

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

OLIVIER RAHAVANDRAINY

Résolution des fibrés généraux stables de rang 2 sur \mathbb{P}^3 de classes de Chern $c_1 = -1, c_2 = 2p \geq 6 : I$

Tome XIX, n° 2 (2010), p. 231-267.

http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2010_6_19_2_231_0

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2010, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Résolution des fibrés généraux stables de rang 2 sur \mathbb{P}^3 de classes de Chern $c_1 = -1, c_2 = 2p \geq 6 : \mathbf{I}$

OLIVIER RAHAVANDRAINY⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — On considère l'espace de modules $M(c_1, c_2)$ des fibrés stables de rang 2 sur \mathbb{P}_k^3 , de classes de Chern c_1, c_2 , k étant un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque. Si $(c_1 = 0, c_2 > 0)$ ou $(c_1 = -1, c_2 = 2p \geq 6)$, on sait ([7], [9]) que $M(c_1, c_2)$ a une composante irréductible dont le point générique $\mathcal{F}(c_1, c_2)$ a la cohomologie naturelle. Nous avons calculé ([16]) la résolution minimale de $\mathcal{F}(0, c_2)$. Dans cet article, nous voulons déterminer celle de $\mathcal{F}(-1, c_2)$ si $c_2 > \frac{(v+2)(2v^2+3v-1)}{6v+7}$, où v est le plus petit entier tel que $h^0(\mathcal{F}(v)) > 0$. Par un procédé standard rappelé dans [16], on se ramène à des problèmes de rang maximum qui sont traités par la méthode d'Horace ([11]).

ABSTRACT. — Let $M(c_1, c_2)$ be the moduli space of stable vector bundles of rank 2 on \mathbb{P}_k^3 , with Chern classes c_1, c_2 , where k is an algebraically closed field of arbitrary characteristic. If either $(c_1 = 0, c_2 > 0)$ or $(c_1 = -1, c_2 = 2p \geq 6)$, it is shown in [7] and [9] that $M(c_1, c_2)$ has an irreducible component $\text{Ir}(c_1, c_2)$ and the generic point $\mathcal{F}(c_1, c_2)$ of $\text{Ir}(c_1, c_2)$ has a natural cohomology. In ([16]) we calculate the minimal free resolution of $\mathcal{F}(0, c_2)$. We want to determine, in this paper, the $\mathcal{F}(-1, c_2)$'s one if $c_2 > \frac{(v+2)(2v^2+3v-1)}{6v+7}$, where v is the least integer such that $h^0(\mathcal{F}(v)) > 0$. By standard method ([16]), we can reduce our problem to rank maximal problems and use the "méthode d'Horace" ([11]).

(*) Reçu le 16/01/2006, accepté le 04/03/2010

(1) Département de Mathématiques, U F R Sciences et Techniques, 6, Avenue Le Gorgeu - C.S. 93837, 29238 Brest Cedex 3
Olivier.Rahavandrainy@univ-brest.fr

1. Introduction

On note \mathcal{X} l'espace projectif de dimension 3 sur un corps algébriquement clos k de caractéristique quelconque, et \mathcal{O} le faisceau structural sur \mathcal{X} .

Pour $a \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$, et pour un faisceau cohérent \mathcal{F} sur \mathcal{X} , on pose :

$$a\mathcal{O}(m) = \underbrace{\mathcal{O}(m) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(m)}_{a \text{ fois}}, \mathcal{F}(m) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(m), h^i(\mathcal{F}(m)) = \dim_k H^i(\mathcal{F}(m)).$$

On dit qu'un tel faisceau a la cohomologie naturelle si, pour tout entier m , au plus l'un des $h^i(\mathcal{F}(m))$ n'est pas nul.

Soient $c_1 \in \{-1, 0\}$ et $c_2 \in \mathbb{N}^*$, on considère l'espace de modules $M(c_1, c_2)$ des fibrés stables de rang 2 sur \mathcal{X} de classes de Chern c_1 et c_2 . Pour $c_1 = 0, c_2 > 0$ (resp. $c_1 = -1, c_2$ pair), on connaît (voir [7]) une composante irréductible de $M(c_1, c_2)$: celle qui contient tous les fibrés correspondants aux réunions disjointes de $c_2 + 1$ droites (resp. $\frac{c_2}{2} + 1$ coniques) de \mathcal{X} . On note $\mathcal{F}(c_1, c_2)$ le point générique de cette composante. Robin Hartshorne et André Hirschowitz démontrent, dans [9], que $\mathcal{F}(0, c_2)$ (resp. $\mathcal{F}(-1, c_2)$), a la cohomologie naturelle si $c_2 > 0$ (resp. $c_2 = 2p \geq 6$). Nous voulions nous intéresser aux résolutions minimales de ces fibrés. La résolution du fibré $\mathcal{F}(0, c_2)$ a été calculée, en deux étapes, dans [15] et [16]. Dans cet article, nous regardons le cas du fibré $\mathcal{F} = \mathcal{F}(-1, c_2)$.

Soit v le plus petit entier tel que $\mathcal{F}(v)$ ait une section globale. On a (voir le corollaire 2.4) : $v = \lceil \frac{-1 + \sqrt{1 + 12c_2}}{2} \rceil \geq 3$.

Nous obtenons, en utilisant le théorème 1.2, le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Si $c_2 > \frac{(v+2)(2v^2+3v-1)}{6v+7}$, alors le fibré \mathcal{F} a comme résolution minimale :*

$$0 \longrightarrow \beta_3 \mathcal{O}(-v-3) \longrightarrow \beta_2 \mathcal{O}(-v-2) \longrightarrow \alpha_1 \mathcal{O}(-v) \oplus \beta_1 \mathcal{O}(-v-1) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

où :

$$\begin{cases} \alpha_1 = h^0(\mathcal{F}(v)) = \frac{1}{6}(v+1)(v+2)(2v+3) - (2v+3)\frac{c_2}{2}, \\ \beta_1 = h^0(\mathcal{F}(v+1)) - 4h^0(\mathcal{F}(v)) = (6v+7)\frac{c_2}{2} - \frac{1}{2}(v+2)(2v^2+3v-1), \\ \beta_3 = h^1(\mathcal{F}(v-1)) = (2v+1)\frac{c_2}{2} - \frac{1}{6}v(v+1)(2v+1), \\ \beta_2 = \beta_3 + \alpha_1 + \beta_1 - 1 = (6v+5)\frac{c_2}{2} - \frac{1}{2}v(2v^2+5v+1) + 1. \end{cases}$$

On considère :

- la réunion générique $Y = Y(c_2)$ de $\frac{c_2}{2} + 1$ coniques disjointes de \mathcal{X} ,
- la suite exacte (cf. [9], p. 376) :

$$(*) : 0 \rightarrow \Phi \rightarrow \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(1) \rightarrow \mathcal{O}_Y(1) \rightarrow 0,$$

Φ étant le noyau du morphisme générique $\alpha : \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(1) \rightarrow \mathcal{O}_Y(1)$.

THÉORÈME 1.2. — *Pour tout entier n ,*

i) l'application naturelle $\rho(n, Y)$ de $H^0(\Omega(n) \oplus \Omega(n+3))$ vers $H^0(\Omega(n+3)|_Y)$, déduite de la suite exacte (), est de rang maximum (c-à-d. elle est injective ou surjective);*

ii) On a : $h^0(\Omega \otimes \mathcal{F}(n)) \cdot h^1(\Omega \otimes \mathcal{F}(n)) = 0$.

Nous allons voir, à la section 2, comment obtenir le théorème 1.1 à partir du théorème 1.2. Quant à la preuve de ce dernier, nous choisissons la méthode d'Horace initiée par A. Hirschowitz dans [11], puis par M. Idà dans [12]. Cette méthode n'est peut-être pas la meilleure possible, mais elle a su montrer jusqu'ici sa performance pour ce genre de problème.

L'idée de base de démonstration du théorème 1.2 est la même que celle dans [12] ou dans [15]. Pour $n \leq 1$, voir la section 7. Pour n grand, $\rho(n, Y)$ est surjective (cf. [6], p. 228).

Pour $n \geq 2$, on pose $\mathcal{X}^* = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(3))$, $\mathcal{X}^{**} = \mathbb{P}(\pi^*\Omega)$, $L_n = \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{**}}(1) \otimes \omega^*(\mathcal{O}_{\mathcal{X}^*}(1) \otimes \pi^*\mathcal{O}(n))$, $Y^* = \nu(Y)$, $Y^{**} = \omega^{-1}(Y^*)$, où $\pi : \mathcal{X}^* \rightarrow \mathcal{X}$ et $\omega : \mathcal{X}^{**} \rightarrow \mathcal{X}^*$ sont les projections canoniques, $\nu : Y \rightarrow \mathcal{X}^*$ la section associée au morphisme de $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(3)$ vers $\mathcal{O}_Y(3)$ déduite de la suite (*).

Le fibré L_n étant de rang 1, on peut définir un sous-schéma $T^{**}(n)$, ne dépendant plus de c_2 , contenu dans Y^{**} ou contenant Y^{**} , tel que $h^0(L_n) = h^0(L_n|_{T^{**}(n)})$. On considère l'application naturelle μ_n de $H^0(L_n)$ vers

$H^0(L_n|_{T^{**}(n)})$. On remarque que si μ_n est bijective, alors on a le théorème 1.2. Cette bijectivité est équivalente à l'égalité notée $H(n) : H^0(L_n \otimes \mathcal{I}_{T^{**}(n)}) = 0$, où $\mathcal{I}_{T^{**}(n)}$ est le faisceau d'idéaux de $T^{**}(n)$. Cette égalité se démontre par la méthode d'Horace. Pour cela, on construit un autre sous-schéma $T'^{**}(n)$ de \mathcal{X}^{**} tel que $h^0(L_n) = h^0(L_n|_{T'^{**}(n)})$, de façon que si l'application naturelle μ'_{n-2} de $H^0(L_{n-2})$ vers $H^0(L_{n-2}|_{T'^{**}(n-2)})$ est bijective, alors on ait $H(n)$.

La bijectivité de μ'_n est équivalente à l'énoncé $H'(n) : H^0(L_n \otimes \mathcal{I}_{T'^{**}(n)}) = 0$, qui se démontre aussi par la méthode d'Horace.

2. Preuve du théorème 1.1

On note R l'anneau $k[x, y, z, t]$ muni de la graduation usuelle, $V = H^0(\mathcal{O}(1))$ et $\bigwedge^j V$ la j -ème puissance extérieure de V , $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, et $[S]_n$ la partie homogène de degré n d'un R -module gradué S .

Nous allons rappeler, d'abord, comment obtenir la forme de la résolution de \mathcal{F} (voir [16] pour plus de détails). Elle se déduit du complexe de Koszul de k et du lemme de Castelnuovo-Mumford (voir [13], p. 99).

LEMME 2.1 ([16], LEMME 1.1). — Si $0 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ est la résolution libre et minimale d'un R -module gradué de type fini M , alors, pour tout entier n :

$[M_0]_n = a(n)R(-n)$, $[M_1]_n = \text{Ker} f_n / \text{Im} f_{n+1}$, $[M_2]_n = \text{Ker} f_{n+1} / \text{Im} f_{n+2}$, où $a(n)$ est le nombre minimal de générateurs de M de degré n , et $f_{n+j} : \bigwedge^{j+1} V \otimes [M]_{n-j-1} \longrightarrow \bigwedge^j V \otimes [M]_{n-j}$, $0 \leq j \leq 2$, sont des flèches naturelles.

En prenant :

$$M = \Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(\mathcal{F}(n)),$$

$$M_0 = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} a(p)R(-p), \quad M_1 = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} b(q)R(-q), \quad M_2 = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} c(r)R(-r),$$

on a les résultats suivants. Le premier se déduit du théorème de Riemann-Roch (voir [7], Lemme 8-1) :

LEMME 2.2. — Si χ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré, alors pour tout entier n :

$$\chi(\mathcal{F}(n)) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) - \frac{c_2}{2}(2n+3).$$

LEMME 2.3 ([9], PROPOSITION 1.4). — Soit \mathcal{E} un fibré de rang 2 sur \mathcal{X} ayant la cohomologie naturelle tel que $c_1(\mathcal{E}) \in \{-1, 0\}$, alors :

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{E}(n)) &= h^1(\mathcal{E}(n)) = 0 \text{ pour tout } n \leq -2, \\ h^2(\mathcal{E}(n)) &= h^3(\mathcal{E}(n)) = 0 \text{ pour tout } n \geq -1. \end{aligned}$$

Résolution des fibrés généraux stables de rang 2 sur \mathbb{P}^3 de classes de Chern

COROLLAIRE 2.4. — Si v est le plus petit entier tel que $h^0(\mathcal{F}(v)) > 0$, alors : $v = \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{1 + 12c_2}}{2} \right\rceil \geq 3$.

Preuve. — Par le fait que \mathcal{F} a la cohomologie naturelle et par les lemmes 2.2 et 2.3, on a :

$$\frac{1}{6}(v+1)(v+2)(2v+3) - \frac{c_2}{2}(2v+3) = \chi(\mathcal{F}(v)) = h^0(\mathcal{F}(v)) > 0$$

$$\text{et } \frac{1}{6}v(v+1)(2v+1) - \frac{c_2}{2}(2v+1) = \chi(\mathcal{F}(v-1)) = -h^1(\mathcal{F}(v-1)) \leq 0.$$

On conclut que :

$$v(v+1) \leq 3c_2 < (v+1)(v+2),$$

et par suite : $v = \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{1 + 12c_2}}{2} \right\rceil \geq 3$ car $c_2 \geq 6$. \square

COROLLAIRE 2.5. — Si $\lambda = h^0(\mathcal{F}(v+1)) - 4h^0(\mathcal{F}(v))$, alors

$$\lambda > 0 \text{ si et seulement si } c_2 > \frac{(v+2)(2v^2 + 3v - 1)}{6v + 7}.$$

LEMME 2.6 ([16], LEMME 2.1). —

i) L'application naturelle σ_n de $V \otimes H^0(\mathcal{F}(n))$ vers $H^0(\mathcal{F}(n+1))$ est surjective si $n \geq v+1$.

ii) Le R -module M est engendré par $H^0(\mathcal{F}(v)) \oplus H^0(\mathcal{F}(v+1))$.

En faisceautisant la résolution de $M = \Gamma_*(\mathcal{F})$ et en considérant la suite exacte d'Euler et les rangs, on obtient les deux corollaires suivants.

COROLLAIRE 2.7 ([16], COROLLAIRES 2.2 ET 2.4). — Si Ω , Ω^* sont les fibrés cotangent et tangent sur \mathcal{X} , on a :

$$a(v) = h^0(\mathcal{F}(v)), \quad a(v+1) = h^1(\Omega \otimes \mathcal{F}(v+1)), \quad a_p = 0 \text{ ailleurs,}$$

$$b(v+1) = h^0(\Omega \otimes \mathcal{F}(v+1)), \quad b(v+2) = h^1(\Omega^*(-4) \otimes \mathcal{F}(v+2)), \quad b_q = 0 \text{ ailleurs,}$$

$$c(v+2) = h^0(\Omega^*(-4) \otimes \mathcal{F}(v+2)), \quad c(v+3) = h^1(\mathcal{F}(v-1)), \quad c_r = 0 \text{ ailleurs.}$$

COROLLAIRE 2.8. — La résolution libre et minimale de \mathcal{F} est de la forme :

$$0 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

où :

$$\begin{aligned}
 E_0 &= \alpha_1 \mathcal{O}(-v) \oplus \beta_1 \mathcal{O}(-v-1), \quad \alpha_1 = h^0(\mathcal{F}(v)), \quad \beta_1 = h^1(\Omega \otimes \mathcal{F}(v+1)), \\
 E_1 &= \alpha_2 \mathcal{O}(-v-1) \oplus \beta_2 \mathcal{O}(-v-2), \quad \alpha_2 = h^0(\Omega \otimes \mathcal{F}(v+1)), \\
 \beta_2 &= h^1(\Omega^* \otimes \mathcal{F}(v-2)), \quad E_2 = \alpha_3 \mathcal{O}(-v-2) \oplus \beta_3 \mathcal{O}(-v-3), \\
 \alpha_3 &= h^0(\Omega^* \otimes \mathcal{F}(v-2)), \quad \beta_3 = h^1(\mathcal{F}(v-1)), \\
 \alpha_2 - \beta_1 &= 4h^0(\mathcal{F}(v)) - h^0(\mathcal{F}(v+1)), \quad \alpha_3 - \beta_2 = \alpha_2 - \beta_1 - \beta_3 - \alpha_1 + 1.
 \end{aligned}$$

Le résultat suivant permet d'obtenir le théorème 1.1.

PROPOSITION 2.9. —

i) On a : $\alpha_2 \beta_1 = 0$.

ii) Si $\beta_1 > 0$, alors $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Preuve. — La partie i) se déduit du théorème 1.2.

Pour ii), on a évidemment : $\alpha_2 = 0$, et puis $\alpha_3 = 0$, par minimalité de la résolution. \square

Remarques. —

— Les dix premières valeurs de c_2 (et les valeurs de v correspondantes), pour lesquelles on a le théorème 1.1, sont :

c_2	6	18	22	28	34	36	42	50	58	60
v	3	6	7	8	9	9	10	11	12	12

Cela représenterait, à peu près, un cas sur trois, si l'on en croit aux différents tests faits pour des valeurs de c_2 comprises entre deux entiers donnés.

— Si $\beta_1 = 0$ et si $\alpha_3 \beta_2 = 0$, alors la résolution de \mathcal{F} est aussi complètement déterminée. On pourrait, peut-être, utiliser la méthode d'Horace pour montrer si $\alpha_3 \beta_2 = 0$, mais vu la complexité de nos démarches dans cet article (on a dû, entre autres, avoir recours aux calculs formels avec le logiciel Maple, pour débloquer certaines situations...), cette tâche semblerait beaucoup plus fastidieuse. Il vaudrait mieux utiliser d'autres méthodes moins lourdes...

Le reste de l'article est consacré à la preuve du théorème 1.2.

3. La méthode d'Horace ([11])

3.1. Spécialisation d'un sous-schéma

On va définir deux notions (légèrement) différentes de spécialisation.

Pour définir la première, nous avons besoin de la

PROPOSITION 3.1 ([6], III – PROPOSITION 9.8). — *Soient S un schéma intègre et régulier de dimension 1, t_0 un point fermé de S et \mathcal{Y} une famille plate de sous-schémas de $\mathbb{P}_{S-\{t_0\}}^n$. Alors il existe un unique sous-schéma fermé $\tilde{\mathcal{Y}}$ de \mathbb{P}_S^n , plat sur S , tel que pour tout $t \neq t_0$, $\tilde{\mathcal{Y}}_t = \mathcal{Y}_t$.*

DÉFINITION 1. — *Avec les mêmes notations que ci-dessus, si de plus t_1 est le point générique de S , on dit que le sous-schéma $\tilde{\mathcal{Y}}_{t_0}$ est une spécialisation du sous-schéma générique \mathcal{Y}_{t_1} . On dit aussi que \mathcal{Y}_{t_1} est une généralisation de $\tilde{\mathcal{Y}}_{t_0}$ (voir la section 4.4, à titre d'exemples).*

Remarque. — Les sous-schémas « spécial » et générique n'ont pas toujours les mêmes propriétés (voir, par exemple, les lemmes 4.3 et 4.4).

Maintenant, on va donner la définition d'un autre type de spécialisation.

DÉFINITION 2. — *Soient B un schéma projectif et \mathcal{U} un ouvert non vide du schéma de Hilbert des sous-schémas fermés de B . On suppose que l'adhérence $\bar{\mathcal{U}}$ de \mathcal{U} est irréductible de point générique Y_g , alors tout élément $Y \in \mathcal{U}$ s'appelle une spécialisation de Y_g .*

Dans cet article, l'ouvert \mathcal{U} sera un ensemble de réunions disjointes de r_1 coniques, de r_2 droites et de r_3 points, pour $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{N}$ donnés (\mathcal{U} est un ouvert car le polynôme de Hilbert y est constant (voir [5], [10]).

Le sous-schéma Y_g sera donc la réunion générique de r_1 coniques, de r_2 droites et de r_3 points (voir, par exemple, la preuve du lemme 4.9).

L'adhérence $\bar{\mathcal{U}}$ peut être vue comme une famille de sous-schémas $\tilde{\mathcal{Y}} \subset B \times S$ paramétrée par un schéma intègre (donc irréductible) S , plate sur S . Le sous-schéma générique Y_g correspond ainsi à la fibre $\tilde{\mathcal{Y}}_{t_1}$ au-dessus du point générique t_1 de S .

Pour les deux types de spécialisation, on note $k(u)$ le corps résiduel d'un point u de S . Si E est un fibré sur B ($B = \mathbb{P}^n$ pour la définition 1), on note E_u le faisceau correspondant sur $B_{k(u)}$.

On note $h^i(E_u \otimes I_{\tilde{y}_u}) = \dim_{k(u)} H^i(B_{k(u)}, E_u \otimes I_{\tilde{y}_u})$. On a le

LEMME 3.2. — Si $i \in \mathbb{N}$ et si $h^i(E_{t_0} \otimes I_{\tilde{y}_{t_0}}) = 0$, alors $h^i(E_{t_1} \otimes I_{\tilde{y}_{t_1}}) = 0$.

Preuve. — Par le théorème de semi-continuité ([6], III - Théorème 12.8), l'ensemble $U = \{u \in S \mid \dim_{k(u)} H^i(B_{k(u)}, E_u \otimes I_{\tilde{y}_u}) = 0\}$ est un ouvert de S .

Si $t_0 \in U$, alors, comme $t_0 \in S = \overline{\{t_1\}}$, on a $t_1 \in U$. \square

Ce lemme peut être écrit sous la forme suivante :

COROLLAIRE 3.3. — Soient E un fibré sur un schéma quasi-projectif T , Z_s une spécialisation d'un sous-schéma Z de T et $i \in \mathbb{N}$. Si $h^i(E \otimes I_{Z_s}) = 0$, alors $h^i(E \otimes I_Z) = 0$.

3.2. Trace et Schéma résiduel ([11], 4.1)

Soient Δ un diviseur de Cartier sur un schéma quasi-projectif T , et Z un sous-schéma de T .

– La *trace* de Z sur Δ n'est autre que l'intersection schématique $Z'' = Z \cap \Delta$.

– Le *schéma résiduel* de Z sur Δ est le schéma Z' dont le faisceau d'idéaux est le noyau du morphisme : $I_Z(\Delta) \rightarrow I_{Z'',\Delta}(\Delta)$, où $I_{Z'',\Delta}$ est le faisceau d'idéaux de Z'' en tant que sous-schéma de Δ .

Nous pouvons voir cela localement : si Δ a comme idéal $I_\Delta = (f)$ et Z comme idéal $I_Z = \mathcal{A}$, alors $I_{Z \cap \Delta} = (f) + \mathcal{A}$, $I_{Z'',\Delta} = ((f) + \mathcal{A})/(f) \cong \mathcal{A}/(\mathcal{A} \cap (f))$, alors que le schéma résiduel Z' a comme idéal le transporteur de (f) dans $\mathcal{A} \cap (f)$, noté $[\mathcal{A} \cap (f) : (f)]$.

On a le résultat suivant :

LEMME 3.4 ([11], 4.4). —

– La *trace d'une réunion finie de sous-schémas est égale à la réunion des traces*.

– La *schéma résiduel d'une réunion finie de sous-schémas est égale à la réunion des schémas résiduels*.

Preuve. — Il suffit de traiter le cas d'une réunion Y de deux sous-schémas Y' et Y'' .

Résolution des fibrés généraux stables de rang 2 sur \mathbb{P}^3 de classes de Chern

– Pour la trace, c'est évident.

– Si, localement, Y' et Y'' sont d'idéaux respectifs \mathcal{A}' et \mathcal{A}'' , alors Y est d'idéal $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$. Par suite, les résiduels de Y' , Y'' , Y par rapport à Δ sont d'idéaux respectifs :

$$[\mathcal{A}' \cap (f) : (f)], [\mathcal{A}'' \cap (f) : (f)], [\mathcal{A} \cap (f) : (f)] = [\mathcal{A}' \cap (f) : (f)] \cap [\mathcal{A}'' \cap (f) : (f)].$$

□

LEMME 3.5 (SUITE EXACTE RÉSIDUELLE). — *Si $Z'' = Z \cap \Delta$ est la trace de Z sur Δ , et $Z' = \text{res}_\Delta Z$ son schéma résiduel, alors on a la suite exacte suivante, appelée suite exacte résiduelle :*

$$0 \rightarrow I_{Z'}(-\Delta) \rightarrow I_Z \rightarrow I_{Z'', \Delta} \rightarrow 0.$$

3.3. La méthode d'Horace

Si E est un fibré sur un schéma quasi-projectif T , Z un sous-schéma de T et ρ l'application restriction de $H^0(E)$ vers $H^0(E|_Z)$, on dit que :

- Z est numériquement E -rangé si $h^0(E) = h^0(E|_Z)$,
- Z est E -rangé si ρ est de rang maximum.

Soient Δ un diviseur de Cartier sur T et Z_s une spécialisation de Z .

On note $Z'' = Z_s \cap \Delta$ la trace de Z_s sur Δ , et $Z' = \text{res}_\Delta Z_s$ son schéma résiduel.

En utilisant la suite exacte résiduelle : $0 \rightarrow I_{Z'}(-\Delta) \rightarrow I_{Z_s} \rightarrow I_{Z'', \Delta} \rightarrow 0$, on a les deux lemmes suivants.

LEMME 3.6. — *On suppose que Z_s est numériquement E -rangé.*

Alors, Z' est numériquement $E(-\Delta)$ -rangé si et seulement si Z'' est numériquement $E|_\Delta$ -rangé.

LEMME 3.7 (LEMME D'HORACE). — *Soit i un entier naturel. Si*

$$\begin{cases} h^i(E(-\Delta) \otimes I_{Z'}) = 0 \text{ (condition appelée } \underline{\text{d\`e}g\text{ue}}), \\ h^i(E \otimes I_{Z'', \Delta}) = 0 \text{ (d\`e} \underline{\text{t\`e}}), \end{cases}$$

alors $h^i(E \otimes I_{Z_s}) = 0$, et donc $h^i(E \otimes I_Z) = 0$.

DÉFINITIONS. —

– Un sous-schéma Z_s est une **spécialisée** (E, Δ) – **ajustée** d'un sous-schéma Z s'il vérifie le lemme 3.6.

– On dit qu'on exploite un diviseur Δ si on utilise la méthode d'Horace avec Δ .

Remarque. — Les dègue et dîme se démontrent aussi en appliquant cette même méthode et ainsi de suite ... On arrivera, à la fin, à des énoncés simples (car à chaque dègue, le fibré diminue de degré; et à chaque dîme, le sous-schéma diminue de dimension).

4. Préliminaires

4.1. Notations

Dans tout l'article, Q désigne une surface quadrique lisse de \mathcal{X} , Ω le fibré cotangent sur \mathcal{X} , $\mathcal{X}^* = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(3))$, $\pi : \mathcal{X}^* \rightarrow \mathcal{X}$ la projection canonique, $\bar{\Omega}$ la restriction sur Q de Ω .

On note p_1, p_2 les deux projections canoniques de Q vers \mathbb{P}^1 , et pour deux entiers a et b :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_Q(a, b) &= p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b), \quad \mathcal{O}_Q(a) = \mathcal{O}_Q(a, a), \\ Q^* &= \pi^{-1}(Q) = \mathbb{P}(\mathcal{O}_Q \oplus \mathcal{O}_Q(3)), \quad D = \sigma(Q), \quad \text{où } \sigma : Q \rightarrow Q^* \text{ est la section} \\ &\text{associée à un morphisme surjectif (fixé) : } \mathcal{O}_Q \oplus \mathcal{O}_Q(3) \rightarrow \mathcal{O}_Q(3), \\ Q^{**} &= \omega^{-1}(Q^*), \quad D^{**} = \omega^{-1}(D). \end{aligned}$$

De même, pour un sous-schéma C de \mathcal{X} , on pose

$$C^* = \pi^{-1}(C), \quad C^{**} = \omega^{-1}(C^*).$$

Soient σ_D l'isomorphisme de Q vers D , π_D son inverse, ω_D la restriction de ω sur D^{**} , i (resp. j) l'injection de D^{**} dans Q^{**} (resp. de D dans Q^*), alors on a : $\omega \circ i = j \circ \omega_D$ et $j \circ \sigma_D = \sigma$.

$$\begin{array}{ccccc} D^{**} & \hookrightarrow & Q^{**} & \hookrightarrow & \mathcal{X}^{**} & & D^{**} & \xhookrightarrow{i} & Q^{**} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \omega & & \omega_D \downarrow & & \downarrow \omega \\ D & \hookrightarrow & Q^* & \hookrightarrow & \mathcal{X}^* & & D & \xhookrightarrow{j} & Q^* \\ & & \downarrow & & \downarrow \pi & & \sigma_D \uparrow \downarrow \pi_D & & \uparrow \sigma \\ & & Q & \hookrightarrow & \mathcal{X} & & Q & = & Q \end{array}$$

On note, pour deux entiers a et b :

$$\begin{aligned}\overline{\Omega}(a, b) &= \Omega \otimes \mathcal{O}_Q(a, b), \overline{\Omega}(a) = \overline{\Omega}(a, a), \\ G_{a,b} &= \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi_D^* \overline{\Omega})}(1) \otimes \omega_D^* \circ \pi_D^* \mathcal{O}_Q(a, b), G_a = G_{a,a}, \\ K_{a,b} &= \mathcal{O}_{Q^{**}}(1) \otimes \omega^*(\mathcal{O}_{Q^*}(1) \otimes \pi^* \mathcal{O}_Q(a, b)), K_a = K_{a,a}.\end{aligned}$$

$G_{a,b}$ est un fibré sur $\mathbb{P}(\pi_D^* \overline{\Omega})$ et $K_{a,b}$, un fibré sur Q^{**} .

Enfin, on désigne par $\text{iquo}(a, b)$ (resp. $\text{irem}(a, b)$) le quotient (resp. le reste) de la division de a par b .

Pour prouver les énoncés $H(n)$ et $H'(n)$ (voir Introduction), on exploitera le diviseur Q^{**} . Les dîmes obtenues se démontreront en exploitant le diviseur D^{**} . Ainsi, on aura besoin des résultats sur D^{**} (voir la section 4.5).

4.2. Rappels

– On a (voir [14], p. 8 et [12], 3-1) :

$$h^0(\Omega(n)) = \frac{(n^2 - 1)(n + 2)}{2} \quad \text{si } n \geq 1, \quad h^0(\overline{\Omega}(a, b)) = 3ab - a - b - 1$$

si $a, b \geq 1$.

– Comme π_D est un isomorphisme, on a :

$$h^0(G_{a,b}) = h^0(\omega_* G_{a,b}) = h^0(\pi_D^*(\overline{\Omega}(a, b))) = h^0(\overline{\Omega}(a, b)).$$

– Si C est une courbe rationnelle de type $(1, n)$ sur Q , $n \geq 1$, on a (voir [4]) :

$$\begin{aligned}\omega_*(G_{a,b|C^{**}}) &\cong \pi_D^*(\overline{\Omega}(a, b)|_C) \cong \overline{\Omega}(a, b)|_C \\ &\cong 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}((a-1)n + b - 2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}((a-2)n + b).\end{aligned}$$

En particulier,

* si C est de type $(1, 1)$ (conique), on a : $h^0(\overline{\Omega}(a)|_C) = 6a - 5$, $a \geq 1$.

* si C est de type $(1, 2)$, on a : $h^0(\overline{\Omega}(a, b)|_C) = 3(2a + b - 3)$.

* si C est de type $(2, 1)$, on a : $h^0(\overline{\Omega}(a, b)|_C) = 3(2b + a - 3)$.

– Si C est une courbe non plane, de degré 3, de \mathcal{X} , on a (voir [3]) : $\Omega|_C \cong 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-4)$.

– Si H est un plan de \mathcal{X} , on a : $\Omega|_H \cong \Omega_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$.

– Si D est une droite de \mathcal{X} , on a : $\Omega|_D \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$.

– Si D est une droite de type $(1, 0)$ (resp. de type $(0, 1)$) sur Q , on a :
 $\overline{\Omega}(a, b)|_D \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b-2) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b-1)$, $\overline{\Omega}(a, b)|_D \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a-2) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a-1)$.

– Dans la suite, une courbe de type (a, b) sur Q sera toujours considérée comme une réunion de a droites de type $(1, 0)$ et de b droites de type $(0, 1)$.

4.3. Définitions (voir [1] et [12])

– Une conique (resp. droite) de \mathcal{X}^* est un sous-schéma fermé l^* de \mathcal{X}^* tel que $l^* = \sigma_0(r)$, où r est une conique (resp. droite) de \mathcal{X} , $\sigma_0 : r \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{O}_r \oplus \mathcal{O}_r(3))$ est la section associée à un morphisme surjectif de $\mathcal{O}_r \oplus \mathcal{O}_r(3)$ vers $\mathcal{O}_r(3)$, de noyau \mathcal{O}_r .

– Un s-point est un point de \mathcal{X}^{**} . Un d-point est formé de deux s-points d'une même fibre $\omega^{-1}(P)$, $P \in \mathcal{X}^*$. Un t-point (resp. t-courbe) est formé de trois s-points, non alignés, d'une même fibre $\omega^{-1}(P)$ (resp. l'image réciproque, par ω , d'une courbe de \mathcal{X}^*).

– Le premier voisinage infinitésimal, dans \mathcal{X} , d'un point $P \in \mathcal{X}$, noté $\xi(P)$, est le sous-schéma dont le faisceau d'idéaux est \mathcal{I}_P^2 .

– Soit $p \in \mathbb{N}$, une conique-grille de type p (resp. de type $(1, p)$) dans Q est l'ensemble des points d'intersection de p coniques de Q (resp. de p coniques avec une conique fixée).

– Une grille de type (p, q) est l'ensemble des points d'intersection dans Q , de p droites de type $(1, 0)$ et de q droites de type $(0, 1)$.

– Un point-triple (resp. point-double) est un sous-schéma de \mathcal{X} , supporté par un point, dont l'idéal est défini localement dans $k[x_1, x_2]$ par $(x_1, x_2)^2$ (resp. (x_1^2, x_2)).

– Un t-premier voisinage infinitésimal (resp. une t-grille) est l'image réciproque, par π , d'un premier voisinage infinitésimal (resp. d'une grille).

– Dans Q^* , des t-points, d-points, s-points sont dits *alignés* (resp. *cocycliques*) si leurs projections sur Q appartiennent à une même droite (resp. conique).

Le sous-schéma Q^* étant de dimension 3, il peut contenir deux ou plusieurs coniques disjointes.

4.4. Exemples de spécialisation, de trace et de schéma résiduel

Quelques uns des résultats suivants nous seront utiles, notamment dans les sections 5 et 6.

LEMME 4.1. —

i) Si ℓ est une droite et H un plan non contenant ℓ , alors $\ell \cap H$ est un point et $\text{res}_H \ell = \ell$.

ii) La partie i) reste vraie si on remplace la droite H par la quadrique Q .

Preuve. —

i) On peut supposer que la droite ℓ (resp. le plan H) a, localement, comme idéal $I_\ell = (x, y)$ (resp. $I_H = (z)$). Pour $\ell \cap H$, c'est évident, alors que le schéma résiduel $\text{res}_H \ell$ a comme idéal : $[(x, y) \cap (z) : (z)] = (x, y)$.

ii) On suppose Q d'idéal : $I_Q = (xy - zw)$ et on procède de la même façon.

LEMME 4.2. —

i) Si ℓ est une droite et P un point de ℓ , alors $\ell \cap \xi(P)$ est un point-double supporté par P et $\text{res}_\ell(\xi(P))$ est le point (simple) P .

ii) La partie i) reste vraie si on remplace la droite ℓ par une courbe C de type (a, b) quelconque sur Q .

Preuve. —

i) On peut supposer que la droite ℓ (resp. le point P) a, localement, comme idéal $I_\ell = (x)$ (resp. $I_P = (x, y)$).

Dans ce cas, $\xi(P)$ a comme idéal $I_{\xi(P)} = (x^2, xy, y^2)$.

Par suite, $\ell \cap \xi(P)$ a comme idéal $I_\ell + I_{\xi(P)} = (x, y^2)$: c'est un point-double supporté par P .

Le schéma résiduel $\text{res}_\ell(\xi(P))$ a comme idéal :

$$[(x^2, xy, y^2) \cap (x) : (x)] = [(x^2, xy) : (x)] = (x, y).$$

C'est le point simple P .

ii) Une courbe de type (a, b) sur Q peut être considérée comme la réunion de a droites de type $(1, 0)$ et de b droites de type $(0, 1)$. Le point P appartient donc à l'une de ces droites. Par le lemme 3.4, on se ramène au cas i).

LEMME 4.3. —

i) Si ℓ est une droite d'un plan H , P un point de ℓ , et si $\eta(P)$ est un point-double supporté par P , alors $\ell \cup \eta(P)$ est une spécialisation de la réunion disjointe d'une droite et d'un point de \mathcal{X} .

ii) De plus, $H \cap (\ell \cup \eta(P)) = \ell$ et le schéma résiduel $\text{res}_H(\ell \cup \eta(P))$ n'est autre que le point simple $\{P\}$.

Preuve. —

i) On peut supposer que le plan H est d'idéal $I_H = (z)$, et que la droite ℓ (resp. le point P) a, localement, comme idéal $I_\ell = (x, z)$ (resp. $I_P = (x, y, z)$).

On considère le point $P_t \notin \ell$ d'idéal $I_{P_t} = (x, y, z - t)$, avec $t \in k \setminus \{0\}$.

Dans ce cas, la réunion disjointe $\ell \cup \{P_t\}$ a comme idéal : $(x, yz, z(z-t))$. Quand t tend vers 0, on obtient un schéma dont l'idéal est : $(x, yz, z^2) = (x, z) \cap (x, y, z^2)$. C'est la réunion de ℓ avec un point-double supporté par le point P .

ii) $H \cap (\ell \cup \xi(P)) = \ell$ car son idéal est : $(z) + (x, yz, z(z-t)) = (x, z)$. Le schéma résiduel $\text{res}_H(\ell \cup \xi(P))$ a comme idéal :

$$[(x, yz, z^2) \cap (z) : (z)] = (x, y, z).$$

C'est le point simple P .

LEMME 4.4 (VOIR [8], 2.1.1). —

i) Si l et l' sont deux droites concourantes en un point P , alors $\ell \cup l' \cup \xi(P)$ est une spécialisation de deux droites disjointes de \mathcal{X} .

ii) De plus, si H est un plan transverse à ℓ et à l' , alors $H \cap (\ell \cup l' \cup \xi(P)) = \xi(P)$, et le schéma résiduel $\text{res}_H(\ell \cup l' \cup \xi(P))$ n'est autre que la conique dégénérée $\ell \cup l'$.

iii) La partie *ii)* reste vraie si on remplace le plan H par la quadrique Q .

On obtient facilement aussi le

LEMME 4.5. —

i) Si l et l' sont deux droites d'un plan H , concourantes en un point P , alors $H \cap (\ell \cup l' \cup \xi(P)) = \ell \cup l'$, et le schéma résiduel $\text{res}_H(\ell \cup l' \cup \xi(P))$ n'est autre que le point simple $\{P\}$.

ii) La partie i) reste vraie si on remplace le plan H par la quadrique Q .

Preuve. —

i) On peut supposer que :

$$I_H = (z), \quad I_\ell = (x, z), \quad I_{\ell'} = (y, z), \quad I_{\xi(P)} = I_P^2 = (x, y, z)^2.$$

La réunion $\ell \cup \ell' \cup \xi(P)$ a alors comme idéal : (xy, xz, yz, z^2) . Par suite, $H \cap (\ell \cup \ell' \cup \xi(P))$ a comme idéal : (xy, z) , qui est celui de $\ell \cup \ell'$.

Le schéma résiduel $\text{res}_H(\ell \cup \ell' \cup \xi(P))$ a comme idéal :

$$[(xy, xz, yz, z^2) \cap (z) : (z)] = [(xz, yz, z^2) : (z)] = (x, y, z).$$

C'est le point simple P .

4.5. Des résultats sur Q^* et D^{**}

LEMME 4.6. — *Si ℓ^* est une droite (resp. conique) de \mathcal{X}^* contenue dans Q^* et non contenue dans D , alors $\ell^* \cap D$ est formé de 3 points (resp. 6 points).*

Preuve. — On a : $\dim(\ell^* \cap D) < \dim \ell^* = 1$, donc $\dim(\ell^* \cap D) = 0$.

Posons $\ell^* = \sigma_0(r)$ où r est une droite (resp. conique) de \mathcal{X} . Considérons la section σ telle que $D = \sigma(Q)$. On a : $\sigma_0(r) \cap \sigma(r) = \ell^* \cap D$.

— Si r est une droite, alors les deux sections σ_0 et $\sigma|_r$, proviennent des deux suites exactes :

$$(\star) \begin{cases} \mathcal{O}_r \oplus \mathcal{O}_r(3) \xrightarrow{(p_0, 1)} \mathcal{O}_r(3) \longrightarrow 0, \\ \mathcal{O}_r \oplus \mathcal{O}_r(3) \xrightarrow{(p, 1)} \mathcal{O}_r(3) \longrightarrow 0, \end{cases}$$

où p_0 et p sont des formes homogènes de degré 3, distinctes car $\ell^* \not\subset D$. Ainsi, $p_0 - p$ reste de degré 3 et ses zéros correspondent exactement aux points de $\sigma_0(r) \cap \sigma(r)$.

— Si r est une conique, alors les suites exactes (\star) deviennent :

$$\begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(6) \xrightarrow{(p_0, 1)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(6) \longrightarrow 0, \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(6) \xrightarrow{(p, 1)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(6) \longrightarrow 0, \end{cases}$$

où, cette fois-ci, $p_0 - p$ est homogène de degré 6. On conclut comme dans le premier cas.

COROLLAIRE 4.7. — Si $\ell^* \cup \ell'^*$ est une conique dégénérée de Q^* telle que $\ell^* \not\subset D$ et $\ell'^* \subset D$, alors $(\ell^* \cup \ell'^*) \cap D$ est la réunion de ℓ'^* avec deux points, et le schéma résiduel $\text{res}_D(\ell^* \cup \ell'^*)$ est la droite ℓ^* .

LEMME 4.8 ([12], SECTION 3-2-2). — Dans chacun des cas suivants, le sous-schéma Z est (numériquement) rangé.

a) $E = \pi_D^*(\overline{\Omega}(a, b)|_C)$, où C est une conique de D et Z la réunion générique de $a + b - 2$ t -points et d'un s -point;

b) $E = G_{1,1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi_D^*\overline{\Omega})}(1) \otimes \omega_D^* \circ \pi_D^* \mathcal{O}_Q(1, 1)$, $Z = \emptyset$;

c) $E = G_{2,2} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\pi_D^*\overline{\Omega})}(1) \otimes \omega_D^* \circ \pi_D^* \mathcal{O}_Q(2, 2)$, Z : réunion générique de 2 t -points et d'un s -point;

d) $E = G_{3,3}$, Z : réunion générique de 4 t -points cocycliques, de 2 t -points et de 2 s -points (c'est-à-dire : 1 d -point);

e) $E = G_{4,4}$, Z : réunion générique de 13 t -points dont 12 sont 4 à 4 cocycliques.

LEMME 4.9. — Soient a, b, u des entiers naturels vérifiant :

$(1 \leq a \leq b < 2a)$ ou $(1 \leq b \leq a < 2b)$, $a+b \equiv 2 \pmod{3}$, $3u = 3ab - a - b - 1$,

alors la réunion générique $F(a, b)$ de u t -points dans D^{**} , est $G_{a,b}$ -rangée.

Preuve. — On peut supposer que $a \leq b$, quitte à échanger a et b .

Le sous-schéma $F(a, b)$ est, par construction, numériquement $G_{a,b}$ -rangé, car :

$$h^0(G_{a,b}) = h^0(\overline{\Omega}(a, b)) = 3ab - a - b - 1 = 3u = h^0(G_{a,b}|_{F(a,b)}).$$

On pose $\alpha = 2a - b \geq 1$ si bien que $a = \alpha + b - a$, $b = \alpha + 2(b - a)$.

On va montrer par récurrence sur h , $0 \leq h \leq b - a$, que la réunion générique $F_{u(h)}$, numériquement $G_{\alpha+h, \alpha+2h}$ -rangée, de $u(h)$ t -points dans D^{**} , est $G_{\alpha+h, \alpha+2h}$ -rangée. On note $R(h)$ cet énoncé. Notre lemme correspond à $R(b - a)$.

Le cas $h = 0$ est un cas particulier du lemme 3-3-1 dans [12].

Supposons que $R(h - 1)$ soit vrai. On définit le sous-schéma $F'_{u(h)}$ de D^{**} comme la réunion disjointe de $F_{u(h-1)}$ avec $3\alpha + 4h - 3$ t -points d'une t -courbe C^{**} , où C est de type $(1, 2)$ sur Q .

Résolution des fibrés généraux stables de rang 2 sur \mathbb{P}^3 de classes de Chern

On voit que : $u(h) = u(h-1) + 3\alpha + 4h - 3$, et que $F'_{u(h)}$ est une spécialisation de $F_{u(h)}$. Il suffit alors de montrer l'énoncé pour $F'_{u(h)}$. On exploite C^{**} .

– La dîme : $H^0(G_{\alpha+h, \alpha+2h|C^{**}} \otimes I_{F'_{u(h)} \cap C^{**}}) = 0$, est vraie car $F'_{u(h)} \cap C^{**}$ est formé de $3\alpha + 4h - 3$ t-points et

$$\omega_*(G_{\alpha+h, \alpha+2h|C^{**}}) \cong \pi_D^*(\overline{\Omega}(\alpha+h, \alpha+2h)|_C) \cong 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3\alpha+4h-4).$$

– La dègue est aussi vraie par hypothèse de récurrence, car le schéma résiduel est $F_{u(h-1)}$.

Le lemme suivant est légèrement différent du lemme 3-3-4 dans [12], mais l'idée de preuve reste la même si bien qu'on ne l'écrit pas ici.

LEMME 4.10. — Soient $\alpha, \beta, u, g, h, p, q$ des entiers naturels vérifiant :

$$1 \leq \alpha \leq \beta < 2\alpha, p \leq \alpha-1, g \leq pq, h = \text{iquo}(q+1, 2), \frac{q}{2} \leq h \leq \frac{1}{3}(2\beta - \alpha).$$

On pose : $a = \alpha - h \geq 1, b = \beta - 2h \geq 1$.

Soit $Z(a, b)$ un sous-schéma $G_{a,b}$ -rangé de D^{**} , formé de \tilde{u} t-points.

Alors, la réunion générique dans D^{**} , numériquement $G_{\alpha, \beta}$ -rangée, de $Z(a, b)$ avec w t-points et g t-points d'une t-grille de type (p, q) , est $G_{\alpha, \beta}$ -rangée.

PROPOSITION 4.11. — Soient $\alpha, \beta, u, g, h, p, q$ des entiers naturels vérifiant :

$$1 \leq \alpha \leq \beta < 2\alpha, p \leq \alpha-1, g \leq pq, h = \text{iquo}(q+1, 2), \frac{q}{2} \leq h \leq \frac{1}{3}(2\beta - \alpha).$$

Soit $F(\alpha, \beta)$ la réunion générique dans D^{**} de u t-points, de g t-points d'une t-grille de type (p, q) .

Alors, si $F(\alpha, \beta)$ est numériquement $G_{\alpha, \beta}$ -rangée, elle est $G_{\alpha, \beta}$ -rangée.

Preuve. — On pose : $a = \alpha - h \geq 1, b = \beta - 2h \geq 1$.

On remarque d'abord que la condition de rangement numérique pour $F(\alpha, \beta)$:

$$3\alpha\beta - \alpha - \beta - 1 = 3(u + g),$$

implique que :

$$a + b \equiv \alpha + \beta \equiv 2 \pmod{3}.$$

Par le lemme 4.9, la réunion générique $Z(a, b)$ de $\tilde{u} = \frac{3ab - a - b - 1}{3}$ t-points de D^{**} est $G_{a,b}$ -rangée.

On considère la réunion disjointe $\tilde{F}(\alpha, \beta)$ de $Z(a, b)$ avec g t-points d'une t-grille de type (p, q) et de $w = u - \tilde{u}$ t-points. C'est une spécialisation de $F(\alpha, \beta)$. De plus, par le lemme 4.10, $\tilde{F}(\alpha, \beta)$ est $G_{\alpha,\beta}$ -rangée. D'où la proposition.

LEMME 4.12. — Soient $a, b, v, \tau, \delta, \epsilon$ des entiers naturels tels que :

$$1 \leq a \leq b < 2a, \delta + \epsilon \leq 1, \tau \leq a + b - 2.$$

Soit $F(a, b)$ la réunion générique dans D^{**} de :

– v t-points,

– τ t-points, δ d-point et ϵ s-point cocycliques.

Alors, si $F(a, b)$ est numériquement $G_{a,b}$ -rangée, elle est $G_{a,b}$ -rangée.

Preuve. — La condition du rangement numérique pour $F(a, b)$ est :

$$3ab - a - b - 1 = 3v + 3\tau + 2\delta + \epsilon.$$

Soit r^* la conique qui contient les supports de ces points cocycliques.

On procède comme dans la preuve du lemme 4.9.

On pose : $\alpha = 2a - b \geq 1$, $a = \alpha + b - a$, et $b = \alpha + 2(b - a)$.

Pour $0 \leq h \leq b - a$, $F_{v(h)}$ désigne la réunion générique, numériquement $G_{\alpha+h, \alpha+2h}$ -rangée, de $v(h)$ t-points, de $\tau(h)$ t-points, $\delta(h)$ d-points et $\epsilon(h)$ s-points cocycliques.

On montre par récurrence sur h , l'énoncé $R(h) : F_{v(h)}$ est $G_{\alpha+h, \alpha+2h}$ -rangée.

Le cas $h = 0$ est un cas particulier du lemme 3-3-1 dans [12].

Supposons que $R(h - 1)$ soit vrai. On définit le sous-schéma $F'_{v(h)}$ de D^{**} comme la réunion disjointe de $F_{v(h-1)}$ avec $3\alpha + 4h - 3$ t-points d'une t-courbe C^{**} , avec C de type $(1, 2)$ sur Q , dont 3 sont sur la t-conique r^{**} .

On a :

$$\begin{aligned} \tau(h - 1) &= \max(\tau(h) - 3, 0), \quad \delta(h - 1) = \delta(h), \quad \epsilon(h - 1) = \epsilon(h), \\ v(h - 1) &= v(h) + \tau(h) - \tau(h - 1) - (3\alpha + 4h - 3). \end{aligned}$$

On constate que $F'_{v(h)}$ est une spécialisation de $F_{v(h)}$. Il suffit alors de montrer l'énoncé pour $F'_{v(h)}$. On exploite C^{**} . La dîme est vraie comme dans la preuve du lemme 4.9 et la dègue aussi, par hypothèse de récurrence, le schéma résiduel étant $F_{v(h-1)}$.

PROPOSITION 4.13. — *Soient $a, b, v, m, \tau, \delta, \epsilon$ des entiers naturels tels que :*

$1 \leq a \leq b < 2a$, $\delta + \epsilon \leq 1$, $\tau \leq a + b - 2$, $2m \leq 2a + b - 6$.
Soit $F(a, b)$ la réunion générique dans D^{**} de :

– $v + 2m$ t -points,

– τ t -points, δ d -point et ϵ s -point cocycliques.

Alors, si $F(a, b)$ est numériquement $G_{a,b}$ -rangée, elle est $G_{a,b}$ -rangée.

Preuve. — Soit r^* la conique qui contient les supports de ces points cocycliques.

Comme $1 \leq a-1 \leq b-2 < 2(a-1)$, le lemme 4.12 nous permet d'affirmer l'existence d'un sous-schéma $F(a-1, b-2)$ qui est $G_{a-1, b-2}$ -rangé, avec :

$$\begin{aligned} \tau(a-1, b-2) &= \max(\tau(a, b) - 3, 0), \\ \delta(a-1, b-2) &= \delta(a, b), \quad \epsilon(a-1, b-2) = \epsilon(a, b), \\ v(a-1, b-2) &= v(a, b) + \tau(a, b) - \tau(a-1, b-2) - (2a + b - 3 - 2m). \end{aligned}$$

Soit C une courbe de type $(1, 2)$ sur Q telle que $F(a-1, b-2) \cap C^{**} = \emptyset$.

On considère la réunion disjointe $F'(a, b)$ de $F(a-1, b-2)$ avec $2a+b-6$ t -points de C^{**} (dont $2m$ appartiennent deux à deux à m t -droites de type $(1, 0)$ et ne forment pas 4 à 4, de t -grilles de type $(2, 2)$), et de 3 t -points de $C^{**} \cap r^{**}$.

Par construction, $F'(a, b)$ est une spécialisation de $F(a, b)$. Il suffit alors de montrer l'énoncé pour $F'(a, b)$. On exploite C^{**} .

– La dîme est vraie car $F'(a, b) \cap C^{**}$ est formé de $2a + b - 3$ t -points et

$$\omega_*(G_{a,b|C^{**}}) \cong \pi_D^*(\bar{\Omega}(a, b)|_C) \cong 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2a + b - 4).$$

– La dègue est vraie par hypothèse de récurrence, car le schéma résiduel est $F'(a, b)$.

5. Preuve de $H(n)$, $n \in \{22, 27, 29\}$ ou $n \geq 31$

5.1. Le sous-schéma $T^{**}(n)$

On définit $T^{**}(n)$ comme la réunion générique de $\lambda(n)$ t-coniques disjointes, de $\tau(n)$ t-points, de $\delta(n)$ d-points et de $\epsilon(n)$ s-point sur une t-conique.

Pour que $T^{**}(n)$ soit numériquement L_n -rangé, on doit avoir $h^0(L_n) = h^0(L_n|_{T^{**}(n)})$.

On remarque que si S^{**} est un s-point (resp. d-point, t-point, t-conique), alors on a : $h^0(L_n|_{S^{**}}) = 1$ (resp. 2, 3, $6n + 13$).

$$\text{Ainsi, on a : } h^0(L_n|_{T^{**}(n)}) = \lambda(n)(6n + 13) + 3\tau(n) + 2\delta(n) + \epsilon(n).$$

On prend donc :

$$\lambda(n) = \text{iquo}(h^0(L_n), 6n + 13), \tau(n) = \text{iquo}(s(n), 3), 2\delta(n) + \epsilon(n) = \text{irem}(s(n), 3), \text{où } s(n) = \text{irem}(h^0(L_n), 6n + 13).$$

5.2. Spécialisation de $T^{**}(n)$

On va montrer $H(n) : H^0(L_n \otimes I_{T^{**}(n)}) = 0$ par la méthode d'Horace. On va spécialiser $T^{**}(n)$ en un sous-schéma $T_s(n)$ et montrer que $H^0(L_n \otimes I_{T_s(n)}) = 0$.

On considère les entiers $l'(n)$ et $e'(n)$ tels que :

$$l'(n) = \begin{cases} \lambda(n) - 3 + 2\delta(n) + \epsilon(n) & \text{si } 2\delta(n) + \epsilon(n) > 0, \\ \lambda(n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$3e'(n) = h^0(L_{n-2}) - l'(n-2)(6n+1).$$

On définit $T_s(n)$ comme la réunion :

- de $l'(n-2)$ t-coniques générales;
- de $\tau(n)$ t-points, $\delta(n)$ d-point et $\epsilon(n)$ s-point sur une t-conique de Q^{**} ;
- de $l_1(n) = \lambda(n) - l'(n-2)$ t-coniques de Q^{**} dont :

* $t_1(n)$ sont disjointes,

* $l_1(n) - t_1(n)$ se rencontrent en $e'(n)$ t-points vérifiant les conditions ci-après qu'on appellera *conditions (C)* ;

Résolution des fibrés généraux stables de rang 2 sur \mathbb{P}^3 de classes de Chern

– des t-premiers voisinages infinitésimaux de ces $e'(n)$ t-points.

Les conditions (C)

Pour un entier $m \geq 6$, on note $\psi(m)$ le plus grand entier positif tel que $\psi(m)(\psi(m) - 1) \leq m$. Si $m \leq 5$, on pose : $\psi(m) = 0$.

(En fait, $\psi(m)$ est la partie entière de $\frac{1 + \sqrt{1 + 4m}}{2}$ si $m \geq 6$).

Pour $e'(n)$ donné, on pose :

$$e''(n) = \psi(e'(n)), \quad x(n) = e'(n) - e''(n)(e''(n) - 1), \quad e^*(n) = \psi(x(n)).$$

$$e^{**}(n) = \text{iquo}(x(n) - e^*(n)(e^*(n) - 1), 2), \quad \text{rest}(n) = \text{irem}(x(n) - e^*(n)(e^*(n) - 1), 2).$$

On a ainsi : $e'(n) = e''(n)(e''(n) - 1) + e^*(n)(e^*(n) - 1) + 2e^{**}(n) + \text{rest}(n)$.

On dit que $e'(n)$ t-points vérifient les conditions (C) si :

- $e''(n)(e''(n) - 1)$ forment une t-conique-grille de type $e''(n)$,
- $e^*(n)(e^*(n) - 1)$ forment une t-conique-grille de type $e^*(n)$,
- les t-points qui restent (cas où $h(n) = 2e^{**}(n) + \text{rest}(n) \geq 1$) appartiennent à une t-conique-grille de type $(1, e^{**}(n) + \text{rest}(n))$.

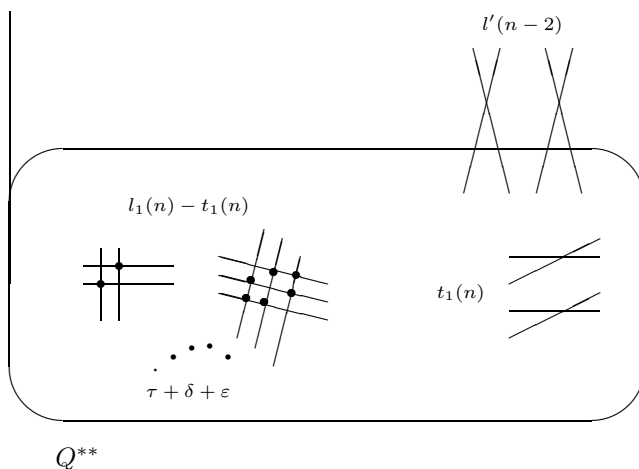


Figure 1

On a choisi les entiers $l'(n-2)$ et $e'(n)$ de façon que le sous-schéma $T_s(n)$ soit une spécialisée (L_n, Q^{**}) -ajustée de $T^{**}(n)$ et que l'on puisse utiliser la méthode d'Horace avec le diviseur Q^{**} .

Dans ce cas, le schéma résiduel $T'^{**}(n-2)$ de $T_s(n)$ par rapport à Q^{**} sera formé de $l'(n-2)$ t -coniques disjointes et de $e'(n)$ t -points vérifiant les conditions **(C)**. Et on a bien :

$$h^0(L_n(-Q^{**})) = h^0(L_{n-2}) = l'(n-2)(6n+1) + 3e'(n) = h^0(L_n(-Q^{**})|_{T'^{**}(n-2)}).$$

On va montrer que $H^0(L_n \otimes I_{T_s(n)}) = 0$. On exploite le diviseur Q^{**} . La dègue $H'(n-2)$ est vraie par hypothèse.

Pour la dîme, les $l'(n-2)$ t -coniques de $T_s(n)$ rencontrent Q^{**} en $4l'(n-2)$ t -points 4 à 4 cocycliques. Par conséquent, la trace est le schéma $S(n)$ décrit dans la proposition 5.1 ci-après, avec : $l_1(n) = \lambda(n) - l'(n-2)$.

De plus, comme $L_n|_{Q^{**}}$ est isomorphe à $K_n = \mathcal{O}_{Q^{**}}(1) \otimes \omega^*(\mathcal{O}_{Q^*}(1) \otimes \pi^*\mathcal{O}_Q(n, n))$, $S(n)$ est numériquement K_n -rangé. On voit que toutes les hypothèses de la proposition 5.1 sont vérifiées.

5.3. Preuve de la dîme

PROPOSITION 5.1. — *Soient $n, l'(n), l_1(n), t_1(n), e'(n), \tau(n), \delta(n), \epsilon(n)$ des entiers naturels, et $S(n)$ la réunion générique dans Q^{**} , numériquement K_n -rangée :*

- de $l_1(n) = \lambda(n) - l'(n-2)$ t -coniques dont $t_1(n)$ sont disjointes et $l_1(n) - t_1(n)$ se rencontrent en $e'(n)$ t -points vérifiant les conditions **(C)**,
- de $4l'(n-2)$ t -points 4 à 4 cocycliques,
- de $\tau(n)$ t -points, $\delta(n)$ d -point et $\epsilon(n)$ s -point cocycliques.

Alors, $S(n)$ est K_n -rangée.

Preuve. — La condition de K_n -rangement numérique de $S(n)$: $h^0(K_n) = h^0(K_n|_{S(n)})$, donne l'égalité suivante :

$$6n^2 + 14n + 19 = l_1(n)(6n+13) + 3(4l'(n-2) + \tau(n) - e'(n)) + 2\delta(n) + \epsilon(n).$$

Spécialisation de $S(n)$

On a : $l_1(n) - t_1(n) = e''(n) + e^*(n) + \min(1, e^{**}(n) + \text{rest}(n)).(e^{**}(n) + 1 + \text{rest}(n))$.

Résolution des fibrés généraux stables de rang 2 sur \mathbb{P}^3 de classes de Chern

On pose : $t_1(n) = c_1(n) + d_1(n)$, $f_1(n) = d_1(n) + l_1(n) - t_1(n)$. On a donc $f_1(n) + c_1(n) = l_1(n)$.

On peut supposer que toutes ces t-coniques sont dégénérées, et que, pour chacune des $c_1(n)$ t-droites, l'une des deux t-droites est contenue dans D^{**} .

On considère, alors, le sous-schéma $S_s(n) = S_{s_1}(n) \cup S_{s_2}(n)$, où :

– $S_{s_1}(n)$ est la réunion de $c_1(n)$ t-droites non contenues dans D^{**} , et de $u(n)$ t-points non contenues dans D^{**} non plus ($u(n) \leq 4l'(n-2)$);

– $S_{s_2}(n)$ est la réunion :

* de $f_1(n)$ t-coniques de D^{**} ,

* de $c_1(n)$ t-droites de D^{**} ,

* des t-premiers voisinages infinitésimaux de $f_1(n)(f_1(n) + c_1(n)) - f_1(n) - e'(n)$ t-points : les points d'intersection des $f_1(n)$ t-coniques et des $c_1(n)$ t-droites de Q^* qui n'appartiennent pas aux trois t-coniques-grilles de types $e''(n)$, $e^*(n)$ et $(1, e^{**}(n) + \text{rest}(n))$,

* des t-premiers voisinages infinitésimaux de $\mu_1(n)$ t-points, parmi les $\tau(n)$ t-points cocycliques (ces $\mu_1(n)$ t-points étant mis sur des droites des $f_1(n)$ t-coniques de D^{**} ou sur celles des $c_1(n)$ t-droites de D^{**}), $\mu_1(n) \leq 2f_1(n) + c_1(n)$ (voir figure ci-après),

* de $4l'(n-2) - u(n)$ t-points de D^{**} ,

* de $\tau(n) - \mu_1(n)$ t-points, $\delta(n)$ d-point et $\epsilon(n)$ s-point cocycliques de $r^{**} = \omega^{-1}(r) \subset D^{**}$.

Le sous-schéma $S_s(n)$ est une spécialisation de $S(n)$.

On exploite D^{**} . La trace Z'' de $S_s(n)$ sur D^{**} est formée de :

– $f_1(n)$ t-coniques,

– $c_1(n)$ t-droites,

– $4l'(n-2) - u(n)$ t-points,

– $2c_1(n)$ t-points intersections des $c_1(n)$ t-droites avec D^{**} ,

– $\tau(n) - \mu_1(n)$ t-points, $\delta(n)$ d-point et $\epsilon(n)$ s-point cocycliques.

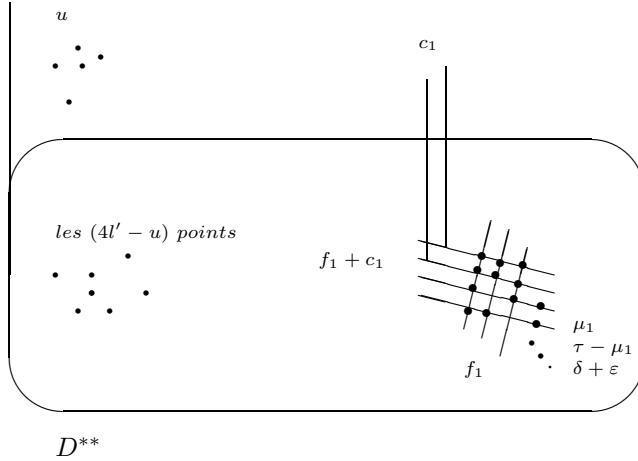


Figure 2

Le schéma résiduel est formé de :

- $c_1(n)$ t-droites,
- $f_1(n)l_1(n) - f_1(n) - e'(n) + \mu_1(n)$ t-points d'une t-grille de type $(l_1(n) + \min(1, \mu_1(n)), f_1(n) + \min(1, \max(0, \mu_1(n) - l_1(n))))$,
- $u(n)$ t-points.

On choisit les entiers $c_1(n), f_1(n), \mu_1(n), u(n), \dots$ pour que l'on puisse prouver les dîme et dègue à l'aide des propositions 4.13 et 4.11.

- Pour $n \in \{22, 27, 29\}$ ou $n \geq 31$, ce choix est possible grâce à la proposition 5.2.

- Pour $(n \leq 30, n \notin \{22, 27, 29\})$, voir la section 7.

La dîme se ramène alors à la proposition 4.13, avec $a = n + 3 - l_1(n)$, $b = n + 3 - f_1(n)$, $v = 4l'(n - 2) - u(n)$, $m = c_1(n)$, $\tau = \tau(n) - \mu_1(n)$, $\delta = \delta(n)$, $\epsilon = \epsilon(n)$.

La dègue se ramène à la proposition 4.11, avec $\alpha = n - c_1(n)$, $\beta = n$, $u = u(n)$, $g = f_1(n)l_1(n) - f_1(n) - e'(n) + \mu_1(n)$, $p = l_1(n) + \min(1, \mu_1(n))$,

$q = f_1(n) + \min(1, \max(0, \mu_1(n) - l_1(n)))$, $h = \text{iquo}(q + 1, 2)$.

PROPOSITION 5.2. — Si $n \in \{22, 27, 29\}$ ou si $n \geq 31$, on pose :

$$c_1(n) = \text{iquo}(n, 6) + c(n), \text{ où } c(n) = \text{irem}(2n + 1 - \text{iquo}(n, 6), 3),$$

alors, les entiers $a(n), b(n), f_1(n), \mu_1(n), u(n), \dots$ correspondants à ce choix de $c_1(n)$ vérifient les hypothèses des propositions 4.13 et 4.11.

Preuve. — Par définition des entiers $\lambda(n), l'(n), \tau(n), e'(n)$ et $l_1(n)$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1(n) = M_2(n) - 1 < \lambda(n) \leq M_2(n) = \frac{2n^3 + 13n^2 + 37n + 38}{12n + 26}, \\ M_1(n) - 2 < l'(n) \leq M_2(n), \quad 0 \leq e'(n) \leq 6n, \quad 0 \leq \tau(n) \leq 2n + 4, \\ \frac{2(12n^3 + 24n^2 - 5n + 3)}{(6n + 13)(6n + 1)} \leq l_1(n) \leq \frac{2(12n^3 + 96n^2 + 163n + 29)}{(6n + 13)(6n + 1)}. \end{array} \right.$$

La restriction du fibré K_n sur D^{**} est isomorphe à G_{n+3} .

Pour que $S_s(n)$ soit une spécialisation (K_n, D^{**}) -ajustée de $S(n)$, il faut et il suffit que :

$$3a(n)b(n) - a(n) - b(n) - 1 = 3(4l'(n-2) - u(n) + 2c_1(n) + \tau(n) - \mu_1(n)) + 2\delta(n) + \epsilon(n).$$

L'égalité ci-dessus est équivalente à :

$$3n(n - c_1(n)) - n - (n - c_1(n)) - 1 = 3(u(n) + l_1(n)(l_1(n) - c_1(n)) - (l_1(n) - c_1(n))) - 3e'(n) + 3\mu_1(n),$$

ou encore, en posant $c_1(n) = \text{iquo}(n, 6) + c(n)$, à :

$$(\star) : A(n) - (3n - 3l_1(n) + 2)c(n) - 3\mu_1(n) - 3u(n) = 0,$$

où :

$$A(n) = 3n(n - \text{iquo}(n, 6)) - 2n + \text{iquo}(n, 6) - 1 - 3l_1(n)(l_1(n) - \text{iquo}(n, 6)) + 3(l_1(n) - \text{iquo}(n, 6)) + 3e'(n).$$

On prend alors l'entier $c(n) \in \{0, 1, 2\}$ de telle façon que :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(n) - (3n - 3l_1(n) + 2)c(n) \equiv 0 \pmod{3}, \\ A(n) - (3n - 3l_1(n) + 2)c(n) = 3\mu_1(n) + 3u(n) \geq 0, \\ -3u(n) + A(n) - (3n - 3l_1(n) + 2)c(n) \leq 3 \min(\tau(n), 2l_1(n) - c_1(n)), \\ 3[\tau(n) - (2n + 4) + 2l_1(n) - c_1(n)] \leq -3u(n) + A(n) - (3n - 3l_1(n) + 2)c(n). \end{array} \right.$$

Si $3n - 3l_1(n) + 2 \geq 3n - 3l_1(n) - 1 \geq 1$, et si l'on veut que $c(n) \in \{0, 1, 2\}$, on doit avoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} c(n) \equiv 2n + 1 - \text{iquo}(n, 6) \pmod{3}, \\ c(n) \leq \frac{A(n)}{3n - 3l_1(n) + 2}, \quad c(n) \leq \frac{A(n) - 3[\tau(n) - (2n + 4) + 2l_1(n) - \text{iquo}(n, 6)]}{3n - 3l_1(n) - 1}, \\ \frac{A(n)}{3n - 3l_1(n) + 2} \geq 2, \quad \frac{A(n) - 3[\tau(n) - (2n + 4) + 2l_1(n) - \text{iquo}(n, 6)]}{3n - 3l_1(n) - 1} \geq 2. \end{array} \right.$$

Si $3n - 3l_1(n) + 2 \geq 3n - 3l_1(n) - 1 \geq 1$, et si l'on veut que $c(n) \in \{0, 1, 2\}$, on doit avoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} c(n) \equiv 2n + 1 - \text{iquo}(n, 6) \pmod{3}, \\ c(n) \leq \frac{A(n)}{3n - 3l_1(n) + 2}, \quad c(n) \leq \frac{A(n) - 3[\tau(n) - (2n + 4) + 2l_1(n) - \text{iquo}(n, 6)]}{3n - 3l_1(n) - 1}, \\ \frac{A(n)}{3n - 3l_1(n) + 2} \geq 2, \quad \frac{A(n) - 3[\tau(n) - (2n + 4) + 2l_1(n) - \text{iquo}(n, 6)]}{3n - 3l_1(n) - 1} \geq 2. \end{array} \right.$$

Comme $c_1(n)$ vérifie : $\frac{n}{6} - 1 < c_1(n) \leq \frac{n}{6} + 2$, on a :

$$\frac{108n^3 - 228n^2 - 1081n - 120}{6(6n + 13)(6n + 1)} \leq f_1(n) \leq \frac{108n^3 + 1284n^2 + 2447n + 426}{6(6n + 13)(6n + 1)}.$$

On en déduit des encadrements pour $a(n)$, $b(n)$, $\alpha(n)$, $p(n)$, $q(n)$. Des calculs simples sur Maple donnent alors :

$$\begin{aligned} b(n) - a(n) &= c_1(n) > \frac{n}{6} - 1 \geq 0 \text{ si } n \geq 6, \\ 2a(n) - 1 - b(n) &= n + 2 - l_1(n) - c_1(n) \geq 0 \text{ si } n \geq 23, \\ 2a(n) + b(n) - 6 - 2c_1(n) &\geq 0 \text{ si } n \geq 18, \\ \beta(n) - \alpha(n) &= c_1(n) > \frac{n}{6} - 1 \geq 0 \text{ si } n \geq 6, \\ 2\alpha(n) - 1 - \beta(n) &\geq \frac{2n}{3} + 1 \geq 0 \text{ si } n \geq 0, \\ \alpha(n) - p(n) &= n - 1 - l_1(n) - c_1(n) > 0 \text{ si } n \geq 41, \\ 2\beta(n) - \alpha(n) - 3h(n) &\geq 0 \text{ si } n \geq 27, \end{aligned}$$

$$A(n) \geq 1, \quad 3n - 3l_1(n) + 2 \geq 3n - 3l_1(n) - 1 \geq 1 \quad \text{si } n \geq 14$$

$$\frac{A(n)}{3n - 3l_1(n) + 2} \geq 2 \quad \text{si } n \geq 15,$$

$$\frac{A(n) - 3[\tau(n) - (2n + 4) + 2l_1(n) - \text{iquo}(n, 6)]}{3n - 3l_1(n) - 1} \geq 2 \quad \text{si } n \geq 16.$$

Ainsi, pour $n \geq 41$, on prend :

$$\begin{aligned} u(n) &= \frac{1}{3} \max \left(0, A(n) - (3n - 3l_1(n) + 2)c(n) - 3 \min \left(\tau(n), 2l_1(n) - c_1(n) \right) \right), \\ \mu_1(n) &= -u(n) + \frac{1}{3} \left(A(n) - (3n - 3l_1(n) + 2)c(n) \right). \end{aligned}$$

Par calculs directs, on voit que ce choix de $c_1(n)$, $u(n)$, $\mu_1(n)$ reste aussi valable pour $31 \leq n \leq 40$ ou pour $n \in \{22, 27, 29\}$.

Les autres inégalités telles que : $g(n) \leq p(n)q(n), \dots$ sont toujours vérifiées pour tout n . On rappelle que :

$$3ab - a - b - 1 = 3v + 6m + 3r + 2\delta + \epsilon \iff 3\alpha\beta - \alpha - \beta - 1 = 3u + 3g.$$

6. Preuve de $H'(n)$, $n \in \Lambda$

Ici, $\Lambda = \{27, 32\} \cup \{n \in \mathbb{N} / n \geq 37, n \notin \{38, 41, 44, 45, 48, 51, 63, 65, 78\}\}$.

Le sous-schéma $T'^{**}(n)$

Ce sous-schéma est la réunion, numériquement L_n -rangée, de $l'(n)$ t-coniques disjointes et de $e(n) = e'(n+2)$ t-points vérifiant les conditions **(C)**, où $l'(n)$ et $e'(n+2)$ sont tels que : $3e'(n+2) = h^0(L_n) - l'(n)(6n+13)$.

On va montrer, par la méthode d'Horace, que : $H'(n-2) \Rightarrow H'(n)$.

Comme dans la section 5.1, on spécialise $T'^{**}(n)$ en un sous-schéma $T'_s(n)$ (L_n, Q^{**})-ajustée et on va prouver que : $H^0(L_n \otimes I_{T'_s(n)}) = 0$.

On définit le sous-schéma $T'_s(n)$ comme la réunion :

- de $l'(n-2)$ t-coniques non contenues dans Q^{**} ,
- de $l_2(n) = l'(n) - l'(n-2)$ t-coniques de Q^{**} dont $t_2(n)$ sont disjointes, et $l_2(n) - t_2(n)$ se rencontrent en $e'(n)$ t-points vérifiant les conditions **(C)**,
- de t-premiers voisinages infinitésimaux de ces $e'(n)$ t-points,
- de $e(n)$ t-points vérifiant les conditions **(C)**.

On exploite le diviseur Q^{**} . La dègue ($H'(n-2)$) est vraie. La dîme est une conséquence de la

PROPOSITION 6.1. — *Soient $n, l'(n), l_2(n), t_2(n), e'(n)$ des entiers naturels, et $S'(n)$ la réunion générique dans Q^{**} , numériquement K_n -rangée :*

- de $l_2(n) = l'(n) - l'(n-2)$ t-coniques dont $t_2(n)$ sont disjointes et $l_2(n) - t_2(n)$ se rencontrent en $e'(n)$ t-points vérifiant les conditions **(C)**,
- de $4l'(n-2)$ t-points 4 à 4 cocycliques,
- de $e(n)$ t-points vérifiant les conditions **(C)**.

Alors, $S'(n)$ est K_n -rangé.

Preuve. — La condition de K_n -rangement est équivalente à :

$$6n^2 + 14n + 19 = l_2(n)(6n+13) + 3(4l'(n-2) + e(n) - e'(n)).$$

Comme dans la section 5.3, on a :

$$\begin{aligned} l_2(n) - t_2(n) &= e''(n) + e^*(n) + \min(1, e^{**}(n) + \text{rest}(n)).(e^{**}(n) + 1 + \text{rest}(n)), \\ l_2(n) &= f_2(n) + c_2(n), \\ f_2(n) &= d_2(n) + (l_2(n) - t_2(n)). \end{aligned}$$

On spécialise $S'(n)$ en $S'_s(n) = S'_{s_1}(n) \cup S'_{s_2}(n)$, en mettant, entre autres, les $2c_2(n)$ t-points sur une grille de type $(c_2(n), 2)$. Puis, on exploite D^{**} . La dîme se ramène à la proposition 4.11 avec : $\alpha = n+3-l_2(n)$, $\beta = n+3-f_2(n)$, $u = 4l'(n-2)-u(n)$, $g = 2c_2(n)+e(n)$, $p = \max(c_2(n), l_1(n+2)-t_1(n+2))$, $q = l_1(n+2) - t_1(n+2) + 2$, $h = \text{iquo}(q+1, 2)$.

De même, la dègue se ramène à la proposition 4.11 avec :

$$\begin{aligned} \alpha &= n - c_2(n), \quad \beta = n, \quad u = u(n), \quad g = f_2(n)l_2(n) - f_2(n) - e'(n), \\ p &= l_2(n), \quad q = f_2(n), \quad h = \text{iquo}(q+1, 2). \end{aligned}$$

Comme dans la section 5.3, on prend :

$$c_2(n) = \text{iquo}(n, 6) + c(n), \quad c(n) = \text{irem}(2n+1 - \text{iquo}(n, 6), 3).$$

On considère :

$$\begin{aligned} A(n) &= 3n(n - \text{iquo}(n, 6)) - 2n + \text{iquo}(n, 6) - 1 - 3l_2(n)(l_2(n) - \text{iquo}(n, 6)) \\ &\quad + 3(l_2(n) - \text{iquo}(n, 6)) + 3e'(n). \end{aligned}$$

L'équation d'ajustement pour $S'(n)$ se ramène à :

$$A(n) - (3n - 3l_2(n) + 2)c(n) - 3u(n) = 0.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} A(n) - (3n - 3l_2(n) + 2)c(n) &\equiv 0 \pmod{3}, \\ 0 \leq 3u(n) = A(n) - (3n - 3l_2(n) + 2)c(n) &\leq 12l'(n-2). \end{aligned}$$

Les encadrements des entiers $l_2(n)$, $c_2(n)$ et $f_2(n)$ sont les mêmes que ceux de $l_1(n)$, $c_1(n)$ et $f_1(n)$ dans la section 5.3.

Par définition de $e'(n)$, $e''(n)$, $e^*(n)$ et $e^{**}(n)$, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq e'(n) \leq 6n, \quad 0 \leq e''(n) &\leq \frac{1 + \sqrt{1 + 24n}}{2}, \\ 0 \leq e^*(n) \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4x_2(n)}}{2}, \quad \text{où } x_2(n) &= \frac{-1 + 2\sqrt{1 + 24n}}{4}, \\ 0 \leq e^{**}(n) \leq \frac{-1 + 2\sqrt{1 + 4x_2(n)}}{8}, \\ 0 \leq l_1(n+2) - t_1(n+2) \leq e''(n+2) &+ e^*(n+2) + e^{**}(n+2) + 2. \end{aligned}$$

On peut vérifier que les hypothèses de la proposition 4.11 sont satisfaites aussi bien pour la dîme que pour la dègue :

- pour $n \geq 170$, à l'aide des encadrements ci-dessus,
- pour $n \in \{27, 32\}$, ou pour ($37 \leq n \leq 169$ et $n \notin \{38, 41, 44, 45, 48, 51, 63, 65, 78\}$), par calculs directs (sur Maple).
- Pour $n \leq 36$, avec $n \notin \{27, 32\}$ et pour $n \in \{38, 41, 44, 45, 48, 51, 63, 65, 78\}$, voir la section 7.

7. Cas initiaux

7.1. $H(n)$, $n \leq 1$

On rappelle que l'on veut montrer que l'application naturelle $\rho(n)$ de $H^0(\Omega(n) \oplus \Omega(n+3))$ vers $H^0(\Omega(n+3)|_Y)$ est de rang maximum si Y est la réunion générique de r coniques disjointes de \mathcal{X} .

- Pour $n \leq -2$, c'est trivial car $h^0(\Omega(n+3)) = h^0(\Omega(n+3)|_Y) = 0$.
- Pour $n = -1$, $\rho(-1)$ est injective si $r = 1$: exploiter un plan H contenant Y . On en déduit que $\rho(-1)$ est injective pour tout $r \geq 1$.
- Pour $n = 0$, $\rho(0)$ est surjective si $r = 1$ et injective si $r = 2$.
- Pour $n = 1$, $\rho(1)$ est surjective si $r = 2$ et injective si $r = 3$.

7.2. $H'(-2), H'(0), H''(1), H'''(1)$

- $H'(-2)$ est vrai car $T'^{**}(-2) = \emptyset$.
- $H'(0)$: le sous-schéma $T'^{**}(0)$ est formé d'une droite et de 4 points. On a bien : $H'(-2) \Rightarrow H'(0)$, en exploitant une quadrique.

Les énoncés $H''(1)$ et $H'''(1)$ sont nécessaires pour prouver $H(3)$ et $H'(3)$.

Enoncé et preuve de $H''(1)$

On veut montrer $H''(1) : H^0(\Omega(4) \otimes \mathcal{I}_{T''^{**}(1)}) = 0$, où $T''^{**}(1)$ est la réunion disjointe d'une conique, d'une droite et de 5 points.

En exploitant une quadrique ou un plan, on se ramène à l'égalité fautive (voir [3] par exemple) : $H^0(\overline{\Omega}(2) \otimes \mathcal{I}_Z) = 0$, où Z est formé de 2 points.

On va donc exploiter une surface cubique S . On sait (voir [6]) qu'une telle surface peut être obtenue par éclatement en 6 points non cocycliques et 3 à 3 non alignés d'un plan projectif, que son groupe de Picard, $Pic(S)$ est isomorphe à \mathbb{Z}^7 et est engendré par la transformée totale ℓ d'une droite de ce plan, et par les 6 diviseurs exceptionnels e_i au-dessus de ces 6 points. On rappelle aussi que le diviseur $A = 3\ell - \sum_i e_i$ est très ample et donne lieu au faisceau très ample sur S , $\mathcal{O}_S(1)$.

On suppose que $T'''(1) \subset S$. On exploite S . La dègue ($H^0(\Omega(1)) = 0$) est vraie. On va montrer la dîme : $H^0(\Omega(4)|_S \otimes \mathcal{O}_S(-E) \otimes \mathcal{I}_Z) = 0$, où Z est formé de 5 points.

On considère deux courbes rationnelles lisses de S , de degré 3, T et R obtenues respectivement à partir des deux systèmes linéaires $|3\ell - e_2 - 2e_3 - e_4 - e_5 - e_6|$ et $|3\ell - e_1 - e_3 - 2e_4 - e_5 - e_6|$.

On suppose que la conique C (resp. la droite D) de $T'''(1)$ provient du système linéaire $|2\ell - e_1 - e_2 - e_5 - e_6|$ (resp. $|\ell - e_1 - e_2|$). On note $E = C + D$. On met sur R un point de $T''(4)$, et sur T les 4 points qui restent. On remarque que : $T + R + E \sim 3A$, $R.R = 1$, $T.E = 5$.

On exploite T . Le résiduel Z' (resp. la trace Z'') de Z par rapport à T est formé de 1 point (resp. 4 points). De la suite exacte résiduelle, on a :

$$\begin{aligned} H^0(\Omega(1)|_S \otimes \mathcal{O}_S(R) \otimes \mathcal{I}_{Z'}) &\longrightarrow H^0(\Omega(4)|_S \otimes \mathcal{O}_S(-E) \otimes \mathcal{I}_Z) \\ &\longrightarrow H^0(\Omega(4)|_T \otimes \mathcal{O}_T(-E) \otimes \mathcal{I}_{Z''}) \end{aligned}$$

Comme $\Omega(4)|_T \otimes \mathcal{O}_T(-E) \cong 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-4) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(12) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-5) \cong 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$, on a la dîme. Pour la dègue, on exploite R . En notant Y' et Y'' le résiduel et la trace de Z' , on a la suite exacte :

$$H^0(\Omega(1)|_S \otimes \mathcal{I}_{Y'}) \longrightarrow H^0(\Omega(1)|_S \otimes \mathcal{O}_S(R) \otimes \mathcal{I}_{Z'}) \longrightarrow H^0(\Omega(1)|_R \otimes \mathcal{O}_R(R) \otimes \mathcal{I}_{Y''})$$

La dègue est vraie car $Y' = \emptyset$ et $H^0(\Omega(1)|_S) = 0$. La dîme se déduit du fait suivant : $\Omega(1)|_R \otimes \mathcal{O}_R(R) \cong 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-4) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \cong 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$, Y'' étant formé d'un point.

Enoncé et preuve de $H'''(1)$

On veut montrer $H'''(1) : H^0(\Omega(4) \otimes \mathcal{I}_{T''''(1)}) = 0$, où $T''''(1)$ est la réunion disjointe de 3 droites D_1, D_2, D_3 et de 4 points. On procède comme précédemment avec $D_i \sim \ell - e_j - e_k$ ($1 \leq i \neq j \neq k \leq 3$), $E = D_1 + D_2 + D_3 \sim 3\ell - 2e_1 - 2e_2 - 2e_3$, $R \sim A$ et $T \sim 3A - R - E$ (dans ce cas, on a : $R.R = 3$, $T.E = 9$).

7.3. $H(n), H'(n), 1 \leq n \leq 12$

Dans cette section et dans la section 7.4, on écrira, si nécessaire :

– $T^{**}(n) = (\lambda(n); \tau(n), \delta(n), \epsilon(n))$: pour la réunion $T^{**}(n)$ de $\lambda(n)$ t-coniques, et de $\tau(n)$ t-points, $\delta(n)$ d-point et $\epsilon(n)$ s-point cocycliques,

– $T'^{**}(n-2) = (l'(n-2); e'(n) : e''(n), \tau'(n), e^*(n), e^{**}(n), \text{rest}(n))$: pour la réunion $T'^{**}(n-2)$ de $l'(n-2)$ t-coniques, et de $e'(n)$ t-points dont $\tau'(n)$ sont cocycliques et $e'(n) - \tau'(n)$ vérifient les conditions **(C)**, $\tau'(n) \in [0, \tau(n)]$.

(les $\tau'(n)$ t-points cocycliques appartiennent éventuellement, avec les $e''(n)(e''(n) - 1)$ t-points, à une t-conique-grille de type $e''(n) + 1$).

Pour $H'(n-2) \Rightarrow H(n)$ (resp. $H'(n-2) \Rightarrow H'(n)$), les dègue et dîme obtenues pour prouver le K_n -rangement de $S(n)$ (resp. de $S'(n)$) seront appelées *dègue2* et *dîme2* (voir les propositions 5.1 et 6.1).

Le schéma résiduel obtenu en exploitant Q^{**} (resp. D^{**}) sera (souvent une généralisation de) $T'^{**}(n-2)$ (resp. $S(n)$ ou $S'(n)$).

H'(1)

On veut montrer que $h^0(L_1 \otimes I_{T'^{**}(1)}) = 0$, où $T'^{**}(1) = (0; 15 : 4, 3, 0, 0, 0)$.

En appliquant π_* et ω_* , cette égalité se ramène à : $h^0(\Omega(4) \otimes I_{T'(1)}) = 0$, où $T'(1) = \pi \circ \omega(T'^{**}(1))$. Cette égalité est prouvée dans [3].

H(3), H'(3)

– $H''(1) \Rightarrow H(3)$, avec $T''^{**}(1)$: réunion d'une t-conique, d'une t-droite et de 5 t-points, et $H''(1)$ est vrai (voir la section 7.2).

– $H'''(1) \Rightarrow H'(3)$, avec $T'''^{**}(1)$: réunion de 3 t-droites et de 4 t-points, et $H'''(1)$ est vrai (voir la section 7.2).

H(5), H'(5)

On a : $H'(3) \Rightarrow H(5)$, avec $T'^{**}(3) = (4; 12 : 4, 0, 0, 0, 0)$, et $T^{**}(5) = T'^{**}(5) = (9; 4 : 0, 4, 0, 0, 0)$.

H(7), H'(7)

On a : $H'(5) \Rightarrow H(7)$.

$H'(5) \Rightarrow H'(7)$, avec $T'^{**}(7) = (12; 50 : 7, 8, 0, 0, 0)$.

H(9), H'(9), H''(7)

– $H'(7) \Rightarrow H(9)$.

– $H''(7) \Rightarrow H'(9)$, avec $T'''(7)$: réunion de 12 t-coniques, et de 50 t-points dont $42 = 8 \times 6 - 6$ appartiennent à une grille de type (8, 6) et dont 8 vérifient les conditions (C). Et $H''(7)$ est vrai car $T'''(7)$ est une généralisation de $T''(7)$.

H(11), H'(11)

– $H'(9) \Rightarrow H(11)$, avec $T''(9) = (19; 56 : 8, 0, 0, 0, 0)$.

La *dègue2* ne s'obtient pas par le lemme 4.11, mais en exploitant 4 fois une courbe rationnelle de type (1, 2) puis 2 fois une courbe de type (2, 1).

– $H'(9) \Rightarrow H'(11)$, avec $T''(11) = (27; 69 : 8, 1, 4, 0, 0)$. En mettant en dehors de Q'' les 56 t-points (de la conique-grille de type 8) de $T''(11)$, et en posant $t_2 = l_2 = 8$, $c_2 = 2$, on peut utiliser le lemme 4.11 pour la *dîme2* et la *dègue2*.

H(2), H'(2)

Ces deux énoncés sont les mêmes :

$$T''(2) = T'''(2) = (3; 5 : 0, 5, 0, 0, 0).$$

$H'(2)$ se démontre en exploitant un plan, et par transformation élémentaire. La démarche est exactement la même que dans la section 5-3 de [15], voir aussi la section 5 dans [12].

H(4), H'(4)

On a : $H'(2) \Rightarrow H(4)$ et $H'(2) \Rightarrow H'(4)$, où $T'''(4)$ est la réunion de 6 t-coniques et de 13 t-points cocycliques.

H(6), H'(6)

$H'(4) \Rightarrow H(6)$, $H'(4) \Rightarrow H'(6)$, où $T'''(6)$ est la réunion de 10 t-coniques et de 30 t-points dont 12 appartiennent à une t-conique-grille de type 4, et 16 cocycliques.

H(8), H'(8)

$H'(6) \Rightarrow H(8)$, $H'(6) \Rightarrow H'(8)$, où $T'''(8)$ est la réunion de 15 t-coniques et de 60 t-points dont 30 appartiennent à une t-conique-grille de type 6, 12 appartiennent à une t-conique-grille de type 4, et 16 cocycliques.

H(10), H'(10)

$H'(8) \Rightarrow H(10)$, $H'(8) \Rightarrow H'(10)$, où $T'^{**}(10) = (24; 34 : 4, 16, 3, 0, 0)$.

H(12), H'(12)

$H'(10) \Rightarrow H(12)$, $H''(10) \Rightarrow H'(12)$, où :

– $T^{**}(12) = T'^{**}(12) = (34; 5 : 0, 5, 0, 0, 0)$,

– $T'^{**}(10)$ est la réunion de 24 t-coniques et de 34 t-points dont 12 appartiennent à une t-conique-grille de type 4, 6 appartiennent à une t-conique-grille de type 3, 8 cocycliques, 4 appartiennent à une t-grille de type (2, 3).

$H''(10)$ est vrai car $T'^{**}(10)$ est une généralisation de $T'^{**}(10)$.

7.4. Les autres cas

7.4.1. $H(n)$, $H'(n)$, $n \in \{13, 15, 18, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 30\}$

Les entiers suivants ne figurent pas dans ce tableau :

$\lambda(n)$, $\tau(n)$, $\delta(n)$, $\epsilon(n)$, $l'(n-2) = \lambda(n) - l_1(n)$ et $f_1(n) = l_1(n) - c_1(n)$, $e(n) = e'(n+2)$, $\tau'(n+2)$, $e''(n+2)$, $e^*(n+2)$, $e^{**}(n+2)$ et $\text{rest}(n+2)$.

Signalons que pour $H'(11) \Rightarrow H(13)$, la *dègue2* ne s'obtient pas par la proposition 4.11, mais en exploitant 4 fois une courbe de type (1, 2) puis 4 fois une courbe de type (2, 1).

n	$e'(n)$	$e''(n)$	$\tau'(n)$	e^*	e^{**}	rest	μ_1	f_1	c_1	u_1	f_2	c_2	u_2
13	69	8	1	4	0	0	0	12	0	96	12	0	96
15	2	0	0	0	1	0	19	9	1	102	9	1	121
18	63	8	7	0	0	0	13	13	1	168	12	1	206
19	75	9	3	0	0	0	14	15	0	196	12	3	196
20	61	8	5	0	0	0	22	13	2	199	12	2	247
22	72	9	0	0	0	0	3	14	3	249	12	3	308
23	101	10	11	0	0	0	3	16	2	283	15	2	318
25	65	8	9	0	0	0	31	15	3	304	15	3	335
26	149	12	17	0	0	0	19	18	2	378	18	2	397
28	54	7	12	0	0	0	12	14	6	363	15	3	469
30	145	12	11	0	1	0	0	19	4	477	18	4	517

7.4.2. $H(n), H'(n), n \in \{14, 16, 17, 21, 24\}$

$H'(n-2) \Rightarrow H(n), n \in \{14, 16, 17, 21, 24\}$:

$T'^{**}(12) = (34; 5 : 0, 5, 0, 0, 0)$. On trouve : $\mu_1 = 4, f_1 = 8, c_1 = 2, u_1 = 83$,
 $T'^{**}(14) = (42; 74 : 9, 2, 0, 0, 0)$, $\mu_1 = 14, f_1 = 13, c_1 = 0, u_1 = 147$,
 $T'^{**}(15) = (49; 29 : 5, 9, 0, 0, 0)$, $\mu_1 = 22, f_1 = 10, c_1 = 2, u_1 = 132$,
 $T'^{**}(19) = (75; 17 : 4, 5, 0, 0, 0)$, $\mu_1 = 3, f_1 = 11, c_1 = 4, u_1 = 199$,
 $T'^{**}(22) = (96; 100 : 10, 10, 0, 0, 0)$, $\mu_1 = 34, f_1 = 14, c_1 = 4, u_1 = 285$.

$H'(12) \Rightarrow H'(14)$:

En mettant en dehors de D^{**} $48 = 9 \times 6 - 6$ t-points parmi les 72 t-points de la conique-grille de $T'^{**}(14)$, et en posant $f_2 = 3, c_2 = 5$, on peut utiliser la proposition 4.11 :

pour la *dègue2*, avec : $\alpha = 9, \beta = 14, p = 8, q = 12$,

pour la *dîme2*, avec : $\alpha = 9, \beta = 14, p = 3, q = 9$.

$H'(14) \Rightarrow H'(16)$:

$T'^{**}(16) = (54; 63 : 8, 7, 0, 0, 0)$. En mettant en dehors de D^{**} les 56 t-points de la conique-grille de $T'^{**}(16)$, et en posant $f_2 = 9, c_2 = 3$, on peut utiliser la proposition 4.11 :

pour la *dègue2*, avec : $\alpha = 13, \beta = 16, p = 10, q = 12$,

pour la *dîme2*, avec : $\alpha = 7, \beta = 10$ (pas de grille).

$H'(15) \Rightarrow H''(15) \Rightarrow H'(17)$:

$T''^{**}(15) = (49; 29 : 5, 3, 3, 0, 0)$, et $T'^{**}(17) = (60; 75 : 9, 3, 0, 0, 0)$.

$H'(15) \Rightarrow H''(15)$ est vraie car $T''^{**}(15)$ est une généralisation de $T'^{**}(15)$.

Pour $H''(15) \Rightarrow H'(17)$, en mettant en dehors de D^{**} $48 = 9 \times 6 - 6$ t-points parmi les 72 t-points de la conique-grille de $T'^{**}(17)$, et en posant $f_2 = 9, c_2 = 2$, on peut utiliser deux fois la proposition 4.11 pour la *dègue2* :

– la première avec : $\alpha = 15, \beta = 17, p = 10, q = 11$,

– la deuxième avec : $\alpha = 5, \beta = 9, p = 4, q = 6$.

Pour la *dîme2*, utiliser la proposition 4.11 avec : $\alpha = 9, \beta = 11, p = 3, q = 9$.

$H'(19) \Rightarrow H'(21)$:

$T'^{**}(21) = (88; 101 : 10, 11, 0, 0, 0)$. En mettant en dehors de Q^{**} 5 des 11 t-points cocycliques, puis en dehors de D^{**} les 6 t-points qui restent, et en posant $f_2 = 6, c_2 = 7$, on peut utiliser la proposition 4.11 :

- pour la *dègue*2, avec : $\alpha = 14$, $\beta = 21$, $p = 7$, $q = 13$,
- pour la *dîme*2, avec : $\alpha = 11$, $\beta = 18$, $p = 10$, $q = 10$.

$H'(22) \Rightarrow H'(24)$:

$T'^{**}(24) = (112; 149 : 12, 17, 0, 0, 0)$. En mettant en dehors de Q^{**} 10 des 17 t-points cocycliques, puis en dehors de D^{**} les 7 t-points qui restent plus les 132 t-points de la conique-grille, et en posant $f_2 = 12$, $c_2 = 4$, on peut utiliser la proposition 4.11 :

- pour la *dègue*2, avec : $\alpha = 20$, $\beta = 24$, $p = 14$, $q = 18$,
- pour la *dîme*2, avec : $\alpha = 11$, $\beta = 15$ (pas de grille).

7.4.3 $H'(n)$, $n \in \{34, 35, 36, 38\}$

$H'(32) \Rightarrow H'(34)$:

$T'^{**}(32) = (195; 20 : 5, 0, 0, 0, 0)$, $T'^{**}(34) = (216; 198 : 14, 0, 4, 2, 0)$. On met en dehors de D^{**} les 16 t-points des t-coniques-grilles de type 4 et de type (1, 2), de $T'^{**}(34)$. Puis on pose $f_2 = 18$, $c_2 = 3$, on peut alors utiliser la proposition 4.11 :

- pour la *dègue*2, avec : $\alpha = 31$, $\beta = 34$, $p = 21$, $q = 21$,
- pour la *dîme*2, avec : $\alpha = 16$, $\beta = 19$, $p = 14$, $q = 14$.

$H'(33) \Rightarrow H'(35)$:

$T'^{**}(33) = (205; 130 : 11, 0, 5, 0, 0)$, $T'^{**}(35) = (228; 220 : 15, 0, 3, 2, 0)$. On met en dehors de D^{**} $28 = 2 \times 15 - 2$ t-points parmi les 15×14 t-points de la t-conique-grille de type 15 de $T'^{**}(35)$. Puis on pose $f_2 = 18$, $c_2 = 5$, on peut alors utiliser la proposition 4.11 :

- pour la *dègue*2, avec : $\alpha = 30$, $\beta = 35$, $p = 20$, $q = 23$,
- pour la *dîme*2, avec : $\alpha = 15$, $\beta = 20$, $p = 13$, $q = 15$.

$H'(34) \Rightarrow H'(36)$:

$T'^{**}(36) = (241; 192 : 14, 0, 3, 2, 0)$. On met en dehors de D^{**} les 192 t-points de la t-conique-grille de type 14 de $T'^{**}(36)$. Puis on pose $f_2 = 21$, $c_2 = 4$, on peut alors utiliser la proposition 4.11 :

- pour la *dègue*2, avec : $\alpha = 32$, $\beta = 36$, $p = 21$, $q = 25$,
- pour la *dîme*2, avec : $\alpha = 14$, $\beta = 18$ (pas de grille).

$H'(36) \Rightarrow H'(38)$:

$T'^{**}(38) = (267; 211 : 15, 0, 0, 0, 1)$. On met en dehors de D^{**} $182 = 14 \times 13$

t-points parmi les 210 t-points de la t-conique-grille de type 15 de $T'^{**}(38)$.

Puis on pose $f_2 = 21$, $c_2 = 5$.

La *dègue* se ramène à la proposition 4.11, avec : $\alpha = 33$, $\beta = 38$, $p = 21$, $q = 26$.

Et la *dîme*, à la proposition 4.13, avec : $\alpha = 15$, $\beta = 20$, $\tau = 28 = 15 \times 14 - 14 \times 13$.

7.4.4 $H'(n)$, $n \in \{29, 31, 33, 41, 44, 45, 48, 51, 63, 65, 78\}$

On remarque, ici, que : $e^*(n+2) \leq e''(n)$. On spécialise alors $S'(n)$ comme dans la preuve de la proposition 6.1 en mettant en dehors de D^{**} les $e^*(n+2)(e^*(n+2) - 1)$ t-points de la conique-grille de type $e^*(n+2)$ de $S'(n)$. Puis, on exploite D^{**} . La dîme se ramène à la proposition 4.11 avec :

$$\alpha = n + 3 - l_2(n), \beta = n + 3 - f_2(n), u = 4l'(n-2) - u(n),$$

$$g = 2c_2(n) + e(n) - e^*(n+2)(e^*(n+2) - 1),$$

$$p = \max(c_2(n), l_1(n+2) - t_1(n+2) - e^*(n+2)),$$

$$q = l_1(n+2) - t_1(n+2) - e^*(n+2) + 2, h = \text{iquo}(q+1, 2).$$

De même, la *dègue* se ramène à la proposition 4.11 avec : $\alpha = n - c_2(n)$, $\beta = n$, $u = u(n)$, $g = f_2(n)l_2(n) - f_2(n) - e'(n) + e^*(n+2)(e^*(n+2) - 1)$, $p = l_2(n)$, $q = f_2(n)$, $h = \text{iquo}(q+1, 2)$.

Bibliographie

- [1] ALEXANDER (J.), HIRSCHOWITZ (A.). — Un lemme d'Horace différentiel : Applications aux singularités des hyperquartiques de \mathbb{P}^5 , J. of Alg. Geom. 1, n°3, p. 411-426 (1992).
- [2] BALLICO (E.). — On the postulation of disjoint rational curves in a projective space, Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino 44, 2, p. 207-249 (1986).
- [3] BALLICO (E.). — Generators for the Homogeneous Ideal of s general points in \mathbb{P}^3 , J. Algebra 106, p. 46-52 (1987).
- [4] EISENBUD (D.), VAND DE VEN (A.). — On the normal bundles of smooth rational space curves, Math. Ann. 256, p. 453-463 (1981).
- [5] HARRIS (J.). — Algebraic Geometry – A first course, Springer Verlag, (1992).
- [6] HARTSHORNE (R.). — Algebraic Geometry, Springer Verlag, (1977).
- [7] HARTSHORNE (R.). — Stable vector bundles of rank 2 on \mathbb{P}^3 , Math. Ann. 238, p. 229-280 (1978).
- [8] HARTSHORNE (R.), HIRSCHOWITZ (A.). — Droites en position générale dans l'espace projectif, Lecture Notes in Math. 961, p. 169-188 (1982).
- [9] HARTSHORNE (R.), HIRSCHOWITZ (A.). — Cohomology of a general instanton bundle, Ann. Sc. Écol. Norm. Sup. 4ème série, tome 15, p. 365-390 (1982).
- [10] HARTSHORNE (R.), HIRSCHOWITZ (A.). — Courbes rationnelles et Droites en position générale, Ann. Inst. Fourier 35 (4), p. 39-58 (1985).
- [11] HIRSCHOWITZ (A.). — La Méthode d'Horace pour l'interpolation à plusieurs variables, Manuscripta Math. 50, p. 337-388 (1985).

- [12] IDÀ (M.). — On the Homogeneous ideal of the generic union of lines in \mathbb{P}^3 , *J. für die reine und ang. Math.* 403, p. 67-153 (1990).
- [13] MUMFORD (D.). — Lectures on Curves on an Algebraic Surface *Annals of Math. Studies*, N° 59, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1966).
- [14] OKONEK (C.), SCHNEIDER (M.), SPINDLER (H.). — Vector bundles on complex projective spaces, Birkhauser Boston, (1980).
- [15] RAHAVANDRAINY (O.). — Sur la résolution des fibrés instantons généraux Thèse - Université de Nice (1991).
- [16] RAHAVANDRAINY (O.). — Résolution des fibrés instantons généraux *C. R. Acad. Sci. Paris*, tome 325, Série I, p. 189-192 (1997).