DANIEL PECKER

Sur le genre arithmétique des courbes rationnelles

Annales de l'institut Fourier, tome 46, nº 2 (1996), p. 293-306

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_2_293_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
46, 2 (1996), 293–306

SUR LE GENRE ARITHMÉTIQUE DES COURBES RATIONNELLES

par Daniel PECKER

Plan.

1. Introduction.

Une courbe irréductible C de l'espace projectif $\mathbb{P}_r$ a un genre géométrique $g(C)$ qui est un invariant birationnel (le genre géométrique d'une courbe rationnelle est nul). Elle a aussi un genre arithmétique $p_a(C)$ défini algébriquement à l'aide du polynôme de Hilbert de $C \subset \mathbb{P}_r$. La formule du genre nous dit que la différence $p_a(C)-g(C)$ est le nombre de points doubles de C (correctement comptés). Castelnuovo a trouvé une borne $C(d,r)$ pour le genre des courbes irréductibles de degré d, non dégénérés dans $\mathbb{P}_r$ (*i.e.* qui ne sont contenues dans aucun hyperplan). Harris et Eisenbud ont trouvé des nombres $\pi_\alpha(d,r)$ avec $\alpha \leq r-1$ qui, pourvu que d soit assez grand, sont des bornes pour le genre des courbes irréductibles de degré d non contenues dans une surface de degré $< r+\alpha-1$, et on a $\pi_0(d,r) = C(d,r)$. Chiantini, Ciliberto et Di Gennaro ont montré comment généraliser les bornes de Harris-Eisenbud pour α quelconque. Ils ont aussi démontré que les bornes ainsi obtenues sont optimales.

Mots-clés : Courbes algébriques gauches – Genre des courbes.
Classification math. : 14 – 14H – 14P.

Nous montrons ici que même si l'on se restreint aux courbes rationnelles, les bornes de Harris sont optimales pour $\alpha = 0, 1, \ldots, r-2$. Dans le cas où $\alpha = 0$ l'existence des courbes rationnelles gauches de degré d et de genre $\pi_0(d, r)$ avait déjà été établie par Tannenbaum en 1980 en utilisant la théorie des déformations (*cf.* [T1], [T2], [T3] et [P1], [P2], [P3]). Notre méthode, très différente, consiste à dénombrer les points doubles de courbes rationnelles images polynomiales de courbes planes simples. On fournit ainsi des exemples concrets illustrant l'étude du schéma de Hilbert exposée par Harris et Eisenbud.

Toutes les courbes construites ici n'ont que des points multiples ordinaires à tangentes réelles ; dans le cas $\alpha = 0, 1$, on construit des courbes nodales, quand elles existent. Dans le paragraphe 2 nous rappelons la formule du genre pour les courbes irréductibles de $\mathbb{P}_r$, et le moyen de compter un point multiple ordinaire dans cette formule (d'après Hironaka). Comme application nous donnons un exemple très simple de courbe rationnelle de degré d dans $\mathbb{P}_3$ et de genre maximum, ayant un seul point singulier.

Nous donnons aussi un moyen de construire des courbes rationnelles planes avec des symétries, ce qui permettra de construire certaines courbes gauches.

Dans le paragraphe 3 nous décrivons les genres des courbes rationnelles situées sur une surface rationnelle lisse de degré $(r-1)$ de $\mathbb{P}_r$. Dans le paragraphe 4 nous construisons des courbes de grand genre sur une surface de degré $r + \alpha - 1$ avec $\alpha \leq r - 2$. On en déduit l'optimalité des bornes $\pi_\alpha(d, r)$ pour $\alpha \leq r - 2$; on voit aussi, que toute composante du schéma de Hilbert dont la courbe générale est réduite, irréductible, et non dégénérée et de genre $\pi_1(d, r)$ possède une courbe rationnelle (alors que certaines composantes ne possèdent pas de courbe lisse).

2. Comment calculer le genre d'une courbe singulière gauche.

Soit C une courbe algébrique nodale (ses seuls points singuliers sont des points doubles ordinaires). Projetons C sur un plan de telle sorte que les Δ points doubles aient des projections distinctes qui sont elles-mêmes des points doubles de $\pi(C)$.

En plus de ces Δ points doubles, la projetée de C admet aussi X points doubles ordinaires, appelés *points doubles apparents.* La formule du genre pour les courbes planes s'écrit :

$$\frac{1}{2}(d-1)(d-2) - X = g(C) + \Delta$$

où $g(C)$ est le *genre géométrique* de C (ou de $\pi(C)$).

Cette formule montre déjà que le nombre X ne dépend pas de la projection ainsi choisie. Le nombre

$$p_a(C) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - X$$

est le *genre arithmétique* de C et la formule du genre pour une courbe gauche nodale s'écrit donc :

$$p_a(C) = g(C) + \Delta.$$

On a toujours

$$g(C) \leq p_a(C)$$

avec l'égalité si et seulement si C est lisse. Dans ce travail, nous aurons à calculer le genre des courbes ayant des points multiples ordinaires et nous aurons besoin de la formule du genre pour une courbe irréductible quelconque (d'après Hironaka)

$$p_a(C) = g(C) + \sum_{p \in C} \delta(P, C)$$

où $\delta(P, C)$ est la *contribution* du point P au genre de la courbe C (intuitivement, c'est le « nombre de points doubles ordinaires concentrés en P »). Si C est localement plane en P, la contribution $\delta(P, C)$ se calcule comme dans le cas plan. Par contre, si P est un point multiple ordinaire d'ordre k avec k tangentes linéairement indépendantes, alors :

$$\delta(P, C) = k - 1.$$

Montrons brièvement comment calculer ce nombre pour un bouquet de droites passant par un point P. D'après Hironaka, si l'on note $d_1 + d_2 + \cdots + d_k$ la réunion de ces droites, on a :

$$\delta(d_1 + d_2 + \cdots + d_k, P) = \sum_{h=1}^{k-1} i(d_1 + d_2 + \cdots + d_h, d_{h+1}, P)$$

où $i(d_1 + d_2 + \cdots + d_h, d_{h+1}, P)$ est l'indice d'intersection en P des courbes $(d_1 + d_2 + \cdots + d_h)$ et d_{h+1}. La définition algébrique de cet indice en terme d'anneaux locaux permet de voir que c'est le degré minimum d'une hypersurface contenant $(d_1 + \cdots + d_h)$ et ne contenant pas d_{h+1}.

LEMME 1. — *Soient $d_1, d_2, \ldots, d_{h+1}$ des droites contenues dans une surface conique de degré $(r-1)$ de $\mathbb{P}_n$ (où $n \geq r$). On suppose aussi que r quelconques de ces droites sont linéairement indépendantes; alors :*

$$i\Big(\sum_{k=1}^{h} d_k, d_{h+1}, P\Big) = \left[\frac{h-1}{r-1}\right] + 1.$$

Démonstration. — Soient $q = \left[\frac{h-1}{r-1}\right]$ et $\varepsilon = (h-1) - q(r-1)$. Soit i le degré minimum d'une hypersurface contenant $\sum_{k=1}^{h} d_k$ et ne contenant pas d_{h+1}. D'après le théorème de Bézout, comme les h droites $d_1, d_2, \ldots, d_h$ sont aussi contenues sur une surface conique de degré $(r-1)$, on a

$$i(r-1) \geq h = q(r-1) + \varepsilon + 1 > q(r-1),$$

ce qui montre que $i > q$.

D'autre part, soient $L_1, L_2, \ldots L_q$ des formes linéaires s'annulant chacune sur $(r-1)$ droites d_i et pas sur d_{h+1}, et soit L_{q+1} s'annulant sur les $\varepsilon + 1 \leq r-1$ droites restantes et pas sur d_{h+1}. Alors le produit $L_1 L_2 \cdots L_{h+1}$ s'annule sur $\sum_{k=1}^{h} d_k$ et pas sur d_{h+1} d'où $i \leq q+1$ et par suite $i = q+1$.

LEMME 2. — *Soient $d_1, \ldots, d_k$ des droites contenues dans un cône de degré $(r-1)$ de $\mathbb{P}_r$ et passant par le sommet P de ce cône. Soit $k-1 = q(r-1) + \varepsilon$ avec $0 \leq \varepsilon < r-1$. Alors :*

$$\delta\Big(\sum_{1}^{k} d_i, P\Big) = \tfrac{1}{2}(q+1)\big((r-1)q + 2\varepsilon\big)$$

Démonstration. — Ce nombre est en effet égal à la somme

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{(r-1)\text{ fois}} + \underbrace{2+2+\cdots+2}_{(r-1)\text{ fois}} + \cdots + \underbrace{q+q+\cdots+q}_{(r-1)\text{ fois}} + \underbrace{(q+1)+\cdots+(q+1)}_{\varepsilon\text{ fois}}\cdot$$

Exemple 1. — Soit C_1 la complétée projective de la courbe affine paramétrée par

$$C_1(t) = \big(U(t), U(t)t, \ldots, U(t)t^{r-1}\big)$$

où $U(t)$ est un polynôme de degré $(d+1-r)$ qui a ses racines distinctes et réelles. Soit $(d-1) = m(r-1)+\varepsilon$ avec $0 \leq \varepsilon < r-$. Alors :

$$p_a(C_1) = \frac{1}{2}m\big((r-1)(m-1)+2\varepsilon\big).$$

Démonstration. — Cette courbe n'a qu'un seul point singulier, qui est un point multiple ordinaire d'ordre $d-(r-1)$. Toutes les tangentes en ce point sont situées sur le cône construit sur la courbe $(1, t, ..., t^{r-1})$ et par suite on obtient le résultat en utilisant le lemme 2.

Le genre $p_a(C_1)$ est précisément égal à la borne de Castelnuovo $C(d,r)$ ce qui montre que cette borne est optimale. Donnons la définition des bornes de Harris-Eisenbud qui la généralisent $(C(d,r) = \pi_0(d,r))$.

DÉFINITION. — Soient $\alpha = 0, 1, \ldots, r-2$ et

$$(d-1) = m_\alpha(r+\alpha-1)+\varepsilon_a \quad \text{avec} \quad 0 \leq \varepsilon_\alpha \leq r+\alpha-1.$$

Alors :

$$\pi_\alpha(d,r) = \binom{m_\alpha}{2}(r+\alpha-1)+m_\alpha(\varepsilon_\alpha+\alpha)+\nu_\alpha$$

où $\nu_\alpha = \max(0, [\frac{1}{2}(\alpha-r+2+\varepsilon_\alpha)])$.

- Harris et Eisenbud ont aussi défini $\pi_{r-1}(d,r)$; ils montrent que le genre d'une courbe de degré d non contenue dans une surface de degré $< r+\alpha-1$ est borné par $\pi_\alpha(d,r)$ pourvu que d soit assez grand.

- Chiantini, Ciliberto et Di Gennaro ont obtenu des bornes pour α quelconque (le cas de la dimension 3 étant dû à Gruson et Peskine [G.P.2]).

Nous allons construire des courbes rationnelles qui montrent que ces bornes sont optimales. Ces courbes sont paramétrées par des courbes rationnelles planes présentant certaines symétries.

PROPOSITION 1. — *Soient $a, e, b,\ h \leq [\frac{1}{2}a]$ des entiers naturels avec $(a-e, b) = 1$. Il existe des polynômes A, E, B de degrés respectifs a, e, b tels que la courbe affine plane paramétrée par $C(t) = (B(t), A(t)/E(t))$ ait $\frac{1}{2}(b-1)(a+e-1)$ points doubles réels, coupe l'axe des x en h couples de points symétriques par rapport à l'origine et $(a-2h)$ autres points sans symétrie particulière.*

Démonstration. — Par le théorème de Bézout, on peut voir qu'une courbe ainsi paramétrée ne peut avoir plus de $\frac{1}{2}(b-1)(a+e-1)$ points doubles (*cf.* [P3]).

Par conséquent, si une telle courbe admet $\frac{1}{2}(b-1)(a+e-1)$ points doubles, elle conservera le même nombre de points doubles si l'on modifie légèrement le polynôme A. Il suffit donc de démontrer le résultat pour $h = [\frac{1}{2}a]$; il sera facile par la suite de supprimer certaines symétries de points sur l'axe des x en modifiant les racines de A.

• Étudions tout d'abord le cas $a > e$. Supposons pour commencer, que $c = a - e$ et e ne sont pas impairs tous les deux. Considérons la courbe de Lissajous paramétrée par

$$x = T_b(t), y = T_c(t) - y_0$$

où $T_n(t) = \cos(n \operatorname{Arcos} t)$ est le n-ième polynôme de Tchébycheff de première espèce. Cette courbe a pour équation $T_c(x) = T_b(y + y_0)$ et si l'on choisit y_0 tel que $T_b(y_0) = 0$, elle coupe l'axe des x aux points d'abscisses x tels que $T_c(x) = 0$. Ces points sont bien symétriques par rapport à l'origine.

Notons $B(t) = T_b(t)$, $C(t) = T_c(t) - y_0$. Soit $\widetilde{E}(t)$ un polynôme de degré e ayant toutes ses racines t_i réelles et telles que les $(B(t_i))$ soient symétriques deux à deux et distincts des abscisses des points où la courbe précédente coupe l'axe des x. Considérons enfin la courbe paramétrée par

$$x = B(t), \quad y = C(t)\Big(\frac{\widetilde{E}(t)}{\widetilde{E}(t) - \varepsilon}\Big) \quad \text{où} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+.$$

Si ε est assez petit cette courbe aura

$$\tfrac{1}{2}(b-1)(c-1) + e(b-1) = \tfrac{1}{2}(b-1)(a+e-1)$$

points doubles et de plus, elle coupera l'axe des x en a points distincts symétriques par rapport à l'origine.

Si $c = a - e$ et e sont impairs tous les deux, il suffit de remplacer la racine 0 de C par un nombre α tel que $B(\alpha) = \mu$ et de prendre un nombre α', tel que $B(\alpha') = -\mu$ comme racine de $\widetilde{E}$ en plus des $[\frac{1}{2}e]$ couples de racines symétriques déjà choisis.

• Le cas $a < e$ est plus simple : on considère une courbe paramétrée par

$$x = B(t), \quad y = \frac{1}{C(t)}\Big(\frac{\widetilde{E}(t)}{\widetilde{E}(t) - \varepsilon}\Big)$$

avec $\deg(C) = e - a$, $\deg(\widetilde{E}) = a$.

Pour conclure ce paragraphe, montrons comment on peut utiliser cette proposition pour obtenir d'autres exemples de courbes rationnelles de genre maximum dans $\mathbb{P}_r(C)$.

Exemple 2 (*cf.* [P1]). — Soit $d-1 = m(r-1)+\varepsilon$ avec $0 \leq \varepsilon < r-1$ et soient $A(t)$, $E(t)$, $B(t)$ des polynômes de degrés respectifs d, ε et m donnés par la proposition 1. Alors la complétée projective de la courbe paramétrée par

$$C_2(t) = \big(X(t), X^2(t), ..., X^{r-1}(t), Y(t)\big)$$

où $X(t) = B(t)$, $Y(t) = A(t)/E(t)$ est une courbe de degré d, non dégénérée dans $\mathbb{P}_r(C)$. Elle a $\frac{1}{2}(m-1)(d+\alpha-1)$ points doubles à distance finie et un point multiple à l'infini où les $\varepsilon+1$ tangentes sont linéairement indépendantes (déterminant de Vandermonde). Elle est donc de genre

$$p_a(C_2) = \frac{1}{2}(m-1)(d+\varepsilon-1)+\varepsilon = C(d,r).$$

Dans le paragraphe suivant, on montrera l'existence de courbes rationnelles nodales de genre $C(d,r)$. Les propriétés de symétrie ne seront utilisées qu'au paragraphe 3 de manière à faire apparaître de nouveaux points doubles sur nos courbes dans l'espace, par des applications polynomiales identifiant des points symétriques.

3. Courbes situées sur une surface rationnelle lisse de degré $(r-1)$ dans $\mathbb{P}_r(C)$ (scroll).

THÉORÈME 1. — *Soient $d \geq n \geq 3$ et $p \geq 0$ des entiers. Il existe une courbe de degré d et de genre p, située sur une surface rationnelle lisse de degré $(r-1)$ si et seulement si*

(i) *il existe un entier $b \geq 1$, $b[\frac{1}{2}r] \leq d$*

$$p = \frac{1}{2}(b-1)\big(2d-b(r-1)-2\big)$$

ou bien

(ii) $r=5$, $d=2k$, $p=\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$.

De plus, on peut trouver de telles courbes rationnelles ayant p points doubles ordinaires réels comme seuls points singuliers.

Démonstration. — Les conditions sont nécessaires (*cf.* [HEi], p. 100). Supposons-les remplies et supposons $b \neq 1$ (le cas $b = 1$ étant clair.)

(i) Soit $r_2 = [\frac{1}{2}(r-1)]$. Comme $p \geq 0$, on a $d - 1 \geq b(\frac{1}{2}(r-1)) \geq br_2$. Soit $r_1 + r_2 = r - 1$.

- Si $(r-1)$ est pair on a $r_1 = r_2$ et par suite on a aussi $d \geq br_1$.
- Si $r - 1$ est impair on a $[\frac{1}{2}r] = 1 + [\frac{1}{2}(r-1)] = r_1$ et par suite l'hypothèse sur b implique que $d \geq br_1$.

On peut donc choisir des entiers $a \geq 0$, $e \geq 0$ tels que

$$br_2 + e = d - 1, \quad br_1 + a = d.$$

Comme $(a - e) + (r_1 - r_2)b = 1$, on voit que $(a - e, b) = 1$. D'après la proposition 1, il existe des polynômes $A(t), E(t), B(t)$ de degrés respectifs a, e, b tels que la courbe $C(t) = (A(t)/E(t), B(t))$ ait p points doubles ordinaires réels. La courbe $C(B, B^2, \ldots, B^{r_2}, A/E, AB/E, \ldots, AB^{r_1}/E)$ a aussi p points doubles.

(ii) Si $n = 5$ et $d = 2k$, considérons la courbe $C = (X, Y, X^2, Y^2, XY)$ avec $\deg(X) = k - 1$, $\deg(Y) = k$ des polynômes tels que la courbe $(X(t), Y(t))$ ait $p = \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ points doubles; la courbe C aura p points doubles.

COROLLAIRE 1. — *Soit $d \geq r \geq 3$, il existe une courbe rationnelle nodale, non dégénérée dans $\mathbb{P}_r$, de degré d, ayant $C(d,r)$ points doubles ordinaires réels* (*à tangentes réelles*).

Démonstration. — Il suffit de prendre $b = m + 1$ dans la proposition précédente où $(d - 1) = m(r - 1) + \varepsilon$, $0 \leq \varepsilon < r - 1$ (c'est possible car $(m-1)(r-2) + 2\varepsilon \geq 0$). Rappelons que la première construction de courbes nodales rationnelles non dégénérées de genre $C(d,r)$ a été donnée par Tannenbaum qui utilisait la théorie des déformations. Comme de plus nos courbes sont situées sur une surface rationnelle lisse de degré $(r-1)$ de $\mathbb{P}_r$, on peut lissifier leurs points doubles un par un (*cf.* [T1], [T2] et [P1], [P2]).

Remarquons encore que si $d < 2r$, on a $C(d,r) = d - r$ par exemple

$$C(2p+1, p+1) = p.$$

4. Genre des courbes situées sur une surface réglée de degré $r + \alpha - 1$ pour $\alpha \leq r - 2$.

Soient a, e, b des entiers vérifiant :

$$2\alpha b + e = d - 1, \quad (r - \alpha - 1) + b + a = d, \quad h \leq \left[\tfrac{1}{2}a\right].$$

Soient $A(t), B(t), E(t)$ des polynômes donnés par la proposition 1. Soit C la complétée projective de la courbe paramétrée par

$$C(t) = (X^2, X^4, .., X^{2\alpha}, Y, YX, ..., YX^{r-\alpha 1})$$

où $X(t) = B(t)$, $Y(t) = A(t)/E(t)$.

À cause de la symétrie de la courbe $(X(t), Y(t))$, on voit qu'en plus de ses $\frac{1}{2}(b-1)(a+e-1)$ points doubles, la courbe plane $C(t)$ a aussi h points doubles pour lesquels $Y = 0$. Le nombre total de points doubles de C est donc :

$$p(C) = \tfrac{1}{2}(b-1)(a+e-1) + h, \quad h \leq [\tfrac{1}{2}a].$$

On a donc établi :

Proposition 2. — *Soient*

$$\alpha \leq r - 2, \quad b \leq \frac{d}{r - \alpha - 1}, \quad 1 \leq b \leq \frac{d-1}{2\alpha}, \quad h \leq \frac{d - (r - \alpha - 1)b}{2}.$$

Alors il existe une courbe rationnelle nodale à points doubles réelles de genre :

$$p(C) = \tfrac{1}{2}(b-1)(2d - (r + \alpha - 1)b - 2) + h.$$

Cette courbe est située sur une surface réglée de degré $(r + \alpha - 1)$ qui n'est pas un cône (si $\alpha = 1$ c'est une surface de « Del Pezzo » ayant une droite double).

Corollaire 2. — *Si $\varepsilon_\alpha \geq r - \alpha - 2$ ou $\varepsilon_\alpha = 0$, il existe une courbe rationnelle nodale de genre $\pi_\alpha(d, r)$ située sur une surface de degré $r + \alpha - 1$.*

Démonstration. — Le cas $\alpha = 0$ a déjà été étudié au paragraphe précédent. Supposons donc $\alpha \geq 1$.

• Étudions d'abord le cas $\varepsilon_\alpha \geq r-\alpha-2$. Un calcul simple montre que

$$d-1 \geq \varepsilon_\alpha - 1 \geq r-\alpha-1 > \frac{2\alpha(r+\alpha-1)}{r-\alpha-1}.$$

Par suite (en utilisant encore $\varepsilon_\alpha \geq r-\alpha-2$) :

$$\begin{aligned}(d-1)-2\alpha(m_\alpha+1) &\geq (m_\alpha+1)(r-\alpha-1)-2\alpha-1\\ &\geq \frac{d-1}{r+\alpha-1}(r-\alpha-1)-2\alpha>0.\end{aligned}$$

Si $m_\alpha \geq 1$, on a aussi

$$\begin{aligned}d-(r-\alpha-1)(m_\alpha+1) &= 2\alpha m_\alpha - 1 + (\varepsilon_\alpha - r + 2 + \alpha)\\ &\geq 2\alpha m_\alpha - 1 \geq 0,\end{aligned}$$

ce qui est vrai même si $m_\alpha = 0$. On peut donc appliquer la proposition 2 avec $b = m_\alpha + 1$. On a alors

$$a = 2m_\alpha\alpha + (\varepsilon_\alpha - r + 2 + \alpha).$$

Si l'on prend $h = [\frac{1}{2}a] = m_\alpha\alpha + [\frac{1}{2}(\varepsilon_\alpha - r + 2 + \alpha)]$, on obtient une courbe de genre

$$p = \tfrac{1}{2}m_\alpha((m_\alpha-1)(r+\alpha-1)+2\varepsilon_\alpha)+h=\pi_\alpha(d,r).$$

• Étudions maintenant le cas $\varepsilon_\alpha = 0$. On a :

$$d-1 = m_\alpha(r+\alpha-1)$$

et par suite $m_\alpha < \dfrac{d}{r-\alpha-1}$ et $m_\alpha < \dfrac{d-1}{2\alpha}$ et on peut donc appliquer la proposition 2 avec $b = m_\alpha$. On obtient alors des courbes de genre

$$p = \binom{m_\alpha}{2}(r+\alpha-1)+h$$

avec $h \leq \left[\frac{1}{2}(d-(r-\alpha-1)m_\alpha)\right] = m_\alpha\alpha$. Si on prend $h = m_\alpha\alpha$, on obtient bien une courbe de genre $\pi_\alpha(d,r)$.

Remarquons qu'on peut lissifier les points doubles des courbes ainsi obtenues, sauf peut-être les h situés sur la courbe double.

En fait, si l'on utilise la description de Harris-Eisenbud des composantes du schéma de Hilbert dont la courbe générale est réduite, irréductible, non dégénérée dans $\mathbb{P}_r$ et de genre $g = \pi_1(d,r)$ (*cf.* [HEi], p. 102), on obtient :

COROLLAIRE 3. — *Il existe dans $\mathbb{P}_r(C)$, où $r \geq 10$, des courbes rationnelles nodales qui ne sont pas lissifiables.*

Démonstration. — Harris et Eisenbud ([HEi], p. 102) montrent qu'il n'y a aucune courbe lisse de genre $\pi_1(d,r)$ pour $r \geq 10$ si $\pi_1(d,r)$ n'est pas de la forme $\frac{1}{2}(b-1)(2d-b(r-1)-2)$ et si $d \geq 2r+3$ et $\varepsilon_1 \neq 0$ (ce qui est le cas par exemple si $d=21$, $r=10$, $\pi_1(21,10)=12$). La courbe rationnelle nodale de genre $\pi_1(d,r)$ située sur une surface de degré r dans $\mathbb{P}_r$ ne peut donc pas être lissifiée.

5. Courbes situées sur un cône de degré $r+\alpha-1$ pour $\alpha = 1,\ldots,r-2$.

Soit b un entier tel $(r+\alpha-1)b \leq d$. On peut alors trouver des entiers a et e tels que

$$(r+\alpha-1)b+e=d, \quad a=d-1.$$

Il existe alors des polynômes $B(t)$, $\widetilde{A}(t)$, $E(t)$ de degrés respectifs b, a, e tels que la courbe affine plane paramétrée par

$$x(t)=B(t), \quad y(t)=\widetilde{A}(t)/E(t)$$

ait exactement $\frac{1}{2}(b-1)(a+e-1)$ points doubles réels et coupe l'axe des x en a points distincts et l'axe des y en b points distincts.

Soit P un polynôme de degré $(\alpha+1)$ en X dont les racines distinctes sont proches de 0. Alors l'équation $P(B(t))=0$ a $(\alpha+1)b$ racines distinctes, qui se rangent en b groupes de $(\alpha+1)$ racines proches d'une racine de $B(t)=0$. Soient

$$t_{1,1}, t_{1,2}, \ldots, t_{1,\alpha+1}, t_{21}, t_{22}, \ldots, t_{2,\alpha+1}, \ldots, t_{b,1}, t_{b,2}, \ldots, t_{b,\alpha+1}$$

ces racines. Comme $(\alpha+1)b \leq a$, on peut trouver par la formule d'interpolation de Lagrange un polynôme $A(t)$ proche de $\widetilde{A}(t)$ tel que $A(t_{ij})/E(tij) = \widetilde{A}/E(\tau_i)$ où τ_i est la racine de $B(t)=0$ proche de t_{ij}.

La courbe affine $(B(t), A(t)/E(t))$ a alors $\frac{1}{2}(b-1)(a+e-1)$ points doubles dans le plan affine en dehors de l'axe des y.

Considérons la courbe

$$C(t) = \big(P(x), XP(x), ..., X^{r-2}P(X), Y\big)$$

où $X = B(t)$, $Y = A(t)/E(t)$. En plus des points doubles de la courbe plane $(B(t), A(t)/E(t))$, la courbe $C(t)$ a des points multiples de multiplicité $\alpha+1$ en nombre b sur l'axe des y. En ces points, les tangentes sont linéairement indépendantes (déterminant de Vandermonde d'ordre $r-1 \geq \alpha+1$). On a donc montré la :

PROPOSITION 3. — *Pour tout $b \leq d/(r+\alpha-1)$, $0 \leq h_i \leq (\alpha+1)$, il existe une courbe rationnelle de degré d sur un cône de $\mathbb{P}_r$ de degré $r+\alpha-1$ ayant $\frac{1}{2}(b-1)(2d-(r+\alpha-1)b-2)$ points doubles ordinaires; pour chaque i compris entre 1 et b un point multiple d'ordre h_i sur l'axe des y avec des tangentes linéairement indépendantes, et aussi un point de multiplicité $d-(r+\alpha-1)b$ à l'infini.*

COROLLAIRE 4. — *Il existe des courbes de degré d et de genre*

$$p = \binom{m_\alpha}{2}(r+\alpha-1) + m_\alpha(\alpha+\varepsilon_\alpha)$$

situées sur un cône de degré $r+\alpha-1$ de $\mathbb{P}_r(C)$ avec $\alpha = 0, \ldots, r-2$ si $\varepsilon_\alpha + 1 \leq r$

Démonstration. — Prenons $b = m_\alpha$, $e = \varepsilon_\alpha + 1$ et $h_i = \alpha+1$ dans la proposition précédente; on trouve :

$$p = \frac{1}{2}(m_\alpha - 1)\big(2m_\alpha(r+\alpha-1) + 2\varepsilon_\alpha - m_\alpha(r+\alpha-1)\big) + \varepsilon_\alpha + m_\alpha\alpha$$

d'où $p = \binom{m_\alpha}{2}(r+\alpha-1) + m_\alpha(\alpha+\varepsilon_\alpha)$.

COROLLAIRE 5. — *Pour $\alpha = 0, \ldots, r-2$ et $\varepsilon_\alpha \leq r-\alpha-1$, il existe une courbe rationnelle de degré d et de genre $\pi_\alpha(d,r)$ située sur un cône de degré $(r+\alpha-1)$ de $\mathbb{P}_r$.*

Finalement, en utilisant le corollaire 2, on obtient :

THÉORÈME 2. — *Si $d > r-\alpha-1 > 0$ il existe une courbe rationnelle à points multiples ordinaires de degré d et de genre $\pi_\alpha(d,r)$ située sur une surface de degré $r+\alpha-1$ de $\mathbb{P}_r(C)$.*

Remarquons que si $d > 3(r+\alpha-2)$, ces courbes qui sont situées sur une surface qui est une intersection d'hypersurfaces de degré au plus 3, ne peuvent être aussi sur une surface de degré inférieur à $r+\alpha-1$ (par le théorème de Bézout).

Une dernière remarque. — Si $\alpha = 1$ et $\varepsilon_1 = r-1$, dans la construction de C, choisissons la r-ième tangente au point multiple de l'infini en dehors de l'hyperplan déterminé par les $(r-1)$ autres tangentes. Le point de l'infini interviendra alors pour $\delta = (\varepsilon_1 - 1) + 2$ dans le calcul du genre de C qui sera aussi donné par

$$\rho = p = \binom{m_\alpha}{2}(r+\alpha-1) + m_\alpha(\alpha+\varepsilon_\alpha) + \gamma_1$$

avec

$$\gamma_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_1 = r-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, on voit que si $g = \pi_1(d,r)$, toute composante du schéma de Hilbert dont la courbe générale est non dégénérée réduite irréductible et de genre g contient une courbe rationnelle (en comparant avec [HEi], p. 102).

BIBLIOGRAPHIE

[A] N. A'CAMPO, Sur la première partie du seizième problème de Hilbert, Séminaire Bourbaki, vol. 1978/79, Lecture Notes in Math., vol 770, Springer (1980).

[B.C.C] E. BALLICO, F. CATANESE and C. CILIBERTO, Open problems in classification of irregular varieties, 140–146, Lecture Notes in Math. 1515, Springer-Verlag (1992).

[B.C.R] J. BOCHNAK, M. COSTE et M.-F. ROY, Géométrie algébrique réelle, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer (1987).

[B.R] R. BENEDETTI and J.-J. RISLER, Real Algebraic and semi–algebraic sets, Actualités Mathématiques, Hermann (1990).

[C] M. COSTE, Épaississement d'hypersurfaces algébriques réelles, Proc. Japan Acad., Ser. A. Math. Sci., 68 (1992), 175–180.

[G.P] L. GRUSON et C. PESKINE, Genre des courbes de l'espace projectif (II), Ann. Sci. École Normale Supérieure, 4e série, 15 (1982), 401–418.

[G.P2] L. GRUSON et C. PESKINE, Postulation des courbes gauches, in Algebraic geometry open problems, Lecture Notes 987 (1983).

[G] D.A. GUDKOV, The topology of real projective algebraic varieties, Russ. Math. Surveys, 29 (4) (1974), 1–79.

[HEi] J. HARRIS (chapter III in collaboration with D. Eisenbud), Curves in projective space, Presses de l'université de Montréal (1982).

[Ha1] R. HARTSHORNE, Genre des courbes algébriques dans l'espace projectif (d'après L. Gruson et C. Peskine), Séminaire Bourbaki n° 592 (1982).

[Ha2] R. HARTSHORNE, Une courbe irréductible non lissifiable dans $\mathbb{P}_3$, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 299 Série I, n° 5 (1984).

[H.H] R. HARTSHORNE and A. HIRSCHOWITZ, Smoothing algebraic space curves, in Week of algebraic geometry, Barcelona 1983, Lecture Notes in Math, Springer-Verlag.

[H] H. HIRONAKA, On the arithmetic genera and the effective genera of algebraic curves, Memoirs of the College of Science, University of Kyoto, series A, vol. XXX Math. n° 2 (1957).

[P1] D. PECKER, Courbes gauches ayant beaucoup de points multiples, C. R. Acad. Sci. Paris, 315, Série I (1992), 561–565.

[P2] D. PECKER, Simple constructions of algebraic curves with nodes, Compositio Math., 87 (1993), 1–4.

[P3] D. PECKER, Un théorème de Harnack dans l'espace, Bull. Sci. Math, 118 (1994), 475–484.

[T1] A. TANNENBAUM, Familles of algebraic curves with nodes, Compositio Math., 41 (1980), 107–126.

[T2] A. TANNENBAUM, On the geometric genera of projective curves, Math. Ann., 240 (3) (1979), 213–221.

Manuscrit reçu le 12 juillet 1995,
accepté le 3 janvier 1996.

Daniel PECKER,
Université Paris VI
Mathématiques
4, place Jussieu
75252 Paris cedex 05 (France).