BERNARD MALGRANGE

La variété caractéristique d'un système différentiel analytique

Annales de l'institut Fourier, tome 50, n° 2 (2000), p. 491-518

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_2_491_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
50, 2 (spécial Cinquantenaire) (2000), 491–518

LA VARIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL ANALYTIQUE

par Bernard MALGRANGE

Dans cet article, j'examine comment s'étendent au cas non linéaire deux propriétés classiques de la variété caractéristique d'un système différentiel linéaire : l'indépendance de la filtration et l'intégrabilité (= stabilité de l'idéal correspondant par crochets de Poisson).

Les rappels sur le cas linéaire sont faits au §1. Il faut ensuite définir les D-variétés, ou "diffiétés", analogues non-linéaires des D-modules. Cette notion se rencontre dans la littérature lorsqu'on fait des hypothèses de lissité (voir par exemple [Tu], [Ts], [Vi]) . Sans ces hypothèses, elle est plus ou moins implicitement considérée par Ritt dans le cas algébrique ([Ri1]; voir aussi [Ri2] pour le cas analytique).

Contrairement à ce que suggère le titre de cet article, il apparaît alors naturellement deux notions de variété caractéristique : l'une que j'appelle "stricte" est liée au théorème de Cauchy-Kovalevski. La seconde est obtenue en considérant le système linéarisé. Les deux coïncident là où le système est involutif, ce qui est la situation générique (*cf.* §5); je signale aussi que je ne connais pas d'exemple où les deux variétés diffèrent hors de la section nulle.

L'extension au cas non linéaire de l'indépendance de la filtration est la propriété suivante : tout au moins hors de la section nulle, les

---

Mots-clés : Système différentiel – Variété caractéristique – Systèmes involutifs.
Classification math. : 35A20 – 35A30 – 12H05.

deux variétés caractéristiques sont invariantes par les isomorphismes de D-variétés (isomorphismes, qui sont essentiellement connus dans la littérature sous le nom de "transformations de Lie-Bäcklund").

Quant à l'intégrabilité, je n'ai réussi à la démontrer qu'aux points où le système est involutif; en ces points, cette propriété se ramène immédiatement au cas linéaire. Le problème se pose donc de savoir ce qui se passe aux autres points; accessoirement, j'ignore jusqu'à quel point ce dernier problème est réellement intéressant

1. Rappel : le cas linéaire.

Soit X une variété analytique complexe lisse; $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{D}_X$ désignent respectivement le faisceau des fonctions holomorphes sur X, et le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients holomorphes; si l'on filtre $\mathcal{D}_X$ par les $\mathcal{D}_{X,k}$ = les opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant k$, $\operatorname{gr}\mathcal{D}_X$ s'identifie naturellement à $\mathcal{O}_X[T^*X]$, le faisceau (sur X) des fonctions holomorphes sur T^*X, polynômiales par rapport aux variables de la fibre.

Soit M un $\mathcal{D}_X$-module à gauche cohérent; une bonne filtration $\{M_k\}$ de M, k entier $\geqslant 0$, est une filtration déduite localement d'une surjection $\oplus\mathcal{D}[\ell_i] \to M \to 0$, avec $\mathcal{D}[\ell]_k = \mathcal{D}_{\ell+k}$; localement, M admet de bonnes filtrations; prenons-en une, et soit $\Lambda \subset T^*X$ le support de $\operatorname{gr} M$, autrement dit l'ensemble des zéros de l'idéal $\operatorname{ann}\operatorname{gr} M \subset \operatorname{gr}\mathcal{D}$.

Le propriétés suivantes sont bien connues; entre autres références, voir par exemple [Bj] ou [GM].

1.1. Indépendance de la filtration.

L'ensemble Λ ne dépend pas de la bonne filtration choisie; en particulier, les différents Λ construits localement se recollent en un sous-ensemble analytique fermé de T^*X, homogène par rapport aux variables de la fibre, que l'on appelle "variété caractéristique" de M et qu'on note $\operatorname{car} M$.

Ce résultat peut s'établir de différentes manières. J'en rappelle rapidement deux qui, sans être les plus simples, sont particulièrement intéressantes.

1.1 (a). Soient $\{M_k\}$ et $\{M'_k\}$ deux bonnes filtrations de M, définies sur le même ouvert U de X; quitte à restreindre U et à décaler $\{M'_k\}$, on peut supposer qu'il existe ℓ tel qu'on ait $M_k \subset M'_k \subset M_{k+\ell}$ $(k \geqslant 0)$. On raisonne alors par récurrence sur ℓ, en traitant d'abord le cas $\ell = 1$. Dans ce cas, on considère les suites exactes

$$0 \longrightarrow M'_{k-1}/M_{k-1} \longrightarrow M_k/M_{k-1} \longrightarrow M_k/M'_{k-1} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow M_k/M'_{k-1} \longrightarrow M'_k/M'_{k-1} \longrightarrow M'_k/M_k \longrightarrow 0.$$

On en tire les suites exactes suivantes $0 \to P \to \operatorname{gr} M \to Q \to 0$, $0 \to Q \to \operatorname{gr} M' \to P \to 0$, avec $P = \oplus M'_k/M_k$, $Q = \oplus M_k/M'_{k-1}$. On en déduit qu'on a

$$\operatorname{supp} \operatorname{gr} M = \operatorname{supp} \operatorname{gr} M' = \operatorname{supp} P \cup \operatorname{supp} Q.$$

Dans le cas général, on considère la filtration $\{M''_k\}$ définie par $M''_k = M'_k + M_{k+\ell-1}$; on applique alors le résultat précédent à la paire $\{M_{k+\ell-1}\}$, $\{M''_k\}$, et l'hypothèse de récurrence à la paire $\{M'_k\}$, $\{M''_k\}$. À noter que le raisonnement précédent donne un résultat plus fort, utile par exemple pour démontrer des invariances de multiplicité, ou dans des théorèmes d'indice : si M admet une bonne filtration globale, alors sur tout compact de X, la classe de $\operatorname{gr} M$ dans le groupe de Grothendieck des $\operatorname{gr}\mathcal{D}$-modules cohérents à support dans $\operatorname{car} M$ est (bien définie et) indépendante de la filtration choisie.

1.1 (b). Soit $\mathcal{E}_X$ le faisceau des opérateurs microdifférentiels sur X, et soit $\widetilde{M} = \mathcal{E}_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1}M$ le microlocalisé de M (π, la projection $T^*X \to X$) ; alors $\operatorname{car} M$ est le support de $\widetilde{M}$. Le même résultat est encore vrai, et même plus simple à démontrer avec $\widehat{\mathcal{E}}_X$, le faisceau des opérateurs microdifférentiels formels.

1.2. Intégrabilité.

(Dans certaines des références, on dit "involutivité" ; je n'utiliserai pas cette terminologie ici, à cause des confusions avec une autre notion d'involutivité, qui sera vue au §5).

Soit $\mathcal{J}$ l'idéal de $\operatorname{gr}\mathcal{D}$ défini par $\operatorname{car} M$; autrement dit $\mathcal{J}$ est la racine de $\operatorname{ann} \operatorname{gr} M$, pour n'importe quelle bonne filtration de M. Soit d'autre part $\{\cdot,\cdot\}$ le crochet de Poisson défini sur T^*X par la structure symplectique canonique : en coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ on a

$$\{f, g\} = \sum \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial \xi_i}.$$

Alors, pour $f, g \in \mathcal{J}$, on a $\{f, g\} \in \mathcal{J}$. Voir à ce propos Gabber [Ga], et les références de cet article. Pour une démonstration simple, voir [GM].

Heuristiquement, cet énoncé se justifie ainsi; tout d'abord, en coordonnées locales, prenons $p=\sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha \partial^\alpha \in \mathcal{D}$, avec $a_\alpha \in \mathcal{O}$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$; son gradué, ou "symbole", s'écrit $\delta p = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \xi^\alpha$, avec $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Maintenant, pour $q \in \mathcal{D}$ d'ordre ℓ, $[p,q] = pq - qp$ est d'ordre $k + \ell - 1$ et on vérifie facilement qu'on a $\delta[p,q] = \{\delta p, \delta q\}$.

Prenons alors M de la forme $\mathcal{D}/\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ un idéal à gauche de $\mathcal{D}$; pour la filtration quotient, on a $\operatorname{gr} M = \operatorname{gr} \mathcal{D} / \operatorname{gr} \mathcal{K}$, et car M est l'ensemble des zéros des δp, $p \in \mathcal{K}$. Il résulte aussitôt de là que $\operatorname{gr} \mathcal{K}$ est stable par crochet de Poisson, *i.e.* $\bar{f} \in \operatorname{gr} \mathcal{K}$ et $\bar{g} \in \operatorname{gr} \mathcal{K}$ entraînent $\{\bar{f}, \bar{g}\} \in \operatorname{gr} \mathcal{K}$. Bien sûr, ceci ne démontre pas le théorème d'intégrabilité même dans l'exemple $M = \mathcal{D}/\mathcal{K}$: il s'agit de démontrer que la *racine* de $\operatorname{gr} \mathcal{K}$, et pas seulement $\operatorname{gr} \mathcal{K}$, est stable par crochet de Poisson; ceci est un résultat nettement plus délicat.

2. Variétés affines.

2.1. Dans ce qui suit, je me conformerai à l'usage de la géométrie algébrique, plutôt qu'à celui de la géométrie analytique, en ce qu'une variété ne sera pas nécessairement lisse. En particulier, j'appellerai *variété $\mathbb{C}$-analytique* (ou analytique complexe) ce qu'on appelle d'habitude espace $\mathbb{C}$-analytique (voir p. ex. [Gr]). *A priori*, je ne suppose pas les variétés réduites, *i.e.* sans éléments nilpotents; toutefois, dans les application aux équations différentielles, seul le cas réduit sera véritablement intéressant.

Soit Y une variété $\mathbb{C}$-analytique; on note $|Y|$ son espace topologique sous-jacent (on écrira quelquefois Y, si cela ne crée pas de confusion), et on note $\mathcal{O}_Y$ son faisceau structural. Une variété affine Z au-dessus de Y est l'espace annelé $(|Y|, \mathcal{A})$ défini par une $\mathcal{O}_Y$-algèbre de présentation finie, c'est-à-dire s'écrivant, sur tout ouvert assez petit $U \subset Y$ sous la forme $\mathcal{A} = \mathcal{O}_Y[t_1, \ldots, t_n]/(f_1, \ldots, f_m)$, avec $f_i \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y[t_1, \ldots, t_n])$. Soient respectivement Z et Z' deux variétés affines au-dessus de Y et Y', d'anneaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$; soit u un morphisme $Y \to Y'$ défini par $u = (u_0, u_1)$, u_0 application continue $|Y| \to |Y'|$, u_1 un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres (avec unité) $u^{-1}\mathcal{O}_{Y'} \to \mathcal{O}_Y$; un morphisme $v : Z \to Z'$ au-dessus de u est un morphisme d'algèbres (avec unité) au-dessus du précédent $u^{-1}\mathcal{A}' \to \mathcal{A}$.

On écrira parfois $\mathcal{O}_Z$ pour $\mathcal{A}$, mais il faut faire attention qu'il s'agit d'un faisceau d'anneaux sur Y. D'autre part, on note Z^{an} l'espace analytique $\operatorname{spec\,an} \mathcal{A}$ [Ho]; on a un morphisme canonique d'espaces annelés $Z^{\mathrm{an}} \to Z$ défini par la projection $\pi : |Z^{\mathrm{an}}| \to |Y|$ et l'application $\pi^{-1}\mathcal{A} \to \mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}}}$ qui intervient dans la définition de $\operatorname{spec\,an}$.

J'écrirai souvent $|Z|$ pour $|Z^{\mathrm{an}}|$. Les principales propriétés que j'aurai à utiliser sont énoncées ci-dessous. La première est classique et se voit aisément par exemple en utilisant le théorème de Frisch [Fr] (= les fonctions holomorphes sur un polycylindre fermé forment un anneau noethérien). Les suivantes peuvent se voir en se réduisant du cas affine au cas projectif et en appliquant alors le théorème de comparaison de Grauert-Remmert ; je donnerai les détails ultérieurement.

Je garde les notations et les hypothèses ci-dessus ; d'autre part, dans la suite, je dirai systématiquement idéal, module, *etc.* pour faisceau d'idéaux faisceau de modules, *etc.*

2.1.i. La $\mathcal{O}_Y$-algèbre $\mathcal{A}$ est cohérente ; de plus, toute suite croissante d'idéaux cohérents de $\mathcal{A}$ (ou de sous-modules cohérents d'un $\mathcal{A}$-module cohérent fixé) est localement stationnaire.

2.1.ii. Soit N un sous-module cohérent de $\mathcal{A}^p$ et posons $N^{\mathrm{an}} = \mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}}} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{A}} \pi^{-1}N$; soit $y \in |Y|$, et soit $f \in \mathcal{A}_y^p$; pour qu'on ait $f \in \mathcal{N}_y$, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert U de y tel que, pour tout $z \in \pi^{-1}U$, on ait $f \in N_z^{\mathrm{an}}$.

Soit maintenant M un $\mathcal{A}$-module cohérent ; prenant localement une présentation de M, on déduit du résultat précédent que l'application naturelle $M \to \pi_* M^{\mathrm{an}}$ est injective.

2.1.iii. Soit $\mathcal{J}$ un idéal cohérent de $\mathcal{A}$, et soit $\operatorname{rac} \mathcal{J}$ sa racine, *i.e.* l'idéal $y \to \operatorname{rac} \mathcal{J}_y$. Alors $\operatorname{rac} \mathcal{J}$ est cohérent, et l'on a $(\operatorname{rac} \mathcal{J})^{\mathrm{an}} = \operatorname{rac}(\mathcal{J}^{\mathrm{an}})$.

Les deux propriétés précédentes, combinées avec le "Nullstellensatz" usuel en géométrie analytique, en donnent la version "mixte" suivante : si $\mathcal{J}$ est un idéal cohérent de $\mathcal{A}$, alors $f \in \mathcal{A}_y$ appartient à $\operatorname{rac} \mathcal{J}_y$ si, et seulement si, f s'annule sur $V \cap \pi^{-1}(U)$, $V \subset |Z|$ la variété des zéros de $\mathcal{J}$ (*i.e.* celle de $\mathcal{J}^{\mathrm{an}}$), U un voisinage de y dans $|Y|$.

Ce qui précède permet de définir Z^{red} comme la variété affine au-dessus de Y, et même au-dessus de Y^{red}, associée à l'anneau $\mathcal{A}^{\mathrm{red}} = \mathcal{A}/\operatorname{rac}(0)$ et au morphisme $\mathcal{O}_{Y^{\mathrm{red}}} = \mathcal{O}_Y/\operatorname{rac}(0) \to \mathcal{A}^{\mathrm{red}}$. On a $(Z^{\mathrm{red}})^{\mathrm{an}} = (Z^{\mathrm{an}})^{\mathrm{red}}$; j'omets les détails.

2.1.iv. Soient Z et Z' deux variétés affines au-dessus de Y, soient π et π' les projections canoniques, et soit ψ un morphisme $Z \to Z'$ au-dessus de Y. On dira dans cette situation que Z est *une variété affine* *au-dessus de* Z'. Ce qui a été dit plus haut peut être répété dans cette situation. En particulier, notons $\widetilde{Z} = Z \times_{Z'} Z'^{\mathrm{an}}$ la variété affine au-dessus de Z'^{an} d'anneau $\mathcal{O}_Z \otimes_{\mathcal{O}_{Z'}} \mathcal{O}_{Z'^{\mathrm{an}}}$ (j'omets d'écrire les π'^{-1}). Alors on a $\widetilde{Z}^{\mathrm{red}} = (Z^{\mathrm{red}})^{\sim}$, ce dernier espace étant défini par exemple comme $Z^{\mathrm{red}} \times_{Z'} Z'^{\mathrm{an}}$ (on obtient le même résultat avec Z'^{red} au lieu de Z').

Disons d'autre part que Z *domine* Z', ou que le morphisme $Z \to Z'$ est dominant si $\mathcal{O}_{Z'} \to \mathcal{O}_Z$ est injectif; en particulier Z domine Y si $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_Z$ est injectif. Si Z domine Y, Z^{red} domine Y^{red} (évident). De même, si Z domine Z', Z^{red} domine Z'^{red} et $Z \times_{Z'} Z'^{\mathrm{an}}$ domine Z'^{an}.

2.2. Provariétés affines.

Soit Y_0 une variété analytique; un "système projectif de variétés affines" au-dessus de Y_0 est une famille $Y_i \xrightarrow{\psi_i} Y_0$ de variétés affines (i, entier $\geqslant 1$), avec une famille de morphismes $\pi_i : Y_i \to Y_{i-1}$ (en particulier, on a $\pi_1 = \psi_1$). Lorsque tous ces morphismes sont dominants, on dira qu'on a une provariété affine $Y = \{Y_i\}$ au-dessus de Y_0, et on posera $\mathcal{O}_Y = \varinjlim \mathcal{O}_{Y_i}$.

On note Y^{red} la provariété affine définie par les Y_i^{red} et les flèches évidentes. D'autre part, un système projectif Z_i de variétés affines au-dessus de Z_0 définit une provariété affine de la manière suivante : soit $\mathcal{J}_k = \cup_\ell \ker\left(\mathcal{O}_{Z_k} \to \mathcal{O}_{Z_{k+\ell}}\right)$; d'après 2.1 (i), c'est un idéal cohérent de $\mathcal{O}_{Z_k}$; alors, on prend pour Y_0 le sous-espace analytique fermé de Z_0 défini par $\mathcal{J}_0$, et pour Y_k la variété affine au-dessus de Y_0 d'anneau $\mathcal{O}_{Z_k}/\mathcal{J}_k$, ($k \geqslant 1$).

Soient $Y = \{Y_i\}$ et $Z = \{Z_i\}$ deux provariétés affines. Un *morphisme strict* de Y dans Z est défini par la donnée d'un morphisme de variétés analytiques $Y_0 \to Z_0$, et de morphismes $Y_i \to Z_i$ au-dessus du précédent, rendant commutatifs les diagrammes de flèches évidentes

$$\begin{array}{ccc} Y_i & \longrightarrow & Y_{i-1} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ Z_i & \longrightarrow & Z_{i-1}. \end{array}$$

Toutefois, ceci ne nous suffira pas pour les applications aux systèmes différentiels; il faut pouvoir "identifier" Y avec une analytisation partielle. On le fait ainsi : pour $\ell \geqslant 1$, on désigne par $Y[\ell]$ la provariété définie de la manière suivante : $Y[\ell]_0 = Y_\ell^{\mathrm{an}}$, $Y[\ell]_k = Y_{\ell+k} \times_{Y_\ell} Y_\ell^{\mathrm{an}}$ ($k \geqslant 1$); on pose aussi $Y[0] = Y$.

On a un morphisme strict canonique $i_\ell : Y[\ell] \to Y$ défini par la projection $\pi_\ell : |Y_\ell| \to |Y_0|$ et les morphismes de faisceaux évidents. Pour $k \geqslant 1$, ce morphisme définit des "décalés" $i_\ell[k] : Y[\ell + k] \to Y[k]$. On pose alors la définition suivante :

DÉFINITION 2.2.1. — *Soient Y et Z deux provariétés affines. Un morphisme $Y \to Z$ est défini par un morphisme strict $u : Y[\ell] \to Z$ ($\ell \geqslant 0$). Pour $k \geqslant 1$, on identifie le morphisme défini par u à celui défini par $u \circ i_k[\ell] : Y[\ell + k] \to Z$.*

La composition se fait ainsi : soient $u : Y[k] \to Z$ et $u : Z[\ell] \to T$ deux morphismes stricts, définissant deux morphismes $\bar{u} : Y \to Z$ et $\bar{v} : Z \to T$, alors $\bar{v} \circ \bar{u}$ est défini par $v \circ u[\ell]$ où $u[\ell] : Y[k + \ell] \to Z[\ell]$ est le décalé de u; la compatibilité avec les équivalences ci-dessus est immédiate.

La définition précédente a pour effet de transformer certains morphismes stricts en isomorphismes (non stricts). Par exemple, le morphisme strict $i_\ell : Y[\ell] \to Y$ peut être vu de deux manières; d'une part, il représente l'identité $Y \to Y$; d'autre part, il définit un morphisme (strict) $Y[\ell] = Z \to Y$; ce dernier est un isomorphisme (non strict), dont l'inverse est représenté par l'identité $Y[\ell] \to Z$ (vérification immédiate).

2.2.2. Quelques définitions pour terminer cette section. Un idéal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_Y$ sera dit *quasi-cohérent* si, pour tout ℓ, les $\mathcal{J} \cap \mathcal{O}'_{Y_\ell}$ sont cohérents. D'autre part, un $\mathcal{O}_Y$-module M sera dit quasi-cohérent si, localement sur $|Y_0|$, on a $M = \varinjlim M_\ell$, M_ℓ un $\mathcal{O}_{Y_\ell}$-module cohérent. On voit facilement, en utilisant 2.1 (i) qu'un idéal quasi-cohérent est quasi-cohérent en tant que $\mathcal{O}_Y$-module et réciproquement.

Si l'on a un morphisme strict $u : Y \to Z$, et M un $\mathcal{O}_Z$-module quasi-cohérent, son image réciproque $u^* M$, égale par définition à $u^{-1} M \otimes_{u^{-1}\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_Y$ est quasi-cohérente. Par contre, on fera attention au fait qu'un morphisme (non strict) $u : Y \to Z$ ne définit d'image réciproque $u^* M$ qu'au-dessus de $Y[p]$, pour p assez grand; voir au §4 un exemple où cette situation est considérée.

3. D-Variétés.

3.1. Après ces préliminaires, voici l'objet principal de cette étude. Une D-variété (certains disent "diffiété") est constituée par la donnée

i) D'une variété $\mathbb{C}$-analytique *lisse* X (lisse = non singulier, en particulier réduit).

ii) D'une variété $\mathbb{C}$-analytique Y_0, non nécessairement lisse, munie d'un morphisme $p : Y_0 \to X$.

iii) D'une provariété affine $Y = \{Y_i, \pi_i\}$, $i \geqslant 1$ au-dessus de Y_0.

iv) D'une dérivation (ou "connexion") $D : \mathcal{O}_Y \to p^{-1}\Omega^1_X \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y$, où Ω^k_X désigne les k-formes différentielles de X.

Ces données sont soumises à des conditions qu'on va décrire dans un instant. Auparavant, donnons une définition : si l'on a de telles données (X, Y, D) et (X', Y', D) on appellera "D-morphisme strict" de la seconde dans la première la donnée d'une application étale (=isomorphisme local) $u : X' \to X$, d'un morphisme $v_0 : Y'_0 \to Y_0$ au-dessus de u, et enfin d'un morphisme strict $v : Y' \to Y$ au-dessus de v_0 ; on demande que ces données commutent à D.

Soient d'autre part X' et Y'_0 deux sous-variétés ouvertes respectivement de X et Y_0, avec $p|Y'_0| \subset |X'|$; on définit de façon évidente la restriction (X', Y', D) de (X, Y, D) à (X', Y'_0), en restreignant à Y'_0 les faisceaux structuraux des Y_i. Alors, une D-variété sera un système (X, Y, D) possédant la propriété suivante : pour tout $y \in |Y_0|$, on peut trouver une paire (X', Y'_0) avec $y \in |Y'_0|$, telle que la restriction de (X, Y, D) à (X', Y'_0) soit strictement D-isomorphe à un modèle du type qu'on va maintenant décrire.

Pour ce faire, on se donne :

a) un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$, de coordonnées $x = (x_1, \dots, x_n)$;

b) un ouvert $V \subset \mathbb{C}^p$, de coordonnées $y = (y_1, \dots, y_p)$.

On pose $\mathcal{A}_0 = \mathcal{O}_{U\times V}$, le faisceau des fonctions holomorphes sur $U \times V$; pour $\ell \geqslant 1$, on pose $\mathcal{A}_\ell = \mathcal{O}_{U\times V}[y^\alpha_j]$, les y^α_j des indéterminées indexées par $j = 1, \dots, p$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, avec $1 \leqslant |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leqslant \ell$ (on pose aussi $y^0_j = y_j$). Les $\mathcal{A}_\ell$ sont plongés les uns dans les autres de façon évidente, et l'on pose $\mathcal{A} = \cup \mathcal{A}_\ell$. Sur $\mathcal{A}$, on a une dérivation naturelle

$$Df = \sum dx_i \otimes D_i f, \text{ avec } D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial f}{\partial y^\alpha_j} y^{\alpha+\varepsilon_i}_j,\ \varepsilon_i = (0, \dots, 1, \dots, 0).$$

Cela dit, donnons-nous un idéal (= un faisceau d'idéaux) $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$, qui soit quasi-cohérent et *différentiel*, *i.e.* stable par les D_i, et posons $\mathcal{J}_\ell = \mathcal{J} \cap \mathcal{A}_\ell$. Alors, les modèles locaux sont les suivants : on prend $X = U$, Y_0 le sous-espace analytique fermé des $U \times V$ défini par $\mathcal{J}_0$, p la flèche induite par la projection $U \times V \to U$; pour $\ell \geqslant 1$, Y_ℓ est la variété affine sur Y_0 définie par $\mathcal{A}_\ell/\mathcal{J}_\ell$; enfin D et les D_i sont définis par passage au quotient à partir des opérations analogues définies ci-dessus.

Soit (X, Y, D) une D-variété; pour $\ell \geqslant 1$ la différentielle D s'étend à $Y[\ell]$ de façon évidente; on vérifie facilement que ceci définit une D-variété, notée $(X, Y, D)[\ell]$ ou même $Y[\ell]$ (utiliser le procédé classique qui consiste à ajouter les dérivées d'ordre $\leqslant \ell$ comme nouvelles fonctions inconnues, et les équations correspondantes). On définit alors les D-morphismes comme au §2 : un D-morphisme de Y dans Z est un D-morphisme strict de $Y[\ell]$ dans Z, avec la même relation d'équivalence que ci-dessus. Dans la suite, j'omettrai le D et dirai simplement "morphisme strict", "morphisme", *etc.* Ces morphismes sont essentiellement connus dans la littérature sous le nom de "transformations de Lie-Bäklund".

3.2. Solutions.

Soit Y une D-variété (X et D sont ici sous-entendus) ; la différentielle D passe au quotient dans la surjection $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_{Y^{\mathrm{red}}}$; en effet, d'après un lemme classique de Ritt [Ri1], la racine d'un idéal différentiel est encore un idéal différentiel. Ceci définit une D-variété, notée encore Y^{red}. *Dans la suite, sauf mention expresse du contraire les D-variétés seront supposées réduites.*

La raison principale est qu'on n'a de bons théorèmes de finitude que dans ce cas (voir §5). Une raison accessoire est que le passage à la D-variété réduite ne change pas les solutions.

Les considérations qui suivent sont classiques. Soit $b^0 \in |Y_0|$, avec $a = pb^0 \in |X|$; un *germe* en b^0 de *solution* de Y est un germe en a de section holomorphe $\bar{y}$ de la projection $Y \to X$, avec $\bar{y}^0(a) = b^0$, qui soit tangent aux champs de vecteurs D_i. Il revient au même de dire que c'est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $u : \mathcal{O}_{Y,b^0} \to \mathcal{O}_{X,a}$ qui possède les deux propriétés suivantes :

i) On a $u \circ p^* = \mathrm{id}$, p^* l'application canonique $\mathcal{O}_{X,a} \to \mathcal{O}_{Y,b^0}$;

ii) On a $uD = du$, d la différentielle usuelle sur $\mathcal{O}_X$ (ou, si l'on préfère, $uD_i = \partial_i u$).

Plus généralement, une *solution formelle* en b^0 est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $u : \mathcal{O}_{Y,b^0} \to \widehat{\mathcal{O}}_{X,a}$ (le complété formel de $\mathcal{O}_{X,a}$) vérifiant ii), et tel que $u \circ p^*$ soit le plongement canonique de $\mathcal{O}_{X,a}$ dans son complété.

Soit u une solution formelle en b^0 ; plaçons-nous dans un modèle local et gardons les notations de 3.1; on suppose choisies les coordonnées pour avoir $b^0 = \{x = y = 0\}$. Posons $u(y_i) = \bar{y}_j \in \mathbb{C}\{x\}$; alors, on a

$$u(y_j^\alpha) = u(D^\alpha y_j) = \partial^\alpha \bar{y}_j,$$

avec $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Si donc on a $f \in \mathcal{J}_{b^0}$, l'idéal définissant Y en b^0, on aura $f(x_i, \partial^\alpha \bar{y}_j) = 0$; autrement dit $\bar{y} = (\bar{y}_1 \ldots \bar{y}_p)$ est solution formelle (au sens usuel) du système différentiel défini par $\mathcal{J}$.

Posons $b_j^\alpha = \partial^\alpha \bar{y}_j(0)$; la collection des $\{b_j^\alpha\}$, $|\alpha| \leqslant \ell$ définit un point b^ℓ de $|Y^\ell|$, avec $\pi_\ell b^\ell = b^{\ell-1}$; donc $b = \{b^\ell\}$ est un point de $|Y| = \varprojlim |Y_\ell|$.

Réciproquement, donnons-nous un point b de $|Y|$, de coordonnées $\{b_j^\alpha\}$ (avec ici, $b_j^0 = 0$); posons $\bar{y}_j = \sum b_j^\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!}$. Ceci est une solution formelle; il suffit de voir que, pour tout $f \in \mathcal{J}_{b_0}$, on a $f(x_i, \partial^\alpha \bar{y}_j) = 0$. Or, en utilisant la formule de Taylor, on trouve

$$f(x_i, \partial^\alpha \bar{y}_j) = \sum_\beta D^\beta f(0, \partial^\alpha \bar{y}_j(0)) \frac{x^\beta}{\beta!} = \sum_\beta D^\beta f(0, b_j^\alpha) \frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

Le résultat suit alors du fait que, pour tout β, on a $D^\beta f \in \mathcal{J}_{b_0}$. On obtient ainsi une bijection "solutions formelles" $\leftrightarrow$ "points de $|Y|$". Je laisse le lecteur vérifier que cette bijection ne dépend pas des coordonnées choisies. Je le laisse voir aussi qu'on obtient de même une bijection "jets d'ordre ℓ de solutions" $\leftrightarrow$ "points de $|Y_\ell|$".

Pour terminer ce numéro, j'indique rapidement la démonstration du résultat suivant :

PROPOSITION 3.2.1. — *Soit Y une D-variété. L'ensemble des points $b^0 \in |Y_0|$ au-dessus desquels il existe un point $b \in |Y|$ est dense dans $|Y_0|$.*

(En fait, ce résultat est vrai plus généralement pour les provariétés affines, avec la même démonstration; pour les D-variétés elles-mêmes, un résultat beaucoup plus fort sera vu au §5.)

Tout d'abord, pour tout $\ell \geqslant 1$, l'image Z_ℓ de $|Y_\ell|$ dans $|Y_0|$ est constructible, *i.e.* tout point de $|Y_0|$ a un voisinage ouvert U dans lequel Z_ℓ est réunion finie d'ensembles de la forme $\{f_i{=}0, g_j{\neq}0\}$, $f_i, g_j{\in}\Gamma(U, \mathcal{O}_{Y_0})$; ce résultat se ramène immédiatement au résultat analogue bien connu en géométrie algébrique (écrire $|Y_\ell|$ comme l'ensemble des zéros d'un nombre fini de polynômes $\in \Gamma(U, \mathcal{O}_{Y_0}[t_j])$, t_j des indéterminées, et remplacer les coefficients de ces polynômes par d'autres indéterminées).

Alors, $|Y_0| - Z_\ell$ est constructible, donc son adhérence $\overline{(Y_0) - Z_\ell}$ est un sous-ensemble analytique de $|Y_0|$ (pour ce type de résultats, voir [Ka] ou [Ve]) ; du fait que Y_ℓ domine Y_0, on déduit facilement que cet ensemble n'est nulle part dense dans $|Y_0|$; finalement l'intérieur Z_ℓ^0 de Z_ℓ est un ouvert de Zariski dense de $|Y_0|$.

Par suite, $Z = \cap Z_\ell^0$ est dense dans $|Y_0|$ (Baire) ; il suffit donc de voir ceci : pour tout point $b^0 \in Z$, il existe $b \in |Y|$ de projection b^0. Pour tout ℓ, soit B_ℓ l'ensemble des points de $|Y_\ell|$ de projection b^0. Les B_ℓ sont des variétés algébriques affines, donc quasi-compactes pour la topologie de Zariski, et non vides. Donc $\varprojlim B_\ell$ est non vide ("théorème de Tychonov"). D'où le résultat.

Le même résultat est vrai avec Y_0 remplacé par Y_ℓ (même démonstration, ou considérer $Y[\ell]$).

4. Variétés caractéristiques.

4.1. Module caractéristique strict.

Soit (X, Y, D) une D-variété. Je suppose d'abord qu'on est dans un modèle local du type considéré en 3.1, et j'en reprends les notations. Y est donc défini par un idéal différentiel quasi-cohérent et réduit de $\mathcal{A}$, et l'on pose $\mathcal{J}_\ell = \mathcal{J} \cap \mathcal{A}_\ell$. On a, par définition $\mathcal{O}_Y = \mathcal{A}/\mathcal{J}$, $\mathcal{O}_{Y_\ell} = \mathcal{A}_\ell/\mathcal{J}_\ell$.

Pour $f \in \mathcal{A}_\ell$ (i.e. f germe de section de $\mathcal{A}_\ell$), on désigne par δf sa différentielle modulo les dx_i et les dy_j^α, $|\alpha| \leqslant \ell - 1$; autrement dit, on a $\delta f = \sum_{j,|\alpha|=\ell} \frac{\partial f}{\partial y_j^\alpha} \delta y_j^\alpha$; traditionnellement, ceci s'appelle le "symbole" de f.

On a $\delta D_i f = \xi_i \delta f$, ξ_i l'opérateur suivant : ξ_i n'agit pas sur $\mathcal{A}$, et $\xi_i \delta y_j^\alpha = \delta y_j^{\alpha+\varepsilon_i}$; comme les D_i, les ξ_i commutent, et l'on peut écrire, par récurrence $\delta y_j^\alpha = \xi^\alpha \delta y_j$. On définit alors le module N_ℓ des symboles stricts d'ordre ℓ comme le sous-module de $\oplus_{j \leqslant p} \mathcal{O}_{Y_\ell}[\xi] \delta y_j = \mathcal{O}_{Y_\ell}[\xi]^p$ engendré par $\delta \mathcal{J}_0, \ldots, \delta \mathcal{J}_\ell \bmod \mathcal{J}_\ell$, avec $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$; noter que l'adjonction de $\delta \mathcal{J}_0, \ldots, \delta \mathcal{J}_{\ell-1}$ ne change les termes de N_ℓ que dans les degrés $\leqslant \ell - 1$.

On pose $M_\ell = \mathcal{O}_{Y_\ell}[\xi]^p / N_\ell$, et on l'appelle "module caractéristique strict d'ordre ℓ". On pose encore $N = \varinjlim N_\ell$, $M = \varinjlim M_\ell = \mathcal{O}_Y[\xi]^p/N$, et on les appelle respectivement "module des symboles strict" et "module caractéristique strict" ; ce sont des $\mathcal{O}_Y$-modules quasi-cohérents.

Les modules des symboles stricts dépendent du modèle local choisi, *i.e.* des générateurs locaux de $\mathcal{O}_{Y_0}$ sur $\mathcal{O}_X$. Par contre, les modules caractéristiques stricts en sont indépendants. J'indique rapidement comment on peut s'en assurer.

i) Soit $f \in \mathcal{A}_\ell$, et $\bar{f}$ sa classe dans $\mathcal{A}_\ell/\mathcal{J}_\ell = \mathcal{O}_{Y_\ell}$; alors la classe de δf dans M_ℓ ne dépend que de $\bar{f}$, et elle s'identifie à la différentielle relative $d_{Y_\ell/Y_{\ell-1}}\bar{f} \in \Omega^1_{Y_\ell/Y_{\ell-1}}$ (on convient que $Y_{-1} = X$). Pour la notion de différentielle relative dans le cas $\mathbb{C}$-analytique, voir [Gr] ; l'adaptation au cas mixte considéré ici est sans difficulté.

ii) Désignons par M^k_ℓ (resp. M^k) les éléments homogènes (par rapport à ξ) de degré k de M_ℓ (resp. M). Ce qui précède donne un isomorphisme $M^\ell_\ell = \Omega^1_{Y_\ell/Y_{\ell-1}}$. On en déduit facilement la formule suivante :

$$M = \bigoplus_\ell M^\ell = \bigoplus_\ell \mathcal{O}_Y \bigotimes_{\mathcal{O}_{Y_\ell}} \Omega^1_{Y_\ell/Y_{\ell-1}}. \tag{4.1.1}$$

On vérifie d'autre part que les flèches $\xi_i : \Omega^1_{Y_\ell/Y_{\ell-1}} \to \Omega^1_{Y_{\ell+1}/Y_\ell}$ sont bien définies sur une D-variété Y dès qu'on a un système de coordonnées locales sur X, et uniquement sur X. Ceci permet de définir M_ℓ et M sous cette seule hypothèse ; en particulier M est défini par la formule précédente plus l'action des ξ_i.

iii) Si maintenant, on fait un changement de coordonnées locales sur X, on voit comme d'habitude qu'il faut transformer les ξ_i comme les coordonnées d'un vecteur de T^*X. Il faudra donc remplacer $\mathcal{O}_Y[\xi_1, \dots, \xi_n]$ par $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$, $\widetilde{Y} = Y \times_X T^*X$ la provariété affine sur Y_0 définie ainsi : T^*X est de façon évidente une variété affine sur X, et l'on pose $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}} = \mathcal{O}_Y \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_X} p^{-1}\mathcal{O}_{T^*X}$, p la projection $Y_0 \to X$.

4.2. Variété caractéristique stricte.

Je garde les mêmes notations, et je pose aussi $\widetilde{Y}_\ell = Y_\ell \times_X T^*X$ (définition copiée sur celle de $\widetilde{Y}$ ci-dessus).

DÉFINITION 4.2.1. — *La variété caractéristique stricte Λ est le support du module caractéristique strict M, c'est-à-dire la sous-provariété affine de $\widetilde{Y}$ définie par l'idéal $\mathcal{K} = \mathrm{rac}(\mathrm{ann}\, M)$.*

Posant $\mathcal{K}_\ell = \mathcal{K} \cap \mathcal{O}_{\widetilde{Y}_\ell}$, et désignant par M'_ℓ l'image de M_ℓ dans M, on a $\mathcal{K}_\ell = \mathrm{rac}(\mathrm{ann}\, M'_\ell)$; en effet l'inclusion $\mathcal{K}_\ell \subset \mathrm{rac}(\mathrm{ann}\, M'_\ell)$ est évidente ; l'inclusion opposée résulte de ce que M'_ℓ engendre M sur $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$.

Notons Λ_ℓ la sous-variété de $\widetilde{Y}_\ell$ définie par $\mathcal{K}_\ell$; on a $|\Lambda| = \varprojlim |\Lambda_\ell|$, et le même résultat que la proposition 3.2.1 est vrai avec la même démonstration : l'ensemble des points de $|\Lambda_\ell|$ au-dessus desquels il existe un point de $|\Lambda|$ est dense dans $|\Lambda_\ell|$; ceci, joint au "Nullstellensatz", montre que $|\Lambda|$ détermine $\mathcal{K}$.

Comme dans le cas linéaire, la variété caractéristique stricte est liée au théorème de Cauchy-Kovalevski. En gros, au voisinage d'un point strictement non caractéristique, il est possible, grâce à ce théorème, de "réduire le nombre de variables", *i.e.* de remplacer la recherche des solutions du système donné par celle d'un autre système dépendant d'une variable de moins. Je laisse cette question pour l'exposé ultérieur promis.

On identifie Y à la section nulle de $\widetilde{Y}$, *i.e.* à l'image réciproque dans $\widetilde{Y}$ de la section nulle de T^*X. Dans la suite, on considère la variété caractéristique "hors de la section nulle" ; ensemblistement, cela veut dire qu'on considère l'ensemble $|\Lambda|^0 = |\Lambda| \smallsetminus |Y|$. Il revient au même de "rajouter la section nulle à Λ", c'est-à-dire de considérer l'idéal $\mathcal{K}_+$ de $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$ défini ainsi : $\mathcal{K}$ est un idéal de $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$, homogène par rapport aux variables de la fibre de T^*X (en coordonnées locales, les ξ_i), et $\mathcal{K}_+$ est l'idéal des termes de $\mathcal{K}$ de degré $\geqslant 1$.

Cela dit, l'extension à la situation présente de "l'indépendance de la filtration" vue au §1 dans le cas linéaire est la réponse à la question suivante : comment la variété caractéristique stricte est-elle transformée par un isomorphisme?

Observons d'abord que la réponse est immédiate dans le cas d'un isomorphisme strict. Examinons ensuite le cas d'un décalage canonique $i_\ell : Y[\ell] \to Y$; dans ce cas, on a $|Y(\ell)| = |Y|$; soient d'autre part M et M' respectivement les modules caractéristiques stricts de Y et $Y[\ell]$, et soient Λ et Λ' les variétés correspondantes; on a $M'^k = \mathcal{O}_{Y_\ell^{\mathrm{an}}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_\ell}} M^{k+\ell}$ (j'omets d'écrire les projections); on en déduit facilement qu'on a $|\Lambda'|^0 = |\Lambda|^0$. Par contre, si l'on ôte la restriction "hors de la section nulle", le résultat peut être inexact; voir un contre-exemple en 4.4.

Soient maintenant deux D-variétés (X, Y, D) et (X', Z, D) (en abrégé, Y et Z), et soit $\bar{u}$ un isomorphisme, représenté par un morphisme strict $u : Y[k] \to Z$. Comme u induit un isomorphisme $X \xrightarrow{\sim} X'$, on peut supposer $X = X'$. D'autre part, u induit une application notée encore $u : |Y| = |Y[k]| \to |Z|$; on voit immédiatement qu'elle ne dépend que de $\bar{u}$, et que c'est un isomorphisme (considérer un représentant $v : Z[\ell] \to Y$ de l'inverse $\bar{v}$ de u) ; donc u induit un isomorphisme $\tilde{u} : |\widetilde{Y}| \to |\widetilde{Z}|$; le théorème est alors le suivant :

THÉORÈME 4.2.2. — *Sous les hypothèses précédentes, soient Λ et Λ' respectivement les variétés caractéristiques strictes de Y et Z ; alors on a $\tilde{u}(|\Lambda|^0) = |\Lambda'|^0$.*

Pour ne pas rompre le fil de cet exposé, je renvoie la démonstration au §6.

4.3. Linéarisation et variétés caractéristiques.

À côté des notions "strictes" considérées ci-dessus, il convient de considérer des notions de module et variété caractéristiques un peu plus faibles, qui s'obtient à partir des équations linéarisées. On opère pour cela de la manière suivante :

Soit (X, Y, D), en abrégé Y, une D-variété; soit, comme au §1, $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels sur X ; on pose $\mathcal{D}_Y = \mathcal{O}_Y \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_X} p^{-1}\mathcal{D}_X$ (p la projection $Y_0 \to X$); en coordonnées locales, un germe de section de $\mathcal{D}_Y$ s'écrit $\sum a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathcal{O}_Y$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$; ceci, joint à la commutation des D_i et à leur action sur $\mathcal{O}_Y$ fait de $\mathcal{D}_Y$ un faisceau d'anneaux non commutatifs (l'indépendance des coordonnées locales est immédiate), et $\mathcal{O}_Y$ est naturellement un $\mathcal{D}_Y$-module à gauche.

Soit d'autre part $\Omega^1_{Y/X} = \varinjlim \Omega^1_{Y_\ell/X}$ le faisceau des différentielles relatives de Y sur X ; notant Δ la différentielle relative $d_{Y/X}$, on vérifie que la formule $D_i \Delta f = \Delta D_i f$ permet d'étendre l'action des champs de vecteurs D_i à $\Omega^1_{Y/X}$. Cette action s'étend en une structure de $\mathcal{D}_Y$-module (à gauche) sur $\Omega^1_{Y/X}$, structure qui peut de façon naturelle être considérée comme la linéarisation du système différentiel défini par Y.

On va définir la variété caractéristique de ce $\mathcal{D}_Y$-module de la même manière qu'au §1. Tout d'abord, on filtre $\mathcal{D}_Y$ par les opérateurs $\mathcal{D}_{Y,\ell}$ d'ordre $\leqslant \ell$, et on remarque qu'on a $\operatorname{gr} \mathcal{D}_Y = \mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$, $\widetilde{Y} = Y \times_X T^*X$. Posons d'autre part pour simplifier $\Omega^1_{Y/X} = L$ et filtrons-le par les images L_ℓ des $\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_{Y_\ell}} \Omega^1_{Y_\ell/X}$; on voit alors que L est engendré sur $\mathcal{D}_Y$ par L_0 et que la filtration $\{L_\ell\}$ de L est la filtration quotient de celle de $\mathcal{D}_Y$. On pose alors la définition suivante :

DÉFINITION 4.3.1. — *Le module caractéristique de Y est $\operatorname{gr} L$, (muni de sa structure de $\operatorname{gr} \mathcal{D}_Y = \mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$-module); la variété caractéristique Λ est le support de $\operatorname{gr} L$.*

La relation avec les notions "strictes" définies plus haut est la suivante : on considère la suite exacte (*cf.* [Gr])

$$\mathcal{O}_{Y_\ell} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\ell-1}}} \Omega^1_{Y_{\ell-1}/X} \longrightarrow \Omega^1_{Y_\ell/X} \longrightarrow \Omega^1_{Y_\ell/Y_{\ell-1}} \longrightarrow 0.$$

En tensorisant avec $\mathcal{O}_Y$ sur $\mathcal{O}_{Y_\ell}$, on en déduit une surjection

$$M^\ell = \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_{Y_\ell}} \Omega_{Y_\ell/Y_{\ell-1}} \to L_\ell/L_{\ell-1},$$

d'où une surjection $\lambda : M \to \operatorname{gr} L$; cette application commute aux actions de $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$ sur les deux membres (immédiat). On en déduit en particulier une inclusion $\Lambda \subset \Lambda'$; Λ' la variété caractéristique stricte de Y.

En général, λ n'est pas injectif; voir un contre-exemple en 4.4; au §5, nous verrons que c'est néanmoins le cas pour les D-variétés involutives, c'est-à-dire correspondant à un système différentiel involutif.

De même, l'inclusion $\Lambda \subset \Lambda'$ peut être stricte; *cf.* 4.4. Néanmoins, je ne connais pas d'exemple où ces faits se produisent hors de la section nulle.

Soit maintenant $\bar{u}$ un isomorphisme $Y \to Z$, représenté par un morphisme strict $u : Y[k] \to Z$, et soit $\bar{v}$ son inverse, représenté par $v : Z[\ell] \to Y$ (je reprends les notations de la fin du numéro précédente); alors $v \circ u[\ell]$ et $u \circ v[k]$ sont respectivement les décalages canoniques $Y[k+\ell] \to Y$ et $Z[k+\ell] \to Z$. Désignant encore par u l'application $|Y[k]_0| \to |Z_0|$, on pose $u^*\Omega^1_{Z/X} = \mathcal{O}_{Y[k]} \otimes_{u^{-1}\mathcal{O}_Z} u^{-1}\Omega^1_{Z/X}$; on a le résultat suivant :

THÉORÈME 4.3.2. — *Sous les hypothèses précédentes, l'application cotangente $u' : u^*\Omega^1_{Z/X} \to \Omega^1_{Y[k]/X}$ est bijective.*

La démonstration va utiliser les remarques suivantes :

i) Le théorème est vrai si u est le décalage canonique $i_k : Y[k] \to Y$; en effet la famille d'applications $\mathcal{O}_{Y_{k+\ell}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_\ell}} \Omega^1_{Y_\ell/X} \to \Omega^1_{Y_{k+\ell}/X}$ donne un isomorphisme par passage à la limite inductive suivant ℓ; en prenant le produit tensoriel $\mathcal{O}_{Y_k^{\mathrm{an}}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_k}} \cdot$, on trouve le résultat cherché.

ii) Soit $\alpha : M \to N$ un morphisme entre deux modules quasi-cohérents, alors $\ker \alpha$ et $\operatorname{im} \alpha$ sont quasi-cohérents; ceci se voit à partir de 2.1.i.

iii) Soit M un $\mathcal{O}_Y$-module quasi-cohérent, et soit $i_k : Y[k] \to Y$ le décalage canonique. Alors $i_k^* M = 0$ entraîne $M = 0$; ceci se voit avec 2.1.ii.

Ceci étant, pour démontrer que u est injectif, ou surjectif, il suffit par ii) et iii) de démontrer le même résultat pour l'image réciproque par le décalage $i_k[\ell] : Y[k+\ell] \to Y[\ell]$; on vérifie que cette image réciproque n'est autre que l'application cotangente $u[\ell]' : u^*[\ell]\Omega^1_{Z[\ell]/X} \to \Omega^1_{Y[k+\ell]/X}$; soit $\tilde{v}' : u^*[\ell]v^*\Omega^1_{Y/X} \to u^*[\ell]\Omega^1_{Z[\ell]/X}$ l'application déduite de v'; par i), on trouve que $u[\ell]'\tilde{v}'$ est bijectif; alors

i) $\tilde{v}'$ est injectif, et $u[\ell]'$ surjectif; donc u' est surjectif.

ii) En échangeant $Y \leftrightarrow Z$, on trouve que v' est surjectif; donc $\tilde{v}'$ est surjectif, et donc bijectif.

iii) Alors, $u[\ell]'$ est bijectif, donc u' est bijectif; d'où le théorème.

Comme en 4.2, on note $\tilde{u}$ l'application $|\widetilde{Y}| \to |\widetilde{Z}|$ déduite de u; on note Λ et Λ' respectivement les variétés caractéristiques (tout court) de Y et Z. L'analogue de 4.2.2 est le théorème suivant; ici, il n'est pas nécessaire d'ôter la section nulle.

THÉORÈME 4.3.3. — *Toujours sous les mêmes hypothèses, on a* $u(|\Lambda|) = |\Lambda'|$.

J'esquisse seulement la démonstration : on filtre $u^*\Omega^1_{Z/X}$ par l'image réciproque de la filtration naturelle de $\Omega^1_{Z/X}$. En utilisant le théorème précédent, et en raisonnant comme en 1.1.a, on trouve que le support de $\operatorname{gr} u^*\Omega^1_{Z/X}$ est égal à Λ, d'où $u^{-1}(|\Lambda'|) \supset |\Lambda|$. L'inclusion opposée s'obtient en utilisant v au lieu de u.

Le raisonnement de 1.1.a donne aussi des résultats plus précis que je n'explicite pas. Je signale aussi que l'on pourrait aussi déduire le théorème précédent d'un argument du type microdifférentiel à la 1.1.b; je ne développerai pas ce point faute d'en avoir pour l'instant des applications.

4.4. Exemples et remarques diverses.

4.4.1. Soit Y une D-variété; comme ci-dessus, on identifie Y à la section nulle de $\widetilde{Y} = Y \times_X T^*X$; alors la restriction à Y de la variété caractéristique stricte est le support de $\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_{Y_0}} \Omega^1_{Y_0/X}$ (immédiat). Le même objet "non strict" est le support de l'image de $\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_{Y_0}} \Omega^1_{Y_0/X}$ dans $\Omega^1_{Y/X}$; comme $\Omega^1_{Y_0/X}$ engendre $\Omega^1_{Y/X}$ sur $\mathcal{D}_Y$, il revient au même de dire que c'est le support de $\Omega^1_{Y/X}$ [toutefois, comme ce dernier faisceau n'est pas de type fini sur $\mathcal{O}_Y$, il faut entendre ici "support" au sens suivant : l'ensemble des sections de $\mathcal{O}_Y$ dont une puissance non précisée annule les éléments de $\Omega^1_{Y/X}$].

L'exemple suivant montre que ces variétés peuvent ne pas coïncider : on prend $X = \mathbb{C}$, $Z_0 = \mathbb{C}^2$, Y le sous-espace analytique fermé de Z_0 défini par $y^2 - x^2 = 0$; on prend Z défini par $\mathcal{A} = \mathcal{O}_{Z_0}[y', y'', \ldots, y^{(n)}, \ldots]$, et Y le quotient de Z par l'idéal différentiel réduit quasi-cohérent $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$ engendré par $y^2 - x^2$ (en abrégé "la D-variété définie par $y^2 - x^2 = 0$"). Alors on trouve que $\mathcal{J} = \mathcal{J}' \cap \mathcal{J}''$, $\mathcal{J}'$ (resp. $\mathcal{J}''$) l'idéal de la D-variété définie par $y - x = 0$ (resp. $y + x = 0$). On trouve que Y_1 est la normalisation de Y_0 (= séparation des deux droites), et qu'on a des isomorphismes $Y_\ell \xrightarrow{\sim} Y_1$, $\ell \geqslant 2$. On a ici $\Omega^1_{Y_0/X} = \mathcal{O}_{Y_0}/(y)$ (module de support l'origine), et $\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_{Y_0}} \Omega^1_{Y_0/X} = \mathcal{O}_Y/(y)$; mais $\Omega^1_{Y/X} = \Omega^1_{Y_1/X} = 0$; donc la variété caractéristique est vide, et aussi la variété caractéristique stricte de $Y[1]$; mais la variété caractéristique stricte de Y est définie par $\{y = 0, \xi = 0\}$.

Si l'on prend maintenant la D-variété définie par $y'^2 - x^2 = 0$, on trouve que les deux variétés caractéristiques sont égales à la section nulle Y, mais que les modules diffèrent en $x = 0$.

4.4.2. Un point de vue plus systématique que celui adopté ici est le suivant : on remarque que l'application cotangente $\mathcal{O}_Y \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_X} p^{-1}\Omega^1_X \to \Omega^1_Y$ (p, la projection $Y_0 \to X$) est injective [ceci se voit facilement : si $\omega = \sum f_i dx_i$, $f_i \in \mathcal{O}_Y$ une image nulle dans Ω^1_Y, ω doit s'annuler sur toute variété intégrale formelle; donc les f_i sont nuls en tout point de $|Y|$, donc nuls par 3.2.1 et le Nullstellensatz]. Appelant $d_H : \mathcal{O}_Y \to \Omega^1_Y$ le composé de $D = \sum D_i \otimes dx_i$ avec l'application précédente, et notant d la différentielle extérieure de Y, on peut remplacer la différentielle relative Δ par $d_V = d - d_H$. On obtient ainsi le "bicomplexe variationnel" pour lequel je renvoie notamment à [Tu], [Ts], [Vi]. Noter que le sous-$\mathcal{O}_Y$-module $\mathcal{C}$ de Ω^1_Y engendré par les $d_V f$, $f \in \mathcal{O}_Y$ est le "module de contact généralisé" ou module de Cartan engendré, en coordonnées locales, par les $dy_j^\alpha - \sum y_j^{\alpha+\varepsilon_i} dx_i$.

Le théorème 4.3.2 s'applique aussi à Ω^1_Y au lieu de $\Omega^1_{Y/X}$, avec la même démonstration; ceci montre, en un sens que je laisse le lecteur préciser, l'invariance du bicomplexe variationnel par isomorphisme.

4.4.3. Dans diverses questions de géométrie, les variables indépendantes x_i ne sont pas fixées *a priori*; ceci est le cas lorsqu'on considère des systèmes différentiels extérieurs. On sait néanmoins qu'un tel système peut se ramener à un système différentiel usuel "comicrolocalement", *i.e.* dans la variété des éléments intégraux du système; mais ici encore, la seule chose fixée est une "condition d'indépendance" du type $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \neq 0$, et non une variété X déterminée; *cf.* [BCG].

J'indique rapidement comment ceci se traduit dans le contexte de cet article. On part d'un entier n, d'un espace analytique Y_0, et d'une provariété affine Y au-dessus de Y_0; Y est munie d'un sous-faisceau $\mathcal{C}$ de Ω^1_Y; on demande que ces données soient strictement isomorphes, localement sur Y_0, au système $(Y, \mathcal{C})$ provenant d'une D-variété (X, Y, D) avec $\dim X = n$; en particulier $\Omega^1_Y/\mathcal{C}$ est localement libre sur $\mathcal{O}_Y$ de rang n.

Un morphisme strict $u : (Y, \mathcal{C}) \to (Z, \mathcal{C}')$ est un morphisme strict $Y \to Z$, qui envoie $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}$, et tel que l'application cotangente u' : $u^*(\Omega^1_Z/\mathcal{C}') \to \Omega^1_Y/\mathcal{C}$ soit un isomorphisme. On peut voir que les notions considérées ici (morphismes, variétés caractéristiques, *etc.*) gardent un sens dans ce contexte plus général. Le bicomplexe variationnel est ici remplacé par un complexe filtré : pour cette dernière question, je renvoie à [BG].

5. Systèmes involutifs.

5.1. Prolongements.

5.1.1. Dans cette section et la suivante, je vais rappeler rapidement la théorie des systèmes différentiels involutifs de Cartan, dans la version “équations aux dérivées partielles” pour laquelle je réfère à [GS], [Go], [Ku], [Qu] (pour la version de Cartan lui-même en termes de systèmes différentiels extérieurs, voir [BCG]).

Il sera commode d'utiliser pour les systèmes différentiels une terminologie voisine de celle utilisée dans les paragraphes précédents. Un “système différentiel” (en abrégé, D-système) d'ordre ℓ, $Y = (X, Y_k, D)$, $0 \leqslant k \leqslant \ell$ sera donc défini par la donnée

i) d'une variété $\mathbb{C}$-analytique *lisse* X;

ii) d'une variété $\mathbb{C}$-analytique Y_0, non nécessairement lisse, munie de $p : Y_0 \to X$;

iii) d'une famille $Y_\ell \to \cdots \to Y_0$ de variétés affines au-dessus de Y_0;

iv) d'une dérivation $D : \mathcal{O}_{Y_{\ell-1}} \to p^{-1}\Omega_X \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{Y_\ell}$.

Avant de définir les conditions imposées des données, il faut définir les morphismes $Y' \to Y$; ceux-ci sont définis de manière analogue aux morphismes stricts de 3.1, *i.e.* sont donnés par $X' \to X$ étale (en pratique, on pourra se contenter de $X' = X$), $Y'_0 \to Y_0$ au-dessus de $X' \to X$, et enfin des morphismes $Y'_k \to Y_k$ au-dessus de $Y'_0 \to Y_0$, commutant aux diverses projections de Y' et Y ; en outre ces données doivent commuter à D. On notera $\mathrm{Hom}(Y', Y)$ l'ensemble de ces morphismes.

Ceci posé, on impose aux données i) à iv) d'être, localement sur (X, Y_0), isomorphes à un modèle de type suivant : on prend U et V comme en 3.1, et on se donne un idéal cohérent $\mathcal{J}_\ell$ de $\mathcal{A}_\ell$ vérifiant la condition suivante : posant $\mathcal{J}_k = \mathcal{J}_\ell \cap \mathcal{A}_k$, $(k = 0, \dots, \ell - 1)$, on demande qu'on ait $D_i \mathcal{J}_{\ell-1} \subset \mathcal{J}_\ell$, donc aussi $D_i \mathcal{J}_{k-1} \subset \mathcal{J}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant \ell)$, D_i les dérivations définies en 3.1. On définit alors les Y_k et D comme en 3.1.

Avec ces définitions, les morphismes $Y_k \to Y_{k-1}$ sont dominants, et l'on a $D_i \mathcal{O}_{Y_{k-1}} \subset \mathcal{O}_{Y_k}$; par contre, on ne suppose pas *a priori* que les Y_k soient réduits.

Soit $Y = (X, Y_k, D)$, $k \leqslant \ell$, un D-système d'ordre ℓ; pour $0 \leqslant m \leqslant \ell$, on désigne par $Y^{(m)}$ le D-système d'ordre m (X, Y_k, D), $k \leqslant m$ qu'il définit. Le *prolongement d'ordre* 1, $p_1 Y = Y'$ est un D-système d'ordre $\ell + 1$ muni d'un morphisme $Y'^{(\ell)} \to Y$ possédant la propriété suivante : pour tout D-système Z d'ordre $\ell + 1$ et de base X, la flèche naturelle $\mathrm{Hom}(Z, Y') \to \mathrm{Hom}(Z^{(\ell)}, Y)$ est bijective; il est clair que si Y' existe, il est unique à isomorphisme unique près. Son existence se voit dans un modèle local (je laisse le lecteur vérifier les détails) : avec les notations ci-dessus, on prend le plus petit idéal cohérent $\mathcal{K}$ de $\mathcal{A}_{\ell+1}$ contenant $\mathcal{J}_\ell$ et vérifiant $D_i(\mathcal{K} \cap \mathcal{A}_\ell) \subset \mathcal{K}$; il se fabrique ainsi : on prend $\mathcal{K}^1 \subset \mathcal{A}_{\ell+1}$ l'idéal cohérent engendré par $\mathcal{J}_\ell$ et les $D_i \mathcal{J}_\ell$; on pose $\mathcal{J}_\ell^1 = \mathcal{K}^1 \cap \mathcal{A}_\ell$ et on itère; d'après 2.1.i le procédé s'arrête sur tout compact de Y_0 après un nombre fini d'étapes.

On définit de même par récurrence $p_k Y = p_1 p_{k-1} Y$; en itérant, on arrive, toujours d'après 2.1.i, à une D-variété $\widetilde{Y}$, qu'on appellera "D-variété engendrée par Y", ou "prolongement d'ordre infini de Y", et qui peut être caractérisée par une propriété universelle analogue.

5.1.2. On dira que Y est *formellement intégrable à l'ordre* 1 si les flèches $Y'_k \to Y_k$, $0 \leqslant k \leqslant \ell$ sont des isomorphismes; il revient au même de demander que $Y'_{\ell+1} \to Y_\ell$ soit dominant, ou encore, dans un modèle local, que l'on ait $\mathcal{J}_\ell^1 = \mathcal{J}_\ell$. On dira que Y est *formellement intégrable* si tous les $p_k Y$ le sont à l'ordre 1.

La notion de solution, ou de solution formelle d'un D-système se définit comme pour une D-variété; il est clair que les divers prolongements de Y ont tous les mêmes solutions formelles (pour les solutions, c'est d'ailleurs un cas particulier de la définition, une solution étant seulement un morphisme $Z \to Y$, Z le D-système trivial égal à un ouvert de X).

On fera attention au fait suivant : si $Y = (X, Y_k, D)$ est un D-système d'ordre ℓ, alors D n'est pas défini en général sur (X, Y_k^{red}) ; par un procédé analogue au précédent, il serait possible de définir un système réduit d'ordre ℓ associé à Y, et aussi des prolongements réduits. Il me semble toutefois plus simple, au moins en théorie, de commencer par considérer le prolongement infini, puis de le réduire comme en 3.2. Par l'un ou l'autre procédé, on obtient une D-variété réduite, dite "engendrée par Y".

5.1.3. Une dernière définition : étant donné un D-système (X, Y_k, D), $k \leqslant \ell$, on dira qu'il est *lisse* si les Y_k sont lisses (= les Y_k^{an} sont lisses), si $Y_0 \to X$ est une submersion, et si les $Y_k^{\mathrm{an}} \to Y_{k-1}^{\mathrm{an}}$ sont des submersions surjectives $(1 \leqslant k \leqslant \ell)$.

On définit de même une D-variété lisse. C'est la situation "lisse + formellement intégrable" qui va faire l'objet de la suite du §5.

5.2. Involutivité.

Tout d'abord, soient A l'anneau $\mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, et $A^q \subset A$ les polynômes homogènes de degré q ; on pose aussi $T = A^1$. Soit M un A-module de type fini. Je rappelle que le complexe de Koszul $K_. = K_.(\xi_1, \ldots, \xi_n; M)$ est le complexe $K_p = \Lambda^p T \otimes_{\mathbb{C}} M$ muni de la différentielle $d(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \otimes m) = \sum (-1)^{j+1} \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\alpha}_j \wedge \cdots \wedge \alpha_o \otimes \alpha_j m$ $(\alpha_j \in T,\ m \in M)$.

On note $H_p(M)$ ses groupes d'homologie. Si $M = \oplus_{q \geqslant 0} M^q$ est gradué, (avec $A^p M^q \subset M^{p+q}$), on note $H_p^q(M)$ la composante de degré q de H_p, *i.e.* les p-cycles appartenant à $\Lambda^p T \otimes M^q$ modulo ceux qui sont des bords. Pour $\ell \geqslant 1$, on dit que M est *ℓ-involutif* si l'on a $H_p^q(M) = 0$ pour tout p, $q \geqslant \ell$; *cf.* [GS], [Qu], [BCG] (à noter que cette notion est équivalente à la notion connue des géomètres algébristes sous le nom de "régularité de Mumford-Castelnuovo" [BM]). Il est facile de voir que tout M gradué de type fini est ℓ-involutif pour $\ell \gg 0$.

On a le résultat suivant ; *cf.* loc. cit., ou aussi [BS].

THÉORÈME 5.2.1. — *Soit $\ell \geqslant 1$ et soit M gradué de type fini sur A, avec $H_0^q(M) = H_1^q(M) = 0$ pour $q \geqslant \ell$. Pour que M soit ℓ-involutif, il faut et il suffit que, pour une base $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ de A^1 (ou, ce qui revient au même, pour presque toute base de A^1), la condition suivante soit vérifiée :*

(C) Pour $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\eta_i : M^\ell/(\eta_1, \dots, \eta_{i-1})M^{\ell-1} \to M^{\ell+1}/(\eta_1, \dots, \eta_{i-1})M^\ell$$

est injectif.

En pratique M sera engendré par M^0; ceci entraîne $H_0^q(M) = 0$, $q \geqslant 1$. Alors la condition $H_1^q(M) = 0$, $q \geqslant \ell$ équivaut à dire ceci : le noyau de la surjection $M^0 \otimes_{\mathbb{C}} A \to M$ est engendré par ses éléments de degré $\leqslant \ell$. Moyennant cette interprétation, on peut considérer le théorème précédent comme un critère effectif d'involutivité. Une forme plus jolie de ce critère, proche des définitions initiales de Cartan, s'obtient ainsi : on prend les suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \ker \eta_i \longrightarrow M^\ell/(\eta_1, \dots, \eta_{i-1})M^{\ell-1} \longrightarrow M^{\ell+1}/(\eta_1, \dots, \eta_{i-1})M_\ell \\ \longrightarrow M^{\ell+1}/(\eta_1, \dots, \eta_i)M^\ell \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

En écrivant que la somme alternée des dimensions est nulle, et en faisant la somme sur i de ces égalités, on trouve le résultat suivant :

5.2.2. — *Sous les hypothèses de 5.2.1, on a*

$$\dim M^{\ell+1} \leqslant \sum_{i \geqslant 0} \dim M^\ell/(\eta_1, \dots, \eta_{i-1})M^{\ell-1},$$

avec égalité si, et seulement si, (C) est satisfait.

Ceci rappelé, on considère un D-système Y d'ordre ℓ; on définit ainsi son module caractéristique (strict si l'on veut; il n'y a pas lieu d'en considérer d'autre) : pour $0 \leqslant k \leqslant \ell$, on pose $M^k = \mathcal{O}_{Y_\ell} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_k}} \Omega_{Y_k/Y_{k-1}}$ (on pose $X = Y_{-1}$). Supposant alors qu'on dispose de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n)$, et des coordonnées duales $\xi_1, \dots, \xi_n$ sur T^*X, on définit comme en 4.1 des actions $\xi_i : M^k \to M^{k+1}$. On prend alors pour M le module gradué sur $\mathcal{O}_{Y_\ell}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ quotient de $\oplus M^k \otimes_{\mathcal{O}_{Y_\ell}} [\xi_1, \dots, \xi_n]$ par les relations $m \otimes \xi_i - \xi_i m$.

Pour $a \in |Y_k|$, soit $\mathfrak{m}_a$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y_k}$ définissant a; on définit $M(a)$, le module caractéristique en a comme le $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$-module gradué $M \otimes_{\mathcal{O}_{Y_k}} \mathcal{O}_{Y_k}/\mathfrak{m}_a$. On pose alors la définition suivante :

DÉFINITION 5.2.3. — *Soit* $Y = (X, Y, D)$, $k \leqslant \ell$ *un* D*-système d'ordre* ℓ*. On dira qu'il est involutif s'il vérifie les conditions suivantes :*

i) *Il est formellement intégrable à l'ordre* 1*; son prolongement* $p_1 Y$ *peut donc s'écrire* (X, Y_k, D), $k \leqslant \ell + 1$*;*

ii) *$p_1 Y$ est lisse;*

iii) *En tout point $a \in |Y_k|$, le module caractéristique $M(a)$ est ℓ-involutif.*

Remarquons en passant que sous les conditions i) et ii), la dernière condition est ouverte : si elle est vraie en un point, elle l'est aussi aux points voisins. Le théorème fondamental suivant est une des nombreuses variantes du théorème de Cartan-Kähler; *cf.* références ci-dessus.

THÉORÈME 5.2.4. — *Si Y est un D-système d'ordre ℓ involutif, ses prolongements sont tous involutifs.*

En particulier, la D-variété $\overline{Y}$ engendrée par Y sera lisse, et donc réduite. On dira dans ces conditions que $\overline{Y}$ est involutive à l'ordre ℓ, ou *ℓ-involutive.*

On notera que, pour une D-variété, le fait d'être lisse, ou le fait d'être involutive ($= \ell$ involutive, pour $\ell \gg 0$) ne sont pas invariants par les isomorphismes non stricts. Prenons par exemple $X = \mathbb{C}^2$, $Y_0 = \mathbb{C}^3$ (variables y, x_1 x_2); l'idéal différentiel engendré par $D_1 y$ définit une D-variété involutive d'ordre 1, mais non l'idéal différentiel engendré par $x_1 D_1 y - y$ et $D_1^2 y$. Pourtant ces deux variétés sont isomorphes par $z = x_1 y$, $y = D_1 z$.

Les deux résultats qui suivent se démontrent simultanément; une esquisse de démonstration se trouve dans [Ma]; les détails paraîtront ultérieurement.

THÉORÈME 5.2.5. — *Soit $Y = (X, Y_k, D)$ une D-variété réduite; soit Y_0' un ouvert relativement compact de Y_0 et soit Y' la restriction de Y à Y_0'. Soit encore $Y'^{(\ell)}$ le D-système d'ordre ℓ défini par Y'; alors, pour $\ell \gg 0$, Y' est la D-variété réduite engendrée par $Y^{(\ell)}$.*

Ceci peut être considéré comme la version analytique du théorème de finitude de Ritt-Raudenbusch en algèbre différentielle [Ri1]; au langage près, un cas particulier se trouve déjà dans [Ri2].

THÉORÈME 5.2.6 ("Involutivité générique"). — *Sous les hypothèses du théorème précédent, il existe $\ell \geqslant 0$ et Z_0, ouvert de Zariski de $Y_\ell'^{\,\mathrm{an}}$ possédant la propriété suivante : soit Z la restriction de $Y'[\ell]$ à Z_0; alors*

i) *Z est 1-involutive.*

ii) *Pour tout* $k \geqslant 0$, $|Z_k|$ *est dense dans* $|Y'_{\ell+k}|$.

D'après le théorème de Cartan-Kähler, par tout point $a^k \in |Z_k|$ passe une solution convergente (*i.e.* il existe un point $a \in |Z|$ d'image a^k dans $|Z_k|$, qui définit une solution convergente). Ceci, joint au théorème précédent, donne un résultat bien plus fort que 3.2.1.

5.3. Intégrabilité.

5.3.1. L'argument heuristique de 1.2, relatif à l'intégrabilité de la variété caractéristique peut être étendu au cas non linéaire de la manière suivante : plaçons-nous dans un modèle local comme en 3.1, avec ici $p = 1$, *i.e.* une seule variable y. Pour $f \in \mathcal{A}$, on identifie la différentielle relative Δf à l'opérateur différentiel $\sum_\alpha \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} D^\alpha$; pour $f, g \in \mathcal{A}$, on pose alors $[f,g] = \Delta f(g) - \Delta g(f)$. On vérifie alors les propriétés suivantes :

i) Ce crochet vérifie l'identité de Jacobi.

ii) Si $f \in \mathcal{A}_\ell$, $g \in \mathcal{A}_m$, avec $\ell \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, on a $[f,g] \in \mathcal{A}_{\ell+m-1}$.

iii) Soit $\mathcal{J}$ un idéal différentiel qui contienne f et g; alors on a $[f,g] \in \mathcal{J}$, et, modulo $\mathcal{J}$, on a $\Delta[f,g] = [\Delta f, \Delta g]$, (où le crochet du second membre est le crochet habituel dans l'algèbre des opérateurs différentiels). En effet, si $\Delta f = \sum a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathcal{A}$, alors $\Delta f(g) = \sum a_\alpha D^\alpha g$ et $\Delta[\Delta f(g)] = \sum D^\alpha g \cdot \Delta a_\alpha + \sum a_\alpha \Delta D^\alpha g = \sum a_\alpha D^\alpha \Delta g \bmod \mathcal{J}$, donc $\Delta[\Delta f(g)] = \Delta f \cdot \Delta g \bmod \mathcal{J}$, le point désignant la composition des opérateurs différentiels.

iv) Pour $f \in \mathcal{A}_\ell$, $g \in \mathcal{A}_m$, $\ell \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, soient δf et δg respectivement les symboles de f et g; en identifiant δy à 1, on peut les considérer comme des éléments homogènes de $\mathcal{A}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$; définissant alors le *crochet de Poisson* de deux éléments u, v de $\mathcal{A}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ par $\{u, v\} = \sum \frac{\partial u}{\partial \xi_i} D_i v - \frac{\partial v}{\partial \xi_i} D_i u$, on vérifie, par exemple en utilisant iii), qu'on a $\delta[f,g] = [\delta f, \delta g]$. Par conséquent, l'idéal de $\mathcal{A}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ défini par les f et δf, $f \in \mathcal{J}$, est stable par crochets de Poisson.

À noter que dans le cas $\ell = m = 1$, posant $y_i = D_i y$, et $[f,g]^\sim = [f,g] - \left(\frac{\partial f}{\partial y} g - \frac{\partial g}{\partial y} f\right)$, on a $[f,g]^\sim = X_f(g)$, X_f le champ de vecteurs $\sum \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(\sum y_i \frac{\partial f}{\partial y_i}\right) \frac{\partial}{\partial y} - \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial y'_i}$; on voit aussitôt que les variétés intégrales de $f = 0$ sont stables par X_f (méthode d'intégration dite de Lagrange-Charpit, ou Cauchy, ou Hamilton-Jacobi, suivant les auteurs).

5.3.2. D'une façon générale, soit Y une D-variété réduite; posons comme au §4, $\widetilde{Y} = Y \times_X T^*X$; en se plaçant au-dessus d'une carte locale de X, on a $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}} = \mathcal{O}_Y[\xi_1, \ldots, \xi_n]$; on définit alors le crochet de Poisson dans $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$ par $\{f,g\} = \sum \frac{\partial f}{\partial \xi_i} D_i g - \frac{\partial g}{\partial \xi_i} D_i f$, et l'on vérifie que ceci ne dépend pas des coordonnées locales choisies.

Soit maintenant Λ (resp. Λ') la variété caractéristique stricte (resp. la variété caractéristique) de Y, et soit $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{K}'$) l'idéal réduit de $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$ correspondant. La question se pose naturellement de savoir si $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$ sont stables par crochet de Poisson.

Tout au moins pour Λ', on pourrait penser à utiliser le théorème de Gabber; mais il ne s'applique pas ici, les hypothèses noethériennes de ce théorème n'étant pas satisfaites.

Dans le cas involutif, la question se règle facilement; on a le théorème suivant :

THÉORÈME 5.3.3. — *Soit Y une D-variété ℓ-involutive; soient M et M' respectivement son module caractéristique strict et son module caractéristique, et soit $\lambda : M \to M'$ la surjection canonique. Alors :*

i) *λ est bijectif; en particulier les variétés caractéristiques correspondantes Λ et Λ' sont égales.*

ii) *L'idéal caractéristique $\mathcal{K}$ est stable par crochets de Poisson.*

La première assertion résulte aussitôt de la lissité de Y : pour tout k et k', avec $k' < k$, $\Omega^1_{Y_k^{\mathrm{an}}/X}$ est localement libre, et $\mathcal{O}_{Y_k^{\mathrm{an}}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'_k}} \Omega^1_{Y_{k'}/X} \to \Omega^1_{Y_k^{\mathrm{an}}/X}$ est injectif, et localement facteur direct. On en déduit facilement que λ est injectif, donc bijectif.

Pour démontrer la seconde assertion, prenons une solution de Y, *i.e.* un morphisme u de la D-variété triviale U dans Y, U un ouvert de X (le raisonnement pourrait aussi bien être fait avec les solutions formelles). Alors $u^{-1}|\Lambda|$ est le support dans T^*X de u^*M. Mais le même raisonnement qu'en i) montre que c'est la variété caractéristique du $\mathcal{D}_0$-module $u^*\Omega^1_{Y/X}$ (dont on vérifie facilement la cohérence). Par suite, la théorie linéaire, par exemple le théorème de Gabber nous montre que $u^{-1}|\Lambda|$ est stable par crochets de Poisson.

Prenons alors f et $g \in \mathcal{K}$; u^*f et u^*g s'annulent sur $u^{-1}|\Lambda|$, donc $u^*\{f,g\} = \{u^*f, u^*g\}$ aussi. Donc $\{f,g\}$ a la propriété suivante : pour toute solution u (ou solution formelle) de Y, $u^*\{f,g\}$ s'annule sur $u^{-1}|\Lambda|$. Ceci entraîne que $\{f, g\}$ s'annule sur $|\Lambda|$, donc appartient à $\mathcal{K}$, ce qui démontre le théorème.

6. Démonstration du théorème 4.2.2.

Cette démonstration va reposer sur une description locale des isomorphismes en termes de décalages de filtrations plus généraux que les décalages canoniques considérés jusqu'ici. Soit (X, Y, D) une D-variété; quitte à prendre un modèle local, on peut supposer que X admet un système de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$. Soient $z_1, \dots, z_q \in \Gamma(Y_0, \mathcal{O}_{Y_0})$; on dira que $z_1, \dots, z_q$ sont des coordonnées de Y_0 si l'application $Y_0 \to X \times \mathbb{C}^q$ définie par les x_i et les z_j est une immersion localement fermée (*i.e.* il existe un ouvert U de $X \times \mathbb{C}^q$ tel que cette application soit une immersion fermée dans U); il en résulte facilement que cette immersion se prolonge de façon unique en une immersion fermée de Y_ℓ dans la variété affine sur U d'anneau $\mathcal{O}_U[z_j^d]$, $|\alpha| \leqslant \ell$; autrement dit Y admet une description du type du §3, avec les variables z (prendre *a priori* une telle description, de variables y_j, et examiner les passages $y \leftrightarrow z$).

Soient maintenant $(r_1, \dots, r_p)$ des entiers $\geqslant 0$, et soient $z_1, \dots, z_p \in \Gamma(Y_0, \mathcal{O}_{Y_0})$; on dira que $z_1, \dots, z_p$ sont des *générateurs stricts* de Y, de poids respectifs $(-r_1, \dots, -r_p)$ si les $D^\alpha z_j$, $|\alpha| \leqslant r_j$ forment un système de coordonnées de Y_0. Par exemple, si $z_1, \dots, z_p$ sont des coordonnées de Y_0, ce sont des générateurs stricts de $Y[\ell]$, de poids $(-\ell, \dots, -\ell)$. On dira enfin que $z_1, \dots, z_p \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ sont des *générateurs* tout court de Y de poids $(r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{Z}^p$ si ce sont des générateurs stricts de $Y[\ell]$, de poids $(r_1 - \ell, \dots, r_p - \ell)$ pour ℓ assez grand.

Plaçons-nous dans cette dernière situation, et soit $(s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}^p$. Je dis qu'il existe une D-variété $\overline{Y}$ possédant les propriétés suivantes :

i) Elle est isomorphe à Y.

ii) Soit $\bar{z}_j$ les images des z_j par cet isomorphisme; les $\bar{z}_j$ sont des générateurs de $\overline{Y}$ de poids $(r_1 + s_1, \dots, r_p + s_p)$.

En composant avec des décalages canoniques, il suffit de traiter le cas suivant : les $r_i = -r'_i$ sont $\leqslant 0$, et les z_i sont des générateurs stricts de Y de poids $(r_1, \dots, r_p)$; enfin $s_1 = -1$, $s_i = 0$, $i \geqslant 2$. On note alors Y'_ℓ la variété affine sur Y_ℓ d'anneau $\mathcal{O}_{Y_\ell}[D^\alpha z_1]$, $|\alpha| = r'_1 + \ell + 1$; et l'on prend $\overline{Y}_0 = Y_0'^{\,\mathrm{an}}$, $\overline{Y}'_\ell = Y'_\ell \times_{Y'_0} \overline{Y}_0$ (ces produits fibrés étant définis par produit tensoriel, comme aux §3 et 4).

On vérifie immédiatement qu'un $\overline{Y}$ vérifiant i) et ii) est unique à isomorphisme strict et décalage canonique près (*i.e.* si l'on a une autre solution $\overline{Y}'$, il existe k et ℓ tels que $\overline{Y}[k]$ soit strictement isomorphe à $\overline{Y}'[\ell]$). Un tel $\overline{Y}$ sera appelé "décalé" de Y (les z, r, s, sous-entendus).

Le résultat est alors le suivant : soit $\overline{Y}$ un décalé de Y; on pose $\widetilde{Y} = Y \times_X T^*X$, $\widetilde{\overline{Y}} = \overline{Y} \times_X T^*X$. L'isomorphisme de décalage u donne un isomorphisme $\tilde{u} : |\widetilde{Y}| \xrightarrow{\sim} |\widetilde{\overline{Y}}|$.

THÉORÈME 6.1. — *Sous ces hypothèses, soient Λ et $\overline{\Lambda}$ les variétés caractéristiques de Y et $\overline{Y}$, et soient respectivement $|\Lambda|^0$ et $|\overline{\Lambda}|^0$ leurs points hors de la section nulle. Alors on a $\tilde{u}(|\Lambda|^0) = |\overline{\Lambda}|^0$.*

Le théorème 4.2.2 résulte immédiatement de là; soit en effet un isomorphisme $\bar{u} : Y \to Z$, représenté par $u : Y[k] \to Z$, d'inverse $\bar{v}$ représenté par $v : Z[\ell] \to Y$. En se plaçant dans un modèle local, on peut supposer que Y_0 (resp. Z_0) admet des coordonnées $y_0, \ldots, y_p$ (resp. $z_1, \ldots, z_q$). On a $z_j \in \Gamma(Y_0, \mathcal{O}_{Y_k})$; donc l'ensemble $(y_1, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_q)$ forme un système de générateurs de Y de poids $(0, \ldots, , k, \ldots, k)$; de même, ils forment un système de générateurs de Z de poids $(\ell, \ldots, \ell, 0, \ldots, 0)$. Donc Z se déduit de Y par décalage et le résultat suit de 6.1.

On va encore démontrer le théorème par récurrence; il est un peu plus commode ici de se ramener au cas suivant : les $r_i = -r'_i$ sont $\leqslant 0$, et les z_j sont des générateurs stricts de Y de poids $(r_1, \ldots, r_p)$; enfin $s_1 = 0$, $s_2 = \cdots = s_p = -1$. Le modèle local est donc le suivant : U est un ouvert de $X \times \mathbb{C}^N$, $N = \sum_{|\alpha_i| \leqslant r'_i} 1$; on pose $\mathcal{A}_0 = \mathcal{O}_U$, $\mathcal{A}_\ell = \mathcal{O}_U[z_j^\alpha]$, avec $r'_j + 1 \leqslant |\alpha_j| \leqslant r'_j + \ell$, et $\mathcal{A} = \cup \mathcal{A}_\ell$; enfin $\mathcal{J}$ est un idéal différentiel quasi-cohérent et réduit de $\mathcal{A}$, définissant Y, et l'on pose $\mathcal{J}_\ell = \mathcal{A}_\ell \cap \mathcal{J}$.

Pour démontrer le théorème, il suffit de voir ceci : soit $a \in |\widetilde{Y}| \setminus |\Lambda|$, hors de la section nulle; alors, on a $a \notin |\overline{\Lambda}|^0$. On peut supposer que la projection de a dans T^*X est donnée par $x = 0$, $\xi = (1, 0, \ldots, 0)$. L'hypothèse "a non caractéristique", jointe au théorème des fonctions implicites, signifie ceci : il existe $\ell \geqslant 0$ tel que dans $\mathcal{J}_\ell^{\mathrm{an}}$ au voisinage de a, on peut trouver un "système kovalevskien d'ordre ℓ", *i.e.* une famille $\{D_1^{\rho_j} z_j - f_j(x, z_k^\alpha)\}$, $1 \leqslant j \leqslant p$, avec $\rho_j = r'_j + \ell$, f_j fonction holomorphe des variables x_i et z_k^α, $|\alpha| \leqslant \rho_k$, $\alpha \neq (\rho_k, 0, \ldots, 0)$.

Pour établir le résultat, il suffit de montrer que l'on peut en déduire un système kovalevskien d'ordre $\bar{\ell}$, ($\bar{\ell} \geqslant \ell$) pour les poids $r_1, r_2 - 1, \ldots, r_p - 1$, c'est-à-dire un système analogue au précédent avec $\bar{\rho}_1 = r'_1 + \bar{\ell}'$, $\bar{\rho}_j = r'_j + \bar{\ell} + 1$, $j \geqslant 2$.

Il suffit de trouver les équations relatives à $z_2, \dots, z_p$ car la première équation (ou plus précisément sa dérivée par rapport à $D_1^{\bar{\ell}-\ell}$) convient.

On opère pour cela de la façon suivante : quitte à dériver toutes les équations par rapport à D_1, on peut supposer qu'elles sont linéaires par rapport aux dérivées "d'ordre ℓ" ("l'ordre" de z_j^α étant $|\alpha| + r_j$).

Les équations s'écrivent alors

$$E_j = D_1^{\rho_j} z_j - \sum_{i,\alpha} a_{j,i,\alpha}(x, z_k^\beta) z_i^\alpha - b_j(x, z_k^\beta).$$

La somme étant étendue aux (i, α) avec $|\alpha| = \rho_j$, $\alpha \neq (\rho_j, 0, \dots, 0)$ les z_k^β intervenant dans les coefficients vérifiant $|\beta| < \rho_k$.

Pour obtenir les équations voulues, il suffit d'éliminer les dérivées d'ordre maximum de z_1, c'est-à-dire de remplacer E_j $(j = 2, \dots, p)$, par $P_1 E_j + P_j E_1$, les P_j étant les opérateurs différentiels d'ordre ρ_1 suivants : $P_1 = D_1^{\rho_1} - \sum_\alpha a_{1,1,\alpha}(x, z_k^\beta) D^\alpha$, $P_j = \sum_\alpha a_{j,1,\alpha}(x, z_k^\beta) D^\alpha$ $(j \geqslant 2)$; on vérifie immédiatement qu'on obtient les équations voulues, avec $\bar{\ell} = \ell + \rho_1 - 1$. D'où le théorème.

Remarque 6.2. — Le même procédé de réduction à un décalage permet de démontrer le résultat suivant : si un morphisme strict $u : Y[\ell] \to Z$ représente un isomorphisme, alors $\mathcal{O}_{Y[\ell]}$ est plat sur $\mathcal{O}_Z$; on montre d'abord que ceci est vrai pour $Y[\ell'] \to Z$, avec $\ell' \gg 0$; on redescend ensuite de ℓ' à ℓ en utilisant 2.1.ii) ; j'omets les détails.

BIBLIOGRAPHIE

[BCG] R. BRYANT, S.S. CHERN, R. GARDNER, H. GOLDSCHMIDT and P. GRIFFITHS, Exterior differential systems, MSRI Publ., vol. 18, Springer (1992).

[BG] R. BRYANT and P. GRIFFITHS, Characteristic cohomology of differential systems, I; general theory, J. Amer. Math. Soc., 8 (1995), 507–596.

[Bj] J.-E. BJÖRK, Rings of differential operators, North-Holland, 1979.

[BM] D. BAYER-D. MUMFORD, What can be computed in algebraic geometry? Comp. alg. geometry and commutative algebras, Symposia Math., 39, Cambridge University Press (1993), 1–43.

[BS] D. BAYER-M. STILLMAN, A criterion for detecting m-regularity, Inv. Math., 87 (1987), 1–11.

[Fr] J. Frisch, Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques, Inv. Math., 4-2 (1967), 118–138.

[Ga] O. Gabber, The integrability of the characteristic variety, Amer. J. Math., 103 (1981), 445–468.

[GM] M. Granger, P. Maisonobe, A basic course on differential modules, in D-modules coherents et holonomes, P. Maisonobe et C. Sabbah ed., Travaux en cours n° 45, Hermann (1993), 103–168.

[Go] H. Goldschmidt, Integrability criteria for systems of non-linear partial differential equations, J. Diff. geometry, 1 (1967), 269–307.

[Gr] A. Grothendieck, Techniques de constructions en géométrie analytique, Séminaire H. Cartan, 13 (1960/61), exposés 7–17, Benjamin (1967).

[GS] V. Guillemin-S. Sternberg, An algebraic model for transitive differential geometry, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 16–47.

[Ho] C. Houzel, Géométrie analytique locale, Séminaire Cartan 13 (1960/61), exposés 18–21, Benjamin (1967).

[Ka] M. Kashiwara, On the maximally overdetermined systems of linear differential equation I, Publ. RIMS Kyoto Univ., 10 (1975), 563–579.

[Ma] B. Malgrange, L'involutivité générique des systèmes différentiels analytiques, C. R. Acad. Sc. Paris, 326-1 (1998), 863–866.

[Qu] D. Quillen, Formal properties of overdetermined systems of linear differential equations, Ph. Thesis, Harvard University, 1964.

[Ri1] J. Ritt, Differential algebra, Coll. Publications n° 33, Amer. Math. Soc., Dover (1966).

[Ri2] J. Ritt, Systems of differential equations, I - Theory of ideals, Amer. J. of Math., 60 (1938), 535–548.

[Ts] T. Tsujishita, On variational bicomplexes associated to differential equations, Osaka J. of Math., 19 (1982), 311–363.

[Tu] W. M. Tulczyjew, The Euler-Lagrange resolution, in Lect. Notes in Mathematics, n° 836, Springer (1980), 22–48.

[Ve] J. L. Verdier, Classe d'homologie associée à un cycle, Séminaire de géométrie analytique, exposé n° 6, A. Douady et J. L. Verdier, ed., Astérisque 36–37, Soc. Math. Fr. (1976).

[Vi] A. M. Vinogradov, The $\mathcal{C}$-spectral sequence, Lagrangian formalism and conservation laws, I, II, J. Math. An. Appl., 100 (1984), 1–129.

Manuscrit reçu le 9 novembre 1999.

Bernard MALGRANGE,
Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS-UJF
38402 St Martin d'Hères (France).
Bernard.Malgrange@ujf-grenoble.fr