 1$ et

$$\nu(\frac{p(t)'}{p(t)}) = \bar{\nu}(\frac{p(t)'}{p(t)}) \geqslant 0$$

Ainsi ν satisfait le cas I du théorème 6.1. $\square$

Ces considérations illustrent la richesse du principe de spécialisation obtenu grâce aux valuations satisfaisant le cas I du théorème 6.1. Et nous reviendrons sur cette méthode à la section 9. Pour l'instant, dans les deux prochaines sections, nous examinerons essentiellement l'apport analytique des valuations vérifiant la Règle de l'Hôpital du cas II du théorème 6.1.

7. Comportements asymptotiques et corps de Hardy

Dans [15], Hardy étudie le problème suivant. Considérons les germes de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ réelles définies dans un voisinage de plus l'infini, que l'on peut écrire par compositions successives de logarithmes et d'exponentielles et d'opérations algébriques. Que peut-on dire alors de leurs comportement asymptotique au voisinage de plus l'infini ? Précisément, Hardy apportait le réponses suivantes.

- Ces fonctions sont monotones au voisinage de l'infini.
- On peut donner une description des ordres de croissance de ces fonctions. Et ces ordres de croissance sont discrets.

Outre les puissances de la variable x, les ordres de croissance intervenants sont essentiellement donnés par ceux des exponentielles et logarithmes itérés

$$\begin{cases} e_1(x) = e^x, & e_{n+1}(x) = \exp \circ e_n(x) \\ l_1(x) = \log(x), & l_{n+1}(x) = \log \circ l_n(x) \end{cases}$$

A posteriori, on se rendit compte que les germes de fonctions considérés par Hardy constituent un corps stable par la dérivation usuelle $\frac{d}{dx}$. Cette observation élémentaire motiva alors la définition abstraite des corps de Hardy telle qu'elle apparaît pour la première fois dans les oeuvres de Nicolas Bourbaki [4].

Définition 7.1. — *Un corps de Hardy est une* $\mathbb{R}$*-sous algèbre de l'anneau* $\tilde{\mathcal{H}}$ *des germes de fonctions* $\mathcal{C}^\infty$ *réelles à l'infini, stable pour la dérivation et qui est un corps.*

Cette définition est structurante. En effet, si un germe de fonction non constant f appartient à un corps de Hardy alors $1/f$ aussi. Il existe donc un intervalle $I = [a, +\infty[$ sur lequel $1/f$ est continue. Ainsi f ne peut s'annuler sur I et doit donc être de signe constant. Comme il en va de même pour f', nous en déduisons que f est monotone à l'infini et admet donc une limite finie ou infinie.

L'exemple classique de fonction ne pouvant appartenir à un corps de Hardy est le germe de fonction oscillante du genre $x \mapsto \sin(x)$.

Extensions de corps de Hardy

Les deux théorèmes suivants, dus respectivement à Robinson et à Singer, décrivent ce que l'on peut ajouter à des corps de Hardy en conservant la structure. Leurs preuves sont publiées dans [39] et apparaissent pour la première fois dans [34] et [44].

Théorème 7.2. — *Soit* K *est un corps de Hardy et* f *un germe de fonction continue au voisinage de l'infini, algébrique sur* K*, alors le sous anneaux* $K[f]$ *de* $\tilde{\mathcal{H}}$ *est encore un corps de Hardy.*

Ainsi, la clôture algébrique $\tilde{K}$ *de* K *dans* $\tilde{\mathcal{H}}$ *est un corps de Hardy. De plus* $\tilde{K}$ *est réel-clos, c'est-à-dire, que* $\tilde{K}[\sqrt{-1}]$ *est algébriquement clos.*

Théorème 7.3. — *Soit* K *est un corps de Hardy, et* f *un germe de fonction continue et dérivable au voisinage de l'infini. Si* f *satisfait une équation différentielle du genre*

$$y' = P(y)/Q(y)$$

où P *et* Q *sont des polynômes à coefficients dans* K*, alors* $K[f]$ *est un anneau intègre et son corps des fractions est un corps de Hardy.*

Dans les deux cas, le point délicat de la preuve provient de la non intégrité de l'algèbre $\tilde{\mathcal{H}}$. En effet, pour tout $I = [a, +\infty[$, on peut trouver deux germes $\mathcal{C}^\infty$ non nuls sur I, f_1 et f_2 dont le produit est nul. Ainsi, I est égal alors à la réunion des deux fermés strictes F_1 et F_2 avec $F_i = f_i^{-1}\{0\}$. Dans le vocabulaire de la géométrie algébrique, cela signifie que I est un espace topologique annelé réductible. De ce point de vue, les fonctions appartenant à un corps de Hardy, définissent sur les intervalles de

$\mathbb{R}$ de la forme $I = [a, +\infty[$ une topologie moins fine que la topologie euclidienne, pour laquelle chacun de ces espace est irréductible. Ceci permet alors, de faire de la géométrie réelle comme on fait de la géométrie algébrique ou, de la géométrie analytique réelle ou complexe. Contrairement au cas complexe, il y a en géométrie réelle quantités de topologies irréductibles plus fines que la topologie irréductible induite par les fonctions analytiques réelles ; à savoir les structures o-minimales. Parmi l'immense complexité des géométries réelles, ces structures o-minimales sont celles qu'appréhende encore correctement l'algèbre classique grâce aux corps de Hardy. Comme nous le verrons bientôt, qu'une courbe $t \mapsto \gamma(t)$ solution d'un champ de vecteur soit tellement oscillante qu'elle ne puisse appartenir à aucune structure o-minimale est une information révélatrice de la complexité de sa dynamique.

Le théorème 7.3 assure la permanence de la structure de corps de Hardy par adjonction d'une solution d'équation différentielle du premier ordre résolue, sous réserve que cette solution définisse un germe de fonction continu et dérivable à l'infini. Cette réserve ne peut être omise : les fonctions $x \mapsto \tan(x + c)$ sont solutions de $y' = 1 + y^2$, mais n'appartiennent à aucun corps de Hardy puisqu'elles ne définissent pas de germes continus au voisinage de l'infini. Cependant, ce théorème est bien adapté aux problèmes d'extensions liouvilliennes et on comprend dès lors l'intérêt de Singer et de Rosenlicht pour ces questions en général.

Valuations des corps de Hardy

Puisque les germes de fonctions initialement considérés par Hardy appartiennent bien à des corps du même nom en vertus des deux théorèmes précédents, ces derniers, sont monotones au voisinage de $+\infty$. Cette observation redonne une réponse aux découvertes originales de Hardy.

Le problème des ordres de grandeur à l'infini, fut abordé par Rosenlicht de la façon suivante dans [39]. Soit K un corps de Hardy. Puisque, pour tout $f \in K$, $\lim_{x\to+\infty} f$ existe dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, cette limite définie naturellement une place sur K donc, une valuation $\nu = \nu_K$ associée et un groupe des valeurs $(\Gamma, >)$ correspondant. On a par définition les règles suivantes

$$\begin{cases} \nu(f) = 0 & \Leftrightarrow & \lim_{x\to+\infty} f \in \mathbb{R}\backslash\{0\} & \Leftrightarrow & f \in \mathcal{U}(R_\nu) \\ \nu(f) > 0 & \Leftrightarrow & \lim_{x\to+\infty} f = 0 & \Leftrightarrow & f \in R_\nu, 1/f \notin R_\nu \\ \nu(f) < 0 & \Leftrightarrow & \lim_{x\to+\infty} f = \pm\infty & \Leftrightarrow & f \notin R_\nu, 1/f \in R_\nu \end{cases}$$

Quant à la Règle de l'Hopital :

$$\text{Si } \lim(f) = \lim(g) = 0 \text{ et si } \lim \frac{f}{g} = c \in \mathbb{R} \text{ alors, } \lim \frac{f'}{g'} = c.$$

Elle se traduit en termes valuatifs par la règle

$$\text{Si } \nu(f) \geqslant \nu(g) > 0 \text{ alors, } \nu(\frac{f}{g} - \frac{f'}{g'}) > 0.$$

La description des ordres de croissance des germes appartenant à K se fait au moyen du rang de la valuation ν de la façon suivante. Soit K un corps de Hardy, deux éléments non nuls f et g de limite 0 ou $\pm\infty$ seront dits *comparables* si et seulement si existent deux entiers naturels positifs tels que

$$\lim f^n/g = \lim g^m/f = 0.$$

Être comparable est une relation d'équivalence sur les éléments de limite 0 ou $\pm\infty$. Les classes d'équivalences peuvent être ordonnées et leurs nombre fini ou infini coïncide avec le rang de la valuation ν_K. Par exemple, si $x \mapsto \log(x)$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$ sont dans K alors, ces trois fonctions appartiennent à trois classes distinctes la première étant inférieure à la seconde et la seconde à la troisième ainsi, dans ce cas $\mathrm{rang}\nu_K \geqslant 3$ (voir [38]).

Soit F/K une extension de corps de Hardy, Rosenlicht prouve les résultats suivants que l'on trouve dans [40] : Si le rang de la valuation ν_K associée à K est fini alors,

$$\mathrm{rang}\nu_F \leqslant \mathrm{rang}\nu_K + \mathrm{tr}\cdot\deg(F/K), \tag{7.1}$$

afin de comparer les échelles de grandeurs des éléments de F aux logarithmes et exponentielles itérées des éléments de K, il obtient le

Théorème 7.4. — *Soit F/K est une extension de corps de Hardy, contenant au plus n éléments mutuellement incomparables et incomparables aux éléments de K, alors*

i) *F contient une plus petite classe de comparaison.*

ii) *Ils existent des entiers naturels r et s tels que $r + s \leqslant n$; tels que la plus petite classe de comparaison de F soit celle d'un élément $l_r(f)$ où f appartient à la plus petite classe de K.*

iii) *Pour tout $t \in F$, il existe $g \in K$ tel que $|t| \leqslant e_s(g) = e_s \circ g$.*

Ce théorème et l'inégalité (7.1) constituent une généralisation postérieure et moins précise du théorème de Borel-Singer-Van der Dries que nous allons présenter maintenant.

Le théorème de Borel-Singer-Van der Dries

Dans ce paragraphe, nous reproduisons sans modification le contenu des notes manuscrites de Michael Singer [44]. Ceci pour les raisons suivantes : Les arguments présentés permettent de voir de façon élémentaire les liens cités plus haut entre les échelles de croissance des germes de fonctions et le rang d'une valuation. Par ailleurs, ni Singer, ni Van der Dries après lui, ne publièrent leurs résultats. Et il nous parait important de ne pas condamner à l'oubli un aussi joli théorème.

Soit $P(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ un polynôme à coefficients réels en les variables $x, y, \ldots y^{(n)}$, Borel [3] et Hardy [16] montrèrent que pour $n = 1$, toute solution f de l'équation différentielle $P = 0$ satisfaisait $f = O(\exp(x^N))$ pour un certain entier N. Ici la notation $f = O(g)$ pour deux germes de fonctions définis au voisinage de plus l'infini, signifie que f/g soit borné au voisinage de plus l'infini. Borel affirmait avoir généralisé cette propriété pour tout $n \in \mathbb{N}$, en obtenant que toute solution de $P = 0$ satisfaisait $f = O(e_{n+1}(x))$. En fait ses arguments contenaient une erreur et on sait désormais que ce résultat est faux même pour $n = 2$.

En effet, pour toute fonction φ définie au voisinage de plus l'infini, il existe un nombre irrationnel α, tel que la fonction oscillante

$$u(x) = 1/(2 - \cos(x) - \cos(\alpha x))$$

satisfasse $\overline{\mathrm{Lim}}(\frac{u}{\varphi}) \geqslant 1$, d'après [1] page 97. Cependant, $x \mapsto u(x)$ défini un germe de fonction continue satisfaisant une équation différentielle d'ordre deux à coefficients constants.

En fait, si la solution de l'équation différentielle $P = 0$ appartient à un corps de Hardy, ce genre de phénomène ne se produit pas en vertu du théorème suivant.

Théorème 7.5. — *Soit*

$$P(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

un polynôme à coefficients réels en $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$, de degré N en la variable x. Soit φ une fonction réelle de limite nulle en plus l'infini. Alors toute solution f de l'équation différentielle $P = \varphi$ appartenant à un corps de Hardy, vérifie pour tout $\varepsilon > 0$:

$$f = o(e_n(\frac{x^{N+1+\varepsilon}}{N+1+\varepsilon})).$$

Les faits suivants seront utiles à la preuve :

1. Si K est un corps de Hardy, et si $f \in K$, est tel que $\lim f = \infty$ alors, pour tout $\rho > 0$, $f' = o(f^{1+\rho})$. En effet, quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f > 0$. Puisque f tend vers $+\infty$ et est asymptotiquement monotone, on doit avoir $f' > 0$. Maintenant, si la relation précédente était fausse, il existerait $\rho > 0$ et $a \in \mathbb{R}^+$ tels que pour tout $t \geqslant a$, $f'/f^{1+\rho} \geqslant 1$. En intégrant cette inégalité entre a et x pour $x > a$, nous obtiendrions :

$$[1/\rho f^\rho]_a^x \geqslant x - a.$$

Ce qui contredirait le fait que $\lim f = +\infty$.

2. Avec ses hypothèses et notations, le résultat précédent se généralise de la façon suivante : pour tout entier $p \geqslant 0$, et tout $\rho > 0$,

$$f^{(p)} = o(f^{1+\rho})$$

On raisonne par récurrence sur p en remarquant que si $\lim f^{(p)} = \infty$ alors, $f^{(p+1)} = o(f^{(p)})^{1+\rho} = o(f^{(1+\rho)^2})$. Et si, $\lim f^{(p)} \in \mathbb{R}$, alors nécessairement, d'après le théorème de Rolle, $\lim f^{(p+1)} = 0$. On a donc encore $f^{(p+1)} = o(f^{1+\rho})$.

3. Pour $n \geqslant 2$, et $\mu > 1$, on a pour x assez grand :

$$\int e_{n-1}(x^\mu/\mu) \leqslant e_{n-1}(x^\mu/\mu)$$

Ceci résulte de l'équivalent suivant au voisinage de plus l'infini, (voir [4] p. 115),

$$\int e_{n-1}(x^\mu/\mu) \sim x e_{n-1}(x^\mu/\mu)/\prod_{i=0}^{n-2} e_i(x^\mu/\mu).$$

Démonstration du théorème 7.5. — Quitte à changer f en son opposé, on supposera que $f > 0$, et on raisonnera par récurrence sur n.

Pour $n = 0$, f vérifie l'équation $P(x, f) = \varphi(x)$ et nous allons prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, $f = o(x^{N+\varepsilon})$. Si ce n'était pas le cas, il existerait $\varepsilon > 0$ et $c > 0$ tels que pour x assez grand $f(x) \geqslant cx^{N+\varepsilon}$. En écrivant $P(x, f) = a_k(x)f^k + \cdots + a_0(x) = \varphi(x)$ et en divisant cette équation par $a_k f^k$, nous obtiendrions

$$1 + \frac{a_{k-1}}{f}\frac{1}{a_k} + \cdots + \frac{a_0}{f^k}\frac{1}{a_k} = \frac{\varphi}{a_k f^k} \tag{7.2}$$

Puisque $f \geqslant cx^{N+\varepsilon}$, chaque terme $a_i(x)/f^{k-i}(x)$ pour $0 \leqslant i \leqslant k-1$, tendrait vers zéro quand x tend vers plus l'infini. Ainsi le membre de gauche de (7.2) tendrait vers 1, ceci contredisant le fait que $\lim\varphi/a_k f^k = 0$.

L'induction : Supposons $n \geqslant 1$ et le théorème démontré au rang $n-1$. Décomposons le polynôme $P = P_M + P_{M-1} + \cdots + P_0$ où P_i est homogène de degré i en $y, y', \ldots y^{(n)}$ à coefficients dans $\mathbb{R}[x]$.

Puisque f est positif et appartient à un corps de Hardy, on a soit $\lim f = +\infty$ soit, $\lim f \in \mathbb{R}$. Si $\lim f \in \mathbb{R}$ alors, $f = o(e_1(x^{N+1+\varepsilon}/N+1+\varepsilon))$ pour tout $\varepsilon > 0$ et les conclusions du théorème sont vérifiées.

Traitons maintenant le cas où $\lim f = +\infty$. Dans ce contexte, d'après le fait numéro 2, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $\rho > 0$, $f^{(p)} = o(f^{1+\rho})$. Ainsi, pour tout monôme $\mathcal{M}$ de degré i en $f, f', \ldots, f^{(n)}$, nous avons

$$\mathcal{M} = o(f^{i(1+\rho)})$$

Donc, pour tout $0 \leqslant i \leqslant M-1$,

$$P_i(x, f, \ldots, f^{(n)})/f^M = o(x^N/f^{M-i(1+\rho)}).$$

En prenant ρ tel que $M-(M-1)(1+\rho) > 0$, on en déduit que $\lim P_i/f^M = 0$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant M-1$. Or en divisant l'équation

$$P(x, f, \ldots, f^{(n)}) = P_M + \cdots + P_0 = \varphi(x)$$

par f^M, cette dernière s'écrit :

$$P_M(x, f, \ldots, f^{(n)})/f^M = (\varphi - P_{M-1} - \cdots - P_0)/f^M = \tilde{\varphi}(x)$$

avec $\lim\tilde{\varphi}(x) = 0$. Par ailleurs, P_M étant homogène de degré M,

$$P_M(x, y, y', \ldots, y^{(n)})/y^M = P_M(x, 1, y'/y, \ldots, y^{(n)}/y)$$

Posons $u = y'/y$. En vertu de la relation $(y^{(p)}/y)' = (y^{(p+1)}/y) - (y^{(p)}/y) \cdot y'/y$, on voit par récurrence que pour tout entier $p \geqslant 1$, $y^{(p)}/y$ s'exprime comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$ en les variables $u, u', \ldots, u^{(p-1)}$. D'où l'existence d'une égalité polynomiale :

$$P_M(x, 1, y'/y, \ldots, y^{(n)}/y) = R(x, u, \ldots, u^{(n-1)})$$

où la puissance maximale de x dans R est majorée par celle de P_M c'est-à-dire par N.

Maintenant, f'/f appartient à un corps de Hardy et est une solution de l'équation différentielle d'ordre $n-1$:

$$R(x, u, \ldots, u^{(n-1)}) = \tilde{\varphi}(x) \text{ avec } \lim\tilde{\varphi}(x) = 0.$$

Ainsi, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence.

Si $n = 1$, alors $f'/f = o(x^{N+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc,

$$\log(f) = o(x^{N+1+\varepsilon}/N + 1 + \varepsilon) \text{ et } f = o(e_1(x^{N+1+\varepsilon}/N + 1 + \varepsilon)).$$

Si $n \geqslant 2$, par hypothèse, $f'/f = o(e_{n-1}(x^{N+1+\varepsilon}/N + 1 + \varepsilon))$ donc

$$\log(f) = o(\textstyle\int e_{n-1}(x^{N+1+\varepsilon}/N + 1 + \varepsilon)).$$

D'après le fait numéro 3, nous en déduisons que

$$f = o(e_n(x^{N+1+\varepsilon}/N + 1 + \varepsilon)).$$

□

Terminons enfin ce paragraphe, en signalant qu'il existe un preprint de Van der Dries datant de 1987, dans lequel l'auteur démontre le résultat suivant.

Théorème 7.6. — *Soit F/K une extension de corps de Hardy et f un élément de F solution d'une équation différentielle polynomiale d'ordre n à coefficients dans K : $P(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$. Alors il existe un élément $g \in K$ tel que*

$$|f| = o(e_n(g))$$

Pour approfondir ces problèmes d'asymptotique réelle, nous renvoyons à [28] et aux références inclues.

Quelques exemples de corps de Hardy

Dans [40], Rosenlicht donne des exemples de corps de Hardy non triviaux dans le sens ou l'on ne peut les obtenir à partir de $\mathbb{R}(x)$ par les extensions successives décrites dans les théorèmes 7.2 et 7.3.

Exemple 7.7. — Soit $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ la fonction « Gamma d'Euler » et $\mathbb{R} < \Gamma(x) >$ le corps différentiel engendré par cette dernière et toutes ses dérivées. Grâce à la relation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, Hölder avait démontré que $\Gamma(x)$ ne satisfaisait aucune équation différentielle polynomiale à coefficients dans $\mathbb{R}(x)$. D'où $\mathrm{tr} \cdot \deg(\mathbb{R} < \Gamma(x) > /\mathbb{R}) = \infty$. Néanmoins Rosenlicht prouve que $\mathbb{R} < \Gamma(x) >$ est un corps de Hardy de rang égal à trois. Comme quoi l'égalité dans (7.1) est loin d'être atteinte.

La fonction Γ contient la série génératrice des valeurs de la fonction zêta conformément à la formule (78 page 17 de [6])

$$\Gamma(x + 1) = \exp(-\gamma x + \frac{\zeta(2)}{2}x^2 - \frac{\zeta(3)}{3}x^3 + \frac{\zeta(4)}{4}x^4 - \cdots)$$

où, γ est la constante d'Euler. Le résultat d'Hölder permet de comprendre pourquoi il semble si difficile d'obtenir des relations de récurrence entre les nombres $\zeta(n), n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 7.8. — Soit $\zeta(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ la fonction « zêta de Riemann ». Ici Rosenlicht prouve que $\mathbb{R} < \zeta(x) >$ est un corps de Hardy de rang un. Plus précisément, Γ_ν est engendré par les valeurs des fonctions

$$\{\nu(p^x), p \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}), p > 0\}$$

Les fonctions $x \mapsto p^x, p \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}), p > 0$ appartiennent toutes à la même échelle de grandeur d'où le rang égal à un. Néanmoins, le rang rationnel de Γ_ν est infini ; c'est-à-dire que l'on a $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_\nu) = \infty$. En effet, il ne peut exister d'entiers relatifs non tous nuls $k_1, \ldots, k_n$ tels que

$$\begin{aligned} k_1\nu(p_1^x) + \cdots + k_n\nu(p_n^x) &= \nu((p_1^x)^{k_1}) + \cdots + \nu((p_n^x)^{k_n}) \\ &= \nu((p_1^{k_1} \times \cdots \times p_n^{k_n})^x) = 0 \end{aligned}$$

Rosenlicht en déduit alors que $\zeta(x)$ ne peut satisfaire aucune équation différentielle algébrique à coefficients dans $\mathbb{R}(x)$. Il étend son résultat à quantités d'autre séries de Dirichlet. Encore une fois, l'analyse et l'arithmétique se rencontrent de façon surprenante.

Comparons ce dernier résultat avec le théorème 4.2 de Kolchin où des arguments valuatifs permettaient de prouver qu'une fonction est différentiellement transcendante. En parallèle nous avons,

Tableau 2

Kolchin	Rosenlicht
$S(X) = \sum_{k\geqslant 0} c_k X^{s_k}$	$\phi(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^x}$
Série lacunaire	Série de Dirichlet
ν valuation d'ordre en X	ν valuation de croissance à l'infini
$\Gamma_\nu = \mathbb{Z}$ engendré par $\nu(X)$	$\operatorname{rang}(\Gamma_\nu) = 1$, engendré par les $\nu(p^x)$
Très bonne approximation Diophantienne	Rang rationnel infini.

Nous allons voir que les deux derniers points de cette correspondance sont complémentaires.

Premièrement. L'implication : rang rationnel infini implique la transcendance différentielle, est contenue dans le fait plus général suivant. Soit K'/K une extension de corps de type fini et soit ν' un prolongement à K'

d'une valuation ν de K. Notons respectivement $\Gamma \subset \Gamma'$ et $k \subset k'$ les extensions respectives des groupes de valeurs et des corps résiduels. Alors, d'après ([48] corollaire page 25) on obtient l'inégalité

$$\text{rang rationnel}(\Gamma'/\Gamma) + \text{tr} \cdot \deg(k'/k) \leqslant \text{tr} \cdot \deg(K'/K). \tag{7.3}$$

Par ailleurs en tensorisant par $\mathbb{Q}$ la suite exacte $0 \to \Gamma \to \Gamma' \to \Gamma'/\Gamma \to 0$, on a

$$\text{rang rationnel}(\Gamma') = \text{rang rationnel}(\Gamma) + \text{rang rationnel}(\Gamma'/\Gamma). \tag{7.4}$$

Maintenant, soit K un corps différentiel comme $\mathbb{R}(x)$ pour lequel la valuation ν a un rang rationnel fini. Soit $K' = K < \phi >$le corps différentiel obtenu en ajoutant à K un élément ϕ d'une extension différentielle. Nous avons alors l'implication :

$$(\text{rang rationnel}(\Gamma') = +\infty) \Rightarrow \phi \text{ est différentiellement transcendant sur } K. \tag{7.5}$$

En effet, dans (7.4) on doit avoir rangrationnel$(\Gamma'/\Gamma) = +\infty$ d'où, en reportant dans (7.3) $\text{tr} \cdot \deg(K'/K) = +\infty$. En particulier K'/K n'est pas une extension de type fini. Or $K' = K < \phi >$ est le corps engendré sur K par ϕ et toutes ses dérivées successives. Ainsi, $\text{tr} \cdot \deg(K'/K) = +\infty$ signifie que ϕ ne satisfait aucune équation différentielle polynomiale non nulle à coefficients dans K c'est-à-dire qu'il est différentiellement transcendant sur K.

Deuxièmement. Afin d'interpréter un résultat de Rosenlicht relatif à une série de Dirichlet $\phi(x) = \sum_{n \geqslant m} \frac{a_n}{n^x}$, $m \geqslant 1$, réelle convergente sur une demi-droite $x \geqslant x_0$, dans le contexte du travail de Kolchin, il faut pouvoir exprimer ϕ comme une série formelle. Cela se fait au moyen du « changement d'échelle » $t = e^{-x}$. On obtient alors

$$\phi(x) = \sum_{n \geqslant m} \frac{a_n}{n^x} = \tilde{\phi} = \sum_{n \geqslant m} a_n t^{\log(n)}$$

Le comportement asymptotique de ϕ au voisinage de $x = +\infty$ étant donné par celui de son plus petit terme non nul a_m/m^x, dans la correspondance $\phi \leftrightarrow \tilde{\phi}$, la valuation ν du corps de Hardy de départ $\mathbb{R} < \phi(x) >$ est associée à la valuation d'ordre en t, $\tilde{\nu} = \text{ord}_t$. Par ailleurs, si l'on pose $t' = -t$, la correspondance $\phi \leftrightarrow \tilde{\phi}$ commute aux dérivations respectives des séries. Dans le corps différentiel $\tilde{K} = \mathbb{R} < \tilde{\phi} >$, le groupe des valeurs $\tilde{\Gamma}$ est inclus dans le sous-groupe Γ_0 de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par $\{\log(n), n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1\}$. Comme le montre Rosenlicht, $\tilde{\Gamma}$ est engendré par le semi-groupe

$$\{\log(n), n \in \mathbb{N}, n | a_n \neq 0\}.$$

Il suffit donc que l'ensemble des diviseurs des éléments du support

$$S = \{n \in \mathbb{N}, n | a_n \neq 0\}$$

contienne une infinité de nombres premiers pour que le rang rationnel de $\tilde{\Gamma}$ soit infini. D'après l'implication (7.5), ceci entraîne la transcendance différentielle de la série de Dirichlet ϕ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}(x)$. Ces arguments s'appliquent manifestement au cas de la fonction zêta de Riemann pour laquelle nous avons

$$\tilde{\zeta} = \sum_{n \geqslant 1} t^{\log(n)} \text{ et } \tilde{\Gamma} = \Gamma_0 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}}\{\log(n), n \geqslant 1\}.$$

La série généralisée $\tilde{\zeta}$ n'est pas lacunaire au sens de Kolchin, car

$$\lim(\log(n+1)/\log(n)) = 1.$$

C'est pour cela que nous considérons ces deux approches comme complémentaires.

Terminons en signalant que le principe de changement d'échelle permettant de voir une fonction appartenant à un corps valué comme une série généralisée, où les exposants sont les valeurs du groupe de la valuation, est la substance même d'un théorème général dû à Kaplansky dans [22]. Tout corps valué (K, ν, Γ, k_ν) où K et k_ν sont de caractéristique zéro admet un plongement

$$K \hookrightarrow k((t^\Gamma))$$

où k est une extension du corps résiduel k_ν et t est une indéterminée prenant des exposants dans Γ. Précisement, soient γ et γ' deux éléments de Γ les symboles t^γ et $t^{\gamma'}$ se comporteront comme deux variables indépendantes si γ et γ' sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendant dans Γ. Dans le cas contraire, si $n\gamma = n'\gamma'$ alors t^γ et $t^{\gamma'}$ seront liés par la relation $(t^\gamma)^n = (t^{\gamma'})^{n'}$. Dans ce plongement la valuation ν se transporte en la valuation t-adique du membre de droite. Contrairement au cas particulier que nous venons de traiter, le problème de ce plongement est qu'il n'est pas explicite en général. Ainsi en algèbre différentielle, il est délicat de transporter la dérivation ∂ de K en une dérivation des séries généralisées. On consultera à ce sujet la thèse de Jesus Manuel Del Blanco Maraña [9] où, l'auteur explicite les conditions générales sur le comportement de la dérivation ∂ par rapport à la topologie ν-adique qui permettent de faire avec les séries généralisées le calcul différentiel et asymptotique coutumier à l'analyse fonctionnelle.

Exemple 7.9. — Ce troisième exemple provient de nombreux auteurs contemporains, principalement situés entre les universités de Valladolid, Rennes et Dijon. Les deux principaux travaux de référence sont [26] et [5].

Soit X un champ de vecteurs polynomial sur $\mathbb{R}^n$ singulier à l'origine. Et, une courbe intégrale $\gamma : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ tendant vers l'origine quand t tend vers $+\infty$. Dire que γ est *non-oscillante* par rapport à la géométrie analytique réelle signifie que pour tout germe d'hypersurface analytique $f = 0$ avec $f \in \mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_n\}$, si la courbe $t \to \gamma(t)$ coupe une infinité de fois l'hypersurface quand t tend vers $+\infty$, alors elle est contenue dedans.

Supposons que γ soit non-oscillante et considérons le morphisme de substitution

$$S : \mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_n\} \to \tilde{\mathcal{H}}, f \mapsto f \circ \gamma.$$

Pour tout germe f, si $f \circ \gamma$ est non nul, il est de signe constant au voisinage de l'infini. Ainsi, $J = \mathrm{Ker}(S)$ est un idéal premier de $\mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Par ailleurs, le fait que γ soit une courbe intégrale, c'est-à-dire satisfasse l'équation $\frac{d\gamma(t)}{dt} = X(\gamma(t))$, donne pour tout $f \in \mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_n\}$ les relations suivantes

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) & = & < \mathrm{grad} f_{\gamma(t)}, \gamma'(t) > \\ & = & < \mathrm{grad} f_{\gamma(t)}, X(\gamma(t)) > \\ \frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) & = & L_X(f) \circ \gamma(t) \end{array}$$

où L_X est la dérivée de Lie sur $\mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_n\}$ associée au champ de vecteurs X. Maintenant la dernière formule prouve que l'idéal $J = \mathrm{Ker}(S)$ est stable pour la dérivation L_X. Ainsi S induit un isomorphisme d'algèbres différentielles intègres.

$$S : (\mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_n\}/J, L_X) \simeq (\mathrm{Im}(S), \frac{d}{dt})$$

Donc les corps de fractions de ces deux algèbres intègres sont des corps de Hardy isomorphes.

Une utilisation de cet isomorphisme est une estimation du rang de la valuation ν attachée au membre de droite. Pour chaque fonction coordonnée $x_i(t)$ de γ on a $\mathrm{Lim}_{t \to +\infty} x_i(t) = 0$. Ainsi, si nous transportons la valuation ν associée à la place à l'infini sur l'algèbre $A = \mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_n\}/J$, son centre sur A est l'idéal maximal $m = (x_1, \ldots, x_n)A$. Or A est une algèbre locale Noethérienne d'idéal maximal m et sa dimension de Krull est inférieure ou égale à n. Grâce au théorème d'Abhyankar (voir [48] page 44 pour la démonstration due à Spivakovsky), nous obtenons l'inégalité

$$\mathrm{rang}(\nu) \leqslant \mathrm{rang\ rationnel}(\nu) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_\nu) \leqslant n.$$

Vu ce qui a été dit à l'exemple précédent, cette inégalité permet de démontrer qu'une série de Dirichlet $\phi(t)$ ne peut être la composante d'une courbe intégrale $t \mapsto \gamma(t)$ d'un champ de vecteurs polynomial singulier à l'origine.

8. Le théorème de Cauchy valuatif

L'idée de Seidenberg

Dans le dernier exemple que nous avons présenté, supposons que le champ de vecteur X soit encore polynomial et que toute courbe intégrale γ non réduite à l'origine soit non-oscillante par rapport à la géométrie algébrique réelle et transcendante. C'est-à-dire que l'on ait

$$\forall\gamma, \forall f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n], \mathrm{card}\{t | f \circ \gamma(t) = 0\} = +\infty \Rightarrow f = 0.$$

Alors comme précédemment, pour toute courbe intégrale γ, on peut associer une valuation ν_γ sur le corps différentiel $(K = \mathbb{R}(x_1, \dots, x_n), D = L_X)$ telle que ce dernier soit isomorphe à un corps de Hardy.

Remarquons à cet égard que dans un corps de Hardy (K, ν), l'anneau de valuation R_ν est stable par rapport à la dérivation. En effet, pour tout $f \in K$, $f' \in K$ et ces deux germes ont chacun une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ quand $t \to +\infty$. Dire que $f \in R_\nu$ signifie que $\lim_{t\to+\infty} f \in \mathbb{R}$. Ceci implique, puisque f est asymptotiquement monotone, que nous ayons $\lim_{t\to+\infty} f' \in \mathbb{R}$ et plus précisément que $\lim_{t\to+\infty} f' = 0$, d'après l'inégalité des accroissements finis. En d'autre termes, $f \in R_\nu \Rightarrow f' \in m_\nu$.

Ainsi dans ce contexte, à chaque courbe intégrale du champ de vecteurs X, nous pouvons associer une valuation de K dont l'anneau reste stable par rapport à la dérivation $D = L_X$. Cette idée de voir les courbes intégrales d'un champ de vecteurs comme des valuations dont l'anneau reste stable par la dérivation, est l'idée du traitement algébrique proposé par Seidenberg dans [41].

Nous citons ici la première phrase de son article car elle est sans nul doute l'une des pensées les plus à même de refléter l'esprit général de cet exposé.

« *Roughly, dérivations are related to contact and so are valuations, so one may ask for a study connecting dérivations and valuations.* »

Les énoncés qui vont suivre, nécessitent d'avoir recours aux correspondances suivantes entre l'algèbre et la géométrie. Soit k un corps de caractéristique zéro et X un champ de vecteurs à coefficients fractionnaires sur $V = k^n$, $A = k[x_1, \dots, x_n]$ et $D = L_X$ la dérivée de Lie agissant sur le corps des fractions K de A.

- Dire que X est défini au voisinage d'un point p de V, d'idéal maximal m dans A revient à avoir $DA_m \subset A_m$.

– Dire que p est un point singulier de X signifie que $X(p) = \vec{0}$ et équivaut, à $DmA_m \subset mA_m$.

Dans ce contexte, le premier théorème de Seidenberg s'énonce ainsi.

Théorème 8.1. — *Si $DA_m \subset A_m$ alors il existe un anneau de valuation R_ν de K, centré en m sur A et tel que $DR_\nu \subset R_\nu$.*

Autrement dit Seidenberg prouve l'existence d'une « valuation solution du champ de vecteurs X » au voisinage d'un point ou celui-ci est défini. Le théorème d'unicité il l'obtient au voisinage d'un point régulier en dimension deux, conformément au résultat suivant.

Théorème 8.2. — *Soit $(\mathcal{O}, m)$ est un anneau local régulier de dimension deux contenant $\mathbb{Q}$ et D une dérivation de $\mathcal{O}$ telle que $Dm \not\subset m$. Alors il existe un et un seul anneau de valuation du corps des fractions de $\mathcal{O}$ centré en m et stable par la dérivation.*

Fortuny et les valuations de l'Hopital

Vient ensuite le problème plus délicat de l'étude du phénomène au voisinage d'un point singulier, c'est-à-dire quand on a $Dm \subset m$. Le théorème 8.1 affirme l'existence d'un anneau de valuation stable par la dérivation et centré en m ; Aroca et Fortuny s'aperçurent alors qu'il en existait beaucoup trop. Parmi tous ces derniers, lesquels étaient-ils susceptibles d'illustrer l'intuition de Seidenberg ? Une réponse fut donnée par Fortuny qui, dans sa thèse [14] fit la découverte suivante.

Théorème 8.3. — *Soit X un germe de champ de vecteurs analytique, singulier à l'origine du plan $\mathbb{C}^2$ et ν une valuation centrée en l'idéal maximal $m = (x, y)$ de l'anneau local $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x, y\}$. Alors ν vérifie la règle de l'Hopital pour la dérivation $D = L_X$ si et seulement si elle suit les singularités du champ de vecteurs X.*

Le fait de suivre les singularités du champ de vecteurs est intimement lié à ce que nous avons expliqué à propos de la désingularisation locale des variétés algébriques. A savoir on considère un morphisme algébrique birationnel $\varphi : V \to \mathbb{C}^2$ bijectif en dehors de l'origine $p = (0, 0)$ de $\mathbb{C}^2$. Ce qu'affirme le théorème 8.3 est que le centre Q d'une valuation de l'Hopital sur la fibre exceptionnelle $\varphi^{-1}(p)$, soit nécessairement un point singulier du pull-back à V du champ de vecteurs X.

Sans entrer plus avant dans les détails nous allons maintenant retrouver cette idée de « suivre les singularités d'équations différentielles par les valuations » sous une forme et dans un contexte totalement différents.

9. Propriété de Painlevé des équations différentielles

L'objet de cette section est de présenter deux points de vue très éloignés mais convergents sur l'étude des équations différentielles polynomiales du premier ordre. Que cela soit pour exposer le point de vue analytique classique des géomètres du dix-neuvième siècle ou le traitement valuatif de Matsuda, nous serons contraints de détailler davantage les notions afin de rendre plus claires les correspondances qui n'apparaissent pas explicitement dans la littérature. Nos deux principales références seront ici les chapitres 12 et 13 du livre d'Ince [20] et l'ouvrage de Matsuda [31].

9.1. Le point de vue analytique classique

En règle générale, comme le dit Dieudonné dans ([11] page 327), « L'étude des équations différentielles $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ non linéaires dans le domaine complexe, présente des problèmes beaucoup plus difficiles même quand on se limite au cas où f est une fonction rationnelle des variables $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, à coefficients holomorphes en x dans un ouvert de $\mathbb{C}$. Contrairement à ce qui se passe pour les équations différentielles linéaires, les points singuliers d'une solution peuvent varier avec cette solution ; on dit qu'ils sont mobiles. Déjà pour l'équation de Riccati $y' = 1 + y^2$, tout point $x_1 \in \mathbb{C}$ est un pôle de la solution $y(x) = \mathrm{cotan}(x_1 - x)$. Pour l'équation $y' = 1/2y$, x_1 est un point critique algébrique de la solution $y(x) = \sqrt{x - x_1}$. Pour les équations différentielles du second ordre, que nous n'aborderons pas ici, on peut avoir des singularités essentielles mobiles. L'équation $y'' = \frac{y'^2(2y-1)}{y^2+1}$ admet pour intégrale générale $y(x) = \tan \circ \log(Ax - B)$. $x_1 = B/A$ est donc une singularité essentielle mobile d'une infinité de solutions de l'équation différentielle. »

« Devant cette complexité des cas possibles, les recherches se sont orientées vers la détermination des classes d'équations, les plus simples pour lesquelles il n'existe que des pôles mobiles des solutions. Les premières études de ce genre commencèrent avec Briot et Bouquet vers 1850. Elles furent poursuivies par Picard et Poincaré et surtout par Painlevé et ses élèves, qui ont obtenu vers 1900 les résultats les plus profonds ». Les résultats de Painlevé auxquels Dieudonné fait allusion, concernent les équations différentielles résolues d'ordre deux mais nous ne les évoquerons pas ici car nous nous intéresserons qu'aux équations différentielles d'ordre un. Notons cependant que les équations différentielles sans singularités mobiles d'ordre supérieur où égal à deux sont l'objet de recherches actives dans les mathématiques et la physique contemporaine où elles sont connues comme satisfaisant la *Propriété de Painlevé*.

Le cas des équations différentielles résolues d'ordre un

Pour les équations différentielles résolues où g et h sont des polynômes en y à coefficients holomorphes en x

$$y' = \frac{g(x,y)}{h(x,y)} \tag{9.1}$$

Ince démontre, (voir [20], p.s 288-291) que les seuls points x_1 où une solution puisse avoir une singularité essentielle, sont ceux où les équations $g(x_1, y) = 0$ et $h(x_1, y) = 0$ ont une racine y commune. Ces points sont donc fixes et isolés.

Soit $\mathcal{D}$ un domaine du plan complexe des x ne rencontrant pas les points singuliers fixes précédents. Ince démontre encore les faits suivants.

Soit $y(x) = F(x, x_0, y_0)$ la solution de (9.1) définie dans $\mathcal{D}$ au voisinage de x_0 et telle que $y(x_0) = y_0$. Alors pour tout $x_1 \in \mathcal{D}$, $\lim_{x\to x_1} F = y_1$ existe dans $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Le point x_1 peut être éventuellement un point singulier de la fonction $x \mapsto F(x, x_0, y_0)$. Dans ce cas, x_1 est soit un pôle de F, soit un point de ramification, soit un pôle ramifié. Ces différents cas se déterminent suivant le comportement de h au voisinage de la nouvelle condition initiale (x_1, y_1) (voir [20], p. 292). Par exemple sur la courbe $\mathcal{C} = \{(x_1, y_1) | h(x_1, y_1) = 0, x_1 \in \mathcal{D}\}$, toutes les solutions $y(x)$ de l'équation admettant la condition initiale $y(x_1) = y_1$, $(x_1, y_1) \in \mathcal{C}$, sont ramifiées au voisinage de $x = x_1$ (voir [20], p. 289).

De ceci, on déduit qu'une condition nécessaire garantissant que les solutions de l'équation différentielle (9.1) ne possèdent que des pôles mobiles est que le polynôme $y \mapsto h(x_1, y)$ ne s'annule pas quand $x_1 \in \mathcal{D}$; autrement dit, il faut qu'il ne dépende pas de y. C'est-à-dire que l'équation s'écrive

$$y' = g(x, y).$$

Pour empêcher l'apparition de pôles mobiles ramifiés, on étudie l'équation en la nouvelle variable $Y = 1/y$

$$\frac{dY}{dx} = -Y^2 \frac{dy}{dx} = -Y^2 g(x, \frac{1}{Y})$$

Laquelle doit encore être polynomiale en Y. Cette étude permet de conclure que les seules équations différentielles résolues n'admettant que des pôles mobiles sont les équations différentielles de Riccati

$$y' = p_0(x) + p_1(x)y + p_2(x)y^2.$$

Les équations différentielles implicites et le Critère de Fuchs

On considère désormais les équations différentielles polynomiales en y et y', $A(x,y,y') = 0$ où l'on exprimera le polynôme $A(x,y,p)$ sous la forme

$$A(x,y,p) = A_0(x,y)p^m + A_1(x,y)p^{m-1} + \cdots + A_m(x,y).$$

Ici, les fonctions $A_r(x,y)$ sont analytiques en x et polynomiales en y. On supposera aussi que l'équation est irréductible. Le but de ce paragraphe est d'exposer le critère dû a Fuchs en 1884, donnant les conditions nécessaires et suffisantes sur l'équation différentielle $A = 0$, pour que ses solutions n'aient que des pôles mobiles éventuels. Ce critère pourra alors être vu comme une généralisation de ce que nous venons de présenter au sujet des équations de Riccati. On posera $D(x,y)$ le p-discriminant de $A(x,y,p)$. C'est un polynôme en y à coefficients analytiques. Comme précédemment, on exclura les singularités fixes de l'équation différentielle $A = 0$, pouvant donner des singularités essentielles des solutions. Seront exclues les valeurs de $x = x_0$ pour lesquelles l'une des deux conditions suivantes est vérifiée.

- $A_0(x_0,y) \cdot D(x_0,y) = 0$ indépendamment de la valeur de y.
- Il existe une racine $y = \eta(x)$ de $D(x,y) = 0$ admettant un point singulier en x_0.

Soit $\mathcal{D}$ un domaine du plan complexe, ne contenant pas les singularités fixes, Ince étudie l'équation différentielle $A = 0$ au voisinage des conditions initiales $(x_0,y_0) \in \mathcal{D} \times \mathbb{P}^1$ (voir [20], p.s 305-311). La valeur $y_0 = \infty$, se ramenant à $Y_0 = 0$ par le changement de variable $Y = 1/y$, on n'étudiera désormais que le cas où y_0 est finie. Les deux idées clef de cette étude sont alors les suivantes.

Premièrement. Si $A_0 \cdot D(x_0,y_0) \neq 0$ alors, l'équation $A(x_0,y_0,p) = 0$ admet m racines complexes distinctes $p_1,\ldots,p_m$ et le théorème des fonctions implicites permet de ré-écrire l'équation différentielle $A = 0$ sous la forme de m équations différentielles résolues

$$y' = f_r(x,y), r \in \{1,\ldots,m\}$$

avec chaque f_r analytique en x,y au voisinage de (x_0,y_0) et $f_r(x_0,y_0) = p_r$. D'où l'existence et l'unicité de m solutions distinctes de $A = 0$ au voisinage de (x_0,y_0).

Deuxièmement. Ceci permet de prouver que toute solution y définie sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$ admet une limite finie ou infinie y_1 en tout point x_1 de la frontière de $\mathcal{U}$. Dans le cas où $y_1 \neq \infty$, la seule objection possible au prolongement analytique de y en x_1 est que l'on ait

$$A_0(x_1,y_1)D(x_1,y_1) = 0.$$

Dans ce cas, la singularité de la fonction $x \mapsto y(x)$ est au plus une ramification en $x = x_1$. Ainsi, l'analyse des singularités mobiles de $A = 0$, se réduit à l'étude de l'équation au voisinage des conditions initiales mobiles $(x_1, y_1) = (x, \eta(x)), x \in \mathcal{D}$ satisfaisant la relation

$$A_0(x, \eta(x))D(x, \eta(x)) = 0.$$

Au voisinage de conditions initiales mobiles $(x, \eta(x))$ telles que $D(x, \eta(x)) = 0$, il existe au moins une racine multiple $p = \varpi(x)$ de l'équation $A(x, \eta(x), p) = 0$. Soit $p = p_1(x, y)$, une racine de $A(x, y, p) = 0$ telle que $p_1(x, \eta(x)) = \varpi(x)$. D'après le théorème des fonctions implicites, p_1 admet un développement de Taylor local éventuellement ramifié de la forme

$$p_1(x, y) = \varpi(x) + \sum_{n \geqslant k} c_n(x)(y - \eta(x))^{n/\alpha} \tag{9.2}$$

où $c_k(x)$ est le premier coefficient analytique non identiquement nul et $\alpha \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ est l'indice de ramification de p_1 par rapport à la nouvelle variable $y - \eta(x)$.

Avec ces notations, le Critère de Fuchs s'énonce ainsi

Théorème 9.1. — *Les singularités mobiles de l'équation différentielle $A = 0$ sont polaires si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées.*

a) Pour tout $r \in \{0, \dots, m\}, \deg_y A_r(x, y) \leqslant 2r$. En particulier le coefficient A_0 ne dépendant pas de y, on le supposera égal à un.

b) Au voisinage d'une condition initiale mobile telle que $D(x, \eta(x)) = 0$, si p_1 est ramifié, c'est-à-dire si $\alpha \geqslant 2$ alors nécessairement $x \to \eta(x)$ est une solution particulière de l'équation différentielle $A = 0$. C'est-à-dire

$$\varpi(x) = \eta'(x).$$

c) Dans ce contexte, on doit avoir aussi $k \geqslant \alpha - 1$ dans l'équation (9.2).

d) Ce sont les conditions équivalentes à (b) et (c) quand on écrit l'équation différentielle $A = 0$ en les nouvelles variables $Y = 1/y$ et $P = -p/y^2$.

9.2. Le point de vue valuatif de Matsuda

Dans [31], Matsuda donne l'assez surprenante définition suivante

Définition 9.2. — *Une extension différentielle de corps de fonctions en une variable $(F/K, \partial)$ sera dite sans singularités mobiles si et seulement si, pour toute valuation ν de F/K, l'anneau R_ν est stable par la dérivation ∂.*

Il faut entendre la dénomination « sans singularités mobiles » comme synonyme de sans point critiques mobiles. Autrement dit, que les seules singularités autorisées à se mouvoir soient polaires.

La correspondance avec le paragraphe précédent se faisant de la façon suivante. Soit (K, ∂) un corps différentiel et $A(y, y') = 0$ une équation différentielle polynomiale à coefficients dans K. On lui associe l'extension de corps différentiels en une variable F/K où $F = K(y)[p]/A(y, p)$ et où la dérivation ∂ de K se prolonge de manière unique à F en posant $\partial(y) = y' = p$. Ceci fonctionne toujours en caractéristique nulle et aussi en caractéristique positive pour peu que l'extension algébrique $F/K(y)$ soit séparable.

Dans ce contexte, Matsuda obtient alors la formulation suivante du critère de Fuchs ([31], p. 14).

Théorème 9.3. — *Soit $A(y, y') = 0$ une équation différentielle irréductible à coefficients dans K. Écrivons le polynôme*

$$A(y, p) = A_0(y)p^m + \cdots + A_{m-1}(y)p + A_m(y).$$

Alors l'extension F/K associée est sans singularités mobiles si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées.

A. *Pour tout $r \in \{0, \ldots, m\}, \deg A_r(y) \leqslant 2r$.*

B. *Si une place $\mathcal{P}$ de F/K qui n'est pas un pôle de y, est ramifiée par rapport à $K(y)$ alors les classes résiduelles η et ϖ de y et de y' vérifient*

$$\varpi = \eta'$$

C. *Dans ces conditions on doit avoir l'inégalité $\nu_{\mathcal{P}}(y' - \varpi) \geqslant e_{\mathcal{P}} - 1$. Ici, $e_{\mathcal{P}}$ désigne l'indice de ramification de $\mathcal{P}$ par rapport à $K(y)$.*

D. *Si une place $\mathcal{P}$ de F/K est un pôle de y et est ramifiée par rapport à $K(y)$ alors $\nu_{\mathcal{P}}(y') \geqslant \nu_{\mathcal{P}}(y) - 1$.*

Dans ce langage, le traitement des equations différentielles sans singularités mobiles résolues s'énonce ainsi. « Si F/K est une extension différentielle en une variable de genre zéro, alors elle est sans singularités mobiles si et seulement si c'est une extension de Riccati. » En effet, dire que F/K est de genre zéro signifie qu'il existe $t \in F$ tel que $F = K(t)$. Alors $t' \in F$ s'écrit comme une fraction irréductible $t' = -A_1(t)/A_0(t)$. L'application du Critère 9.3 (A) donne $t' = P(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2$ est un polynôme de degré au plus deux à coefficients dans K.

L'intérêt de ce point de vue original est triple.

- Il permet une analyse du phénomène des singularités mobiles dans un contexte plus vaste que celui de l'analyse complexe, puisqu'il englobe entre autres la théorie des équations différentielles en caractéristique positive.
- Sur le plan philosophique, l'effort de Matsuda permet de « substituer au visible compliqué de l'invisible simple », selon la formule du physicien français Jean-Baptiste Perrin (pour la citation, voir [47]). En cela réside à nos yeux son principal mérite. Car cet « invisible simple » est la notion souple et structurante qui permet une mise en abîme du phénomène géométrique de singularités mobiles, en le faisant sortir du cadre particulier qui lui donna naissance.
- Grâce à la théorie géométrique des places de Weil et Chevalley que nous évoquions au paragraphe 3, Matsuda donne des preuves aussi simples qu'élégantes d'analogues de résultats classiques. Par exemple pour n'en citer qu'un seul autre.

Exemple 9.4. — Supposons que l'équation différentielle $A(y, y') = 0$ dont les coefficients sont des constantes complexes, soit sans points critiques mobiles. Briot et Bouquet avaient démontré (voir [33], p.s 62-64), qu'alors ses solutions pouvaient se calculer à partir de fractions rationnelles, d'exponentielles et de fonctions elliptiques.

Matsuda prouve (voir [31], Th. 5 p. 22) que si $F/\mathbb{C}$ est sans singularités mobiles alors le genre de $F/\mathbb{C}$ est $g = 0$ ou $g = 1$.

Remarquons que malgré leurs similitudes, il n'est pas évident de déduire le résultat de Briot et Bouquet de celui de Matsuda. Si le genre de la courbe complexe $A(y, p) = 0$ est nul alors l'extension $F/\mathbb{C}$ est de Riccati comme précédemment. Ainsi, l'expression rationnelle de y en fonction de t permet de calculer les solutions générales de $A = 0$ grâce à des fonctions rationnelles et des exponentielles de la variable temporelle x. Si le genre est égal à un, $F/\mathbb{C}$ est un corps elliptique, $F = \mathbb{C}(u, v)$ avec une relation du genre $v^2 = 4u^3 + g_2 u + g_3$. Mais la difficulté pour conclure dans ce cas, vient de ce que nous ne sachions pas a priori que $u' = v$, c'est-à-dire que F soit différentiellement isomorphe à $\mathbb{C}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$, avec $\mathcal{P}'^2 = 4\mathcal{P}^3 + g_2\mathcal{P} + g_3$. Matsuda lève cette difficulté (voir [31], Th. 8, p. 37).

Ces considérations illustrent la richesse du livre de Matsuda, mais aussi la difficulté de sa lecture. Le lecteur au cour de son cheminement doit en permanence traduire et compiler les énoncés pour les mettre en parallèle avec les résultats classiques issus des oeuvres de Briot et Bouquet, Fuchs, Poincaré et Clairaut auxquels l'auteur fait référence constamment.

Mais il y a une critique plus profonde que l'on peut formuler à l'égard de cet ouvrage. À savoir que Matsuda ne démontre pas l'équivalence entre sa définition et la notion classique d'absence de singularités mobiles dans le cadre des équations différentielles à coefficients holomorphes. Cette lacune est d'autant plus étonnante que son travail contient l'essentiel du matériel nécessaire à combler cette brèche. Signalons également, qu'outre une référence assez vague à un résultat de Kolchin, il n'explique à aucun moment l'origine de sa curieuse définition. Nous allons remédier à ces lacunes en démontrant le

Théorème 9.5. — *Soit $A(x, y, y') = 0$ une équation différentielle polynomiale à coefficients holomorphes, irréductible sur $K = \mathcal{M}(\mathcal{D})$ où $\mathcal{D}$ est un domaine du plan complexe ne contenant pas les singularités fixes de l'équation. Soit F/K l'extension de corps différentiels en une variable associée. Alors les solutions de $A = 0$ n'ont que des pôles mobiles, si et seulement si, F/K n'a pas de singularités mobiles dans le sens de Matsuda.*

Signalons que ce résultat apparait dans [32] sous une forme complémentaire à l'approche que nous proposons et qu'à l'époque où nous rédigions ces lignes, nous n'avions pas connaissance de ce travail de Muntingh et Van der Put. Soit $(F/K, \partial)$ comme dans l'énoncé du théorème. Contrairement au corps $K = \mathcal{M}(\mathcal{D})$, ici F n'est pas un corps de fonctions méromorphes. En effet, la variable $y \in F$ est la solution générique de l'équation différentielle $A = 0$, dont les solutions méromorphes, algébriques ou transcendantes sur K, seront obtenues par spécialisation fonctionnelle $y \mapsto y(x)$. Dans tout ce qui suivra, nous introduirons la variable x dans les notations pour distinguer les fonctions méromorphes des éléments des corps différentiels abstraits.

Nous avons vu dans la discussion précédant l'énoncé du théorème 9.1, que la présence de singularités mobiles de l'équation différentielle $A = 0$ provient de son comportement le long de courbes particulières $\mathcal{C} = \{(x, \eta(x)), x \in \mathcal{D}\}$ où, $x \mapsto \eta(x)$ est algébrique sur K. Étudier l'équation différentielle le long de $\mathcal{C}$ revient à écrire l'équation en la nouvelle variable $\tilde{y} = y - \eta(x)$. C'est-à-dire à considérer une spécialisation donnée par l'une des places de

$$F/K, \mathcal{P} : y \mapsto \eta(x).$$

La forme de la nouvelle équation différentielle $\tilde{A}(\tilde{y}, \tilde{y}') = 0$ va être directement conditionnée par le comportement différentiel des places $\mathcal{P}$ telles que $y \mapsto \eta(x)$. Cette nouvelle application de la méthode de spécialisation valuative du paragraphe 6, à l'étude d'une équation différentielle le long d'une courbe de conditions initiales, constitue l'idée principale de la preuve du théorème 9.5.

D'après Fuchs, s'il doit exister des points critiques mobiles de l'équation différentielle $A(x,y,y')=0$, il faut aller les chercher comme conditions initiales se déplaçant sur les courbes $\mathcal{C}=\{(x,\eta(x)),x\in\mathcal{D}\}$ où $\eta(x)$ vérifie l'équation algébrique

$$A_0(x,\eta(x))D(x,\eta(x))=0.$$

Ainsi, la première chose à vérifier du point de vue algébrique est, le bon comportement des places situées en dehors du discriminant. Ceci est donné par le lemme suivant que l'on peut voir comme une forme plus précise d'un résultat de [31] (Th. 11, p. 70) et, aussi, comme une adaptation d'un résultat semblable de Dedekind en théorie des nombres.

Lemme 9.6. — *Soit $(F/K,\partial)$ une extension différentielle de corps de fonctions en une variable de caractéristique nulle définie par une équation différentielle irréductible $A=0$ où $A(y,p)=A_0(y)p^m+\cdots+A_{m-1}(y)p+A_m(y)$. Soit ν une valuation de F/K pour laquelle*

$$\nu(y)\geqslant 0 \text{ et } \nu(A_0(y))=\nu(D(y))=0.$$

Alors R_ν est stable par la dérivation ∂.

Démonstration. — Supposons dans un premier temps, que K soit algébriquement clos. Soit η la classe résiduelle de y dans $k_\nu=K$; Celle de $D(y)$ est alors $D(\eta)$ et elle est non nulle par hypothèse. Ainsi, l'équation $A(\eta,p)=0$ admet m racines simples $p_1,\dots,p_m\in K=\bar{K}$. Les m points $(\eta,p_r),r\in\{1,\dots,m\}$ de la courbe $A(y,p)=0$ sont lisses et leurs anneaux locaux respectifs $\mathcal{O}_r$ constituent les m anneaux de valuation de F dominant l'anneau de valuation $R_0=K[y]_{(y-\eta)}$ de $K(y)$.

Ainsi, R_ν coïncide avec l'un des $\mathcal{O}_r$ et ν n'est donc pas ramifiée par rapport à $K(y)$. Par conséquent $t=y-\eta$ est un générateur de m_ν et $t'=y'-\eta'$ est entier sur R_0 puisque $A_0(y)$ est inversible dans R_0. Et l'on sait qu'en caractéristique zéro, cela implique que R_ν soit stable par la dérivation (voir [31], p. 8 ou [37]).

Dans le cas général, il suffit de comprendre comment fonctionne le procédé d'extension des scalaires d'un corps de fonctions en une variable

$$\begin{array}{ccc} F & \to & F(\bar{K}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ K & \to & \bar{K} \end{array} \tag{9.3}$$

où les flèches du diagramme commutatif sont des inclusions différentielles.

Le polynôme irréductible $A(y,p)$ dans $K(y)[p]$ ne l'est plus nécessairement dans $\bar{K}(y)[p]$ où il se factorise sous la forme

$$A(y,p) = B_1(y,p)^{e_1} \cdots B_s(y,p)^{e_s} \tag{9.4}$$

En faisant agir $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \simeq \mathrm{Gal}(\bar{K}(y)/K(y))$ sur (9.4), on voit que tous les e_i sont égaux et que le groupe permute transitivement les s facteurs. En posant

$$F(\bar{K}) = \bar{K}(y)[p]/B_i(y,p), \text{ avec } y' = p,$$

on obtient bien le diagramme commutatif (9.3).

Dans ce contexte, toute valuation ν de F/K, se prolonge en une valuation $\bar{\nu}$ de $F(\bar{K})/\bar{K}$ pour laquelle, $R_\nu = R_{\bar{\nu}} \cap F$. Si $\nu(y) \geqslant 0$ et $\nu(A_0(y)) = \nu(D(y)) = 0$, il en ira de même pour $\bar{\nu}$ car, le discriminant $\bar{D}_i(y)$ de B_i est un diviseur de $D(y)$. D'après la première étape de la preuve, $R_{\bar{\nu}}$ est stable par la dérivation et donc R_ν aussi. $\square$

Pour conclure la preuve du théorème 9.5, il suffit d'établir que les conditions (a,b,c,d) du Critère de Fuchs et les conditions (A,B,C,D) correspondantes de Matsuda sont simultanément satisfaites.

Puisque les conditions (a) et (A) sont les mêmes, supposons les satisfaites. D'après le lemme, il ne reste plus qu'à examiner l'ensemble fini des valuations ν pour lesquelles

- Soit $\nu(y) \geqslant 0$ et $\nu(D(y)) > 0$.
- Ou, $\nu(y) < 0$.

Remarquons d'abord, que dans les deux cas, si ν n'est pas ramifiée par rapport à $K(y)$ alors R_ν est stable par la dérivation. En effet, pour les valuations du premier cas ceci est une conséquence directe de la preuve du lemme et de la condition (A). Pour les valuations du second cas, la condition (A) permet encore de se ramener au contexte du lemme après avoir effectué le changement de variable $Y = 1/y$. Ainsi l'objection à la stabilité par la dérivation dans le Critère de Matsuda, ne peut venir que de la ramification dans les deux cas.

Si $\nu(y) \geqslant 0$ et $\nu(D(y)) > 0$, notons encore $\eta(x)$ la spécialisation de y dans le corps résiduel, c'est une racine de l'équation $D(x,y) = 0$. Soit $\varpi(x)$ la spécialisation de p, $\varpi(x)$ n'est pas infini en vertu de la condition (A).

Maintenant regardons la condition (B).

Dire que ν est ramifiée par rapport à $K(y)$ signifie conformément à ([31], p. 15) qu'il existe un entier $e \geqslant 2$ et une uniformisante t appartenant au complété m_ν-adique $\hat{R}_\nu$ de R_ν tels que

$$\begin{cases} \hat{R}_\nu = k_\nu[[t]] \\ y - \eta(x) = t^e \end{cases}$$

On alors un unique développement formel

$$p - \varpi(x) = \sum_{n \geqslant n_0} \lambda_n(x) t^n \in k_\nu[[t]].$$

L'unicité des développements formel et la comparaison avec la formule (9.2), permet de dire que nécessairement

$$\begin{cases} \alpha = e \\ n_0 = k = \nu(p - \varpi(x)) \end{cases}$$

Les conditions (b) et (B) sont donc équivalentes, ainsi que (c) et (C). Il en va bien sur de même pour les conditions (d) et (D). Ceci achève la preuve du théorème.

Terminons par quelques remarques.

Du point de vue logique, l'intérêt du théorème 9.5 est de permettre de considérer les théorèmes de Matsuda comme de nouvelles preuves des théorèmes classiques des auteurs du dix-neuvième siècle. Ceci en vaut la peine, car comme nous avons tenté de l'illustrer avec le résultat de Briot et Bouquet de l'exemple 9.4, les démonstrations de Matsuda sont beaucoup plus limpides que les preuves géométriques initiales.

Enfin il semble que Matsuda soit parvenu à cette idée en regardant des permutations d'anneaux de valuations par des automorphismes différentiels. Son observation était alors de dire, que si l'un d'eux R_ν n'était pas stable par la dérivation alors tous ceux de la même orbite ne le seraient pas non plus, par transport des propriétés différentielles. Ceci lui permettait de donner une nouvelle preuve d'un théorème sur les fonctions elliptiques dû originellement à Kolchin. Voir ([31] théorème 12 page 70). L'idée de permuter des anneaux de valuations par des automorphismes différentiels est l'une des notions importantes de notre thèse voir [12] et [13]. Et c'est la rédaction de ce travail qui nous fit entrevoir la nécessité d'écrire la présente synthèse.

Bibliographie

[1] Bellman (R.). — Stability Theory of Differential Equations, Dover (1969).

[2] Bertrand (D.). — Groupes algébriques et équations différentielles linéaires. Astérisque, (206) :Exp. No. 750, 4, p. 183-204 (1992).

[3] Borel (E.). — Mémoire sur les Séries Divergentes. Annales. Sci. de l'ENS, 16(3), p. 1-131 (1899).

[4] Bourbaki (N.). — Fonctions d'Une Variable Réelle. Chap V. 2nd ed. Hermann, Paris (1961).

[5] Cano (F.), Moussu (R.), and Rolin (J.-P.). — Non Oscillating Integral Curves and Valuations (2003).

[6] Cartier (P.). — Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents, Astérisque, (282) :Exp. No. 885, viii, p. 137-173 (2002).

[7] Cassels (J.W.S). — Local Fields. London Mathematical Society. Cambridge University Press (1986).

[8] Chevalley (C.). — Introduction to the theory of Algebraic Functions of one Variable, Mathematical Surveys, No. VI. American Mathematical Society, Providence, R.I. (1963).

[9] Del Blanco Maraña (J. M.). — Cuerpos de series generalizadas y cuerpos de Hardy, PhD thesis, Universidad de Valladolid, Mai (2006).

[10] Deligne (P.). — Catégories Tannakiennes. In The Grothendieck Festschrift, Vol. II, volume 87 of Progr. Math., p. 111-195. Birkhäuser Boston, Boston, MA (1990).

[11] Dieudonné (J.). — Abrégé d'Histoire des Mathématiques 1700-1900, Hermann, Paris (1978).

[12] Duval (G.). — Actions des groupes de Galois différentiels sur les espaces de valuations. PhD thesis, Université de Toulouse, Octobre (2005).

[13] Duval (G.). — Valuations and differential galois groups, Trans. of the AMS À paraitre, p. 1-50 (2008).

[14] Fortuny (P.). — De l'Hôpital valuations and complex planar foliations, Rev. Semin. Iberoam. Mat. Singul. Tordesillas, 2(2), p. 3-19 (1998).

[15] Hardy (G.-H.). — Properties of Logarithmico-Exponential Functions, Proc. London. Math. Soc., 10, p. 54-90 (1912).

[16] Hardy (G.-H.). — Orders of Infinity, volume 12, Cambridge Tracts in Mathematics (1924).

[17] Hartshorne (R.). — Algebraic Geometry, volume 52 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York (1977).

[18] Hellegouarch (Y.). — Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles, Enseignement des Mathématiques. Masson, Paris (1997).

[19] Honda (T.). — Algebraic Differential Equations. In Symposia Mathematica, Vol. XXIV (Sympos., INDAM, Rome, 1979), p. 169-204, Academic Press, London (1981).

[20] Ince (E. L.). — Ordinary Differential Equations, Dover Publications, New York (1944).

[21] Jacob (B.). — Le Théorème de Cebotarev, p. 1-24 (2002). http ://www.dma.ens.fr/edition/MemoiresMaitrise/2001-2002/

[22] Kaplansky (I.). — Maximal fields with valuations. Duke Math. Journal, 9, p. 303-321 (1942).

[23] Katz (N. M.). — Nilpotent connections and the monodromy theorem : Applications of a result of Turrittin. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (39), p. 175-232 (1970).

[24] Kolchin (E. R.). — Rational approximation to solutions of algebraic differential equations, Proc. Amer. Math. Soc., 10, p. 238-244 (1959).

[25] Lang (S.). — Algebra, volume 211 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York (2002).

[26] Lion (J.-M.), Miller (C.), and Speissegger (P.). — Differential equations over polynomially bounded o-minimal structures, Proc. Amer. Math. Soc., 131(1) :175-183 (electronic) (2003).

[27] Magid (A.R.). — Lectures on Differential Galois Theory, volume 7. A.M.S. Col. Univ. Lectures Series (1994).

[28] Maric (V.). — Differential and algebraic equations in Hardy fields, In Differential equations and applications, Vol. I, II (Columbus, OH, 1988), p. 179-182, Ohio Univ. Press, Athens, OH (1989).

[29] Martinet (J.) and Ramis (J.-P.). — Théorie de Galois Différentielle et Resommation, In Computer algebra and differential equations, Comput. Math. Appl., p. 115-214, Academic Press, London (1990).

[30] Martinet (J.) and Ramis (J.-P.). — Elementary Acceleration and Multisummability. Annales de l'Institut Henri Poincaré, Physique Théorique, 86(4), p. 331-401 (1991).

[31] Matsuda (M.). — First Order Algebraic Differential Equations, volume 804 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag (1980).

[32] Muntingh (G.), Van der Put (M.). — Order one equation with the painlevé Property, peprint (2006).

[33] Picard (E.). — Traité d'Analyse, Tome III, 2nd ed. Gauthier-Villard, Paris (1908).

[34] Robinson (A.). — On the real closure of a Hardy field. In Theory of sets and topology (in honour of Felix Hausdorff, 1868-1942), p. 427-433, VEB Deutsch. Verlag Wissensch., Berlin (1972).

[35] Roquette (P.). — History of valuation theory. I. In Valuation theory and its applications, Vol. I (Saskatoon, SK, 1999), volume 32 of Fields Inst. Commun., p. 291-355, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2002).

[36] Rosenlicht (M.). — On the explicit solvability of certain transcendental equations, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (36), p. 15-22 (1969).

[37] Rosenlicht (M.). — An analogue of l'Hospital's rule, Proc. Amer. Math. Soc., 37, p. 369-373 (1973).

[38] Rosenlicht (M.). — Differential Valuations, Pacific J. Math., 86(1), p. 301-319 (1980).

[39] Rosenlicht (M.). — Hardy Fields, J. Math. Anal. Appl., 93(2), p. 297-311 (1983).

[40] Rosenlicht (M.). — The rank of a Hardy field, Trans. Amer. Math. Soc., 280(2), p. 659-671 (1983).

[41] Seidenberg (A.). — Derivations and valuation rings, In Contributions to algebra (collection of papers dedicated to Ellis Kolchin), p. 343-347, Academic Press, New York (1977).

[42] Shackell (J.). — Rosenlicht Fields, Trans. Amer. Math. Soc., 335(2), p. 579-595 (1993).

[43] Singer (M.) and Van der Put (M.). — Galois Theory of Linear Differential Equations, volume 328 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag (2003).

[44] Singer (M. F.). — Asymptotic Behaviour of Solutions of Differential Equations and Hardy Fields : Preliminary Report (1975).

[45] SINGER (M. F.). — Solutions of Linear Differential Equations in Function Fields of one Variable, Proc. Amer. Math. Soc., 54, p. 69-72 (1976).
[46] STICHTENOTH (H.). — Algebraic Function Fields and Codes, Universitext, Springer-Verlag, Berlin (1993).
[47] THOM (R.). — Paraboles et Catastrophes, Flammarion (1983).
[48] VAQUIÉ (M.). — Valuations. In Resolution of Singularities, number 181 in Progress in Mathematics, p. 439-590, Birkhauser, Basel (2000).
[49] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). — Commutative Algebra, volume II of The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Company, INC. (1960).