Annales de l'institut Fourier

Laurent Bessières

Sur le volume minimal des variétés ouvertes

Annales de l'institut Fourier, tome 50, nº 3 (2000), p. 965-980

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_3_965_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
50, 3 (2000), 965–980

SUR LE VOLUME MINIMAL DES VARIÉTÉS OUVERTES

par Laurent BESSIÈRES

1. Introduction.

L'objet de cet article est l'étude de quelques propriétés du volume minimal des variétés ouvertes.

Rappelons que pour une variété différentiable N, le volume minimal est défini par

$$\text{minvol}(N) = \inf_{|K(g)|\leqslant 1} \text{vol}_g(N) \tag{1}$$

où g est une métrique riemannienne complète sur N et $K(g)$ la courbure sectionnelle. En particulier, pour les variétés compactes à bord, on considère des métriques complètes sur l'intérieur de N, qui est une variété ouverte, le bord étant rejeté à l'infini.

Il est bien connu que pour les surfaces fermées orientées, le volume minimal est réalisé par les métriques extrémales. Pour les surfaces ouvertes supportant une métrique hyperbolique complète à volume fini, le théorème de Gauss-Bonnet donne encore

$$\text{minvol}(S) = \text{vol}_{\text{hyp}}(S). \tag{2}$$

En dimension $\geqslant 3$, les métriques extrémales jouent encore un rôle crucial.

Mots-clés : Volume minimal – Rigidité – Variété hyperbolique.
Classification math. : 53C20 – 53C21 – 53C24.

THÉORÈME 1.1 ([BCG]). — *Si (M, g_0) est une variété hyperbolique fermée*

$$\operatorname{minvol}(M) = \operatorname{vol}_{g_0}(M) \tag{3}$$

et g_0 est l'unique métrique à isométrie près à atteindre le volume minimal.

La question de savoir si le volume minimal d'une variété hyperbolique ouverte est atteint pour cette métrique hyperbolique est encore ouverte.

Pour des variétés fermées, on a, en dimension $\geqslant 3$, le résultat suivant ([BCG] pour l'inégalité, [Bes] pour l'égalité).

THÉORÈME 1.2 ([BCG], [Bes]). — *Soient N et M deux variétés fermées, orientées, connexes de même dimension $n \geqslant 3$. On suppose que M est munie d'une métrique hyperbolique g_0 et on suppose également qu'il existe une application continue*

$$f : N \longrightarrow M$$

de degré non nul. Alors

$$\operatorname{minvol}(N) \geqslant |\deg\ f|.\operatorname{vol}_{g_0}(M). \tag{4}$$

De plus, l'égalité est atteinte si, et seulement si, N peut être munie d'une métrique hyperbolique, et s'il existe un revêtement différentiable, homotope à f, de N sur M.

Une question naturelle est de savoir si ce résultat subsiste pour des variétés ouvertes. Le résultat principal de cet article est de montrer que la réponse est négative. Pour cela, on considère des variétés compactes à bord, admettant sur leur intérieur une métrique hyperbolique complète de volume fini.

THÉORÈME 1.3. — *Soit M une variété compacte, connexe, orientable de dimension $n \geqslant 3$, admettant sur son intérieur une structure hyperbolique complète de volume fini, et telle que le bord ∂M est une union de tores T^{n-1}. Il existe une variété N compacte à bord, non homéomorphe à M, et une application propre $f : N \to M$ de degré 1, dont la restriction au bord est un homéomorphisme bien que*

$$\operatorname{minvol}(N) \leqslant \operatorname{vol}_{\mathrm{hyp}}(M). \tag{5}$$

De plus, les deux variétés ont même volume simplicial, $\|N\| = \|M\|$.

Remarques.

1. Dans le cas d'une variété M de dimension n, compacte à bord, orientable, on définit le volume simplicial (*cf.* [Gro]) par

$$\|M\| = \inf\{\Sigma|\lambda_i| \text{ où } \Sigma\lambda_i\sigma_i \text{ est un cycle fondamental relatif pour un générateur de } H_n(M, \partial M, R)\}.$$

2. La comparaison de ce résultat avec l'énoncé du théorème de rigidité 1.2 pour le volume minimal des variétés fermées montre l'une des deux alternatives suivantes :

– soit l'inégalité $\operatorname{minvol}(N) \geqslant |\deg f| \operatorname{vol}_h(M)$ n'est plus valable dans le cas des variétés ouvertes. Il se pourrait que le volume minimal de M ne soit pas réalisé par la métrique hyperbolique.

– soit l'inégalité $\operatorname{minvol}(N) \geqslant |\deg f| \operatorname{vol}_h(M)$ est toujours valable, mais alors il n'y a plus de rigidité dans le cas d'égalité.

3. La preuve détaillée que nous donnons est un cas particulier de constructions plus générales de Cheeger et Gromov (voir [CG]).

Le théorème de rigidité et la construction utilisée pour prouver 1.3 permettent de démontrer en toute dimension le résultat suivant, qui généralise un résultat énoncé par Thurston dans ces notes [Thu] (voir corollaire 1.5 ci-dessous).

THÉORÈME 1.4. — *Soit M une variété fermée de dimension $n \geqslant 3$, orientable. On suppose qu'il existe une sous-variété $X \subset M$ ouverte, hyperbolique complète de volume fini, telle que $\partial\overline{X} = \cup_{i=1}^p T_i^{n-1}$ et chaque composante connexe de $M \backslash X$ est homéomorphe à $D^2 \times T^{n-2}$. Si M domine une variété hyperbolique fermée (Y, g_0) par une application de degré 1, alors*

$$\operatorname{vol}_{\mathrm{hyp}}(X) > \operatorname{vol}_{g_0}(Y). \tag{6}$$

COROLLAIRE 1.5 ([Thu], chap. 6). — *Soit (M, g_0) une variété de dimension 3, fermée, orientable, hyperbolique. Soit $X \subset M$ une sous-variété ouverte telle que $\partial\overline{X}$ est une union de tores et X admet une structure hyperbolique complète. Si X n'est pas incluse dans une boule B^3, alors*

$$\operatorname{vol}_{\mathrm{hyp}}(X) > \operatorname{vol}_{g_0}(M). \tag{7}$$

En dimension $n \geqslant 4$, l'hypothèse "M domine une variété hyperbolique" est la généralisation naturelle de l'hypothèse "M hyperbolique" en dimension 3. En effet, en dimension 3, le théorème de chirurgie hyperbolique de Thurston assure que presque tous les recollements, excepté un nombre fini sur chaque cusp, donnent une variété hyperbolique. En dimension $n \geqslant 4$, si le groupe fondamental contient Z^{n-2}, M ne peut pas porter de métrique à courbure strictement négative.

La vraie question est bien entendu de savoir si, en dimension $n \geqslant 4$,

$$\mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(X) > \mathrm{minvol}(M). \tag{8}$$

On montre seulement

$$\mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(X) \geqslant \mathrm{minvol}(M) > \mathrm{vol}_{g_0}(Y). \tag{9}$$

2. Preuve du théorème principal.

L'idée est la suivante : on considère une variété compacte M, dont l'intérieur porte une structure hyperbolique de volume fini, et le bord est une union de tores T^{n-1}. On modifie la topologie de M en collant sur le bord un fibré trivial $\ddot{T}^2 \times T^{n-2}$, où $\ddot{T}^2$ est un tore moins deux disques.

2.1. Construction de la variété N.

Notons W^2 la sphère à trois trous , avec $\partial W^2 = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. La variété $W^2 \times T^{n-2}$ est alors bordée par 3 tores $T_1^{n-1} \cup T_2^{n-1} \cup T_3^{n-1}$. Soit un difféomorphisme

$$\phi : \partial(D^2 \times T^{n-2}) \to T_1^{n-1} \tag{10}$$

tel que $\phi(\partial D^2 \times \{*\}) = C_1$.

D'autre part, on identifie une composante connexe de ∂M à T_2^{n-1} par l'identité. On obtient donc par recollement

$$M \bigcup_{\mathrm{id}} (W^2 \times T^{n-2}) \bigcup_{\phi} (D^2 \times T^{n-2}). \tag{11}$$

Cette variété est clairement difféomorphe à M. L'introduction du terme $(W^2 \times T^{n-2}) \cup_\phi (D^2 \times T^{n-2})$ est justifiée plus bas.

On considère maintenant un difféomorphisme

$$\psi : \partial(\dot{T}^2 \times T^{n-2}) = S_1 \times T^{n-2} \to T_1^{n-1} \tag{12}$$

tel que $\psi(S^1 \times \{*\}) = C_1$ et où $\dot{T}^2$ est un tore moins un disque. On obtient par recollement la variété

$$N = M \bigcup_{\mathrm{id}} (W^2 \times T^{n-2}) \bigcup_{\psi} (\dot{T}^2 \times T^{n-2}). \tag{13}$$

La variété N n'est pas homéomorphe à M. En effet, le théorème de Van Kampen montre l'existence d'une inclusion $Z^{n-1} \to \Pi_1 N$ non périphérique (*i.e.* qui n'est pas conjugué à un sous-groupe correspondant à une composante de bord).

Observons que la composante $(W^2 \times T^{n-2}) \cup_\psi (\dot{T}^2 \times T^{n-2})$ est difféomorphe au $\ddot{T}^2 \times T^{n-2}$ annoncé plus haut.

De plus, il existe une application propre $f : N \to M$, de degré 1, qui pince $\dot{T}^2 \times \{*\}$ sur $D^2 \times \{*\}$ et est l'identité $\partial\dot{T}^2 \times \{*\} \to \partial D^2 \times \{*\}$.

2.2. Majoration de minvol(N).

Le but de cette partie est d'établir la

PROPOSITION 2.1.

$$\mathrm{minvol}(N) \leqslant \mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(M).$$

Preuve. — On construit sur N une famille de métriques riemanniennes $(g_{\varepsilon,\eta})_{\varepsilon>0,\eta>0}$ aux propriétés suivantes :

1. La courbure sectionnelle reste uniformément bornée

$$|K(g_{\varepsilon,\eta})| \leqslant 1 + \frac{C}{\eta}.$$

2. Lorsque ε tend vers 0, le volume de la composante M converge vers le volume hyperbolique.

3. Lorsque ε tend vers 0, le volume de la composante $\ddot{T}^2 \times T^{n-2}$ tend vers 0.

Plus précisément, considérons sur l'intérieur de M la métrique hyperbolique complète de volume fini. Sur le cusp $T^{n-1} \times [0, \infty)$ correspondant à T_2^{n-1}, cette métrique est de la forme $(e^{-t})^2 ds^2 + dt^2$. Déformons-la en une métrique

$$g_{\varepsilon,\eta} = f_{\varepsilon,\eta}(t)^2 ds^2 + dt^2. \tag{14}$$

On impose qu'elle soit hyperbolique au voisinage de $T^{n-1} \times \{0\}$, et euclidienne $\varepsilon^2 ds^2 + dt^2$ sur $T^{n-1} \times [r_{\varepsilon,\eta}, \infty)$. Ici, le paramètre η contrôle la distance sur lequel se produit l'aplatissement. Le paramètre ε contrôle la valeur de cet écrasement.

On pose

$$f_{\varepsilon,\eta}(t) = e^{-r_0 - \rho(\frac{t-r_0}{\eta})(t-r_0)}$$

avec $e^{-r_0} = \varepsilon$ et $\rho : \mathbb{R} \to [0,1]$ est une fonction C^∞ telle que

$$\rho(x) = 1 \quad \text{pour} \quad x \leqslant 0 \tag{15}$$

$$\rho(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \geqslant 1 \tag{16}$$

et toutes les dérivées sont nulles en 0 et 1. On pose également $r_{\varepsilon,\eta} = r_0 + 2\eta$, qui tend vers $+\infty$ quand ε tend vers 0.

Cette métrique donne une métrique $g_{\varepsilon,\eta}$ sur la composante M de N obtenue en identifiant $T^{n-1} \times \{r_{\varepsilon,\eta}\}$ à T_2^{n-1}. Notons que la métrique n'est pour le moment pas complète puisqu'on coupe $(T^{n-1} \times [r_{\varepsilon,\eta}, +\infty), \varepsilon^2 ds^2 + dt^2)$, qui a un volume infini. Cependant, il est clair que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{vol}_{g_{\varepsilon,\eta}}(M) = \mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(M).$$

LEMME 2.2. — *Il existe une constante $C > 0$ telle que sur $M \subset N$, on ait*

$$|K(g_{\varepsilon,\eta})| \leqslant 1 + \frac{C}{\eta}. \tag{17}$$

Preuve du lemme 2.2. — La métrique définie sur $T^{n-1} \times [0, r_{\varepsilon,\eta}]$ est un "warped product" (*cf.* [BO]). La courbure sectionnelle se calcule, d'après la formule (48) de l'appendice A.1, sur un 2-plan Π du plan tangent par

$$K(\Pi) = -\frac{f''_{\varepsilon,\eta}(t)}{f_{\varepsilon,\eta}(t)} s - \frac{f'^2_{\varepsilon,\eta}(t)}{f^2_{\varepsilon,\eta}(t)}(1-s) \tag{18}$$

où $s \in]0,1[$ dépend de la position de Π. On pose $x = \frac{t-r_0}{\eta}$ et on définit la fonction $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $F(x) = x\rho(x)$. Alors

$$\left|\frac{f'^2_{\varepsilon,\eta}(t)}{f^2_{\varepsilon,\eta}(t)}\right| = |x\rho'(x) + \rho(x)|^2 = (F'(x))^2 \tag{19}$$

$$\left|\frac{f''_{\varepsilon,\eta}(t)}{f_{\varepsilon,\eta}(t)}\right| = \left| -\frac{F''(x)}{\eta} + (F'(x))^2 \right|. \tag{20}$$

La courbure sectionnelle reste bornée si les quantités (19) et (20) sont bornées pour un choix approprié de F. Plus précisément, on peut trouver une fonction F (et donc une fonction ρ satisfaisant à (15) et (16) telle que

$$|F'(x)| \leqslant 1 \tag{21}$$

et

$$\left| -\frac{F''(x)}{\eta} + (F'(x))^2 \right| \leqslant 1 + \frac{C}{\eta} \tag{22}$$

pour une constante $C > 0$ d'où

$$|K(g_{\varepsilon,\eta})| \leqslant 1 + \frac{C}{\eta} \tag{23}$$

sur M, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \eta > 0$. □

Remarque. — L'inégalité (22) est optimale. Si la métrique sur le cœur compact de M est hyperbolique à courbure -1, on ne peut pas obtenir, sans renormalisation, de métrique aplatie sur M à courbure pincée par -1 et 1.

Fin de la preuve de la proposition 2.1. — La composante $\ddot{T}^2 \times T^{n-2}$ est munie d'une famille de métriques $(g_{\varepsilon,\eta})$ définies comme suit. On considère sur le tore moins deux disques une métrique hyperbolique complète de volume fini. On la déforme sur le cusp $S^1 \times [0, +\infty)$ correspondant T_2^{n-1} en une métrique euclidienne. Précisément, soit

$$h_{\varepsilon,\eta} = f_{\varepsilon,\eta}(t)^2 dx^2 + dt^2 \tag{24}$$

l'expression de cette métrique, telle que $h_{\varepsilon,\eta}$ soit hyperbolique au voisinage de $S^1 \times \{0\}$, et vaut $\varepsilon^2 dx^2 + dt^2$ pour $t > r_{\varepsilon,\eta}$.

On pose alors sur $\ddot{T}^2 \times T^{n-2}$

$$g_{\varepsilon,\eta} = h_{\varepsilon,\eta} + \varepsilon^2 ds'^2 \tag{25}$$

où ds'^2 est une métrique euclidienne sur T^{n-2} qu'on spécifiera plus loin.

Le bord $T_2^{n-1} = S^1 \times \{r_{\varepsilon,\eta}\} \times T^{n-2}$ est identifié par id au bord $T^{n-1} \times \{r_{\varepsilon,\eta}\}$ de M. Rappelons que $r_{\varepsilon,\eta} = r_0 + 2\eta$ et que pour les points de M correspondant à $t \in [r_0 + \eta, r_0 + 2\eta]$, la métrique vaut $\varepsilon^2 ds^2 + dt^2$, pour une métrique euclidienne ds^2 sur T^{n-1}.

On définit ensuite sur $T^{n-1} \times [r_0 + 2\eta, r_0 + 3\eta]$ une métrique de la forme $s_t + dt^2$, où s_t est une métrique euclidienne sur $T^{n-1} \times \{t\}$ telle que $s_{r_0+2\eta} = ds^2$ et $s_{r_0+3\eta} = dx^2 + ds'^2$.

On peut choisir la métrique de telle manière que les recollements du bord $T^{n-1} \times r_{\varepsilon,\eta}$ de M à $T^{n-1} \times \{r_0 + 2\eta\}$ et du bord $T^{n-1} \times \{r_0 + 3\eta\}$ à $T_2^{n-1} \times \{r_0 + \eta\}$ de $\ddot{T}^2 \times T^{n-2}$ soient lisses. On a alors défini une métrique riemannienne sur N.

LEMME 2.3. — *La courbure sectionnelle de la métrique $\varepsilon^2 s_t + dt^2$ sur $T^{n-1} \times [r_0 + 2\eta, r_0 + 3\eta]$ ne dépend pas de ε.*

Preuve. — Voir l'appendice A.2.

On peut donc choisir η assez grand pour que la courbure sectionnelle soit proche de 0 sur $T^{n-1} \times [r_0 + 2\eta, r_0 + 3\eta]$ puis choisir ε (dont la vocation est de tendre vers 0) pour recoller les métriques de $T^{n-1} \times \{r_0 + 3\eta\}$ et $S^1 \times \{r_{\varepsilon,\eta}\} \times T^{n-2}$.

La courbure sectionnelle de la métrique $g_{\varepsilon,\eta}$ sur $\ddot{T}^2 \times T^{n-2}$ est donnée par la formule (49) de l'appendice A.1, pour un 2-plan Π :

$$|K(\Pi)| \leqslant \left|\frac{f''(t)}{f(t)}\right| \tag{26}$$

d' où on a encore

$$|K(g_{\varepsilon,\eta)}| \leqslant 1 + \frac{C}{\eta} \tag{27}$$

sur $\ddot{T}^2 \times T^{n-2}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \eta > 0$.

Il est clair que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{vol}_{g_{\varepsilon,\eta}}(\ddot{T}^2 \times T^{n-2}) = 0. \tag{28}$$

Après recollement, les métriques $g_{\varepsilon,\eta}$ sont bien définies sur N et on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{vol}_{g_{\varepsilon,\eta}}(N) = \mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(M). \tag{29}$$

On rappelle maintenant que si N est une variété de dimension n, g une métrique riemannienne sur N, et λ un réel positif, alors

$$\mathrm{vol}_{\lambda^2 g}(N) = \lambda^n \,\mathrm{vol}_g(N) \tag{30}$$

$$K(N, \lambda^2 g) = \frac{1}{\lambda^2} K(N, g). \tag{31}$$

Donc la métrique $(1 + \frac{C}{\eta})^{\frac{1}{2}} g_{\varepsilon,\eta}$ est à courbure bornée par -1 et 1 d'où

$$\mathrm{minvol}(N) \leqslant (1 + \frac{C}{\eta})^{n/2} \,\mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(M). \tag{32}$$

Par passage à la limite quand η tend vers $+\infty$, on obtient

$$\mathrm{minvol}(N) \leqslant \mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(M). \qquad \square$$

3. Sur le volume des sous-variétés hyperboliques.

On démontre dans ce chapitre le théorème 1.4. On considère une variété fermée N, topologiquement différente de Y, qui domine M et qui contient X. La preuve du théorème consiste à montrer d'une part que

$$\text{minvol}(N) > \text{vol}_{g_0}(Y) \tag{33}$$

et d'autre part que

$$\text{vol}_{\text{hyp}}(X) \geqslant \text{minvol}(N). \tag{34}$$

On s'est donné une sous-variété ouverte $X \subset M$, hyperbolique complète à volume fini. On suppose que $\partial\overline{X} = \cup_{i=1}^{p} T_i^{n-1}$ et que chaque composante connexe de $M \backslash X$ est homéomorphe à $D^2 \times T^{n-2}$.

Plus précisément, on définit pour $i = 1, \ldots, p$,

$$\phi_i : \partial(D_i^2 \times T^{n-2}) = S^1 \times T^{n-2} \to T_i^{n-1} \tag{35}$$

les difféomorphismes tels que

$$M = X \bigcup_{\phi_i} \left(\coprod_{i=1}^{p} D_i^2 \times T^{n-2} \right). \tag{36}$$

On pose alors, en convenant encore que $\dot{T}^2$ est le tore moins un disque,

$$N = X \bigcup_{\phi_i} \left(\coprod_{i=1}^{p} \dot{T}_i^2 \times T^{n-2} \right). \tag{37}$$

Le groupe fondamental de cette variété contient Z^{n-1}, donc N ne peut pas être homéomorphe à la variété hyperbolique fermée Y. De plus il existe une application $f : N \to M$, de degré 1, qui pince $\dot{T}_i^2 \times \{*\}$ sur $D_i^2 \times \{*\}$ et telle que

$$f(\partial \dot{T}_i^2 \times \{*\}) = \partial D_i^2 \times \{*\}. \tag{38}$$

Comme par hypothèse, M domine Y par une application de degré 1, on obtient une application de degré 1 de N sur Y. Le théorème de rigidité 1.2 montre alors que

$$\text{minvol}(N) > \text{vol}_{g_0}(Y). \tag{39}$$

Maintenant, on définit une famille de métriques riemanniennes $(g_{\varepsilon,\eta})_{\varepsilon>0,\eta>0}$ comme suit.

On considère sur X la métrique hyperbolique complète. Sur chaque cusp, cette métrique est de la forme

$$(e^{-t})^2 ds_i^2 + dt^2 \tag{40}$$

où ds_i^2 est une métrique euclidienne sur le tore T_i^{n-1}. Pour $e^{-r} \leqslant \varepsilon$, on déforme cette métrique sur un tore cylindrique $T_i^{n-1} \times [r, r + \eta]$ en une métrique euclidienne de la forme

$$\varepsilon^2 ds_i^2 + dt^2. \tag{41}$$

Comme dans le chapitre précédent (*cf.* prop. 2.1), la courbure sectionnelle est indépendante de ε et proche de $[-1, 1]$ quand η grandit.

Sur $T^{n-2} \times \dot{T}_i^2$ on considère des métriques produits

$$\varepsilon^2 dl_i^2 + h_{\varepsilon,\eta} \tag{42}$$

où dl_i^2 est une métrique euclidienne sur T^{n-2} et $h_{\varepsilon,\eta}$ est définie comme suit.

On considère une métrique hyperbolique complète sur le tore moins un disque. Cette métrique est de la forme

$$(e^{-t})^2 dx^2 + dt^2 \tag{43}$$

sur le cusp $S^1 \times [0, \infty)$. On la déforme sur $S^1 \times [r, r + \eta]$, pour $e^{-r} \leqslant \varepsilon$, en une métrique euclidienne de la forme

$$\varepsilon^2 dx^2 + dt^2. \tag{44}$$

La métrique ainsi définie sur $T^{n-2} \times S^1 \times [r, r + \eta]$ a les bonnes propriétés de courbure. On déforme maintenant la métrique $\varepsilon^2(dl_i^2 + dx^2) + dt^2$ sur $T^{n-2} \times S^1 \times [r + \eta, r + 2\eta]$ pour que la métrique obtenue sur $T^{n-2} \times S^1 \times \{r + 2\eta\}$ soit identifiée par ϕ_i à la métrique de $T_i^{n-1} \times \{r + \eta\}$. La courbure sectionnelle dépend de η comme précédemment.

Les métriques $g_{\varepsilon,\eta}$ sont alors bien définies sur N. Par construction, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{vol}_{g_{\varepsilon,\eta}}(N) = \mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(X) \tag{45}$$

et

$$\lim_{\eta \to \infty} \left| K_{g_{\varepsilon,\eta}} \right| \leqslant 1. \tag{46}$$

En reprenant (29)–(32), on obtient

$$\mathrm{minvol}(N) \leqslant \mathrm{vol}_{\mathrm{hyp}}(X).$$ □

On démontre maintenant le corollaire 1.5.

Preuve. — Observons que $M \backslash X$ est irréductible. En effet, soit S^2 une sphère plongée dans $M \backslash X$. Puisque M est hyperbolique, M est irréductible donc S^2 borde une boule B^3 dans M. Cette boule n'intersecte pas X

puisque X n'intersecte pas S^2 et n'est pas incluse dans B^3. Donc S^2 borde B^3 dans $M\backslash X$.

Par ailleurs, les tores de $\partial\overline{X}$ sont compressibles dans chaque composante connexe de $M\backslash X$. En effet, M est hyperbolique donc atoroïdale et les tores de $\partial\overline{X}$ sont compressibles dans M. Et comme $\partial\overline{X}$ est le bord d'une variété hyperbolique, $\partial\overline{X}$ est incompressible dans $\overline{X}$.

La variété $M\backslash X$ est donc irréductible, bordée par des tores compressibles : c'est donc une union de tores solides ([Jaco]). On applique alors le théorème 1.4 en prenant pour variété hyperbolique Y la variété M elle-même.

Appendice : courbure sectionnelle.

A.1. "warped product".

On rappelle la définition du "warped product" (*cf.* [BO], section 7). Il s'agit d'une structure de produit riemannien altéré. Soit B et F des variétés riemanniennes et $f > 0$ une fonction différentiable sur B. Considérons le produit $B \times F$ et ses projections $\pi : B \times F \to B$ et $\tau : B \times F \to F$. Le produit altéré $M = B \times_f F$ est la variété $B \times F$ munie d'une structure riemannienne telle que

$$\|x\|^2 = \|\pi_*(x)\|^2 + f^2(\pi m)\|\tau_*(x)\|^2 \tag{47}$$

pour tout vecteur $x \in T_m M$.

On note $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire sur F et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit sur M (et sur B puisqu'il coïncide). Soit L la courbure sectionnelle de la métrique $(\cdot,\cdot)$ sur F et K la courbure sectionnelle de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur M.

Soit Π un 2-plan tangent à M en $m = (b,p)$ et $x+v$, $y+w$ une base orthonormée pour Π, où x et y sont tangents à B et v, w, tangents à F. La courbure sectionnelle vaut

$$\begin{aligned} K(\Pi) = {} & K(x,y)\|x\wedge y\|^2 \\ & - f(b)\left\{(w,w)\nabla^2 f(x,x) - 2(v,w)\nabla^2 f(x,y) + (v,v)\nabla^2 f(y,y)\right\} \\ & + f^2(b)\left[L(v,w) - \|\mathrm{grad}\ f(b)\|^2\right](v\wedge w, v\wedge w). \end{aligned}$$

Cas particuliers.

1. Soit $M = R \times_f F$ où F est munie d'une métrique plate ds^2. La métrique sur M est de la forme $dt^2 + f^2(t)ds^2$. Soit Π un 2-plan tangent à M en $m = (t,p)$, engendré par $x+v$, w. Alors

$$K(\Pi) = -\frac{f''(t)}{f(t)}\|x\|^2 - \frac{f'^2(t)}{f^2(t)}(1-\|x\|^2) \tag{48}$$

où $\|x\| \in]0,1[$.

2. Soit $M = (R \times F) \times_f R$ où F est munie d'une métrique plate ds^2 et $f : R \times F \to R$ ne dépend que de la première coordonnée, $f(t,p) = f(t)$. La métrique sur M est de la forme $dt^2 + ds^2 + f^2(t)dx^2$. Soit Π un 2-plan tangent à M en $m = (t,p)$. La courbure est bornée par

$$|K(\Pi)| \leqslant \left|\frac{f''(t)}{f(t)}\right|. \tag{49}$$

A.2. Métrique effondrée.

Lemme. — *Soit (g^ε) une famille de métriques riemanniennes sur $T^{n-1} \times [0,1]$ définies par*

$$g^\varepsilon = \varepsilon^2 h_r + dr^2 \tag{50}$$

où h_r est une métrique plate sur $T^{n-1} \times \{r\}$, $\forall r \in [0,1]$. Alors la courbure sectionnelle de g^ε ne dépend pas de ε.

Preuve. — Considérons des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_{n-1}, r)$ telles que la métrique g^ε s'écrive

$$(g^\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} g^\varepsilon_{11} & \cdots & g^\varepsilon_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g^\varepsilon_{n-1,1} & & g^\varepsilon_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{51}$$

En convenant que $g = g^1$, les coefficients g^ε_{ij} ne dépendent que de r et $g^\varepsilon_{ij} = \varepsilon^2 g_{ij}$. En posant $\Delta^\varepsilon = \det(g^\varepsilon_{ij})$, les coefficients inverses s'écrivent

$$(g^{\varepsilon,ij}) = \begin{pmatrix} \dfrac{a^\varepsilon_{11}}{\Delta^\varepsilon} & \cdots & \dfrac{a^\varepsilon_{1,n-1}}{\Delta^\varepsilon} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{a^\varepsilon_{n-1,1}}{\Delta^\varepsilon} & \cdots & \dfrac{a^\varepsilon_{n-1,n-1}}{\Delta^\varepsilon} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{52}$$

$$
(53) \qquad = \begin{pmatrix} \frac{g^{11}}{\varepsilon^2} & \dots & \frac{g^{1,n-1}}{\varepsilon^2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{g^{n-1,1}}{\varepsilon^2} & \dots & \frac{g^{n-1,n-1}}{\varepsilon^2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Les symboles de Christoffel pour les coordonnées $(x_1, \dots, x_{n-1}, r)$ se calculent par la formule

$$
(54) \qquad \Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^{n} \frac{g^{lk}}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)
$$

avec la convention $x_n = r$.

Étudions la variance de ces symboles par rapport à ε. Cela donne :

– pour $k < n$,

$$
(55) \qquad \Gamma_{ij}^{k,\varepsilon} = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{g^{\varepsilon,lk}}{2} \left(\frac{\partial g_{il}^\varepsilon}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}^\varepsilon}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}^\varepsilon}{\partial x^l} \right) + \frac{g^{\varepsilon,nk}}{2} \left(\frac{\partial g_{in}^\varepsilon}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jn}^\varepsilon}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}^\varepsilon}{\partial r} \right).
$$

Le premier membre de la somme ne dépend pas de ε, le second est nul car $g^{\varepsilon,nk} = 0$. De plus, si $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$, toutes les dérivées sont nulles. Donc $\Gamma_{ij}^{k,\varepsilon} = \Gamma_{ij}^k$ et $\Gamma_{ij}^k = 0$ si $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$.

– pour $k = n$,

$$
(56) \qquad \Gamma_{ij}^{n,\varepsilon} = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{g^{\varepsilon,ln}}{2} \left(\frac{\partial g_{il}^\varepsilon}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}^\varepsilon}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}^\varepsilon}{\partial x^l} \right) + \frac{g^{\varepsilon,nn}}{2} \left(\frac{\partial g_{in}^\varepsilon}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jn}^\varepsilon}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}^\varepsilon}{\partial r} \right).
$$

Le premier facteur est nul car $g^{\varepsilon,ln} = 0$. Il reste

$$
(57) \qquad \Gamma_{ij}^{n,\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{in}^\varepsilon}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jn}^\varepsilon}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}^\varepsilon}{\partial r} \right).
$$

Distinguons 3 cas :

1. Si $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ alors $g_{in}^\varepsilon = g_{jn}^\varepsilon = 0$, $g_{ij}^\varepsilon = \varepsilon^2 g_{ij}$ d'où $\Gamma_{ij}^{n,\varepsilon} = \varepsilon^2 \Gamma_{ij}^n$.

2. Si l'un seulement des indices i ou j vaut n, le facteur (57) est nul car les coefficients ne dépendent que de r.

3. Si $i = j = n$, alors $\Gamma_{ij}^{n,\varepsilon} = \frac{\partial g_{nn}^\varepsilon}{\partial r} = 0$.

Résumons-nous :

$$k<n \implies \Gamma_{ij}^{k,\varepsilon}=\Gamma_{ij}^{k} \quad (=0 \text{ si } i,j\in\{1,\dots,n-1\}) \tag{58}$$

$$k=n \implies \Gamma_{ij}^{n,\varepsilon}=\varepsilon^2\Gamma_{ij}^{n} \quad (=0 \text{ si } i \text{ où } j=n). \tag{59}$$

Rappelons qu'on note

$$R_{jkl}^{i}=\frac{\partial\Gamma_{jl}^{i}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma_{jk}^{i}}{\partial x^l}+\sum_{\mu=1}^{n}\left(\Gamma_{jl}^{\mu}\Gamma_{\mu k}^{i}-\Gamma_{jk}^{\mu}\Gamma_{\mu l}^{i}\right) \tag{60}$$

et

$$R_{ijkl}=g\left(R\Big(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\Big)\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\sum_{q=1}^{n}g_{qi}R_{jkl}^{q} \tag{61}$$

où R est le tenseur de courbure associé à la métrique g. On a les formules correspondantes pour g^ε et R^ε.

Nous aurons besoin des termes de la forme R_{njn}^{i}, $i,j\in\{1,\dots,n-1\}$

$$R_{njn}^{i,\varepsilon}=\frac{\partial\Gamma_{nn}^{i,\varepsilon}}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma_{nj}^{i,\varepsilon}}{\partial x^l}+\sum_{\mu=1}^{n}(\Gamma_{nn}^{\mu,\varepsilon}\Gamma_{\mu j}^{i,\varepsilon}-\Gamma_{nj}^{\mu,\varepsilon}\Gamma_{\mu n}^{i,\varepsilon}). \tag{62}$$

Ce terme ne dépend pas de ε car pour $\mu=n$, $\Gamma_{nn}^{n,\varepsilon}=0$, $\Gamma_{nj}^{n,\varepsilon}=0$.

Considérons aussi les R_{jkl}^{i} pour $q<n$ et $i,j,k,l\in\{1,\dots,n-1\}$. Alors

$$R_{jkl}^{q,\varepsilon}=\frac{\partial\Gamma_{jl}^{q,\varepsilon}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma_{jk}^{q,\varepsilon}}{\partial x^l}+\sum_{\mu=1}^{n}(\Gamma_{jl}^{\mu,\varepsilon}\Gamma_{\mu k}^{q,\varepsilon}-\Gamma_{jk}^{\mu,\varepsilon}\Gamma_{\mu l}^{q,\varepsilon}). \tag{63}$$

Les dérivées sont nulles (les coefficients ne dépendent que de r) et pour $\mu<n$, tous les termes de droite sont nuls. Il reste

$$R_{jkl}^{q,\varepsilon}=\Gamma_{jl}^{n,\varepsilon}\Gamma_{nk}^{q,\varepsilon}-\Gamma_{jk}^{n,\varepsilon}\Gamma_{nl}^{q,\varepsilon}=\varepsilon^2R_{jkl}^{q}. \tag{64}$$

On peut enfin calculer la courbure sectionnelle. Soit $\left(U_1,\dots,U_{n-1},\frac{\partial}{\partial r}\right)$, une base g-orthonormée. Alors $\left(\frac{U_1}{\varepsilon},\dots,\frac{U_{n-1}}{\varepsilon},\frac{\partial}{\partial r}\right)$est g^ε-orthonormée.

Considérons un 2-plan $(\frac{U_i}{\varepsilon},\frac{\partial}{\partial r})$ avec $\frac{U_i}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{n-1}a_j\frac{\partial}{\partial x^j}$. Alors la courbure sectionnelle de ce 2-plan vaut

$$K\left(\frac{U_i}{\varepsilon},\frac{\partial}{\partial r}\right)=g^\varepsilon\left(R^\varepsilon\Big(\frac{U_i}{\varepsilon},\frac{\partial}{\partial r}\Big)\frac{\partial}{\partial r},\frac{U_i}{\varepsilon}\right) \tag{65}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j,k}^{n-1}a_ja_k\; g^\varepsilon\left(R^\varepsilon\Big(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial r}\Big)\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial x^k}\right) \tag{66}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j,k}^{n-1} a_j a_k \; R^{\varepsilon}_{knjn} \tag{67}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j,k}^{n-1} a_j a_k \; \sum_{q=1}^{n-1} g^{\varepsilon}_{qk} R^{q,\varepsilon}_{njn} \tag{68}$$

$$= \sum_{j,k}^{n-1} a_j a_k \; \sum_{q=1}^{n-1} g_{qk} R^{q}_{njn} \tag{69}$$

$$= K\Big(U_i, \frac{\partial}{\partial r}\Big) \tag{70}$$

où (69) découle de (62).

Considérons maintenant un 2-plan $(\frac{U_i}{\varepsilon}, \frac{U_j}{\varepsilon})$ avec

$$\frac{U_i}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{et} \quad \frac{U_j}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{n-1} b_j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

On a

$$K\left(\frac{U_i}{\varepsilon}, \frac{U_j}{\varepsilon}\right) = g^{\varepsilon}\left(R^{\varepsilon}\Big(\frac{U_i}{\varepsilon}, \frac{U_j}{\varepsilon}\Big)\frac{U_j}{\varepsilon}, \frac{U_i}{\varepsilon}\right) \tag{71}$$

$$= \sum_{kijl}^{n-1} \frac{a_k a_i b_j b_l}{\varepsilon^4} \; g^{\varepsilon}\left(R^{\varepsilon}\Big(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\Big)\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \tag{72}$$

$$= \sum_{kijl}^{n-1} \frac{a_k a_i b_j b_l}{\varepsilon^4} \; R^{\varepsilon}_{ijkl} \tag{73}$$

$$= \sum_{kijl}^{n-1} \frac{a_k a_i b_j b_l}{\varepsilon^4} \; \sum_{q=1}^{n-1} g^{\varepsilon}_{qi} R^{q,\varepsilon}_{jkl} \tag{75}$$

$$= \sum_{kijl}^{n-1} a_k a_i b_j b_l \; \sum_{q=1}^{n-1} g_{qi} \; R^{q}_{jkl} \tag{76}$$

$$= K\,(U_i, U_j) \tag{76}$$

où (75) découle de (64). □

BIBLIOGRAPHIE

[Bes] L. BESSIÈRES, Un théorème de rigidité différentielle, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 73, juin (1998).

[BCG] G. BESSON, G. COURTOIS et S. GALLOT, Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative, GAFA, vol. 5 (5), octobre 1995.

[BO] R. L. BISHOP, B. O'NEILL, Manifolds of negative curvature, Trans. of the A.M.S., vol. 145, november (1969).

[CG] J. CHEEGER, M. GROMOV, Collapsing riemannian manifolds while keeping their curvature bounded I, J. Differential geometry, 23 (1986), 309–346.

[Gro] M. GROMOV, Volume and bounded cohomology, IHES, 56 (1981).

[Jaco] W. JACO, Lectures on 3-manifolds topology, Amer. Math. Soc., 43 (1980).

[Thu] W. THURSTON, The geometry and topology of 3-manifolds, Princeton University Press, Princeton, 1978.

Manuscrit reçu le 10 juin 1999,
accepté le 28 juillet 1999.

Laurent BESSIÈRES,
Université de Grenoble I
Institut Fourier
38042 St Martin d'Hères Cedex (France).
lbessier@mozart.ujf-grenoble.fr