

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

G. BOURDAUD

D. KATEB

## **Calcul fonctionnel dans certains espaces de Besov**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 40, n° 1 (1990), p. 153-162

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1990\\_\\_40\\_1\\_153\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_1_153_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## CALCUL FONCTIONNEL DANS CERTAINS ESPACES DE BESOV

par G. BOURDAUD et D. KATEB

---

### Introduction.

En 1965, Igari [5] donnait une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction  $\phi$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  opère sur l'espace de Besov  $B_{2,2}^s(\mathbb{R})$  avec  $0 < s < 1/2$ .

Nous étendons ici cette caractérisation aux espaces de Besov  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  avec  $1 \leq p < \infty$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  et  $0 < s < 1/p$ . Plus précisément, nous montrons que si  $\phi$  est une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui opère sur  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  avec  $0 < s < 1/p$ , elle est nécessairement lipschitzienne.

#### *Notations; définitions.*

On désignera par  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  ou plus simplement  $B_{p,q}^s$  l'espace de Besov inhomogène, et  $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  l'espace de Besov homogène ( $s \in \mathbb{R}$ ,  $p, q \in [1, +\infty]$ ).

Pour la définition de ces espaces on pourra se référer à [7].

Dans cet exposé, nous ne considérerons que des espaces de fonctions à valeurs réelles.

**DÉFINITION.** — *Soit  $E$  un espace de fonctions et soit  $\phi$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $\phi$  opère sur  $E$ , si pour tout  $f$  appartenant à  $E$ , l'application  $\phi \circ f$  appartient aussi à  $E$ .*

*Mots-clés* : Espaces de Besov – Opérateurs non linéaires – Calcul fonctionnel – Fonctions lipschitziennes.

*Classification A.M.S.* : 46E35.

**Enoncé du théorème principal et résultats préliminaires.**

**THÉORÈME 1.** — Soient  $p, q, s$  des nombres réels tels que  $1 \leq p < \infty$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  et  $0 < s < 1/p$ . Soit  $\phi$  une fonction définie sur  $\mathbf{R}$  à valeurs réelles, alors la fonction  $\phi$  opère sur l'espace de Besov  $B_{p,q}^s(\mathbf{R}^n)$  si et seulement si elle est lipschitzienne telle que  $\phi(0) = 0$ .

La démonstration de ce théorème est basée sur le lemme suivant :

**LEMME.** — Pour tout pavé  $Q$  de  $\mathbf{R}^n$  et tout nombre positif  $a$ , on peut trouver un nombre fini  $N$  de pavés  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  disjoints deux à deux, contenus dans  $Q$  et tels que :  $\|\chi_E\|_{B_{p,q}^s} = a$  où  $E = \bigcup_{i=1}^N Q_i$  et  $\chi_E$  désigne la fonction caractéristique de  $E$ .

Précisons tout d'abord que pour un réel  $s$ ,  $0 < s < 1/p$  et pour tout pavé  $Q$  de  $\mathbf{R}^n$ , la fonction caractéristique de  $Q$  est dans l'espace de Besov  $B_{p,q}^s(\mathbf{R}^n)$ . Rappelons pour cela le théorème suivant [7], p. 115 :

**THÉORÈME 2.** — Soient  $0 < p \leq \infty$ ,  $0 < q \leq \infty$  et  $s > n(1/\min(p, 1) - 1)$ . Si  $M$  est un entier strictement plus grand que  $s$  alors la (quasi)-norme de l'espace  $B_{p,q}^s(\mathbf{R}^n)$  est équivalente à :

$$\|f\|_p + \sum_{j=1}^n \left( \int_{\mathbf{R}^1} |h|^{-sq} \|\Delta_{h,j}^M f\|_p^q dh / |h|^{1/q} \right)^{1/q},$$

où  $\Delta_{h,j} f = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x)$ .

A l'aide de ce théorème, il est facile de montrer que la fonction caractéristique du pavé  $Q$  est dans l'espace de Besov  $B_{p,q}^s(\mathbf{R}^n)$ .

**PROPOSITION 1.** — Soit  $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, a_i + t_i]$  où pour  $i = 1, \dots, n$ ,  $a_i \in \mathbf{R}$  et  $t_i \in \mathbf{R}^+$ ; et soit  $s$  un réel compris strictement entre 0 et  $1/p$ . Si  $f$  désigne la fonction caractéristique du pavé  $Q$  alors on a

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} = C \left( \prod_{i=1}^n t_i \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n 1/t_i^s \right)$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $p, q$  et  $s$ .

*Preuve.* — La norme Besov étant invariante par translation, il suffit de faire le calcul avec  $a_i = 0$  pour tout  $i$ .

Fixons  $j$  entre 1 et  $n$ , pour  $0 < h < t_j$

$$\begin{aligned} \|\Delta_{h,j} f\|_p^q &= \left\{ \int_{-h}^0 dx_j \int_{\substack{0 < x_i < t_i \\ i \neq j}} dx_1 \cdots d\tilde{x}_j \cdots dx_n \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_j-h}^{t_j} dx_j \int_{\substack{0 < x_i < t_i \\ i \neq j}} dx_1 \cdots d\tilde{x}_j \cdots dx_n \right\}^{q/p} \\ &= \left( 2h \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n t_i \right)^{q/p} ; \end{aligned}$$

et pour  $h > t_j$

$$\begin{aligned} \|\Delta_{h,j} f\|_p^q &= \left\{ \int_{-h}^{t_j-h} dx_j \int_{\substack{0 < x_i < t_i \\ i \neq j}} dx_1 \cdots d\tilde{x}_j \cdots dx_n \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{t_j} dx_j \int_{\substack{0 < x_i < t_i \\ i \neq j}} dx_1 \cdots d\tilde{x}_j \cdots dx_n \right\}^{q/p} \\ &= \left( 2 \prod_{i=1}^n t_i \right)^{q/p} . \end{aligned}$$

Si  $h$  est négatif c'est analogue. On obtient ainsi le résultat annoncé avec  $C = 2^{(1/p)+(1/q)}(1/q((1/p) - s) + 1/sq)^{1/q}$ .

Avant de faire la démonstration du théorème 1, rappelons la proposition suivante, dont la preuve est classique dans le cadre des algèbres de Banach [6], p. 237 :

PROPOSITION 2. — Soit  $E$  un sous-espace de  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  vérifiant les hypothèses suivantes :

(H<sub>1</sub>)  $E$  est muni d'une structure d'espace de Banach telle que l'injection canonique de  $E$  dans  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  soit continue.

(H<sub>2</sub>)  $E$  est invariant isométriquement par translation : si  $f$  appartient à  $E$  la fonction  $f_t$ , définie par  $f_t(x) = f(x - t)$ , appartient aussi à  $E$ .

(H<sub>3</sub>)  $E$  est un sous  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module de  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  : si  $f$  appartient à  $E$  et si  $\phi$  appartient à  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  alors  $\phi \cdot f$  appartient aussi à  $E$ .

Soit  $F$  une fonction qui opère sur  $E$  et telle que  $F(0) = 0$ . Alors pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ , il existe des nombres positifs  $\delta$  et  $M$  tels que pour toute fonction  $f$  de  $E$  à support dans  $K$  de norme inférieure à  $\delta$ , on ait

$$\|F \circ f\| \leq M .$$

*Preuve.* — Remarquons d'abord que pour tout  $\phi$  dans  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  l'application qui à tout  $f$  de  $E$  associe le produit  $\phi f$  est continue de  $E$  dans  $E$ . Cela découle en effet du théorème du graphe fermé. On désigne alors par  $M(\phi)$  la norme de cette application.

Montrons que, sauf pour un nombre fini de points  $x$  de  $\mathbf{R}^n$ , il existe un voisinage  $\Omega$  de  $x$  et des nombres positifs  $\varepsilon$  et  $M$  tels que, pour tout  $f$  de  $E$ , portée par  $\Omega$ , vérifiant  $\|f\| \leq \varepsilon$ , on ait  $\|F \circ f\| \leq M$ .

Supposons qu'il existe une infinité  $x_1, x_2, \dots$  de points de  $\mathbf{R}^n$  qui contredisent la propriété. Donnons-nous une suite d'ouverts  $V_j$  deux à deux disjoints tels que  $x_j$  soit dans  $V_j$ , des ouverts  $W_j$  tels que :

$$x_j \in W_j \subset \overline{W_j} \subset V_j$$

et pour chaque  $j$  une fonction  $\phi_j$  de  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  portée par  $V_j$  et égale à 1 sur  $W_j$ .

Alors, par hypothèse sur  $x_j$ , il existe  $f_j$  dans  $E$ , portée par  $W_j$  telle que  $\|f_j\| \leq 1/2^j$  et  $\|F \circ f_j\| > jM(\phi_j)$ .

Posons  $f = \sum_{j \geq 1} f_j$ , alors  $f$  appartient à  $E$  et pour presque tout  $x$  de  $\mathbf{R}^n$  on a  $f(x) = \sum_{j \geq 1} f_j(x)$ . On en déduit que pour presque tout  $x$ , on a  $\phi_j(x)F(f(x)) = F(f_j(x))$  et donc que, dans  $E$ ,  $\phi_j(F \circ f) = F \circ f_j$ ; mais alors  $\|F \circ f\| \geq \|F \circ f_j\|/M(\phi_j) > j$ ; ceci pour tout entier  $j$  ce qui est contradictoire.

Ceci dit, l'invariance de  $E$  par translation nous montre aussitôt que tous les points de  $\mathbf{R}^n$  ont la propriété ci-dessus.

Récouvrons maintenant  $K$  avec un nombre fini d'ouverts bornés  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$  tels qu'il existe  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ ;  $M_1, \dots, M_m$  positifs tels que  $\|F \circ f\| \leq M_j$  dès que  $f$  est portée par  $\Omega_j$  et de norme majorée par  $\varepsilon_j$ .

On considère un autre recouvrement de  $K$  par des ouverts  $U_1, \dots, U_m$  vérifiant  $\overline{U_j} \subset \Omega_j$ ; une partition  $C^\infty$  de l'unité  $(\varphi_j)$  subordonnée au recouvrement  $U_j$  et des fonctions  $\Psi_j$  de classe  $C^\infty$  portées par  $\Omega_j$  et égales à 1 sur  $U_j$ . On pose  $\varepsilon = \inf_j (\varepsilon_j/M(\Psi_j))$ . Si  $f$  est portée par  $K$  et de

norme inférieure à  $\varepsilon$ , on a  $F \circ f = \sum_{j=1}^m \phi_j(F \circ (f\Psi_j))$ ; or  $f\Psi_j$  est portée par

$\Omega_j$  et sa norme est majorée par  $\varepsilon_j$  on a donc

$$\|F \circ f\| \leq \sum_{j=1}^m \|\phi_j(F \circ (f\Psi_j))\| \leq \sum_{j=1}^m M(\phi_j)M_j = M.$$

**Démonstration du théorème 1 et du lemme.**

Soient  $x$  et  $x'$  deux nombres réels non nuls. D'après le lemme, il existe des pavés  $Q_1, \dots, Q_N$ , disjoints, contenus dans le cube  $Q = [0, 1]^n$ , vérifiant :  $|x| \|\chi_E\|_{B_{p,q}^s} = \delta/4$  où  $E$  est la réunion des  $N$  pavés  $Q_i$  ( $\delta$  étant la constante associée à  $Q$  suivant la proposition 2). De la même façon, pour  $Q_1$ , il existe des pavés  $P_1, \dots, P_K$  disjoints, contenus dans  $Q_1$  vérifiant :  $|x'| \|\chi_F\|_{B_{p,q}^s} = \delta/2$  où  $F$  est la réunion des  $K$  pavés  $P_i$ . Comme  $F$  est inclus dans  $E$  on a l'identité :

$$\phi(x\chi_E + x'\chi_F) - \phi(x\chi_E) = \chi_F(\phi(x + x') - \phi(x))$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\phi(x\chi_E + x'\chi_F) - \phi(x'\chi_E)\|_{B_{p,q}^s} &= |\phi(x + x') - \phi(x)| \|\chi_F\|_{B_{p,q}^s} \\ &\leq \|\phi(x\chi_E + x'\chi_F)\|_{B_{p,q}^s} + \|\phi(x\chi_E)\|_{B_{p,q}^s}. \end{aligned}$$

Puisque le support de  $x\chi_E$  est inclus dans  $Q$  et que sa norme Besov vaut  $\delta/4$ , donc majorée par  $\delta$ , on a, d'après la proposition 2,

$$\|\phi(x\chi_E)\|_{B_{p,q}^s} \leq M ;$$

de la même façon  $\text{Supp}(x\chi_E + x'\chi_F) \subset Q$  et  $\|x\chi_E + x'\chi_F\|_{B_{p,q}^s} \leq \delta/2 + \delta/2$  entraînent  $\|\phi(x\chi_E + x'\chi_F)\|_{B_{p,q}^s} \leq M$ . Finalement on obtient

$$|\phi(x + x') - \phi(x)| \leq 2M / \|\chi_F\|_{B_{p,q}^s} = 4M|x'|/\delta .$$

Si  $x' = 0$  c'est trivial; si  $x' \neq 0$  et  $x = 0$ , on considère alors  $|x'| \|\chi_E\|_{B_{p,q}^s} = \delta/2$  ce qui donne  $\|\phi(x'\chi_E)\|_{B_{p,q}^s} = |\phi(x')| \|\chi_E\|_{B_{p,q}^s} \leq M$  soit  $|\phi(x')| \leq 2M|x'|/\delta$ . Ce qui termine la démonstration du théorème.

La démonstration du lemme se fait en deux étapes. Dans la première, nous montrerons que la borne supérieure de l'ensemble constitué des normes Besov des fonctions caractéristiques de  $E$ , où  $E$  décrit les réunions finies de pavés disjoints contenus dans  $Q$ , est infinie. Ce qui entraînera, pour tout nombre positif  $a$ , l'existence d'une réunion finie  $E$  de pavés disjoints contenus dans  $Q$ , pour laquelle on ait :  $\|\chi_E\|_{B_{p,q}^s} > a$ .

Dans la seconde étape, nous montrerons la continuité de la fonction

$$I(r) = \|\chi_{E \cap ]-\infty, r]^n}\|_{B_{p,q}^s} .$$

Comme pour  $r$  négatif, grand en valeur absolue,  $E \cap ]-\infty, r]^n = \emptyset$ , on a  $\lim_{r \rightarrow -\infty} I(r) = 0$ ; d'autre part pour  $r$  positif suffisamment grand  $I(r) = \|\chi_E\|_{B_{p,q}^s}$  et donc  $\lim_{r \rightarrow +\infty} I(r) > a$  d'après la première étape.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure alors l'existence d'un nombre réel  $r$  pour lequel  $I(r) = a$ . En posant  $E' = E \cap ]-\infty, r]^n$ , on aura  $\|\chi_{E'}\|_{B_{p,q}^s} = a$ ; ce qui prouvera le lemme.

*Démonstration de la première étape.*

Soit  $Q$  un pavé de  $\mathbf{R}^n$  :  $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, a_i + t_i]$ .

Si nous supposons que la borne supérieure de l'ensemble constitué des normes Besov des fonctions caractéristiques de réunions finies de pavés disjoints inclus dans  $Q$  est finie, il existe alors une constante positive  $M$  vérifiant :  $\|\chi_E\|_{B_{p,q}^s} \leq M$  pour toute réunion finie  $E$  de pavés disjoints contenus dans  $Q$ .

Cette majoration reste encore valable pour toute fonction simple  $f$  portée par  $Q$ , positive, majorée par 1. En effet : soit  $f$  une telle fonction; il existe donc une suite croissante de nombres  $(\alpha_i)$ ;  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ ;  $1 \leq i \leq N$ ; et des pavés  $Q_i$ ;  $1 \leq i \leq N$  disjoints deux à deux tels que  $f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{Q_i}$ ;

en posant  $E_k = \bigcup_{i=k}^N Q_i$  et  $\beta_k = \alpha_k - \alpha_{k-1}$ ;  $1 \leq k \leq N$ ; on peut alors écrire

$$f = \sum_{i=1}^N \beta_i \chi_{E_i} \text{ où } \sum_{i=1}^N \beta_i \leq 1 \text{ [1], p. 39.}$$

Si  $f$  est maintenant une fonction de  $B_{p,q}^s(\mathbf{R}^n)$ , portée par  $Q$ , positive et majorée par 1, on a à nouveau le même type de majoration. En effet,  $f$  étant dans  $L^p(\mathbf{R}^n)$ , il existe une suite de fonctions simples  $(f_k)$ , à support dans  $Q$ , telles que  $0 \leq f_k \leq f$  et  $(f_k)$  converge presque-partout vers  $f$ .

D'après ce qui précède on a  $\|f_k\|_{B_{p,q}^s} \leq M$  ce qui entraîne que  $\|f_k\|_p \leq M$ . En appliquant le théorème de la convergence dominée on a alors  $(f_k)$  converge vers  $f$  dans  $L^p(\mathbf{R}^n)$  et  $\|f\|_p = \lim_k \|f_k\|_p \leq M$ .

D'autre part pour  $h$  fixé dans  $\mathbf{R}^n$ , l'opérateur de différence finie :  $\Delta_h : L^p(\mathbf{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbf{R}^n)$  défini par  $\Delta_h(f)(x) = f(x+h) - f(x)$  est linéaire continu car  $\|\Delta_h f\|_p \leq 2\|f\|_p$ . On a donc la convergence de la suite  $(\Delta_h f_k)$  vers  $\Delta_h f$  dans  $L^p(\mathbf{R}^n)$  et de plus  $\|\Delta_h f\|_p = \lim_k \|\Delta_h f_k\|_p$ .

Alors pour tout  $h$  non nul la suite  $(\|\Delta_h f_k\|_p / |h|^s)$  converge dans  $\mathbf{R}$  vers  $\|\Delta_h f\|_p / |h|^s$ . Comme de plus la norme Besov homogène des fonctions  $f_k$  est majorée par  $M$ , on a en appliquant le lemme de Fatou dans  $(\mathbf{R}^n, dh/|h|^n)$ ,  $\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \leq M$  et finalement  $\|f\|_{B_{p,q}^s} \leq 2M$ .

Si on considère cette fois une fonction  $f$  de  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ , à valeurs complexes, portée par  $Q$  et majorée en module par 1 on a  $\|f\|_{B_{p,q}^s} \leq 8M$ .

Il suffit pour le voir d'écrire :  $f = (f_1^+ - f_1^-) + i(f_2^+ - f_2^-)$  : chacune des fonctions  $f_i^+$  et  $f_i^-$ ,  $i = 1, 2$ , est positive, portée par  $Q$  et majorée par 1 ; elles restent bien sûr dans l'espace de Besov. En effet, on remarque que d'une part  $\operatorname{Re} f = (f + \bar{f})/2$  et  $\operatorname{Im} f = (f - \bar{f})/2i$ , et que d'autre part, comme  $0 < s < 1$ , si  $f$  est dans l'espace de Besov,  $f^+$  et  $f^-$  y sont aussi. Donc, pour chacune de ces fonctions on a l'estimation  $\|f_i\|_{B_{p,q}^s} \leq 2M$ , ce qui donne bien  $\|f\|_{B_{p,q}^s} \leq 8M$ .

Ceci étant, nous allons maintenant construire une suite de fonctions  $f_k$ , à valeurs complexes, appartenant à l'espace de Besov, portées par  $Q$ , majorées en module par 1 et dont la suite des normes n'est pas bornée. Ceci contredira la conclusion ci-dessus et mettra donc en défaut l'hypothèse faite au départ.

Pour  $k \in \mathbb{N}^n$ , et  $x \in \mathbb{R}^n$ , on pose  $f_k(x) = \chi_Q(x) \exp(ik \cdot x)$ . Pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}^n$ ,  $f_k$  appartient à  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  puisque  $\chi_Q$  appartient à cet espace (proposition 1) et que  $e^{ikx}$  en est un multiplicateur ( $e^{ikx}$  ayant toutes ses dérivées bornées, est dans  $B_{\infty,\infty}^m(\mathbb{R}^n)$  qui pour  $m > \max(s, n/p - s)$  est constitué de multiplicateurs de  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  [7], p. 140).

D'autre part, pour  $k = (k_1, \dots, k_n)$  dans  $\mathbb{N}^n$  tel que  $k_1 > \pi/2t_1$ , et pour  $q < \infty$ , on a

$$\begin{aligned} \|f_k\|_{B_{p,q}^s}^q &\geq \int_0^{\pi/2k_1} h^{-sq} \|\Delta_{h,1} f_k\|_p^q \frac{dh}{h} \\ &\geq \int_0^{\pi/2k_1} h^{-sq} \left( \int_0^{t_1-h} dx_1 \int_{\substack{0 < x_i < t_i \\ i \neq 1}} | \exp(ik_1 h) - 1|^p dx_2 \cdots dx_n \right)^{q/p} \frac{dh}{h} \\ &\geq \int_0^{\pi/2k_1} h^{-sq} ((t_1 - h)t_2 \cdots t_n | \exp(ik_1 h) - 1|^p)^{q/p} \frac{dh}{h} \\ &\geq \int_0^{\pi/2k_1} h^{-sq} \left( (t_1 - \frac{\pi}{2k_1}) t_2 \cdots t_n \right)^{q/p} \left( \frac{2k_1 h}{\pi} \right)^q \frac{dh}{h} \text{ (en utilisant le} \\ &\quad \text{fait que } |e^{ix} - 1| \frac{\pi}{2} > x \text{ si } x \text{ est compris entre } -\pi/2 \text{ et } \pi/2) \\ &\geq C(Q, p, q) \left( t_1 - \frac{\pi}{2k_1} \right)^{q/p} k_1^q \int_0^{\pi/2k_1} h^{q(1-s)} \frac{dh}{h} \\ &\geq C'(Q, p, q) \left( t_1 - \frac{\pi}{2k_1} \right)^{q/p} k_1^q \left( \frac{\pi}{2k_1} \right)^{q(1-s)} \\ &\geq C'(Q, p, q) \left( \frac{\pi}{2} \right)^{q(1-s)} \left( t_1 - \frac{\pi}{2k_1} \right)^{q/p} k_1^q. \end{aligned}$$

Ceci contredit le fait que  $\|f_k\|_{B_{p,q}^s} \leq 8M$ . Si  $q = +\infty$ , on a

$$\begin{aligned} \|f_k\|_{\dot{B}_{p,\infty}^s} &= \sum_{j=1}^n \sup\{|h|^{-s} \|\Delta_{h,j} f_k\|_p\}; h \in \mathbf{R} \\ &\geq \sup\left\{|h|^{-s} \left(\int_{\substack{0 < x_1 < t_1 - h \\ 0 < x_j < t_j; j \neq 1}} |e^{ihk_1} - 1|^p dx\right)^{1/p}; h \in \mathbf{R}\right\} \\ &\geq C \sup\{h^{-s} (k_1 h 2\pi); 0 < h < \frac{\pi}{2k_1}\} > C' k_1 \left(\frac{\pi}{2k_1}\right)^{1-s} > C' k_1^s. \end{aligned}$$

□

*Démonstration de la seconde étape.*

Pour tout réel  $r$  posons  $E_r = E \cap ]-\infty, r[$  et  $\chi_r = \chi_{E_r}$ ;  $I$  s'écrit alors

$$I(r) = \|\chi_r\|_{B_{p,q}^s} = \|\chi_r\|_{\dot{B}_{p,q}^s} + \|\chi_r\|_p.$$

L'application  $I_1$ , définie par  $I_1(r) = \|\chi_r\|_p$ , est continue sur  $\mathbf{R}$ ; en effet, si  $(r_k)$  est une suite de nombres réels convergeant vers un réel  $r$ , on a  $\chi_{r_k} \in L^p(\mathbf{R}^n)$  et  $\chi_{r_k} \leq \chi_E$  car  $E_{r_k} \subset E$ ; de plus la suite  $(\chi_{r_k})$  converge presque partout vers  $\chi_r$ ; d'après le théorème de Lebesgue, la convergence a lieu dans  $L^p(\mathbf{R}^n)$  et  $\lim_k \|\chi_{r_k}\|_p = \|\chi_r\|_p$ .

Pour montrer la continuité de l'application  $I_2$  définie par  $I_2(r) = \|\chi_r\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$ , il suffit en fait d'établir celle de l'application  $J_E$  de  $\mathbf{R}$  dans  $B_{p,q}^s(\mathbf{R}^n)$  définie par  $J_E(r) = \chi_r$ .

De plus, en remarquant que, si  $E$  est une réunion finie de pavés disjoints  $Q_i$ , contenus dans  $Q$  on a  $\chi_r = \sum \chi_{Q_i \cap ]-\infty, r[}$ , il suffit alors de voir la continuité de  $J_E$  où  $E$  est un pavé de  $\mathbf{R}^n$ .

Soit donc  $E$  un pavé de  $\mathbf{R}^n$ ,  $E = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ ; si  $a$  est un réel inférieur au minimum des  $a_i$ ,  $E$  est alors inclus dans le cube  $[a, +\infty[^n$  ce qui entraîne que  $\chi_r = \chi_E \cdot \chi_{[a,r]}$ . Comme la fonction caractéristique de  $E$  est un multiplicateur de  $B_{p,q}^s(\mathbf{R}^n)$  ( $\chi_E$  peut toujours s'écrire comme produit de fonctions caractéristiques de demi-espaces de  $\mathbf{R}^n$ , or on sait [7], p. 158 que celles-ci sont des multiplicateurs), on va prouver simplement que l'application notée  $J$  qui à  $r$  associe  $\chi_{[a,r]}$  est continue.

Dans un premier temps on va se placer en dimension  $n = 1$ . Soit  $r_0$  un réel strictement supérieur à  $a$ . Si  $r$  est dans un petit voisinage de  $r_0$ , on a  $J(r) - J(r_0) = \pm \chi_{[r_0,r]}$  et donc

$$\|J(r) - J(r_0)\|_{B_{p,q}^s} = C \cdot |r - r_0|^{(1/p)-s};$$

comme  $s < 1/p$  on a la continuité de  $J$  sur  $]a, +\infty[$ . Lorsque  $r$  est dans un voisinage à droite de  $a$ ,

$$\|J(r) - J(a)\|_{\dot{B}_{p,q}^s} = \|\chi_{[a,r]}\|_{\dot{B}_{p,q}^s} = C(r - a)^{(1/p)-s};$$

si  $r$  est dans un voisinage à gauche de  $a$ , on a

$$J(a) - J(r) = 0.$$

En dimension  $n$  quelconque, pour  $r_0 > a$  et  $r$  voisin de  $r_0$ , (on supposera par exemple  $r > r_0$ ) la différence entre  $J(r)$  et  $J(r_0)$  est la fonction caractéristique du complémentaire de  $[a, r_0]^n$  dans  $[a, r]^n$  qu'on notera  $D$ . Cet ensemble n'est plus un pavé, on va alors le découper en pavés disjoints. On note  $D_k$  l'un des pavés constitué des points de  $\mathbb{R}^n$  qui ont  $k$  coordonnées dans  $[a, r_0]$  et les  $(n - k)$  autres dans  $[r_0, r]$ .

Pour  $k$  fixé dans  $\{0, \dots, n - 1\}$  on a exactement  $C_n^k$  pavés  $D_k$  et ces pavés sont évidemment disjoints. En notant  $\cup D_k$  la réunion, à  $k$  fixé, de tous ces pavés,  $D$  est alors la réunion pour  $k$  variant de 0 à  $n - 1$  de  $\cup D_k$ . On a alors  $J(r) - J(r_0) = \sum \chi_{D_k}$  où la sommation porte sur  $k$  ainsi que sur le nombre de  $D_k$  (à  $k$  fixé); d'où

$$\begin{aligned} \|J(r) - J(r_0)\|_{\dot{B}_{p,q}^s} &\leq \sum \|\chi_{D_k}\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \\ &\leq C \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (r - r_0)^{(n-k)/p} (r_0 - a)^{k/p} ((n - k)/(r - r_0)^s + k/(r_0 - a)^s) \\ &\leq C \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \left\{ (r - r_0)^{(n-k)/p-s} (n - k) (r_0 - a)^{(k/p)-s} \right. \\ &\quad \left. + k (r - r_0)^{(n-k)/p} (r_0 - a)^{(k/p)-s} \right\}. \end{aligned}$$

Puisque  $(n/p) - s > 0$  et pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq n - 1$ ,  $(n - k)/p - s > (1/p) - s > 0$  et  $(n - k)/p > 1/p > 0$ , chacun des termes de la somme tend vers 0 quand  $r$  tend vers  $r_0$ .

Si  $r > a$ , on a  $J(r) - J(a) = J(r)$  et  $\|J(r)\|_{\dot{B}_{p,q}^s} = Cn(r - a)^{(n/p)-s}$ ; si  $r < a$ , on a  $J(r) = J(a) = 0$ . Ce qui prouve bien la continuité de  $J$  et termine la démonstration de la seconde étape.  $\square$

### Conclusion.

Le théorème 1 est probablement vrai sous l'hypothèse naturelle  $0 < s < \inf(1, n/p)$ . Cependant, pour  $s \geq 1/p$ , les fonctions caractéristiques de pavés n'appartiennent plus à  $B_{p,q}^s$  et notre démonstration ne s'étend pas de façon immédiate à des fonctions caractéristiques lissées.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BENNET et R. SHARPLEY, *Interpolation of operators*, Academic Press, 1988.
- [2] J. BERGH et J. LÖFSTRÖM, *Interpolation spaces*, Springer, 1976.
- [3] G. BOURDAUD, *Thèse d'état*, Orsay (1983).
- [4] P. BRENNER, V. THOMEE et L. WAHLBIN, *Besov spaces and applications to differences methods for initial value problems*, L.N.M. 434, Springer (1975).
- [5] S. IGARI, *Sur les fonctions qui opèrent sur l'espace  $\widehat{A}^2$* , Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 15-2 (1965), 525-533.
- [6] Y. KATZNELSON, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Dover, 1976.
- [7] H. TRIEBEL, *Theory of Function Spaces*, Birkhauser, 1983.

Manuscrit reçu le 5 juin 1989.

G. BOURDAUD et D. KATEB,  
Université Paris VII  
C.N.R.S. U.A. 122  
Théories géométriques  
Tour 45-55, 5e étage-Bureau 08  
2, Place Jussieu  
75251 Paris Cedex 05 (France).

D. KATEB,  
Laboratoire d'analyse fonctionnelle  
Institut des sciences exactes  
Département de mathématiques  
Université d'Oran Es-Sénia (Algérie).