ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CHANGGUI ZHANG

Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables

Annales de l'institut Fourier, tome 49, nº 1 (1999), p. 227-261

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1999__49_1_227_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
49, 1 (1999), 227–261

DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES q-GEVREY ET SÉRIES Gq-SOMMABLES

par Changgui ZHANG

0. Introduction.

0.1. Soit q un nombre complexe non nul. On note σ_q un opérateur linéaire défini sur certains espaces de fonctions ou de séries entières par $(\sigma_q f)(x) = f(qx)$. Notons $\mathbb{C}\{x\}$ l'ensemble des séries entières admettant un rayon de convergence non nul, que l'on identifiera souvent à l'espace des germes de fonctions analytiques en $x = 0$ de $\mathbb{C}$. On considère l'ensemble des polynômes non commutatifs en σ_q à coefficients dans $\mathbb{C}\{x\}$ (avec la relation $\sigma_q x = qx\sigma_q$), noté $\mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$. On appelle *opérateur aux q-différences* tout élément de $\mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$. On appelle *équation aux q-différences linéaire analytique*, ou tout simplement *équation aux q-différences*, toute équation fonctionnelle de la forme $\Delta y = c$, où $\Delta \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$, $c \in \mathbb{C}\{x\}$ et y est une fonction inconnue. On dit qu'une équation aux q-différences est *d'ordre n* si son opérateur correspondant est de la forme $a_n\sigma_q^n + \ldots + a_1\sigma_q + a_0 \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$ avec $a_0 a_n \not\equiv 0$.

0.2. Du point de vue géométrique, on constate une grande différence entre les cas $|q| = 1$ et $|q| \neq 1$. Comme dans la plupart des études réalisées dans ce domaine, on suppose que $|q| \neq 1$. Afin d'alléger la présentation de l'exposé, on suppose, en plus, que q **est un réel strictement supérieur à 1**. Nous donnerons à la fin de l'article quelques commentaires permettant de lever cette dernière hypothèse restrictive; voir 6.2.2.

Mots-clés : Développement asymptotique – Équation aux q-différences – Sommabilité – Transformation de q-Borel – Transformation de q-Laplace – Phénomène de Stokes – Estimations Gevrey.
Classification math. : 30E99 – 33D10 – 39B22 – 40G99.

Bien entendu, il y a un rapport très étroit entre les équations aux q-différences et les équations aux différences finies. Nous le discuterons au paragraphe 6.2.1.

0.3. Dans la synthèse [Ad] de C. R. Adams, on trouve une description de l'état général des connaissances sur les équations aux q-différences au début des années 30. C'est depuis cette époque que l'on sait former, pour une équation aux q-différences, un système fondamental de solutions formelles en utilisant des séries entières (ramifiées) et des fonctions du type $(\log x)^m x^\alpha e^{-\frac{\mu}{2}\log^2 x}$, où $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{Q}$. Les nombres μ sont les pentes du *polygone de Newton* associé à l'équation en question, dont la définition est rappelée ci-dessous.

0.3.1. Soit $\Delta \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$ un opérateur d'ordre n ($n \geqslant 1$). On écrit Δ comme étant une somme formelle des monômes $\alpha_{i,j}x^j\sigma_q^i$, i variant de 0 à n et $j \in \mathbb{N}$. Soit $[\Delta]$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ constitué des demi-droites verticales ascendantes partant des points (i, j) tels que $\alpha_{i,j} \neq 0$. Le polygone de Newton de Δ, que l'on notera $PN(\Delta)$, est défini comme étant l'enveloppe convexe de $[\Delta]$ dans $\mathbb{R}^2$. $PN(\Delta)$ sera aussi appelé le polygone de Newton associé à l'équation $\Delta y = c$ ($c \in \mathbb{C}\{x\}$ arbitraire).

0.3.2. Par définition, on dit que Δ admet une *singularité irrégulière* (resp. *singularité fuchsienne*) en 0 si $PN(\Delta)$ contient des pentes finies non nulles (resp. si $PN(\Delta)$ n'a pas de pente finie non nulle). Dans ce cas, on dit aussi que Δ est singulier irrégulier (resp. singulier régulier) en 0.

0.3.3. En 1912, R. D. Carmichael [Ca] a établi l'existence d'un système fondamental de solutions analytiques (ramifiées) pour une équation aux q-différences $\Delta y = 0$ quand l'opérateur Δ est singulier régulier en 0. Dans ce cas, toutes les séries entières (ramifiées) figurant dans la solution formelle sont convergentes.

0.4. Soixante ans après la publication de [Ad], J.-P. Bézivin [Bé] a découvert des théorèmes d'indices pour les opérateurs aux q-différences sur les espaces $\mathbb{C}[[x]]_{q;s}$ ($s > 0$) de séries formelles q-Gevrey d'ordre s. Par définition, l'ensemble $\mathbb{C}[[x]]_{q;s}$ est formé des séries entières dont la suite des coefficients est dominée par une suite $(KA^n q^{sn^2/2})$ ($K, A > 0$ arbitraires).

Les théorèmes d'indices obtenus dans [Bé] ont notamment les conséquences importantes suivantes :

0.4.1. *Toute série entière divergente $\hat{y}$ telle que $\Delta\hat{y} \in \mathbb{C}\{x\}$, appartient à une classe de séries entière q-Gevrey d'ordre précis (optimal) $s \in$* $PN(\Delta) \cap\,]0, +\infty[$ (voir aussi [FJ]) ;

0.4.2. *Toute fonction entière non polynomiale y telle que $\Delta y \in \mathbb{C}\{x\}$ (où Δ est un opérateur à coefficients polynomiaux), a une croissance q-exponentielle d'ordre précis, c'est-à-dire $y = O(e^{\frac{s}{2\log q}\log^2|x|}x^{\mu})$ avec $s > 0$ "optimal" et $\mu \in \mathbb{R}$* ([Ra2]).

0.5. Du côté de l'*étude analytique*, dans la ligne d'un programme initié par G.D. Birkhoff [Bi], W.J. Trjitzinsky a publié en 1933 un article intitulé *Analytic theory of linear q-difference equations* ([Tr]). C'est l'un des premiers travaux consacrés à la recherche de solutions analytiques (dans des domaines convenables) asymptotiques aux solutions formelles obtenues antérieurement. Comme presque tous les mathématiciens à cette époque, l'auteur utilisait la notion classique de développement asymptotique due à Poincaré pour relier une fonction analytique et une série entière éventuellement divergente.

Depuis le début des années 80, on s'est aperçu que la notion de développement asymptotique Gevrey permet de décrire de façon avantageuse la structure (des solutions) des équations différentielles à coefficients analytiques. L'objectif de cet article est d'introduire par q-analogie une nouvelle notion de développement asymptotique adaptée cette fois à l'étude des équations aux q-différences analytiques. Ce travail est motivé par un programme de recherche formulé par Jean-Pierre Ramis dans le cadre de son séminaire à Strasbourg en 1990-91.

0.6. Nous avons commencé notre travail par l'étude d'une version tronquée d'une série thêta de Jacobi $\hat{f} := \sum\limits_{n\geqslant 0} q^{n(n-1)/2}x^n$, qui vérifie formellement l'équation non homogène $xy(qx) - y(x) = -1$. Notons $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ la surface de Riemann du logarithme. En utilisant la méthode de la variation des constantes et la transformation de Fourier-Laplace, on obtient pour cette équation une solution analytique sur $\widetilde{\mathbb{C}}^*$, notée f, qui possède la propriété suivante :

0.6.1. *Étant donné $\eta \in]0, \pi[$, il existe $K > 0$, $A > 0$ tels que, pour tous $\theta \in]\eta, 2\pi - \eta[$, n entier naturel et x $(= |x|q^{i\arg_q x})$ de module $|x|$ suffisamment petit, on ait* $|f(x) - \sum\limits_{m=0}^{n-1} q^{m(m-1)/2}x^m| < KA^n q^{\frac{1}{2}(n^2+(\arg_q(xe^{-i\theta}))^2)}|x|^n$.

Rappelons que, entre la théorie des développements asymptotiques de Poincaré et sa version Gevrey, une différence essentielle apparaît pour le problème de l'*unicité* des fonctions analytiques asymptotiquement développables. Dans cette direction, on montrera que

0.6.2. *Une fonction vérifiant la propriété 0.6.1 ci-dessus est déterminée de façon* unique.

Cet exemple nous suggère une définition naturelle des *développements asymptotiques q-Gevrey d'ordre 1.* À partir de cette nouvelle notion d'asymptoticité, on décrira un procédé de resommation qui fait correspondre, à chaque membre d'une classe convenable de séries entières q-Gevrey (en général "très divergentes") et à une direction générique donnée, une *unique* fonction analytique sur un "disque" de centre 0 et de rayon $R > 0$ dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$. Cette classe de séries sera notée $\mathbb{C}\{x\}_{q;1}$; ses éléments seront appelés séries entières *Gq-sommables d'ordre 1* et les fonctions correspondantes leurs *Gq-sommes.* On aura les relations d'inclusion $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}\{x\}_{q;1} \subset \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$.

0.7. Afin d'*obtenir* (ou même de *calculer numériquement*) la *Gq*-somme d'une série entière *Gq*-sommable dans une direction donnée, on utilisera des transformations de Borel et de Laplace q-analogues (*cf* [Ra3], p. 57).

0.8. Le résultat suivant, qui est le q-analogue d'un résultat de [Ra1], prouvera l'intérêt de cette méthode de sommation.

0.8.1. *Toute série entière $\hat{y}$ telle que $\Delta\hat{y} \in \mathbb{C}\{x\}$, est Gq-sommable si le polygone de Newton de Δ n'a qu'une seule pente égale à 1.*

Ce résultat n'est plus vrai pour un opérateur aux q-différences quelconque. Dans un article ultérieur [MZ], nous montrerons que toute série entière solution formelle d'une équation aux q-différences est *Gq–multisommable.* Ce dernier résultat est le q-analogue d'un résultat récent sur les solutions formelles des équations différentielles linéaires analytiques (*cf* [MR], [BBRS], ...).

0.8.2. Dans [A1], [A2], Yves André introduit et étudie systématiquement la notion de série Gevrey de type *arithmétique.* Cette étude est basée sur la transformation de Laplace. Il suggère à la fin de [A1] (*cf.* 6.3 d)) une version q-analogue basée sur la transformation de q-Laplace étudiée dans le présent travail. Dans cette direction il propose comme série modèle pour les q-E-fonctions la série de Tschakaloff $\sum_{n\geqslant 0} q^{-n(n-1)/2}x^n$. Cette dernière n'est autre que la série théta tronquée qui joue un rôle important dans notre article, où l'on a changé q en $1/q$. Ceci suggère que cette dernière pourrait être utilisée comme série modèle pour les q-$\ni$-fonctions (i.e. les q-analogues des $\ni$-fonctions de [A2]). En utilisant notre travail sur la Gq-sommabilité, on peut donc espérer développer une version q-analogue de [A2] 3. (*cf.* [A2], Remarques 3.4 *ii)*).

0.9. La suite de cet article comprend six parties. Dans la première partie, on étudiera la série thêta de Jacobi tronquée mentionnée au 0.6 et on établira la propriété 0.6.1. Inspiré par cet exemple, on définira dans la seconde partie la notion de développement asymptotique q-Gevrey et on en donnera quelques propriétés relativement immédiates (q-analogue du théorème de Borel-Ritt-Gevrey, caractérisation des fonctions q-plates en terme de décroissance q-exponentielle, etc), dont l'une permet de prouver directement l'assertion 0.6.2. On étudiera ensuite la transformation de Borel-Laplace q-analogue et on l'utilisera pour caractériser la classe des séries entières Gq-sommables.

Dans la cinquième partie, on établira l'assertion 0.8.1 (*cf.* le théorème 5.3) et on définira pour chacun de nos opérateurs aux q-différences les multiplicateurs de Stokes associés. Dans la dernière partie, on étudiera les «petites» solutions analytiques dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ d'une équation aux q-différences, i.e. les solutions vérifiant certaines conditions de croissance. Ces deux dernières parties devraient servir à l'étude du groupe de Galois aux q-différences local à l'origine (*cf.* [FRZ]).

Remerciements. — J'ai bénéficié depuis des années des conseils avisés et des encouragements constants de Jean-Pierre Ramis. Je le remercie vivement. Je tiens à remercier également Augustin Fruchard et Fabienne Marotte pour leurs conversations utiles et remercier Guy Wallet pour ses encouragements constants dont j'ai bénéficié durant la préparation de cet article. Je remercie enfin le rapporteur pour ses remarques importantes et sa lecture attentive.

Notations.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$: les ensembles habituels de nombres ;

$\widetilde{\mathbb{C}}^*$: la surface de Riemann du logarithme ;

$\log x$: la détermination principale du logarithme ;

$\log_q x := \dfrac{\log x}{\log q}$, $\arg_q x = \Im(\log_q x)$;

$D(0;R)$: le disque de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{C}$;

$\tilde{D}(0;R)$: le disque de centre "0" et de rayon R dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$;

d_θ : la direction issue de "0" passant par le point d'affixe $e^{i\theta}$ dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$;

$S(\theta;\varepsilon)$: le secteur ouvert de $\widetilde{\mathbb{C}}^*$, bissecté par d_θ et abordant les directions $d_{\theta\pm\varepsilon}$;

$\mathbb{C}[[x]]$: l'ensemble des séries entières, convergentes ou non;

$\mathbb{C}[[x]]_{q;1}$: l'ensemble des séries entières q-Gevrey d'ordre 1;

$\mathbb{C}\{x\}$: l'ensemble des séries entières de rayon de convergence non nul;

$\mathbb{E}_{q;1}$: l'ensemble des fonctions entières qui ont une croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini à l'infini;

$\mathbb{H}^\theta_{q;1}$: l'ensemble des séries entières convergentes dont les sommes peuvent être prolongées analytiquement dans un secteur $S(\theta;\varepsilon)$ en une fonction à croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini;

$\widetilde{\mathbb{O}}_R$: l'ensemble des fonctions analytiques dans le disque $\tilde{D}(0;R)$;

$\widetilde{\mathbb{O}}$: $=\cup_{R>0}\widetilde{\mathbb{O}}_R$;

$\mathcal{A}^\theta_{q;1}$: l'ensemble des fonctions possèdant un développement asymptotique q-Gevrey d'ordre 1 dans d_θ;

$\mathbb{G}^\theta_{q;1}$: l'ensemble des fonctions possèdant un développement asymptotique q-Gevrey d'ordre 1 dans toutes directions voisines de d_θ;

$\mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;1}$: l'ensemble des séries entières Gq-sommables d'ordre 1 dans la direction d_θ;

$\sim^\theta_{q;1}$: une fonction est q-Gevrey asymptotique dans la direction d_θ à une série entière;

$DS(\hat{f})$: l'ensemble des directions singulières d'une série entière $\hat{f}$;

$\mathbb{C}\{x\}_{q;1}$: l'ensemble des séries Gq-sommables d'ordre 1;

$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$: la transformation de q-Borel formelle;

$\mathcal{B}^\rho_{q;1}$: la transformation de q-Borel analytique en $0 \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$;

$\mathcal{L}^\theta_{q;1}$: la transformation de q-Laplace;

$\mathcal{S}^\theta_{q;1}$: la Gq-somme d'une série entière dans la direction d_θ (non singulière).

1. Étude de la série $\sum_{n\geqslant 0} q^{n(n-1)/2}x^n$.

1.1. Soit $\hat{f} := \sum\limits_{n\geqslant 0} q^{n(n-1)/2}x^n$ une série thêta de Jacobi tronquée. (La série thêta de Jacobi correspondante est $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} q^{n(n-1)/2}x^n$.) Elle diverge pour tout x non nul ($q > 1$) et elle est solution formelle de l'équation non homogène aux q-différences

$$xy(qx) - y(x) = -1. \tag{1.1.1}$$

On voit clairement que $\hat{f}$ est la seule série entière vérifiant l'équation (1.1.1) et que cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{C}\{x\}$. Pour des propriétés classiques de la somme de la série de Jacobi correspondante (avec $|q| < 1$), qui satisfait l'équation homogène associée (*cf.* [Ra2]), voir par exemple [WW], Chapitre XXI.

1.1.2. Notons $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ la surface de Riemann du logarithme. On fixe un relevé $1 \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ de $1 \in \mathbb{C}^*$. Cela fixe du même coup un isomorphisme $\log_q$: $\widetilde{\mathbb{C}}^* \cong \mathbb{C}$, dont l'inverse, composé avec la projection sur $\mathbb{C}^*$ n'est autre que $t \mapsto q^t = e^{t.\log q}$; la règle $\log_q(xy) = \log_q(x) + \log_q(y)$ définit un «produit» sur $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ qui relève celui de $\mathbb{C}^*$. Pour tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ d'image $t \in \mathbb{C}$, on pose $|x| = q^{\Re t}$, $\arg_q x = \Im t$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$; comme d'habitude, le symbole x^α désignera la fonction $e^{\alpha \log x}$ de $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ dans $\mathbb{C}$.

Soit l'équation homogène associée à (1.1.1) :

$$xy(qx) - y(x) = 0, \tag{1.1.3}$$

dont une solution *évidente* est la fonction $q^{-\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x-1)}$ définie dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$. Cette fonction est un q-analogue de l'exponentielle [Ra2]. On a alors la remarque suivante.

1.1.4. Toute solution analytique dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ de l'équation (1.1.3) est de la forme

$$y = q^{-\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x-1)}C(x),$$

où la fonction C, appelée *q-constante analytique*, vérifie $C(qx) = C(x)$.

1.2. Une façon de résoudre l'équation (1.1.1) est d'utiliser le q-analogue de la méthode de la variation des constantes. En faisant le changement de fonction $y(x) = q^{-\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x-1)}z(x)$ dans l'équation (1.1.1), on obtient

$$z(qx) - z(x) = -q^{\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x-1)},$$

qui se transforme en l'équation suivante :

$$u(t+1)-u(t)=-q^{\frac{1}{2}t(t-1)}, \tag{1.2.1}$$

en posant $x=q^t$ et $z(x)=u(t)$.

Résolvons l'équation (1.2.1) à l'aide de la transformation de Fourier (ou la transformation de Laplace). On appelle ici transformée de Fourier (resp. de Fourier inverse) d'une fonction φ, notée $\mathcal{F}\varphi$ (resp. $\mathcal{F}^{-1}\varphi$), la fonction définie par l'intégrale (supposée convergente) suivante : ($a\in\mathbb{R}$)

$$\mathcal{F}\varphi(\chi):=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\varphi(t)e^{-\chi t}dt \quad (resp.\ \mathcal{F}^{-1}\varphi(t):=\int_{-\infty+ia}^{+\infty+ia}\varphi(\chi)e^{\chi t}d\chi).$$

On remarque que si $\mathcal{F}\varphi$ et $\mathcal{F}(\varphi(t+1))$ existent, alors $\mathcal{F}(\varphi(t+1))=e^{\chi}\mathcal{F}\varphi$. On rappelle également que, pour des espaces de fonctions convenables, on a

$$\mathcal{F}\circ\mathcal{F}^{-1}=\mathrm{id},\quad \mathcal{F}^{-1}\circ\mathcal{F}=\mathrm{id}. \tag{1.2.2}$$

Pour plus de détails dans le cadre qui nous intéresse ici, voir par exemple [Ma].

Soit w la transformée de Fourier de $q^{\frac{1}{2}t(t-1)}$; pour tout $\chi\in\mathbb{C}$, on a

$$w(\chi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\log q}}\,q^{-\frac{1}{2}(\frac{\chi}{\log q}+\frac{1}{2})^2}.$$

Pour vérifier cette dernière identité, il suffit de noter que, pour tout $\alpha>0$ et tout $\beta\in\mathbb{C}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha t^2+\beta t}dt=\frac{e^{\beta^2/(4\alpha)}}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi/\alpha}\,e^{\beta^2/(4\alpha)}. \tag{1.2.3}$$

En conséquence, l'équation (1.2.1) donne la relation

$$(\mathcal{F}u)(\chi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\log q}}\,\frac{q^{-\frac{1}{2}(\frac{\chi}{\log q}+\frac{1}{2})^2}}{1-e^{\chi}}.$$

En tenant compte de (1.2.2), on trouve une famille de solutions (u_θ) de (1.2.1) donnée par

$$u_\theta(t):=\frac{1}{\sqrt{2\pi\log q}}\int_{-\infty+i\theta}^{+\infty+i\theta}\frac{q^{-\frac{1}{2}(\frac{\chi}{\log q}+\frac{1}{2})^2}}{1-e^{\chi}}e^{\chi t}d\chi,$$

où $\theta \neq 0$ modulo 2π. Soit $\xi = e^{\chi}$ et $y_\theta(x) = q^{\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x - 1)} u_\theta(\log_q x)$; on obtient alors une famille de solutions analytiques sur $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ de l'équation (1.1.1) :

$$y_\theta(x) := \frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_{d_\theta} \frac{q^{-\frac{1}{2}\log_q \frac{x}{\xi}(\log_q \frac{x}{\xi} - 1)}}{1-\xi} \frac{d\xi}{\xi}, \tag{1.2.4}$$

où d_θ désigne la demi-droite $\{\xi \in \widetilde{\mathbb{C}}^* : \arg \xi = \theta\}$ dirigée vers l'infini.

1.2.5. Si θ_1 et θ_2 appartiennent à un même intervalle du type $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, les fonctions y_{θ_1} et y_{θ_2} définies par (1.2.4) sont les *mêmes*, d'après le théorème de Cauchy; on note f_k la fonction correspondante.

THÉORÈME 1.3. — *Conservant les notations f_k de 1.2.5, on a les assertions suivantes :*

1.3.1. *La fonction f_0 vérifie la propriété énoncée au 0.6.1, c'est-à-dire : étant donné $\eta \in]0, \pi[$, il existe $K > 0$, $A > 0$ tels que, pour tous $\nu \in]\eta, 2\pi - \eta[$, n entier naturel et $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ de module suffisamment petit, on ait*

$$|f_0(x) - \sum_{m=0}^{n-1} q^{m(m-1)/2} x^m| < K A^n q^{\frac{1}{2}(n^2 + (\arg_q(xe^{-i\nu}))^2)} |x|^n. \tag{1.3.1a}$$

1.3.2. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$, on a $f_k(x) = f_0(xe^{2k\pi i})$ et $f_k(x) - f_0(x) = q^{-\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x - 1)} C_k(x)$ avec*

$$\begin{aligned} C_k(x) &= iq^{-1/8}\sqrt{\frac{2\pi}{\log q}} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j q^{\frac{2\pi^2 j^2}{\log^2 q}} x^{\frac{2j\pi i}{\log q}} \quad \text{si } k \in \mathbb{N}, \\ C_k(x) &= iq^{-1/8}\sqrt{\frac{2\pi}{\log q}} \sum_{j=k+1}^{0} (-1)^{j+1} q^{\frac{2\pi^2 j^2}{\log^2 q}} x^{\frac{2j\pi i}{\log q}} \quad \text{si } -k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.3.2a}$$

Preuve. — On rappelle que, si $\xi \neq 1$, on a $\dfrac{1}{1-\xi} = 1 + \ldots + \xi^{n-1} + \dfrac{\xi^n}{1-\xi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; or, d'après (1.2.3) on trouve

$$\frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_{d_\theta} q^{-\frac{1}{2}\log_q \frac{x}{\xi}(\log_q \frac{x}{\xi} - 1)} \xi^{m-1} d\xi = q^{m(m-1)/2} x^m \tag{1.3.3}$$

pour tous $m \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$ et $D_\theta := \operatorname{dist}(\{1\}; d_\theta)$ la distance entre le point d'affixe 1 et la demi-droite d_θ ; d'après ce qui précède (et (1.2.4), 1.2.5) on obtient

$$\begin{aligned}\left|f_0(x)-\sum_{m=0}^{n-1} q^{m(m-1)/2}x^m\right| &\\ &\leqslant \frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi\log q}}\frac{1}{D_\theta}\int_0^{+\infty}\left|q^{-\frac12\log_q\frac{x}{re^{i\theta}}(\log_q\frac{x}{re^{i\theta}}-1)}\right|r^{n-1}dr\\ &\leqslant \frac{1}{D_\theta}q^{\frac12(n(n-1)+(\arg_q(xe^{-i\theta}))^2)}|x|^n,\end{aligned}$$

ce qui entraîne immédiatement l'assertion 1.3.1.

Pour l'assertion 1.3.2, on considère seulement le cas où $k=1$. Soit $\theta\in]2\pi,4\pi[$ fixé. En effectuant une rotation de (-2π) sur d_θ on obtient une demi-droite $d_{\theta'}$ avec $\theta'\in]0,2\pi[$; la fonction correspondant à d_θ dans (1.2.4) est alors égale à la fonction $f_0(xe^{2\pi i})$. D'où la relation $f_1(x)=f_0(xe^{2\pi i})$.

Soit $\theta_0\in]0,2\pi[$ et $\theta_1\in]2\pi,4\pi[$. En appliquant le théorème des résidus à l'intégrale (ici $1=e^{2\pi i}$!)

$$\left(\int_{d_{\theta_1}}-\int_{d_{\theta_0}}\right)\frac{q^{-\frac12\log_q\frac{x}{\xi}(\log_q\frac{x}{\xi}-1)}}{1-\xi}\frac{d\xi}{\xi},$$

on obtient

$$f_1(x)-f_0(x)=iq^{-1/8}\sqrt{\frac{2\pi}{\log q}}\,q^{-\frac12\log_q(xe^{-2\pi i})(\log_q(xe^{-2\pi i})-1)}. \qquad \square$$

1.3.4. On remarque que les fonctions $C_k(x)$ obtenues dans (1.3.2a) sont des q-constantes analytiques au sens de 1.1.4.

1.4. Le théorème précédent sera considéré comme un cas particulier des résultats établis dans les parties 4 et 5, où l'on dira simplement que la série $\hat f$ est Gq-sommable d'ordre 1 dans toute direction de $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ sauf en celles congruentes à $\mathbb{R}^+$. Avant de passer à la partie suivante, nous ferons quelques commentaires.

1.4.1. W.J. Trjitzinsky [Tr] a déjà utilisé la même méthode que celle employée au paragraphe 1.2 (sauf l'utilisation de la transformation de Fourier lors de la présentation des résultats) pour établir l'existence de solutions analytiques d'une équation aux q-différences asymptotiques aux solutions formelles connues. Comme presque tous les mathématiciens de son époque, il ne s'intéressait pas à la recherche d'une asymptoticité *précisée*. Il serait intéressant de réactualiser ces travaux [Tr] dans le cadre de la notion de développement asymptotique introduite ici. Notons qu'en tout cas nos résultats et ceux de [MZ] permettent de redémontrer assez simplement les résultats de [Tr].

1.4.2. Posons, pour tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$,

$$g(x) := \int_{-1/2-\infty i}^{-1/2+\infty i} \frac{q^{u(u-1)/2}}{1-e^{2\pi i u}} x^u du. \tag{1.4.2a}$$

L'intégrale précédente converge et définit sur $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ une solution analytique de l'équation (1.1.1). De plus, lorsque $|x| \leqslant 1$, on a

$$\left| g(x) - \sum_{m=0}^{n-1} q^{m(m-1)/2} x^m \right| \leqslant K A^n q^{\frac{1}{2}(n^2+\arg_q^2 x)} |x|^n, \tag{1.4.2b}$$

où K, $A > 0$ sont indépendants de x et de n. Dans la partie suivante, on dira que g possède $\hat{f}$ pour développement asymptotique q-Gevrey d'ordre 1 dans la direction $\mathbb{R}^+$. Il serait intéressant de comparer la famille de solutions (f_k) étudiée dans le théorème 1.3 et les solutions $g_k := g(xe^{2k\pi i})$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2. Les développements asymptotiques q-Gevrey d'ordre 1.

2.1. Soit $R > 0$; on note $\tilde{D}(0; R) := \{x \in \widetilde{\mathbb{C}}^* : 0 < |x| < R\}$ le disque de "centre" 0 et de rayon R dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$. On définit $\widetilde{\mathbb{O}}$ comme étant l'ensemble des fonctions définies et analytiques dans un disque $\tilde{D}(0; R)$ de $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ ($R > 0$ quelconque) ; tout élément de $\widetilde{\mathbb{O}}$ sera appelé *(germe de) fonction analytique en "$0 \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$"*.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $d_\theta := \{x \in \widetilde{\mathbb{C}}^* : \arg x = \theta\}$ la demi-droite d'argument θ dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$, qu'on appelle la direction d_θ. Étant donnés $n \in \mathbb{N}$ et $\hat{f} := \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$, on note $\hat{f}_n := \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} a_k x^k$ la n-ième somme partielle de $\hat{f}$.

DÉFINITION 2.1.1. — Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ et $f \in \widetilde{\mathbb{O}}$. On dit que f possède $\hat{f}$ pour *développement asymptotique q-Gevrey d'ordre 1 dans la direction d_θ* et on note $f \sim_{q;1}^{\theta} \hat{f}$, s'il existe $A > 0$, $K > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ de module suffisamment petit, on ait

$$|f(x) - \hat{f}_n(x)| < K A^n q^{\frac{1}{2}(n^2+\arg_q^2(xe^{-i\theta}))} |x|^n. \tag{2.1.1a}$$

Soit $f \sim_{q;1}^{\theta} \hat{f}$; on vérifie immédiatement les deux assertions suivantes :

2.1.2. Pour tout secteur V d'ouverture *finie* et de sommet $0 \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$, f admet $\hat{f}$ pour développement asymptotique dans V au sens de Poincaré. On en déduit que le développement $\hat{f}$ est *unique*.

2.1.3. On a $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$.

2.2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{A}_{q;1}^{\theta}$ l'ensemble des fonctions $f \in \widetilde{\mathbb{O}}$ qui possèdent un développement asymptotique q-Gevrey d'ordre 1 dans la direction d_θ. On considère J_θ l'application, linéaire, de $\mathcal{A}_{q;1}^{\theta}$ dans $\mathbb{C}[[x]]_{q;1}$, définie par la relation $J_\theta(f) = \hat{f}$, où $\hat{f}$ est le développement asymptotique q-Gevrey de f dans d_θ.

PROPOSITION 2.2.1. — *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. A tout $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ correspond un $f \in \mathcal{A}_{q;1}^{\theta}$ tel que $f \sim_{q;1}^{\theta} \hat{f}$.*

En d'autres termes, l'application $J_\theta : \mathcal{A}_{q;1}^{\theta} \to \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ est surjective.

Ce résultat sera démontré au paragraphe 4.2.1 au moyen d'une transformation de Laplace (tronquée) q-analogue. C'est une version Gevrey q-analogue du théorème de Borel-Ritt ou du théorème de Borel-Ritt-Gevrey (*cf.* [To] pp. 10-12, [Ra1], [Ma]).

L'application J_θ est surjective, elle n'est par contre pas injective comme le montre le résultat suivant.

PROPOSITION 2.2.2. — *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{A}_{q;1}^{\theta}$. On a $J_\theta(f) = 0$ si, et seulement si, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait, lorsque $|x| \to 0$,*

$$f(x) = O\big(x^{\mu} q^{-\frac{1}{2}\log_q^2(xe^{-i\theta})}\big).$$

DÉFINITION 2.2.3. — *Une fonction $f \in \widetilde{\mathbb{O}}$ est dite à décroissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini dans une direction d_θ si l'on a $f(x) = O\big(x^{\mu} q^{-\frac{1}{2}\log_q^2(xe^{-i\theta})}\big)$ pour $|x| \to 0$, où $\mu \in \mathbb{R}$.*

Preuve de la proposition 2.2.2. — On rappelle que $J_\theta(f) = 0$ si, et seulement si, il existe $A > 0$, $K > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsque $|x| \to 0$ on ait

$$|f(x)| < KA^n q^{\frac{1}{2}(n^2 + \arg_q^2(xe^{-i\theta}))} |x|^n.$$

Or, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on a

$$x^{\mu} q^{-\frac{1}{2}\log_q^2(xe^{-i\theta})} = e^{i\mu\theta} q^{\mu^2/2} q^{-\frac{1}{2}\log_q^2(xe^{-i\theta}/(q^{\mu}))}.$$

Quitte à remplacer x par $\dfrac{x}{A}e^{i\theta}$, on peut alors supposer que $\theta = 0$ et $A = 1$.

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ dans $]0, +\infty[$ définie par

$$U_n(x) = q^{\frac{1}{2}(n^2+\arg_q^2 x)}|x|^n.$$

On va montrer la propriété suivante : pour $|x| \to 0$, on a $|f(x)| \leqslant \min_{n\in\mathbb{N}} U_n(x)$ si, et seulement si, $f(x) = O(x^{-1}q^{-\frac{1}{2}\log_q^2 x})$; ceci prouve évidemment notre proposition.

Soit $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ fixé. On note $E(-\Re(\log_q x) - 1/2)$ le plus petit entier relatif qui est supérieur ou égal à $(-\Re(\log_q x) - 1/2)$; on pose $n_x := \max\Big(0, E\Big(-\Re(\log_q x) - \dfrac{1}{2}\Big)\Big)$. Puisque $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}(x) = q^{n+1/2}|x|$, la suite numérique $(U_n(x))_n$ décroît jusqu'au rang n_x puis elle croît ; on a donc $U_n(x) \geqslant U_{n_x}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Lorsque $|x| < \sqrt{q}$, on trouve aisément que $U_{n_x}(x) \leqslant |x|^{-1}q^{-\frac{1}{2}\Re(\log_q^2 x)+\frac{1}{8}}$. □

PROPOSITION 2.2.4. — *Soit $\theta_j \in \mathbb{R}$, $f_j \in \mathcal{A}_{q;1}^{\theta_j}$, avec $j = 1, 2$. Si $J_{\theta_1} f_1 = J_{\theta_2} f_2$, alors il existe $\mu_j \in \mathbb{R}$, $K_j > 0$ ($j = 1, 2$) tels que*

$$|f_1(x) - f_2(x)| < \sum_{j=1}^{2} K_j |x|^{\mu_j} \big|q^{-\frac{1}{2}(\log_q^2(xe^{-i\theta_j}))}\big|$$

pour tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ de module suffisamment petit.

Preuve. — Il suffit de noter que, lorsque $|x| \to 0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{2} |f_j(x) - \hat{f}_n(x)| < \sum_{j=1}^{2} K_j A_j^n q^{\frac{1}{2}(n^2+\arg_q^2(xe^{-i\theta_j}))}|x|^n,$$

où les $A_j > 0$ sont des constantes indépendantes de x et de n. □

THÉORÈME 2.3. — *Soit $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Si $\theta_1 \neq \theta_2$, alors* $\ker J_{\theta_1} \cap \ker J_{\theta_2} = \{0\}$.

Preuve. — Soit $f \in \ker J_{\theta_1} \cap \ker J_{\theta_2}$. D'après la proposition 2.2.2, il existe $K_j > 0$, $\mu_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, 2$) tels que, lorsque $|x| \to 0$,

$$|f(x)| \leqslant K_j |x|^{\mu_j} \big|q^{-\frac{1}{2}(\log_q^2(xe^{-i\theta_j}))}\big|.$$

Quitte à multiplier f par $x^{-\min(\mu_1,\mu_2)}$, on peut supposer que $\min(\mu_1, \mu_2) = 0$. En effectuant si nécessaire une rotation sur la variable x, on peut supposer que $\theta_2 > \theta_1 = 0$. De plus, on supposera que $\mu_2 \geqslant \mu_1 = 0$, le cas restant $\mu_2 < \mu_1$ étant similaire.

Soit $g(x) := f(x)q^{\frac{1}{2}\log_q^2 x}$ pour tout $x \in \tilde{D}(0;R)$, avec $R > 0$ suffisamment petit. D'après les hypothèses ci-dessus sur f, on a, pour tout $x \in \tilde{D}(0;R)$,

$$|g(x)| \leqslant K_1, \quad |g(x)| \leqslant K_2 e^{\theta_2^2/\log q}|x|^{\mu_2}|x^{i\theta_2/\log q}| \leqslant K e^{-\theta_2 \arg_q x},$$

où $K = K_2 e^{\theta_2^2/\log q} R^{\mu_2}$.

Posons $G(z) := g(e^z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re z < \log R$. La fonction G est analytique, bornée et majorée par $K|e^{i\theta_2 z/\log q}|$ sur le demi-plan à gauche $\{\Re z < \log R\}$. Par conséquent, la fonction $z \mapsto G(z)e^{-i\theta_2 z/(2\log q)}$ est bornée sur ce demi-plan et exponentiellement petite dans toutes les directions verticales. D'après le *lemme de Watson* (*cf* [Ma] p. 14), on obtient que $G(z)e^{-i\theta_2 z/(2\log q)}$, donc G elle-même, sont identiquement nulles. D'où g, et par suite f, sont identiquement nulles sur $\tilde{D}(0;R)$. □

2.3.1. L'assertion *0.6.2* découle immédiatement du théorème précédent.

3. Transformation de Borel-Laplace q-analogue.

3.1. Nous commençons par une transformation de Borel formelle q-analogue.

Définition 3.1.1. — *On appelle transformation de q-Borel formelle, notée $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$, l'application linéaire de $\mathbb{C}[[x]]$ dans $\mathbb{C}[[\xi]]$ qui envoie x^n en $q^{-n(n-1)/2}\xi^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On a $\mathbb{C}[[x]]_{q;1} = (\hat{\mathcal{B}}_{q;1})^{-1}(\mathbb{C}\{\xi\})$. Par un calcul direct, on vérifie les deux propriétés qui suivent.

3.1.2. Pour tout $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$, on a $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(x\sigma_q(\hat{f})) = \xi\sigma_q(\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f})$; autrement dit, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$ commute avec $x\sigma_q$:

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(x\sigma_q) = \xi\hat{\mathcal{B}}_{q;1}. \tag{3.1.2a}$$

3.1.3. Pour tout couple $(\hat{f},\hat{g}) \in \mathbb{C}[[x]] \times \mathbb{C}[[x]]$, on a

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}\hat{g}) = \sum_{n\geqslant 0} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}(\xi q^{-n}), \tag{3.1.3a}$$

où les a_n sont les coefficients de $\hat{f}$.

Si $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ représente une fonction entière.

PROPOSITION 3.1.4. — *Soit $R > 0$, $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ et φ la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$. On suppose que φ est une fonction entière. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le rayon de convergence de $\hat{f}$ est supérieur ou égal à R.*

(ii) *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\varphi(\xi) = O(q^{\frac{1}{2}\log_q|\xi|(\log_q|\xi|+1)+(-\log_q R+\varepsilon)\log_q|\xi|})$ lorsque $|\xi| \to +\infty$.*

Preuve. — Soit $\hat{f} := \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Quitte à effectuer une homothétie sur la variable x (et donc sur ξ), on peut supposer que $R = 1$ dans la proposition.

Traduisons la condition (i) de la manière suivante. Soit $\varepsilon > 0$; on a alors $|a_n| < K(1+\varepsilon)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $K > 0$ est une constante. On en déduit que, pour tout $\xi \in \mathbb{C}$,

$$|\varphi(\xi)| < K\sum_{n=0}^{+\infty} q^{-n(n-1)/2}((1+\varepsilon)|\xi|)^n.$$

Or, lorsque $|\xi|$ tend vers l'infini dans $\mathbb{C}$, on sait que (*cf* [Ra2], [ZZ])

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n}{(q-1)(q^2-1)\dots(q^n-1)}|\xi|^n = O(e^{\frac{1}{2}\frac{\log^2|\xi|}{\log q}+\frac{\log|\xi|}{2}}),$$

soit donc $\sum_{n=0}^{+\infty} q^{\frac{1}{2}(-n^2+n)}|\xi|^n = O(e^{\frac{1}{2}\frac{\log^2|\xi|}{\log q}+\frac{\log|\xi|}{2}})$. Ainsi la condition (i) implique (ii).

Supposons maintenant la condition (ii) vérifiée. Soit $r > 0$ arbitraire. Appliquant les inégalités de Cauchy à la fonction φ sur le cercle centré en l'origine et de rayon r, on obtient

$$\left|a_n q^{-n(n-1)/2}\right| \leqslant r^{-n}\max_{|\xi|=r}|\varphi(\xi)| \leqslant K e^{\frac{1}{2}\frac{\log^2 r}{\log q}+(\varepsilon-n+1/2)\log r},$$

où $K > 0$ est indépendant de r et de n. Or, étant donné $\alpha > 0$, on a

$$\min_{r>0}(e^{\frac{1}{2}\frac{\log^2 r}{\log q}-\alpha\log r}) = q^{-\alpha^2/2}.$$

On en déduit que, pour $\varepsilon > 0$ et pour tout n assez grand, on a $|a_n| < K'q^{n\varepsilon}$, avec $K' > 0$ indépendant de n. Le nombre ε pouvant être arbitrairement petit, on en conclut que le rayon de convergence de $\hat{f}$ est supérieur ou égal à 1. □

DÉFINITION 3.1.5. — *Soit φ une fonction définie et analytique sur un ouvert de $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ qui contient une partie connexe V radialement non bornée. On dit que φ admet une croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini dans V s'il existe $K > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que, lorsque $|\xi| \to +\infty$ dans V, on ait*

$$|\varphi(\xi)| < K|\xi|^\mu q^{\frac{1}{2}\log_q^2|\xi|}.$$

3.2. La proposition 3.1.4 montre que la fonction somme de la transformée de q-Borel d'une série convergente est à croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini à l'infini dans $\mathbb{C}$. Nous allons étudier une transformation de q-Laplace analytique qui peut être formellement considérée comme l'inverse de la transformation de q-Borel formelle.

LEMME 3.2.1. — *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{C}\{x\}$. On suppose que φ peut se prolonger en une fonction analytique sur un ouvert contenant la direction d_θ et qui possède une croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini dans d_θ. On pose*

$$\mathcal{L}^\theta_{q;1}\varphi(x) := \frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi\log q}} \int_{d_\theta} q^{-\frac{1}{2}(\log_q\frac{x}{\xi})(\log_q\frac{x}{\xi}-1)}\varphi(\xi)\frac{d\xi}{\xi}. \tag{3.2.1a}$$

Alors $x \mapsto \mathcal{L}^\theta_{q;1}\varphi(x)$ définit une fonction analytique dans un disque $\tilde{D}(0;R)$ avec $R > 0$.

DÉFINITION 3.2.2. — *La fonction $\mathcal{L}^\theta_{q;1}\varphi$ définie ci-dessus s'appellera la transformée de q-Laplace de φ le long de la direction d_θ.*

Preuve du lemme 3.2.1. — Quitte à faire une rotation sur la variable ξ, on peut supposer $\theta = 0$. Il est clair que, pour tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$, l'intégrale (3.2.1a) converge en $\xi = 0$; il reste à regarder la convergence en $\xi = +\infty$.

Soit $\xi = q^t$ avec $t > 0$; on a $|\varphi(\xi(t))| = O(q^{\frac{1}{2}t^2+\mu t})$ où $\mu \in \mathbb{R}$. Par conséquent, l'intégrale (3.2.1a) converge en $\xi = +\infty$ pour tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ qui vérifie la condition suivante : il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t > 0$ suffisamment grand, on ait

$$-\frac{1}{2}\Re((\log_q x - t)(\log_q x - t - 1)) + \left(\frac{1}{2}t^2 + \mu t\right) < -\delta t.$$

Cette dernière condition sera vérifiée si $\log_q|x| < -\mu - \delta$, ce qui montre que $\mathcal{L}^\theta_{q;1}\varphi$ est bien définie dans un disque de $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ centré en 0. L'analyticité de cette fonction est évidente. □

À partir de (1.2.3), on obtient la relation suivante : pour tous $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$,

$$\mathcal{L}_{q;1}^{\theta}(\xi^n) = q^{\frac{1}{2}n(n-1)}x^n; \tag{3.2.3}$$

autrement dit, on peut considérer $\mathcal{L}_{q;1}^{\theta}$ comme l'inverse de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$ sur l'espace des fonctions polynomiales.

DÉFINITION 3.2.4. — *On appellera transformation de q-Laplace formelle et on notera $\hat{\mathcal{L}}_{q;1}$ l'opérateur inverse de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$.*

DÉFINITION 3.2.5. — *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et d_θ la direction d'argument θ dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$. On appellera voisinage sectoriel de d_θ tout secteur ouvert de la forme*

$$S(\theta;\epsilon) := \{x \in \widetilde{\mathbb{C}}^* : |\arg x - \theta| < \epsilon\} \quad (\epsilon > 0).$$

3.2.6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$; on note $\mathbb{H}_{q;1}^{\theta}$ l'ensemble des germes de fonctions analytiques en $0 \in \mathbb{C}$ qui peuvent se prolonger en une fonction analytique et admettant une croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini dans un voisinage sectoriel de d_θ.

3.2.7. Si $\varphi \in \mathbb{H}_{q;1}^{\theta}$, alors pour tout θ' suffisamment proche de θ, $\mathcal{L}_{q;1}^{\theta'}\varphi$ est bien définie et, de plus, $\mathcal{L}_{q;1}^{\theta'}\varphi = \mathcal{L}_{q;1}^{\theta}\varphi$.

THÉORÈME 3.3. — *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{H}_{q;1}^{\theta}$. On pose $f = \mathcal{L}_{q;1}^{\theta}\varphi$, $\hat{f} = \hat{\mathcal{L}}_{q;1}\varphi$ et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\hat{f}_n$ la fonction somme des n premiers termes de la série entière $\hat{f}$.*

Alors, il existe $\varepsilon > 0$, $A > 0$, $K > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\vartheta \in]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[$, on ait

$$|f(x) - \hat{f}_n(x)| < KA^n q^{\frac{1}{2}(n^2 + \arg_q^2(xe^{-i\vartheta}))}|x|^n,$$

ceci pour tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ de module suffisamment petit.

Preuve. — Il suffit de copier la preuve suivante de la proposition 2.2.1 ; voir aussi la preuve du théorème 1.3. □

3.3.1. *Preuve de la proposition* 2.2.1. — Quitte à effectuer une rotation sur la variable x, on peut supposer que $\theta = 0$. Soit R le rayon de convergence de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ et φ la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ dans $D(0;R) \subset \mathbb{C}$. Fixons $r \in]0, R[$. Posons, pout tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$, $f = \mathcal{L}_{q;1}^{0;r}\varphi$ la transformée de q-Laplace tronquée en r de φ dans la direction d_0 :

$$\mathcal{L}_{q;1}^{0;r}\varphi(x) = \frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_0^r q^{-\frac{1}{2}(\log_q \frac{x}{\xi})(\log_q \frac{x}{\xi} - 1)}\varphi(\xi)\frac{d\xi}{\xi}.$$

Il est clair que $f \in \widetilde{\mathbb{O}}$. On va montrer que $J_0(f) = \hat{f}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$; on note φ_n la n-ième somme partielle de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$. D'après (3.2.3), on obtient $\hat{f}_n(x) = \mathcal{L}^0_{q;1}\varphi_n$. Écrivons alors $f(x) - \hat{f}_n(x) = \delta_n(x) + \sigma_n(x)$, avec

$$\delta_n(x) := \frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_r^{+\infty} q^{-\frac{1}{2}(\log_q \frac{x}{\xi})(\log_q \frac{x}{\xi}-1)} \varphi_n(\xi) \frac{d\xi}{\xi},$$
$$\sigma_n(x) := \frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_0^{r} q^{-\frac{1}{2}(\log_q \frac{x}{\xi})(\log_q \frac{x}{\xi}-1)} (\varphi - \varphi_n)(\xi) \frac{d\xi}{\xi}.$$

Par un calcul élémentaire, on vérifie qu'il existe une constante $K > 0$, indépendante de n, satisfaisant les deux estimations ci-dessous :

(1) pour tout $\xi \geqslant r$, $|\varphi_n(\xi)| \leqslant K\xi^n$;

(2) pour tout $\xi \in]0, r[$, $|\varphi(\xi) - \varphi_n(\xi)| \leqslant K\xi^n$.

Ceci étant, on a

$$|f(x) - \hat{f}_n(x)| < 2K \frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_0^{+\infty} q^{-\Re(\frac{1}{2}(\log_q \frac{x}{\xi})(\log_q \frac{x}{\xi}-1))} \xi^{n-1} d\xi,$$

ce qui implique, d'après (1.2.3), l'estimation suivante :

$$|f(x) - \hat{f}_n(x)| < 2Kq^{\frac{1}{2}(n(n-1)+\arg_q^2 x)} |x|^n. \qquad \square$$

4. Les séries entières *Gq*-sommables d'ordre 1.

4.1. On dira que la série $\hat{f}$ étudiée dans le théorème 3.3 est sommable dans la direction d_θ au sens Gevrey q-analogue, ou Gq-sommable.

Définition 4.1.1. — *Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ et $f \in \widetilde{\mathbb{O}}$.*

(1) *On dit que $\hat{f}$ est Gq-sommable (d'ordre 1), de Gq-somme f, dans la direction d_θ s'il existe $\varepsilon > 0$, $A > 0$, $K > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\vartheta \in]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[$, on ait*

$$|f(x) - \hat{f}_n(x)| < KA^n q^{\frac{1}{2}(n^2 + \arg_q^2(xe^{-i\vartheta}))} |x|^n,$$

ceci pour tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ de module suffisamment petit.

(2) *On dit que la direction d_θ est singulière pour la série $\hat{f}$, et on notera $\theta \in DS(\hat{f})$, si $\hat{f}$ n'est pas Gq-sommable dans cette direction.*

(3) *La série $\hat{f}$ est dite Gq-sommable (d'ordre 1) si l'intersection* $[0, 2\pi] \cap DS(\hat{f})$ *est finie.*

Lorsque $\hat{f}$ est Gq-sommable (*resp.* Gq-sommable dans la direction d_θ), on notera $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$ (*resp.* $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^\theta$). Il est clair que $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^\theta \subset \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ et que, si $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^\theta$, alors $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta'}$ et $\mathcal{S}_{q;1}^\theta \hat{f} = \mathcal{S}_{q;1}^{\theta'} \hat{f}$ pour tout θ' suffisamment proche de θ.

4.1.2. Compte tenu de la proposition 2.2.4, la différence de deux Gq-sommes, dans des directions différentes, d'une même série entière est majorée par une somme de deux fonctions *à décroissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini.* De plus, *la Gq-somme dans une direction est unique*, d'après le théorème 2.3.

On notera respectivement $\mathcal{S}_{q;1}^\theta \hat{f}$ la Gq-somme de $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^\theta$ dans d_θ et $\mathbb{G}_{q;1}^\theta$ l'ensemble des fonctions Gq-sommes des séries entières Gq-sommables d'ordre 1 dans la direction d_θ.

4.1.3. Si $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^\theta$, alors pour tout $\theta_k = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta_k}$; de plus, $\mathcal{S}_{q;1}^\theta \hat{f}(xe^{-2k\pi i}) = \mathcal{S}_{q;1}^{\theta_k} \hat{f}(x)$. Ceci entraîne une définition équivalente des séries entières Gq-sommables :

La série $\hat{f}$ est Gq-sommable *si et seulement si $DS(\hat{f})$ est un ensemble discret de $\mathbb{R}$.*

Toute série entière convergente est Gq-sommable dans toute direction d_θ de $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ et sa Gq-somme est la fonction somme naturelle de $\hat{f}$. Plus précisément, on a le résultat suivant :

4.1.4. *Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$. On a $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$ si, et seulement si, $DS(\hat{f}) = \varnothing$.*

Pour vérifier l'assertion précédente, il suffit de noter que, si $DS(\hat{f}) = \varnothing$, alors pour tout couple $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ on a $\mathcal{S}_{q;1}^\theta \hat{f} = \mathcal{S}_{q;1}^{\theta'} \hat{f}$; en particulier, avec $\theta' = \theta - 2\pi$ on obtient que $\mathcal{S}_{q;1}^\theta \hat{f}(x) = \mathcal{S}_{q;1}^\theta \hat{f}(xe^{2\pi i})$ (d'après 4.1.3). La série $\hat{f}$ est alors le développement d'une fonction analytique en $0 \in \mathbb{C}$.

THÉORÈME 4.2. — *Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ et φ la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$. On a $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^\theta$ si, et seulement si, $\varphi \in \mathbb{H}_{q;1}^\theta$.*

De plus, en notant $\mathcal{S}^\theta$ l'opérateur prolongement analytique dans la direction d_θ d'une série convergente, on a, sur $\mathbb{C}\{x\}_{q;1}^\theta$,

$$\mathcal{S}_{q;1}^\theta = \mathcal{L}_{q;1}^\theta \circ \mathcal{S}^\theta \circ \hat{\mathcal{B}}_{q;1}. \tag{4.2.1}$$

Idée de la preuve. — D'après le théorème 3.3, la condition est *suffisante*. Pour montrer que la condition est *nécessaire*, on utilisera la *transformée de q-Borel analytique* introduite plus loin. La preuve du théorème s'obtiendra à l'aide de la proposition 4.2.3 ci-dessous. □

Soit $\rho > 0$; on note r_ρ la courbe, positivement orientée, paramétrée par $]-\infty, +\infty[\to \widetilde{\mathbb{C}}^*$, $t \mapsto \rho q^{it}$. C'est le bord du disque $\tilde{D}(0;\rho)$. À partir de (1.2.3), on déduit aisément l'identité suivante :

$$(4.2.2) \qquad -i\frac{q^{1/8}}{\sqrt{2\pi\log q}}\int_{r_\rho} q^{\frac{1}{2}\log_q\frac{x}{\xi}(\log_q\frac{x}{\xi}-1)}x^{n-1}dx = q^{-\frac{1}{2}n(n-1)}\xi^n,$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $\xi \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$.

Proposition 4.2.3. — *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;1}$, de Gq-somme $f \in \mathbb{G}^\theta_{q;1}$. Pour tout $\rho > 0$ suffisamment petit, on pose*

$$(4.2.3a) \qquad \mathcal{B}^\rho_{q;1}f(\xi) := -i\frac{q^{1/8}}{\sqrt{2\pi\log q}}\int_{r_\rho} q^{\frac{1}{2}\log_q\frac{x}{\xi}(\log_q\frac{x}{\xi}-1)}f(x)\frac{dx}{x}.$$

Alors l'intégrale ci-dessus converge pour tout ξ dans un voisinage sectoriel de la direction d_θ. De plus, l'application $\xi \mapsto \mathcal{B}^\rho_{q;1}f(\xi)$ peut se prolonger en une fonction, encore notée $\mathcal{B}^\rho_{q;1}f$, qui appartient à $\mathbb{H}^\theta_{q;1}$ et qui est égale à la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$.

Preuve. — Il est clair que ρ doit être choisi inférieur au rayon du disque $\tilde{D}(0;R)$ sur lequel f est définie. Si l'intégrale en question converge en un point $\xi \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$, alors la valeur de l'intégrale est indépendante du choix de la valeur de ρ ($\rho < R$), d'après le théorème de Cauchy. Pour simplifier, on supposera que $\rho = 1$ (donc $R > 1$).

Soit $\varepsilon > 0$ satisfaisant la condition de la définition 4.1.1 (1). Pour tout $x \in \tilde{D}(0;1)$ et tout $\vartheta \in]\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon[$, on a $|f(x)| < Kq^{\frac{1}{2}\arg_q^2(xe^{-i\vartheta})}$, ce qui implique que, pour $t \in \mathbb{R}$, $|f(e^{it})| < Ke^{\frac{1}{2\log q}(t-\vartheta)^2}$. Il en résulte que, pour $\xi \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|q^{\frac{1}{2}\log_q\frac{e^{it}}{\xi}(\log_q\frac{e^{it}}{\xi}-1)}f(e^{it})\right| < K'e^{t(\arg\xi-\vartheta)}q^{\frac{1}{2}\Re(\log_q\xi(\log_q\xi+1))},$$

où $K' = K\max_{|\vartheta-\theta|<\varepsilon} e^{\vartheta^2/\log q}$. On obtient que l'intégrale en question converge pour tout $\xi \in S(\theta;\varepsilon)$ et que la fonction correspondante est à croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini.

Il reste à étudier $\mathcal{B}^1_{q;1}f$ au voisinage de l'origine. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n := f - \hat{f}_n$. Puisque $|f_n(x)| < Kq^{\frac{1}{2}(n^2+\arg_q^2(xe^{-i\vartheta}))}|x|^n$ et que $\mathcal{B}^1_{q;1}(f_n) = \mathcal{B}^\rho_{q;1}(f_n)$ pour tout $\rho \in]0,1[$, on trouve, pour tout $\xi \in S(\theta;\varepsilon)$:

$$|\mathcal{B}^1_{q;1}(f_n)(\xi)| = |\mathcal{B}^{q^{-n}}_{q;1}(f_n)(\xi)| < K'|\xi|^n q^{\frac{1}{2}(-n^2+\Re(\log_q^2\xi))},$$

avec $K' > 0$ indépendant de n et de ξ. Lorsque $n \to +\infty$, on a $\mathcal{B}^1_{q;1}(f_n)(\xi) \to 0$. Or, d'après (4.2.2), $\mathcal{B}^1_{q;1}(f_n) = \mathcal{B}^1_{q;1}f - (\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f})_n$, ce qui implique que, en désignant par φ la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ dans $D(0;1)$, on a $\varphi(\xi) = \mathcal{B}^1_{q;1}f(\xi)$ pour tout $\xi \in S(\theta;\varepsilon) \cap D(0;1)$. D'où $\mathcal{B}^1_{q;1}f(\xi)$ peut se prolonger en une fonction appartenant à $\mathbb{H}^\theta_{q;1}$ qui est égale à φ au voisinage de 0. □

Définition 4.2.4. — *La fonction $\mathcal{B}^\rho_{q;1}f \in \mathbb{H}^\theta_{q;1}$ définie dans (4.2.3a) sera notée $\mathcal{B}_{q;1}f$ et sera appelée la transformée de q-Borel analytique de f (en $0 \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$).*

Théorème 4.2a. — *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $f \in \mathbb{G}^\theta_{q;1}$, on a*

$$\mathcal{L}^\theta_{q;1} \circ \mathcal{B}_{q;1}f \equiv f.$$

Preuve. — Soit $\hat{f}$ la série entière telle que $f = \mathcal{S}^\theta_{q;1}\hat{f}$. D'après la proposition 4.2.3, on a $\mathcal{B}^\rho_{q;1}f \in \mathbb{H}^\theta_{q;1}$ pour $\rho > 0$ assez petit. En tenant compte du théorème 3.3, on obtient $\mathcal{L}^\theta_{q;1} \circ \mathcal{B}^\rho_{q;1}f = \mathcal{S}^\theta_{q;1}\hat{f}$. □

4.3. On étudie maintenant la structure algébrique de $\mathbb{C}\{x\}_{q;1}$ et celle de $\mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;1}$ ($\theta \in \mathbb{R}$).

Proposition 4.3.1. — *Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$ et $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;1}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. On note $f := \mathcal{S}\hat{f}$ la fonction somme de $\hat{f}$. Alors $\hat{f}\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;1}$ et $\mathcal{S}^\theta_{q;1}(\hat{f}\hat{g}) = f\ \mathcal{S}^\theta_{q;1}\hat{g}$.*

Si, de plus, $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$, on a $\hat{f}\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$ et $DS(\hat{f}\hat{g}) \subset DS(\hat{g})$.

Preuve. — Soit $g := \mathcal{S}^\theta_{q;1}\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}$. On vérifie aisément que la tranformée de q-Borel analytique de fg, $\mathcal{B}_{q;1}(fg)$, définit une fonction appartenant à la classe $\mathbb{H}^\theta_{q;1}$. On en déduit que $\hat{\mathcal{L}}_{q;1}\mathcal{B}^\rho_{q;1}(fg) \in \mathbb{C}\{x\}^\theta_{q;1}$, d'après le théorème 3.3. Par un calcul formel, on trouve que $\hat{\mathcal{L}}_{q;1}\mathcal{B}^\rho_{q;1}(fg) = \hat{f}\hat{g}$. D'où $\mathcal{S}^\theta_{q;1}(\hat{f}\hat{g}) = f\ \mathcal{S}^\theta_{q;1}\hat{g}$. Le reste de la proposition 4.3.1 découle directement de ce qui précède. □

Rappelons que l'ensemble $\mathbb{C}[[x]]_{q;1}$ est stable pour l'addition et la multiplication usuelles des séries entières formelles. En ce qui concerne les séries Gq-sommables, on vérifie facilement le résultat suivant.

4.3.2. Les ensembles $\mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$ et $\mathbb{C}\{x\}_{q;1}$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. De plus, pour tous $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$ et $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$, on a $\mathcal{S}_{q;1}^{\theta}(\hat{f}+\hat{g}) = \mathcal{S}_{q;1}^{\theta}\hat{f} + \mathcal{S}_{q;1}^{\theta}\hat{g}$.

4.3.3. Cependant, l'ensemble $\mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$ *n'est pas stable* pour la multiplication. Voir 4.3.8 ci-dessous.

Considérons, par exemple, le carré de la série $\hat{f} := \sum\limits_{n\geqslant 0} q^{n(n-1)/2}x^n$. On a $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f} = 1/(1-\xi)$ et donc $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$. Utilisant la relation (3.1.3a), on obtient

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}^2)(\xi) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\xi^n}{1-q^{-n}\xi};$$

d'où, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}^2)$ représente, dans le disque unité $|\xi| < 1$, une fonction analytique que l'on notera φ. En plus, étant donné $m \in \mathbb{N}$, on a l'identité

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\xi^n}{1-q^{-n}\xi} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\xi^k}{1-q^{-k}\xi} + \xi^m \sum_{n\geqslant 0} \frac{(q^{-m}\xi)^n}{1-q^{-n}\xi}, \tag{4.3.4}$$

laquelle implique que φ peut se prolonger dans le disque $|\xi| < q^m$ en une fonction méromorphe dont les pôles, simples, sont $\xi = 1, \ldots, q^{m-1}$. On en déduit que la fonction φ peut se prolonger en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples dans $\{q^n : n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\tilde{\varphi}$ cette fonction méromorphe ; il existe alors une fonction entière P telle que

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \frac{P(\xi)}{\prod_{n\geqslant 0}(1-q^{-n}\xi)},$$

où $\prod\limits_{n\geqslant 0}(1-q^{-n}\xi)$ est une fonction entière à croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini (*cf* [Ra2]). Notons $E_q = \prod\limits_{n\geqslant 1}(1-q^{-n})$; compte tenu du résidu de la fonction $\tilde{\varphi}$ en chacun de ses pôles q^n, on a

$$P(q^n) = E_q q^{n^2} \prod_{k=1}^{n}(1-q^k) = (-1)^n E_q q^{3n^2/2+n/2} \prod_{k=1}^{n}(1-q^{-k}). \tag{4.3.5}$$

Définition 4.3.6. — *Soit $k > 0$; on dit qu'une fonction définie et analytique dans un ouvert connexe non borné de $\mathbb{C}$ a une croissance q-exponentielle d'ordre k et de type fini lorsqu'elle est du type $O(q^{\frac{k}{2}\log_q^2|\xi|+\mu\log_q|\xi|})$ avec $\mu \in \mathbb{R}$, pour ξ tendant vers l'infini dans ce secteur.*

D'après des calculs directs (comme ceux de la preuve de la proposition 4.3.9 ci-dessous), on vérifie que $\tilde{\varphi}$ a une croissance q-exponentielle d'ordre 2 et de type fini dans tout voisinage sectoriel de $\mathbb{R}^-$ ne contenant pas $\mathbb{R}^+$. On en déduit que P est une fonction entière à croissance q-exponentielle d'ordre 3 et de type fini dans ce type de voisinage sectoriel. Ceci implique que P est à *croissance exponentielle d'ordre zéro* dans $\mathbb{C}$ (On pourrait également raisonner de la façon suivante : $\hat{f}^2$ est solution formelle d'une équation aux q-différences, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}^2)$ vérifie donc une équation aux q-différences. On obtiendra que P est solution entière d'une équation aux q-différences à coefficients polynomiaux; la croissance de P sera donnée par un théorème de Ramis [Ra2]. Voir [MZ] pour plus de détails).

Lemme 4.3.7 ([Li]. — *Soit F une fonction entière à croissance exponentielle d'ordre zéro (on dit aussi à croissance sous-exponentielle). On note, pour chaque $r > 0$, $M(r) = \max\limits_{|\xi|=r}|F(\xi)|$ et $m(r) = \min\limits_{|\xi|=r}|F(\xi)|$. Alors pour tout $\eta > 0$ (petit), il existe une suite (r_n) de réels strictement positifs telle que*

$$r_n \to +\infty, \quad m(r_n) \geqslant (M(r_n))^{1-\eta}. \tag{4.3.7a} \qquad \square$$

En appliquant ce lemme à la fonction P et d'après la formule (4.3.5), on obtient que l'ordre de croissance q-exponentielle de P ne peut être inférieur à 3 dans aucun voisinage sectoriel de $\mathbb{R}^-$. En conclusion, $\tilde{\varphi}$ est à croissance q-exponentielle d'*ordre exact* 2 et de type fini dans tout voisinage sectoriel de $\mathbb{R}^-$ qui ne contient pas $\mathbb{R}^+$. D'où l'énoncé suivant :

4.3.8. *Le carré de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^{n(n-1)/2}x^n$ n'est Gq-sommable d'ordre 1 dans aucune direction de $\widetilde{\mathbb{C}}^*$.*

Ceci prouve l'énoncé 4.3.3.

Proposition 4.3.9. — *Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;1}$ et $\hat{g} \in \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;1}$. La fonction somme de la série $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}\hat{g}$ peut être analytiquement prolongée dans un voisinage sectoriel de d_θ en une fonction qui possède une croissance q-exponentielle d'ordre 2 et de type fini.*

Preuve. — Notons $\hat{f} := \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \in \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;1}$, $\hat{g} := \sum_{n\geqslant 0} b_n x^n \in \mathbb{C}\{x\}^{\theta}_{q;1}$. Quitte à faire une homothétie sur la variable ξ (ou sur x au départ), on suppose que $a_n q^{-n^2/2} = O(1)$, $b_n q^{-n^2/2} = O(1)$ lorsque $n \to +\infty$. Sous ces hypothèses les séries entières $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}$ et $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}\hat{g})$ convergent dans le disque unité.

Étant donné $m \in \mathbb{N}$, on notera $\hat{g}_m$ la m-ième somme partielle de $\hat{g}$. On pose $\hat{g}_{m+} = \hat{g} - \hat{g}_m$. D'après la formule (3.1.3a), on a

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}\hat{g}) &= \hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}\hat{g}_m) + \sum_{n\geqslant 0} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}_{m+}(\xi q^{-n}) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} b_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}(\xi q^{-n}) + \sum_{n\geqslant 0} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}_{m+}(\xi q^{-n}).\end{aligned}$$

Soit $S := S(\theta;\varepsilon)$ un voisinage sectoriel de d_θ sur lequel la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ (*resp.* $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}$, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}_m$, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{g}_{m+}$) peut se prolonger analytiquement en une fonction, notée φ (*resp.* γ, γ_m, γ_{m+}), qui possède une croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini. Avec ces notations la formule précédente s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}\hat{g})(\xi) = \sum_{n=0}^{m-1} & b_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \varphi(\xi q^{-n}) \\ &+ \sum_{n\geqslant 0} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \gamma_{m+}(\xi q^{-n}),\end{aligned}$$

où $\mathcal{S}\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}\hat{g})$ désigne la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}\hat{g})$ dans le disque unité (comparer cette dernière formule à (4.3.4)).

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'expression finie $\sum_{n=0}^{m-1} b_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n\varphi(\xi q^{-n})$ définit une fonction analytique dans le domaine $S \cup D(0;1)$; cette fonction sera notée v_m. Étant donné un point $\xi \in S \cup D(0;1)$, on désigne par m_ξ le nombre entier naturel le plus petit tel que $|\xi q^{-m_\xi}| < 1$. Lorsque $n \to +\infty$, on a $\gamma_{m_\xi+}(\xi q^{-n}) = O((\xi q^{-n})^{m_\xi})$. On en déduit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \gamma_{m_\xi+}(\xi q^{-n})$ est convergente. Considérons alors la fonction v définie sur $S \cup D(0;1)$ par

$$v(\xi) := v_{m_\xi}(\xi) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \gamma_{m_\xi+}(\xi q^{-n}).$$

Il est clair que v est analytique dans $S \cup D(0;1)$ et qu'elle coïncide avec la fonction $\mathcal{S}\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}\hat{g})$ dans $D(0;1)$. Par conséquent, on a obtenu un prolongement analytique de cette dernière fonction $\mathcal{S}\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(\hat{f}\hat{g})$ dans le secteur S.

Vérifions maintenant que v possède une croissance q-exponentielle d'ordre 2 et de type fini dans S. Soit $\xi \in S$ arbitrairement fixé. On choisit $m \in \mathbb{N}$ tel que $q^{m-1} \leqslant |\xi| < q^m$; on pose $m_\xi = m$. Vu la croissance de φ dans S, on a $|\varphi(\xi q^{-n})| < Kq^{\frac{1}{2}(m-n)^2+\mu(m-n)}$ pour tout entier naturel n strictement inférieur à m, où K et μ sont des constantes dépendant uniquement de φ et S. Il en résulte que $|v_{m_\xi}(\xi)| < K_1 q^{m^2+\mu_1 m}$, avec K_1, μ_1 des constantes convenables. Un calcul similaire montrerait que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n \gamma_{m_\xi +}(\xi q^{-n})$ est dominée également par une quantité du type $K_2 q^{m^2+\mu_2 m}$. D'où la proposition. □

4.3.10. Dans un article ultérieur ([MZ]), on démontrera que le produit de deux séries Gq-sommables d'ordre 1 est *Gq-multisommable* en deux niveaux (1 et 2).

5. Sommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences.

5.1. L'une des séries Gq-sommables et non convergentes les plus simples est la série suivante : $\hat{f} := \sum\limits_{n\geqslant 0} q^{n(n-1)/2}x^n$. Elle a été l'objet de notre étude dans la première partie de l'article. La fonction somme de sa transformée de q-Borel formelle est égale à $\dfrac{1}{1-\xi}$. Du théorème 4.2, on déduit que $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$ et $DS(\hat{f}) = \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$; voir le théorème 1.3 et l'énoncé *4.1.4*.

Soit $\Delta \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$; on note $PN(\Delta)$ le polygone de Newton de Δ. Pour la définition, voir le paragraphe 0.3.1. Dans la suite, on supposera le plus souvent que $PN(\Delta)$ n'a qu'une seule pente et que celle-ci est égale à un. Nous allons étudier la sommabilité des séries entières $\hat{f}$ telles que $\Delta\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$.

5.1.1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Les $\mathbb{C}[x]$-modules $\mathbb{C}[[x]]_{q;1}$, $\mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$, $\mathbb{G}_{q;1}^{\theta}$, $\mathbb{H}_{q;1}^{\theta}$ sont stables par σ_q et les opérateurs $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$, $\mathcal{B}_{q;1}$, $\mathcal{L}_{q;1}^{\theta}$, $\mathcal{S}_{q;1}^{\theta}$ commutent avec toute homothétie de rapport réel telle que σ_q.

Par conséquent, si $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}^{\theta}$ est une solution, *formelle*, d'une équation aux q-différences, alors sa somme $\mathcal{S}_{q;1}^{\theta}\hat{f}$ l'est aussi et c'est une **solution analytique**.

LEMME 5.1.2. *Soit Δ un opérateur aux q-différences d'ordre $n \geqslant 1$ et soit μ la pente la plus grande de $PN(\Delta)$. On suppose que $\mu \in \mathbb{Z}$. Alors il existe $r \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathbb{C}\{x\}$ tels (1) $f(0) = 1$; (2) $y := q^{-\frac{\mu}{2}\log_q x(\log_q x-1)}x^r f$ vérifie $\Delta y = 0$.*

Preuve. — Posons $e_{q;\mu} = q^{-\mu(\log_q x)(\log_q x-1)/2}$; on a $\sigma_q^j e_{q;\mu} = q^{-\mu j(j-1)/2}x^{-j\mu}e_{q;\mu}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Avec $y = e_{q;\mu}z$ et $N = \min(0, -n\mu)$, on note $\bar{\Delta} \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$ l'opérateur aux q-différences vérifiant $\Delta y = x^N e_{q;\mu}\bar{\Delta}z$. Par un calcul facile, on trouve que la plus grande pente de $PN(\bar{\Delta})$ est nulle. Sans perdre de généralité, on peut alors supposer que $\mu = 0$.

Soit donc $\Delta = \sum\limits_{j=0}^{n}\Big(\sum\limits_{k\geqslant 0} a_{j,k}x^k\Big)\sigma_q^j \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$, où $a_{n,0}a_{j,0} \neq 0$ pour un certain $j < n$. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_k(X) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_{j,k}X^j \in \mathbb{C}[X]$ de sorte que $\Delta = \sum\limits_{k\geqslant 0} x^k P_k(\sigma_q)$ dans $\mathbb{C}[[x,\sigma_q]]$. Pour toute expression du type $\hat{y} =: x^\lambda \sum\limits_{l\geqslant 0}\alpha_l x^l \in x^\lambda\mathbb{C}[[x]]$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\Delta\hat{y} = x^\lambda \sum\limits_{k,l\geqslant 0}\alpha_l P_k(q^{\lambda+l})x^{k+l}$. Soit alors q^r un zéro du polynôme P_0, tel que aucun nombre de la forme q^{r+l}, avec $l \in \mathbb{N}^*$, n'annule P_0. On obtient qu'il existe une solution formelle et une seule de $\Delta\hat{y} = 0$ de la forme $x^r\Big(1 + \sum\limits_{l\geqslant 1}\alpha_l x^l <\Big)$, les α_l étant déterminés successivement par : $\alpha_0 = 1$ et

$$(R_l) \ : \quad \alpha_l = -\frac{1}{P_0(q^{r+l})}\sum_{j=0}^{l-1}\alpha_j P_{l-j}(q^{r+j}) \quad \text{si } l \geqslant 1.$$

Puisque chacune des séries $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_{j,k}x^k$, $0 \leqslant j \leqslant n$, a un rayon de convergence non nul, les suites $(a_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ peuvent être majorées par une suite géométrique. On en déduit aisément que pour $k < l$, k, $l \in \mathbb{N}$, on a $|P_k(q^{r+l-k})/P_0(q^{r+l})| \leqslant CA^k$, où C, A sont des constantes positives. Avec la relation de récurrence (R_l), on a $|\alpha_l| \leqslant C\sum\limits_{j=0}^{l-1}|\alpha_j|A^{l-j}$. Soit alors $(\beta_l)_{l\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\beta_0 = 1$, $\beta_l = C\sum\limits_{j=0}^{l-1}\beta_j A^{l-j}$ si $l \geqslant 1$.

Posons $U(x) = \sum_{l\geqslant 0} \beta_l x^l \in \mathbb{C}[[x]]$; on a $U(x) = 1 + CxU(x)/(1 - Ax)$, *i.e* $U(x) = (1 - Ax)/(1 - Ax - Cx)$. Il en résulte que $U(x)$, donc $\sum_{l\geqslant 0} \alpha_l x^l$, ont un rayon de convergence non nul. D'où le lemme. □

Le résultat du lemme précédent a été déjà démontré par C. R. Adams (*cf* [Ad] p 375). Pour simplifier, on notera $\mathbb{C}\{x\}^1$ l'ensemble des séries entières de rayon de convergence non nul et qui valent 1 en $x = 0$.

LEMME 5.1.3. — *Étant donné $g \in \mathbb{C}\{x\}^1$, il existe une unique série $h \in \mathbb{C}\{x\}^1$ vérifiant la relation $h(qx)g(x) = h(x)$.*

Preuve. — La fonction définie par $h(x) := \prod_{n\geqslant 1} g^{-1}(xq^{-n})$ est analytique et vérifie l'équation fonctionnelle $h(qx)g(x) = h(x)$. Puisque toute série entière solution formelle $\hat{f}$ de cette équation est uniquement déterminée par la donnée du coefficient constant de $\hat{f}$, on obtient l'unicité de f. □

PROPOSITION 5.1.4. — *Soit Δ un opérateur aux q-différences dont 1 est la seule pente du polygone de Newton. Alors il existe h_1, ..., $h_n \in \mathbb{C}\{x\}^1$ et α_1, ..., $\alpha_n \in \mathbb{C}^*$ tels que*

(5.1.4*a*) $\Delta =$
$$\alpha_{n+1}x^m h_n^{-1}(qx)(x\sigma_q - \alpha_n)h_n \ldots h_j^{-1}(qx)(x\sigma_q - \alpha_j)h_j \ldots h_1^{-1}(qx)(x\sigma_q - \alpha_1)h_1,$$

où on désigne par $\alpha_{n+1}x^m$ le premier terme non nul du développement de Taylor de la fonction coefficient de σ_q^0 de Δ.

Preuve. — Soit $y_0 := q^{-\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x - 1)} x^r f$ une solution de $\Delta y = 0$ obtenue dans le lemme 5.1.2 ; il existe alors un opérateur aux q-différences d'ordre $(n-1)$, noté Δ', tel que

$$\Delta = \Delta' \left(\sigma_q - \frac{y_0(qx)}{y_0(x)} \right). \tag{5.1.5}$$

Soit $\dfrac{y_0(qx)}{y_0(x)} = \alpha x^{-1} g(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $g \in \mathbb{C}\{x\}^1$. D'après le lemme 5.1.3, on a $\sigma_q - \alpha x^{-1} g(x) = (xh(qx))^{-1}(x\sigma_q - \alpha)h$, où $h \in \mathbb{C}\{x\}^1$; la relation (5.1.5) devient alors $\Delta = \Delta_1(h_1^{-1}(qx))(x\sigma_q - \alpha)h$ où Δ_1 est un opérateur dont le polygone de Newton possède une seule pente. La décomposition (5.1.4a) s'obtient en itérant ce processus. □

5.1.6. Soit α, $\beta \in \mathbb{C}^*$. On dit que α et β sont *q-congruents* et on note $\alpha \equiv_q \beta$, s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = q^n\beta$. On a la propriété suivante : si $\alpha \not\equiv_q \beta$, alors pour tout couple $(f, g) \in \mathbb{C}\{x\}^1 \times \mathbb{C}\{x\}^1$, il existe $(u, v) \in \mathbb{C}\{x\}^1 \times \mathbb{C}\{x\}^1$ tel que

$$(x\sigma_q - \alpha f)(x\sigma_q - \beta g) = (x\sigma_q - \beta u)(x\sigma_q - \alpha v).$$

Cependant, cette propriété peut ne pas être assurée lorsque $\alpha \equiv_q \beta$. Ceci se voit dans la preuve du lemme 5.1.2.

5.1.7. Soit $IM(\Delta)$ l'ensemble des α_j obtenus dans la proposition 5.1.4. Soit $\alpha \in IM(\Delta)$. On note CQ_α la classe d'équivalence de α dans $IM(\Delta)$ pour la relation $\equiv_q$; le nombre d'éléments de CQ_α sera appelé la *q-multiplicité* de α relative à Δ. On a une partition $IM(\Delta) = CQ_{\alpha_1} \cup ... \cup CQ_{\alpha_\nu}$ de $IM(\Delta)$. Il est possible de vérifier que, dans la plupart des cas, $IM(\Delta)$ constitue un système complet d'*invariants formels* de Δ ; *cf* 0.3.3 et [Ca].

Soit $DM(\Delta) := \{\arg \alpha_j + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}, j = 1, ..., n\}$. Étant donné $\theta \in DM(\Delta)$, on note $[\theta]$ l'ensemble des "plus grands représentants" de $d_\theta \cap IM(\Delta)$ pour la relation d'équivalence $\equiv_q$. En d'autres termes, pour tout $\alpha \in IM(\Delta) \cap d_\theta$, il existe un et un seul $\alpha' \in [\theta]$ tel que $\alpha = \alpha' q^m$ avec $-m \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$!).

5.1.8. Quitte à remplacer les *éléments simples* $(x\sigma_q - \alpha_j)$ par des termes du type $(x^k\sigma_q - \alpha)$ ($k \in \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$), on peut décomposer, en utilisant le lemme 5.1.2, *tout* opérateur aux q-différences sous la forme (5.1.4a) ; voir [MZ] pour plus de détails.

5.2. Afin de se servir de la proposition 5.1.4 , on va établir quelques résultats sur les opérateurs du premier ordre.

LEMME 5.2.1. — *Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$. On pose $\hat{c} := (x\sigma_q - \alpha)\hat{f}$. Si $\hat{c} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$, alors $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$ et $DS(\hat{f}) \subset \{\arg \alpha + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \cup DS(\hat{c})$.*

Preuve. — D'après la relation (3.1.2a), on a $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{c} = (\xi - \alpha)\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$, soit

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f} = (\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{c})/(\xi - \alpha). \tag{5.2.2}$$

En conséquence, la série $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$ a les mêmes propriétés d'analyticité et de croissance à l'infini que $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{c}$ sauf dans la direction passant par le point d'affixe α. D'où le lemme. □

DÉFINITION 5.2.3. — *Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$ et soit $\theta \in DS(\hat{f})$. On définit $\mathcal{S}_{q;1}^{\theta+}\hat{f}$ (resp. $\mathcal{S}_{q;1}^{\theta-}\hat{f}$) comme étant la fonction Gq-somme de $\hat{f}$ dans une direction $d_{\theta'}$ infiniment voisine de $d_{\theta'}$ et qui reste au-dessus (resp. au-dessous) de d_θ : $\theta' > \theta$ (resp. $\theta' < \theta$).*

LEMME 5.2.4. — *Conservons les notations du lemme 5.2.1. On suppose, en plus, que $\hat{c} \in \mathbb{C}\{x\}$. Alors, pour tout $\theta \in \{\arg\alpha + 2\pi k \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ on a*

$$\mathcal{S}_{q;1}^{\theta+}\hat{f}(x) - \mathcal{S}_{q;1}^{\theta-}\hat{f}(x) = \lambda q^{-\frac{1}{2}(\log_q(x/\alpha_\theta))(\log_q(x/\alpha_\theta)-1)}, \tag{5.2.4a}$$

où λ désigne une constante, indépendante du choix de la valeur de $\theta \in \mathbb{R}\setminus DS(\hat{f})$, et $\alpha_\theta = |\alpha|e^{i\theta}$.

Preuve. — On note φ la fonction somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{c}$, qui est une fonction entière. Soit $\theta = \arg\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On fixe θ_-, $\theta_+ \in \mathbb{R}$ “infiniment proches” de θ tels que $\theta_- < \theta < \theta_+$. D'après la définition 5.2.3 et la relation (4.2.1), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{q;1}^{\theta-}\hat{f}(x)-\mathcal{S}_{q;1}^{\theta+}\hat{f}(x) &= \mathcal{L}_{q;1}^{\theta-}\left(\frac{\varphi}{\xi-\alpha}\right)(x) - \mathcal{L}_{q;1}^{\theta+}\left(\frac{\varphi}{\xi-\alpha}\right)(x)\\ &= \frac{q^{-1/8}}{\sqrt{2\pi\log q}}\left(\int_{d_{\theta_-}} - \int_{d_{\theta_+}}\right) q^{-\frac{1}{2}(\log_q \frac{x}{\xi})(\log_q \frac{x}{\xi}-1)}\,\frac{\varphi(\xi)}{\xi-\alpha}\,\frac{d\xi}{\xi},\end{aligned}$$

ce qui donne, d'après la formule de Cauchy (ici $\alpha \equiv \alpha_\theta$ dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$),

$$\mathcal{S}_{q;1}^{\theta-}\hat{f}(x) - \mathcal{S}_{q;1}^{\theta+}\hat{f}(x) = iq^{-1/8}\sqrt{2\pi/\log q}\;\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}q^{-\frac{1}{2}\log_q(x/\alpha_\theta)(\log_q(x/\alpha_\theta)-1)}.$$

D'où la formule (5.2.4a). □

5.2.5. Soit $\mathbb{E}$ l'ensemble des fonctions entières qui possèdent une croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini. On a évidemment $\mathbb{E} = \cap_{\theta\in[0,2\pi]}\mathbb{H}_{q;1}^{\theta}$.

LEMME 5.2.6. — *Soit $h \in \mathbb{C}\{x\}$ et $\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$. On suppose que $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f} = \gamma/(\xi-\alpha)^n$, avec $\gamma \in \mathbb{E}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors la somme de $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(h\hat{f})$ est donnée par l'expression suivante :*

$$\sum_{m\geqslant 0}\left(\Phi_m + \sum_{j=1}^{n}\frac{a_{j,m}}{(q^{-m}\xi-\alpha)^j}\right) + \Phi \tag{5.2.6a}$$

avec $\Phi \in \mathbb{E}$, $\Phi_m \in \mathbb{C}[x]$ et $a_{j,m} \in \mathbb{C}$, la sommation étant uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{C}$ ne contenant aucun point de $\{\alpha q^m : m \in \mathbb{N}\}$.

Preuve. — En développant γ au point $\xi = \alpha$, on obtient

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f} = \frac{a_1}{\xi - a} + \ldots + \frac{a_n}{(\xi - a)^n} + \Gamma$$

où $a_j \in \mathbb{C}$ et $\Gamma \in \mathbb{E}$. Soit $h = \sum_{m\geqslant 0} h_m x^m$; d'après la relation (3.1.3a), on a $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(h\hat{f})(\xi) = \sum_{m\geqslant 0} h_m q^{-m(m-1)/2}\xi^m \hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}(q^{-m}\xi)$. Posons $\Phi = \hat{\mathcal{B}}_{q;1}(h\hat{\mathcal{L}}_{q;1}\Gamma)$; on a $\Phi \in \mathbb{E}$, d'après la proposition 3.1.4. On en déduit l'écriture suivante :

$$\hat{\mathcal{B}}_{q;1}(h\hat{f}) = \sum_{m\geqslant 0} h_m q^{-m(m-1)/2}\xi^m \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{(q^{-m}\xi - \alpha)^j} \right) + \Phi;$$

ici, la convergence de la sommation est évidente, grâce à la convergence de h. On obtient alors la formule (5.2.6a), avec

$$a_{j,m} = h_m q^{m(m+1)/2} \sum_{k=0}^{\max(m,n-j)} \binom{m}{k} a_{j+k}\alpha^k. \qquad (5.2.7)$$

□

THÉORÈME 5.3. — *Soit Δ un opérateur aux q-différences dont 1 est la seule pente du polygone de Newton. Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ telle que $\Delta\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$. On suppose que Δ est factorisé sous la forme (5.1.4a). On note $DM(\Delta) = \{\arg\alpha_j + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant j \leqslant n\}$. On a les assertions suivantes :*

5.3.1 (Gq-sommabilité). *$\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$ et $DS(\hat{f}) \subset DM(\Delta)$.*

5.3.2 (Multiplicateurs de Stokes). *Soit $\theta \in DM(\Delta)$; pour tout $\alpha \in [\theta]$ on note μ_α sa q-multiplicité relative à Δ (voir 5.1.7 pour la définition). Il existe des séries convergentes $g_{\alpha,m}$ telles que*

(5.3.2*a*)

$$\mathcal{S}_{q;1}^{\theta-}\hat{f}(x) - \mathcal{S}_{q;1}^{\theta+}\hat{f}(x) = \sum_{\alpha\in[\theta]} \sum_{m=0}^{\mu_\alpha - 1} g_{\alpha,m}(\log x)^m q^{-\frac{1}{2}\log_q(x/\alpha)(\log_q(x/\alpha)-1)}.$$

Preuve. — Soit la décomposition (5.1.4a) de Δ :

$$\Delta = a_{n+1}x^m h_n^{-1}(qx)(x\sigma_q - \alpha_n)h_n ... h_1^{-1}(qx)(x\sigma_q - \alpha_1)h_1,$$

où $m \in \mathbb{N}$, $h_j \in \mathbb{C}\{x\}^1$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Notons $\hat{f}_0 = \hat{f}$ et, pour tout entier j compris entre 1 et n, $\hat{f}_j = (\sigma_q h_j)^{-1}(x\sigma_q - \alpha)h_j\hat{f}_{j-1}$; on a $\hat{f}_n = \dfrac{1}{\alpha_{n+1}x^m}\Delta\hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$. En appliquant le lemme 5.2.1 et la proposition 4.3.1, on obtient successivement que $\hat{f}_{n-1} \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$, ..., $\hat{f}_0 \in \mathbb{C}\{x\}_{q;1}$, ainsi que leurs directions singulières éventuelles.

En ce qui concerne la formule (5.3.2a), il suffit d'appliquer la formule de Cauchy et le lemme 5.2.6 aux fonctions $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}_{n-1}$, $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}_{n-2}$, ..., $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}_0$ (voir aussi la preuve du lemme 5.2.4). □

En s'inspirant des études des points singuliers irréguliers des équations différentielles linéaires analytiques, on introduit la définition suivante :

DÉFINITION 5.3.3. — *On appellera direction de Stokes de l'opérateur Δ toute direction d_θ avec $\theta \in DM(\Delta)$; les fonctions g de la formule (5.3.2a) seront appelées les multiplicateurs de Stokes dans la direction d_θ.*

6. «Petites solutions» d'une équation aux q-différences. Derniers commentaires.

6.1. Lorsque l'on compare deux solutions Gq-sommes d'une solution formelle d'une équation aux q-différences, la fonction différence, solution de l'équation homogène associée, est majorée par une somme de deux fonctions à croissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini, d'après 4.1.2. Ceci nous conduit à étudier les solutions soumises à certaines conditions de croissance, pour les équations linéaires aux q-différences sans second membre.

LEMME 6.1.1. — *Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $f \in \widetilde{\mathbb{O}}$. On suppose remplies les deux conditions suivantes :*

(i) *$f(qx) = \alpha f(x)$ au voisinage de $x = 0$;*

(ii) *f est à croissance "modérée" en 0 : il existe μ, ν réels tels que $f(x) = O(x^{\mu - i\nu})$ pour $|x| \to 0$.*

Alors $f = cx^{\frac{2\pi ki}{\log q} + \log_q \alpha}$ avec $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Preuve. — En itérant la relation (i), on a $f(q^n x) = \alpha^n f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Il en résulte que la fonction f se prolonge en une fonction définie et analytique sur $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ tout entier. De plus, d'après la condition (ii) on a $f(x) = O(x^{\mu'} e^{\nu \arg x})$ dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$, où $\mu' \in \mathbb{R}$. En considérant la fonction correspondante $g(z) := f(q^z)$ dans le plan complexe des z, ces conditions se traduisent en celles-ci : $g(z+1) = \alpha g(z)$ et $g(z) = O(q^{\mu' \Re z + \nu \Im z})$. On en déduit qu'il existe un unique entier relatif k et un nombre complexe tels que $g(z) = cq^{(\frac{2\pi k i}{\log q} + \log_q \alpha) z}$, d'où $f(x) = cx^{\frac{2\pi k i}{\log q} + \log_q \alpha}$. □

LEMME 6.1.2. — *Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $f \in \widetilde{\mathbb{O}}$. On suppose remplies les deux conditions suivantes :*

(i) *$xf(qx) = \alpha f(x)$ au voisinage de $x = 0$;*

(ii) *f est à décroissance q-exponentielle d'ordre 1 et de type fini dans une direction d_θ (voir la définition 2.2.3).*

Alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ tels que

$$f(x) = \lambda q^{-\frac{1}{2}(\log_q(x/(\alpha e^{2k\pi i}))(\log_q(x/(\alpha e^{2k\pi i}))-1)}.$$

Preuve. — On suppose que f n'est pas identiquement nulle. Considérons la fonction

$$f_0 := q^{-\frac{1}{2}(\log_q(x/\alpha)(\log_q(x/\alpha)-1)};$$

elle vérifie la condition (i) ci-dessus, donc f/f_0 est solution de l'équation $y(qx) = \alpha y(x)$. De plus, la condition (ii) implique que f/f_0 est à croissance modérée dans le sens du lemme 6.1.1, ce qui donne $f = cq^{(\frac{2\pi k i}{\log q} + \log_q \alpha) \log_q x} f_0$. D'où le résultat cherché. □

6.2. On termine l'article par quelques commentaires.

6.2.1. Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x]]$ et $\Delta \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$; on suppose que $\Delta \hat{f} \in \mathbb{C}\{x\}$. Posons $x = q^t$; la série $\hat{f}$ se transforme en une série en q^t, qui vérifie une équation aux différences finies linéaire à coefficients analytiques dans un demi-plan à gauche. Sommer la série $\hat{f}$ en $x = 0$, c'est alors sommer cette (trans-)série en la variable t à l'infini dans ce demi-plan. Il est naturel de poser la question suivante : a-t-on une interprétation de la Gq-sommation dans un language parlant des transséries ?

6.2.2. L'hypothèse '$q > 1$' peut être remplacée par '$|q| > 1$'. Sous cette dernière hypothèse, on utilisera, à la place de la direction d_θ (resp. le voisinage sectoriel $S(\theta; \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$) ($\theta \in \mathbb{R}$), l'ensemble $\{q^{u+i\theta} \in$

$\widetilde{\mathbb{C}}^* : u \in \mathbb{R}\}$ (resp. l'ouvert $\cup_{|\nu|<\varepsilon} d_{\theta+\nu}$) ; le disque $\tilde{D}(0;R)$ $(R > 0)$ dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ sera remplacé par $\{q^t \in \widetilde{\mathbb{C}}^* : t \in \mathbb{C}, \Re(t) < \Re(\log_q R)\}$. Le symbole $q^{\frac{1}{2}\log_q x(\log_q x-1)}$ continuera à jouer le rôle de la fonction q-exponentielle (pour la croissance (ou décroissance) q-exponentielle d'ordre 1). L'estimation Gevrey figurant dans la formule (2.1.1a) de la définition du développement asymptotique q-Gevrey deviendra

$$|f(x) - \hat{f}_n(x)| < CA^n |q|^{\frac{1}{2}[n^2+(\Im(\log_q(xq^{-i\theta})))^2(1+(\frac{\arg q}{\log|q|})^2]} |x|^n.$$

Nous aurons, mutatis mutandis, une version plus générale de la Gq-sommation, dont nous laissons les détails au lecteur.

6.2.3. Dans cet article, la méthode de Gq-sommation a été décrite seulement pour les séries entières q-Gevrey d'ordre 1, et c'est pourquoi, dans les deux dernières parties, on s'est limité aux opérateurs aux q-différences qui sont composés d'*éléments simples* du type $x\sigma_q - \alpha$ $(\alpha \neq 0)$. Dans le cas général, puisque les solutions séries entières sont q-Gevrey d'ordre s quelconque, les éléments simples correspondants sont alors du type $(x^k\sigma_q - \alpha)$ $(k = 1/s)$. Ceci conduit à généraliser (en substituant q par q^s) les opérateurs $\hat{\mathcal{B}}_{q;1}$, $\mathcal{B}^{\rho}_{q;1}$, $\mathcal{L}^{\theta}_{q;1}$ en $\hat{\mathcal{B}}_{q;s}$, $\mathcal{B}^{\rho}_{q;s}$, $\mathcal{L}^{\theta}_{q;s}$. On aura besoin d'opérateurs notés $\mathcal{S}^{\theta}_{q;s}$. C'est dans cette perspective que l'on a noté plus haut, de façon peu lourde, $\mathcal{S}^{\theta}_{q;1}$ au lieu de noter simplement $\mathcal{S}^{\theta}_{q}$.

Après l'extension de la méthode de Gq-sommation au niveau k quelconque, on pourra appliquer cette méthode à une équation linéaire aux q-différences de la manière suivante : on factorise l'opérateur aux q-différences en éléments simples et on compose les opérateurs de sommation de différents niveaux. Ces problèmes feront l'objet d'un article ultérieur ([MZ]). La multiplicité des niveaux nécessite le passage à la notion de *multisommabilité*.

BIBLIOGRAPHIE

[Ad] C.R. Adams, Linear q-Difference Equations, Bull. A.M.S., (1931), 361-382.

[A1] Y. André, Séries Gevrey de type arithmétique (I : théorèmes de pureté et de dualité), preprint, 1997.

[A2] Y. André, Séries Gevrey de type arithmétique (II : transcendance sans transcendance), preprint, 1997.

[BBRS] W. Balser, B.J.L. Braaksma, J.-P. Ramis et Y. Sibuya, Multisummability of formal power series solutions of linear ordinary differential equations, Asymptotic Analysis, 5 (1991), 27-45.

[Bé] J.-P. Bézivin, Sur les équations fonctionnelles aux q-différences, Aequationes Mathematicae, 43 (1993), 159-176.

[Bi] D.G. Birkhoff, The Generalized Riemann Problem for Linear Differential Equations and the Allied Problems for Linear Difference and q-Difference Equations, Proc. Am. Acad., 49 (1913), 521-568.

[Ca] R.D. Carmichael, The General Theory of Linear q-Difference Equations, Am. Jour. Math., 34 (1912), 146-168.

[FJ] M. Fleinert-Jensen, Calcul d'indices Gevrey pour des équations aux q-différences, Prépublication de l'IRMA de Strasbourg, 1993.

[FRZ] A. Fahim, J.-P. Ramis et C. Zhang, Phénomène de Stokes et groupe de Galois aux q-différences local, en préparation.

[Li] J.E. Littlewood, On the asymptotic approximation to integral functions of zero order, Proc. London Math. Soc., Serie 2, no 5 (1907), 361-410.

[Ma] B. Malgrange, Sommation des séries divergentes, Expositiones Mathematicae, 13, no 2-3 (1995), 163-222.

[MZ] F. Marotte etC. Zhang, Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique, Prépublication, La Rochelle, 1998.

[MR] J. Martinet et J.-P. Ramis, Elementary acceleration and multisummability I, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 54, no 4 (1991), 331-401.

[Ra1] J.-P. Ramis, Les séries k-sommables et leurs applications, Complex Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Lecture Notes in Physics, 126 (1980), 178-199.

[Ra2] J.-P. Ramis, About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations, Annales de la Fac. de Toulouse, Série 6, Vol. I, no 1 (1992), 53-94.

[Ra3] J.-P. Ramis, Séries divergentes et théories asymptotiques, *Panoramas et synthèses* 0, Supplément au Bulletin de la S.M.F., 121 (1993).

[Ti] E.C. Titchmarsh, The Theory of Functions, Second edition, Oxford Science Publications, 1939.

[To] J.-Cl. Tougeron, An introduction to the theory of Gevrey expansions and to the Borel-Laplace transform with some applications, Preprint University of Toronto, Canada, 1990.

[Tr] W.J. Trjitzinsky, Analytic Theory of Linear q-Difference Equations, Acta Mathematica, 61 (1933), 1-38.

[WW] E.T. WHITTAKER et G.N. WATSON, A Course of Modern Analysis, Cambridge Univ. Press, 1927.

[ZZ] J. ZENG et C. ZHANG, A q-analog of Newton's series, Stirling functions and eulerian functions, Results in Math., 25 (1994), 370-391.

Manuscrit reçu le 26 mars 1998,
accepté le 11 septembre 1998.

Changgui ZHANG,
Université de La Rochelle
Département et Laboratoire de Mathématiques
Pôle Sciences et Technologie
Avenue Marillac
17042 La Rochelle cedex (France).
czhang@univ-lr.fr