

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

F. BERTELOOT

GÉRARD CŒURÉ

**Domaines de  $C^2$ , pseudoconvexes et de type fini ayant un groupe non compact d'automorphismes**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 41, n° 1 (1991), p. 77-86

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1991\\_\\_41\\_1\\_77\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_1_77_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## DOMAINES DE $\mathbf{C}^2$ , PSEUDOCONVEXES ET DE TYPE FINI AYANT UN GROUPE NON COMPACT D'AUTOMORPHISMES

par F. BERTELOOT & G. COEURÉ

---

### Introduction.

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbf{C}^n$ , à frontière lisse, ayant un groupe d'automorphismes  $Aut(\Omega)$  non compact. Il est bien connu qu'il existe une suite  $h_n$  dans  $Aut(\Omega)$ , uniformément convergente sur tout compact vers une application  $h$  holomorphe de  $\Omega$  dans la frontière  $\partial\Omega$ . De plus, si  $\partial\Omega$  est de type fini au sens de Catlin [2], la frontière ne peut contenir de courbe holomorphe, il en résulte que  $h(\Omega)$  est réduit à un point qui sera noté  $\{a\}$  dans la suite; lorsque  $\{a\}$  est un point de stricte pseudoconvexité, Rosay [8] démontre que  $\Omega$  est biholomorphe à la boule euclidienne.

Pour construire un biholomorphisme de  $\Omega$  sur un bon domaine modèle, on utilise la méthode de dilatation de Pinčuk. Lorsque  $\Omega$  est dans  $\mathbf{C}^2$ , pseudo-convexe et à frontière analytique, Bedford et Pinčuk [1] démontrent que  $\Omega$  est biholomorphe à un domaine de la forme  $\{\operatorname{Re} w + |z|^{2m} < 0\}$  où  $2m$  est le type du point limite d'un groupe parabolique à un paramètre que contient  $Aut(\Omega)$ .

Notre généralisation aux domaines de type fini nous a conduit à préciser une propriété d'attraction de disques analytiques (cf. Théorème 1). Cette propriété est la clef d'un argument de famille normale qui permet de

compléter la démonstration de la proposition 2.3 dans l'article de Bedford-Pinčuk [1].(\*)

L'article est organisé de la façon suivante : dans la première partie, nous décrivons les coordonnées introduites par Fornæss et Sibony dans [3]. Ces coordonnées nous permettent d'énoncer la propriété d'attraction de disques analytiques avec précision; ceci fait l'objet de la seconde partie. Nous terminons en appliquant ces résultats à la démonstration du théorème principal (théorème 2).

### 1. Coordonnées canoniques de Fornæss-Sibony [3].

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbf{C}^2$ , à frontière lisse au voisinage de  $\{a\}$ ; il existe un voisinage  $U$  de  $\{a\}$  tel que

- Il existe un système de coordonnées holomorphes dans lequel  $\Omega \cap U = \{(z, w) ; r(w, z) = \operatorname{Re} w + \theta(z, \operatorname{Im} w) < 0\}$ , où  $\theta$  s'annule au moins à l'ordre 2 à l'origine et est  $C^\infty$ .

- Pour chaque entier  $k \geq 1$ , il existe  $\Phi : U \times \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ ,  $C^\infty$  et vérifiant :

- $\Phi(\xi, \bullet)$  est polynomiale et  $\Phi(\xi, \xi) = 0$ ;

- Il existe un voisinage  $V$  de  $\{a\}$  et  $V_\xi$  de  $\xi$  tels que  $V \subset V_\xi \subset U$  et  $\Phi(\xi, \bullet)$  est un biholomorphisme de  $V_\xi$  sur la boule unité  $B$  de  $\mathbf{C}^2$ , quel que soit  $\xi \in V$ ;  $-p : (\xi, t) \rightarrow \Phi(\xi, \bullet)^{-1}(0, t)$  est un difféomorphisme de  $(\partial\Omega \cap V) \times ]-1, 1[$  sur  $V$ ;

$$- r \circ \Phi(\xi, \bullet)^{-1} - r(\xi) \simeq \rho = \operatorname{Re} w + \sum_2^{2k} P_l(\xi, z) + \operatorname{Im} w \sum_1^k Q_l(\xi, z) + \sigma_{2k+1}(\xi, z) + \sigma_2(\xi, \operatorname{Im} w) + \operatorname{Im} w \sigma_{k+1}(\xi, z),$$

sur  $V \times B$ ;  $P_l$  et  $Q_l$  sont des polynômes homogènes en  $z$  et  $\bar{z}$  de  $d^\circ l$ ,  $\sigma_i$  s'annule au moins à l'ordre  $i$  en  $z$  ou  $\operatorname{Im} w$ .  $P_l$ ,  $Q_l$  et  $\sigma_i$  sont  $C^\infty$ .  $P_l(\xi, \bullet)$  et  $Q_l(\xi, \bullet)$  sont sans terme harmonique.

De plus :

Si  $\{a\}$  est de type  $2k$  au sens de Catlin :  $\inf_\xi \sup_l \|P_l(\xi, \bullet)\| > 0$ , où  $\| \cdot \|$  désigne une norme sur les polynômes de  $d^\circ \leq 2k$ .

Si,  $\Omega$  est pseudo-convexe, on a sur  $(\partial\Omega \cap V) \times B$  :

---

(\*) Bedford et Pinčuk viennent de généraliser leurs résultats aux domaines pseudo-convexes, de type fini dans  $\mathbf{C}^n$  dont la forme de Levi satisfait une propriété qui est toujours réalisée dans  $\mathbf{C}^2$  (communication des auteurs).

$$(1.1) \sum_1^k \|Q_l(\xi, \bullet)\| |z|^l \leq |z| \left[ \sum_2^{2k} \|P_l(\xi, \bullet)\| |z|^l \right]^{1/2}.$$

(1.2) Il existe une constante  $L$  et  $P(\xi, z)$  sousharmonique en  $z$  tel que :

$$\operatorname{Re} (w + Lw^2) + P(\xi, z) \leq - \left[ \sum_2^{2k} \|P_l(\xi, z)\| |z|^l + (\operatorname{Im} w)^2 \right]$$

sur  $(\partial\Omega \cap V) \times \Phi(\xi, \Omega \cap V)$ .

On utilisera les bi-disques  $R$  et  $Q$  de Catlin définis ainsi :

$$R(\xi, \varepsilon) = \{ |z| < \tau(\xi, \varepsilon), |w| < \varepsilon \}$$

$$Q(\xi, \varepsilon) = \Phi(\xi, \bullet)^{-1}(R(\xi, \varepsilon))$$

où  $\tau(\xi, \varepsilon) = \min \left( \frac{\varepsilon}{\|P_l(\xi, \bullet)\|} \right)^{1/l}, l = 2, \dots, 2k.$

On sait d'après les travaux de Catlin [2]

$$(1.3) \xi' \in Q(\xi, \varepsilon) \Rightarrow \tau(\xi', \varepsilon) \simeq \tau(\xi, \varepsilon).$$

En fait, la fonction  $\tau$  est définie par Catlin dans un autre système de coordonnées; mais d'après la proposition 1.3 de [2],  $\tau$  est intrinsèque à une équivalence près.

## 2. Un résultat sur le contrôle de disques analytiques dans $\Omega \cap V$ .

Soit  $\Delta$  le disque unité de  $\mathbf{C}$  et  $\Delta_r$  celui de rayon  $r$ .

**THÉORÈME 1.** — *Il existe  $\varepsilon_0 > 0$ , un voisinage  $V'$  de  $a$  relativement compact dans  $V$  et une fonction  $c(r)$  définie sur  $[0, 1]$  tels que :*

*pour tout disque analytique  $h : \Delta \rightarrow \Omega \cap V'$ , on ait :*

$$\left. \begin{array}{l} h(0) \in Q(\xi, \varepsilon) \\ \xi \in \partial\Omega \cap V' \\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\Delta_r) \subset Q(\xi, c(r)\varepsilon).$$

*Démonstration.* — Nous procédons en trois étapes.

*1ère étape :*

Soit  $\varepsilon_0$  tel que  $Q(\xi, \varepsilon)$  soit contenu dans  $V$ , pour tout  $\xi$  dans  $V'$  et tout  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ; on peut alors considérer  $\xi(h) = (p^{-1})_1(h(0))$  et  $t(h) = (p^{-1})_2(h(0))$ , on a alors :  $\Phi(\xi(h), h(0)) = (0, t(h))$  avec  $-\varepsilon < t(h) < 0$  et  $\xi(h) \in \partial\Omega \cap V$ .

Cette partie de la démonstration consiste à établir qu'il existe une fonction  $c(r)$  sur  $[0, 1[$  tel que :  $\Phi(\xi(h), h(\Delta_r))$  est contenu dans le polydisque :

$$\{|z| < \tau(\xi(h), c(r)\varepsilon), |w| < c(r)\sqrt{\varepsilon}\}.$$

Dans le cas contraire, il existerait  $r$  dans  $[0, 1[$ , une suite  $h_n$  de disques analytiques, une suite  $\varepsilon_n$  et une suite  $\xi_n$  dans  $\partial\Omega \cap V$  tels que, si l'on considère  $\tilde{h}_n = \Phi(\xi_n, h_n)$ , on ait :

$$- \tilde{h}_n(0) = (0, t_n) \text{ avec } 0 > t_n > -\varepsilon_n;$$

-  $\tilde{h}_n(\Delta_r)$  n'est pas contenu dans le bi-disque  $\{|z| \leq \tau(\xi_n, n\varepsilon_n), |w| \leq n\sqrt{\varepsilon_n}\}$  qui contient le bi-disque  $n^{\frac{1}{2k}} \cdot \{|z| \leq \tau(\xi_n, \varepsilon_n), |w| \leq \sqrt{\varepsilon_n}\}$ .

Considérons la fonction  $\varphi_n(z, w) = \left(\frac{z}{\tau(\xi_n, \varepsilon_n)}\right)^{l_n} + \frac{(\operatorname{Im} w)^2}{\varepsilon_n}$ , où  $l_n$  est le premier entier qui vérifie  $\tau(\xi_n, \varepsilon_n) = \left(\frac{\varepsilon_n}{\|P_{l_n}(\xi_n, \bullet)\|}\right)^{1/l_n}$ , ( $2 \leq l_n \leq 2k$ ).

D'après (1.2), on a :

$$(i) \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(w + Lw^2) + P(\xi_n, z) \leq -[\|P_{l_n}(\xi_n, \bullet)\| |z|^{l_n} + |\operatorname{Im} w|^2] \\ \leq -\varepsilon_n \varphi_n(z, w), \\ \text{sur l'ouvert } \Omega(\xi_n) = \Phi(\xi_n, \Omega \cap V). \end{cases}$$

Les travaux de N. Sibony [9] nous apprennent que toute fonction  $u$  sur la frontière de  $\Omega(\xi_n)$  se prolonge, par la méthode des enveloppes de Perron-Bremmerman, en une fonction  $\tilde{u}$  plurisousharmonique sur  $\Omega(\xi_n)$  et continue sur  $\overline{\Omega(\xi_n)}$ .

Il résulte alors de (i) :

$$(ii) \quad -2\widetilde{\varphi}_n(\tilde{h}_n(0)) \geq -2.$$

La construction de la fonction  $\rho_n$  qui suit s'inspire d'une idée de N. Sibony dans [9].

La fonction  $g_n = -2\widetilde{\varphi}_n + \varphi_n + |z|^2 + |w|^2$  est strictement p.s.h. continue sur  $\Omega(\xi_n)$  qui est pseudo-convexe; étant donnée une fonction  $\theta_n$  strictement positive, continue sur  $\Omega(\xi_n)$  et tendant vers 0 au bord de  $\Omega(\xi_n)$ , il existe, d'après un théorème de Richberg [7] (voir aussi [4], page 38), une fonction  $f_n, C^\infty$ , strictement p.s.h. sur  $\Omega(\xi_n)$  et telle que  $|f_n - g_n| < \theta_n$ .

Supposons de plus que les  $\theta_n$  soient choisis tels que  $\theta_n(\tilde{h}_n(0)) \leq 1$  et posons  $\rho_n = f_n + \varphi_n$ . Cette fonction est p.s.h. sur  $\Omega(\xi_n)$  et on a :

$$\rho_n|_{\partial\Omega(\xi_n)} = (|z|^2 + |w|^2)|_{\partial\Omega(\xi_n)};$$

ainsi  $\rho_n$  est bornée supérieurement sur  $\Omega(\xi_n)$  par une constante indépendante de  $n$

$$\rho_n(\tilde{h}_n(0)) \geq -\widetilde{2\varphi}_n(\tilde{h}_n(0)) - 1 \geq -3.$$

En utilisant la formule de Gauss, on obtient :

$$\int_0^{r_0} \frac{dt}{t} \int_{|\tau|<t} \Delta[\rho_n \circ \tilde{h}_n] d\tau d\bar{\tau} = \int_{|\tau|=r_0} \rho_n \circ \tilde{h}_n - \rho_n \circ \tilde{h}_n(0),$$

où  $r < r_0 < 1$ .

Il en résulte que  $\int_{|\tau| \leq r'} \Delta[\rho_n \circ \tilde{h}_n] d\tau d\bar{\tau}$  est borné supérieurement par une constante indépendante de  $n$ , pour tout  $r' \in ]r, r_0[$ .

Posons  $\left( \frac{\tilde{h}_{n,1}}{\tau(\xi_n, \varepsilon_n)}, \frac{\tilde{h}_{n,2}}{\sqrt{\varepsilon_n}} \right) = H_n$ . On aurait :

$$\int_{|\tau|<r'} \Delta[(|z|^{l_n} + (\text{Im } w)^2) \circ H_n] d\tau d\bar{\tau} \text{ borné supérieurement en } n$$

et  $\|H_n\|_{\Delta_r} \rightarrow \infty$ .

En multipliant  $H_n$  par une suite convenable tendant vers 0, on aurait une suite  $K_n$  de disques analytiques définis sur  $\Delta_{r'}$  tels que :

$$\int_{K_n(\Delta_{r'})} \Delta[|z|^{l_n} + (\text{Im } w)^2] d\tau d\bar{\tau} \leq \int_{|\tau| \leq r'} \Delta[(|z|^{l_n} + (\text{Im } w)^2) \circ K_n] d\tau d\bar{\tau} \leq \frac{1}{2^n}$$

et  $\|K_n\|_{\Delta_{r'}} \rightarrow \infty$ .

Les laplaciens de  $|z|^{l_n}$  et  $(\text{Im } w)^2$  sont uniformément bornés inférieurement par 1 sur un compact dont on peut choisir la mesure égale à 3. Les composantes de  $K_n$  dont on prend la restriction à  $\Delta_{r'}$  prennent donc leurs valeurs dans  $\mathbf{C}$  privé d'une partie de mesure positive; la suite  $K_n$  est donc une famille normale sur  $\Delta_{r'}$ , ce qui est contradictoire avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_n\|_{\Delta_{r'}} = \infty$  et  $K_n(0) = \mathcal{O}(H_n(0)) = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_n})$ .

2ème étape :

On affine la "majoration" obtenue : si  $h$  satisfait les mêmes hypothèses que précédemment alors :  $\phi[\xi(h), h(\Delta_r)] \subset \{|z| < \tau(\xi(h), c(r)\varepsilon), |w| < c(r)\varepsilon\}$  (où  $c$  désigne une nouvelle fonction).

On notera plus brièvement  $\xi$  pour  $\xi(h)$  et  $\phi$  pour  $\phi(\xi(h), \bullet)$ . Désignons par  $g$  ( $g = (g_1, g_2)$ ) le disque  $\phi \circ h$ . Soit  $r$  et  $r'$  tels que  $0 < r < r' < 1$ .

D'après la 1ère étape, on a :

$$(1) \quad |t| \leq r' \Rightarrow |g_1(t)| \leq \tau(\xi, c(r')\varepsilon) \text{ et } |g_2(t)| \leq c(r')\sqrt{\varepsilon}.$$

d'où

$$(2) \quad |t| \leq r' \Rightarrow \sum_2^{2k} |P_l(\xi, g_1(t))| \leq c(r')\varepsilon.$$

Tenant compte de (1.1) et de  $\tau(\xi, c(r')\varepsilon) \lesssim (c(r')\varepsilon)^{1/2k}$ , on a aussi

$$(3) \quad |t| \leq r' \Rightarrow \sum_1^k |Q_l(\xi, g_1(t))| \lesssim (c(r')\varepsilon)^{1/2+1/2k}.$$

(1), (2) et (3) permettent alors de déduire de  $\rho \circ g < 0$  la majoration

$$(4) \quad |t| \leq r' \Rightarrow \operatorname{Re} g_2(t) \leq M c(r')\varepsilon$$

où  $M$  est une constante convenable ne dépendant que de la taille du voisinage  $V'$  de  $a$ .

L'ensemble des disques holomorphes  $f$  de  $\Delta$  dans  $\{\operatorname{Re} w < 0\}$  tels que  $f(0) = -1$  est relativement compact pour la topologie de Montel. Il existe donc une fonction  $A : [0, 1[ \rightarrow \mathbf{R}^+$  telle que l'on ait pour ces disques :  $\sup_{|u| \leq \lambda} |f(u)| \leq A(\lambda)$ .

La majoration (4) permet d'appliquer cette remarque au disque  $f$  défini par  $f(u) = \varepsilon^{-1}[1 + M c(r')]^{-1}(g_2(r'u) - M c(r')\varepsilon)$ . Le choix de  $\lambda = r/r'$  fournit l'estimation annoncée.

3ème étape :

On considère enfin le cas d'un disque quelconque.

Puisque  $h(0) \in Q(\xi, \varepsilon)$  on a  $|r \circ h(0)| \lesssim \varepsilon$ . D'autre part,

$$r \circ h(0) = r[(\phi(\xi(h), \bullet))^{-1}(0, t(h))] \lesssim -t(h).$$

Ainsi  $\|h(0) - \xi(h)\| \lesssim \varepsilon$  et, d'après la 2ème étape :

$$(1) \quad h(\Delta_r) \subset Q(\xi(h), c(r)\varepsilon).$$

En utilisant à nouveau l'appartenance de  $h(0)$  à  $Q(\xi, \varepsilon)$ , on observe que  $\xi(h) \in Q(\xi, c_1\varepsilon)$  pour une constante  $c_1$  convenable. On a donc, d'après 1.3 :

$$(2) \quad Q(\xi(h), c(r)\varepsilon) \subset Q(\xi, c_2 c(r)\varepsilon)$$

où  $c_2 > 0$  est une constante indépendante de  $\xi$ ,  $h$  et  $\varepsilon$ .

La conclusion résulte immédiatement de (1) et (2).

*Remarque.* — Les techniques utilisées dans cette démonstration permettent aussi d'établir qu'un domaine  $\Omega$  de  $\mathbf{C}^2$ , défini par  $\Omega = \{(w, z) \in \mathbf{C}^2 \mid \operatorname{Re} w + \varphi(z) < 0\}$  où  $\varphi$  est une fonction sousharmonique de classe  $C^2$ , est taut si  $\operatorname{mes} \{z \in \mathbf{C} \mid \Delta\varphi(z) > 0\} > 0$ .

### 3. Application aux problèmes de familles normales

#### dans la méthode de dilatation des coordonnées.

Nous commençons par décrire la méthode de dilatation des coordonnées de S. Pinčuk dans le contexte qui nous intéresse (voir [6] pour d'autres exemples).

$\Omega$  étant un domaine de  $\mathbf{C}^2$  dont la frontière est  $C^\infty$ , pseudoconvexe et de type  $2k$  en un point  $a$ , nous considérons une suite  $(\xi_n)_n$  de points de  $\partial\Omega$  tendant vers  $a$ . Pour  $n$  assez grand, les biholomorphismes  $\Phi(\xi_n, \bullet)$  sont définis sur un voisinage  $U$  de  $a$  et l'on peut associer à toute suite  $(\varepsilon_n)_n$  ( $\varepsilon_n > 0$ ) de limite nulle, une suite de "dilatations"  $(\Delta_n)_n$  définies par  $\Delta_n(w, z) = \left( \frac{w}{\varepsilon_n}, \frac{z}{\tau(\xi_n, \varepsilon_n)} \right)$ . On vérifie facilement que la suite de domaines  $\Delta_n \circ \Phi(\xi_n, \bullet)(U \cap \Omega)$  converge après extraction éventuelle vers un domaine  $D$  défini par  $D = \{\operatorname{Re} w + \mathcal{P}(z) < 0\}$  où  $\mathcal{P}(z) = \lim_n \frac{1}{\varepsilon_n} \sum_2^{2k} P_l(\xi_n, \tau(\xi_n, \varepsilon_n)z)$ .  $\mathcal{P}$  est donc un polynôme réel sans termes harmoniques et dont le degré est inférieur ou égal à  $2k$ .

Supposons maintenant disposer d'une suite  $(F_n)_n$  d'applications holomorphes d'un domaine  $\omega \subset \mathbf{C}^p$  ( $p \geq 1$ ) dans  $\Omega$  telle que  $\lim_n F_n(z_0) = a$  et  $\Phi(\xi_n, F_n(z_0)) = (-\varepsilon_n, 0)$  pour un point  $z_0$  fixé de  $\omega$ . La méthode repose entièrement sur la normalité de la suite  $(G_n)_n$  définie par  $G_n = \Delta_n \circ \Phi(\xi_n, \bullet) \circ F_n$ . A cet effet, nous montrons que (modulo extraction) la suite  $(G_n)_n$  converge uniformément sur tout compact de  $\omega$  vers une application  $G$  de  $\omega$  dans  $\bar{D}$  telle que  $G(z_0) = (-1, 0)$ . Remarquons qu'une limite éventuelle  $G$  de  $(G_n)_n$  vérifie  $G(z_0) = (-1, 0)$  et prend ses valeurs dans  $\bar{D}$ . La proposition qui suit montre que  $(G_n)_n$  est uniformément borné sur tout compact de  $\omega$ . La propriété de convergence attendue s'en déduit par procédé diagonal.



PROPOSITION. — Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbf{C}^2$  dont la frontière est  $C^\infty$ , pseudoconvexe et de type  $2k$  en  $a$  et  $\omega$  un domaine de  $\mathbf{C}^p$  ( $p \geq 1$ ). Alors il existe un voisinage  $V$  de  $a$  et, pour chaque compact connexe  $K$  de  $\omega$  contenant  $z_0$ , des constantes  $\varepsilon(K)$  et  $c(K)$  telles que :

– pour toute application holomorphe  $F : \omega \rightarrow \Omega$

$$\left. \begin{array}{l} |F(z_0) - a| < \varepsilon(K) \\ \xi \in V' \cap \partial\Omega \\ 0 < \varepsilon < \varepsilon(K) \\ F(z_0) \in Q(\xi, \varepsilon) \end{array} \right\} \Rightarrow F(K) \subset Q(\xi, c(K)\varepsilon).$$

Démonstration. — Soient  $\varepsilon_0 > 0$  et  $V'$  le voisinage de  $a$  donnés par le théorème 1. Soit  $\tilde{K} = \{z \in \omega / d(z, K) \leq \frac{r_0}{2}\}$  où  $r_0 = d(K, \partial\omega)$ .

Un argument classique de localisation montre qu'il existe  $\varepsilon_0(K) > 0$  tel que  $|F(z_0) - a| < \varepsilon_0(K) \Rightarrow F(\tilde{K}) \subset V' \cap \Omega$  pour toute  $F : \omega \rightarrow \Omega$  holomorphe.

La remarque suivante se déduit alors facilement du théorème 1; il existe  $c > 0$  tel que  $F[B(z, r_0/4)] \subset Q(\xi, c\varepsilon)$  pour tout  $\xi \in V' \cap \partial\Omega$  et tout  $z \in K$  dès lors que  $|F(z_0) - a| < \varepsilon_0(K)$  et  $F(z) \in Q(\xi, \varepsilon)$  avec  $\varepsilon < \varepsilon_0$ .

Considérons un recouvrement de  $K$  par des boules  $B(z_j, r_0/4)$ ;  $j = 0, \dots, N$  telles que  $z_j \in B(z_{j-1}, r_0/4) \cap K$ .

La proposition s'obtient en posant  $\varepsilon(K) = \min\left(\varepsilon_0(K), \frac{\varepsilon_0}{(c+1)^N}\right)$ ,  $c(K) = c^N$  et en appliquant successivement la remarque précédente aux boules  $F[B(z_k, r_0/4)]$ ,  $k = 1, N$ .  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'utiliser cette méthode pour établir le

THÉORÈME 2. — Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbf{C}^2$  dont la frontière est  $C^\infty$ , pseudoconvexe de type  $2k$  en  $a$ . Si il existe une suite  $(\varphi_n)_n$  d'automorphismes analytiques de  $\Omega$  et un point  $z_0$  de  $\Omega$  tels que  $\lim_n \varphi_n(z_0) = a$  alors  $\Omega$  est holomorphiquement équivalent à  $\mathcal{D} = \{(w, z) \in \mathbf{C}^2 / \operatorname{Re} w + \mathcal{P}(z) < 0\}$  où  $\mathcal{P}$  est un polynôme réel sous-harmonique sans termes harmoniques de degré inférieur ou égal à  $2k$ .

Remarque. — On vérifie facilement que ce théorème reste vrai si l'adhérence du domaine  $\Omega$  admet un voisinage taut.

*Démonstration du théorème 2.* — Nous reprenons les notations précédentes. Pour  $n$  assez grand;  $\varphi_n(z_0) \in U$  et il existe un unique  $\xi_n \in U \cap \partial\Omega$  tel que  $\Phi(\xi_n, \varphi_n(z_0)) = (-\varepsilon_n, 0)$  avec  $\varepsilon_n > 0$ . On a, bien sûr,  $\lim_n \varepsilon_n = 0$  et  $\lim_n \xi_n = a$ .

Introduisons les suites de domaines  $(\Omega_n)_n$  et  $(\mathcal{D}_n)_n$  définies par  $\Omega_n = \varphi_n^{-1}(\Omega \cap U)$  et  $\mathcal{D}_n = \Delta_n \circ \Phi(\xi_n, \bullet)(U \cap \Omega)$  où  $\Delta_n$  désigne la dilatation  $(w, z) \mapsto \left( \frac{w}{\varepsilon_n}, \frac{z}{\tau(\xi_n, \varepsilon_n)} \right)$ .

Nous disposons donc d'une suite de biholomorphismes  $\Omega_n \xrightarrow{\Psi_n} \mathcal{D}_n$  définis par  $\Psi_n = \Delta_n \circ \Phi(\xi_n, \bullet) \circ \varphi_n$  et vérifiant les propriétés suivantes (modulo extraction) :

1.  $\Omega_n$  converge vers  $\Omega$  (argument de localisation appliqué à  $\varphi_n$ ).
2.  $\mathcal{D}_n$  converge vers  $\mathcal{D} = \{\text{Re } w + \mathcal{P}(z)\}$ , (choix de  $\Delta_n$ ).
3.  $(\Psi_n)_n$  converge uniformément sur tout compact de  $\Omega$  vers une application  $\Psi$  de  $\Omega$  dans  $\mathcal{D}$  telle que  $\Psi(z_0) = (-1, 0)$ . (On applique la discussion précédente à  $F_n = \varphi_n$  et  $\omega \subset\subset \Omega; z_0 \in \omega$ ).
4.  $(\Psi_n^{-1})_n$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathcal{D}$ .

Un théorème de Greene et Krantz (cf. [5]) permet alors d'affirmer que  $\Psi$  réalise le biholomorphisme attendu. La sous-harmonicité de  $P$  résulte de la pseudoconvexité de  $D$ . □

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. BEDFORD and S. PINČUK, Domains in  $\mathbf{C}^2$  with non compact holomorphic automorphism groups, Math. USSR Sbornik, Vol. 63, (1989), 141-151.
- [2] D. CATLIN, Estimates of invariant metrics on pseudoconvex domains of dimension two, Math. Z., 200, (1989), 429-466.
- [3] J.E. FORNAESS and N. SIBONY, Construction of p.s.h. functions on weakly pseudoconvex domains, Duke Math., J. 58, 633-655.
- [4] J.E. FORNAESS and B. STENSONES, Lectures on counterexamples in several complex variables, Mathematical Notes, Princeton University Press.
- [5] R.E. GREENE and S.G. KRANTZ, Characterizations of certain weakly pseudoconvex domains with non compact automorphism groups, Lecture Notes in Math., 1268, (1987), 121-157.
- [6] S. PINČUK, Holomorphic maps in  $\mathbf{C}^n$  and the problem of holomorphic equivalence, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 19, Springer Verlag (1989).
- [7] R. RICHBURG, Stetige streng pseudokonvexe Funktionen, Math. Ann., 175 (1968), 251-286.

- [8] J.P. ROSAY, Sur une caractérisation de la boule parmi les domaines de  $\mathbf{C}^n$  par son groupe d'automorphismes, Ann. Inst. Fourier, 29-4 (1979), 91-97.
- [9] N. SIBONY, Une classe de domaines pseudoconvexes, Duke Math. J., 55, n°2 (1987), 299-319.

Manuscrit reçu le 14 novembre 1990,  
révisé le 1er février 1991.

F. BERTELOOT & G. COEURÉ,  
Université des Sciences & Techniques  
de Lille Flandres Artois  
UFR de Mathématiques Pures & Appliquées  
URA CNRS 751  
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex.