ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARCEL BRELOT

Étude comparée des deux types d'effilement

Annales de l'institut Fourier, tome 15, nº 1 (1965), p. 155-168

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_1_155_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 1 (1965), 155-168.

ÉTUDE COMPARÉE DES DEUX TYPES D'EFFILEMENT

par Marcel BRELOT

I. Introduction.

1. La notion initiale d'effilement [3], devenue, avec le langage de la topologie fine de Cartan, un outil usuel de la théorie classique du potentiel, s'adapte, comme on sait, aux axiomatiques récentes et s'interprète en théorie probabiliste. Aussi ai-je été amené [6] à en examiner les bases axiomatiques intrinsèques qui s'introduisent par exemple dans la recherche des topologies rendant continues les fonctions d'une famille donnée sur un ensemble ou un espace topologique.

D'autre part on a aussi défini, et c'est la base de la thèse Naïm en théorie classique [12], une notion générale d'effilement à la frontière de Martin; elle a permis d'approfondir l'allure à cette frontière des fonctions harmoniques et surharmoniques par l'expression des résultats définitifs de Naïm-Doob [12], [8]. Il est apparu d'ailleurs qu'il s'agissait d'une notion relative à certains éléments extrémaux d'un compact convexe d'un espace vectoriel, et plus précisément relative aux fonctions harmoniques > 0 « minimales », qui, considérées à un facteur près, apparaissent comme la frontière utile, la partie « minimale » de la frontière de Martin. Cet aspect qui a servi de base pour l'extension par Gowrisankaran [9] des résultats précédents au cadre axiomatique moderne peut aussi être présenté d'une façon d'abord abstraite et très générale et les développements ont aussi une interprétation probabiliste.

Or ces deux notions d'effilement qui donnent lieu à des résultats souvent très similaires paraissent tout de même assez différentes ainsi que les démonstrations correspondantes.

Aussi convient-il d'en approfondir la comparaison. Je me propose de le faire ici des deux manières suivantes, dans le cadre de la théorie pure du potentiel. D'abord je montrerai que dans le cas classique puis dans des hypothèses axiomatiques assez larges, l'effilement dit « minimal », à la frontière peut être interprété comme un effilement « interne » du 1er type, grâce à un choix convenable de topologies et de fonctions et cela permet de faire profiter l'effilement à la frontière de la théorie générale de l'effilement interne.

Puis, je considèrerai dans le cas classique, et ensuite dans des cas axiomatiques généraux, un domaine relativement compact Ω_0 dans l'espace de base Ω et un ensemble $e \subset \Omega_0$ effilé au sens interne dans Ω en des points de la frontière de Ω_0. Si cette frontière est assez régulière pour être identifiable à la frontière de Martin (c.à.d. $\bar{\Omega}_0$ identifiable à l'espace de Martin de Ω_0), cela implique-t-il l'effilement minimal aux mêmes points (la réciproque est trivialement fausse)? Je rappellerai que cela est vrai dans le cas classique de la boule de R^n ($n \geqslant 3$) mais non pour $n = 2$ de sorte qu'il n'y a pas d'extension axiomatique. Mais je montrerai qu'une implication « statistique » est toujours vraie et s'applique à une frontière quelconque grâce à une correspondance convenable avec la frontière de Martin et il y a extension axiomatique.(1)

Cela dérivera d'une étude préliminaire caractérisant l'effilement « statistique » des deux types, c.à.d. p.p. en un sens convenable aux points d'un ensemble donné.

II. Effilement interne et effilement minimal (axiomatiques).

2. Je rappelle l'idée axiomatique générale d'effilement et de topologie fine que j'ai publiée récemment [6].

Soit Φ une famille de fonctions réelles $\geqslant 0$ sur ensemble Ω. On suppose qu'elles forment un cône convexe et on la complète par la fonction $+\infty$. On cherche à les rendre continues par une topologie convenable sur Ω.

On peut partir d'une topologie $\mathscr{T}_1$ (de base) pour laquelle elles sont s.c.i. (ce pourra être la moins fine); puis on appellera topologie fine $\mathscr{T}$ la moins fine des topologies plus fines que $\mathscr{T}_1$ et rendant toutes les fonctions de Φ continues. Les complémentaires des voisinages « fins » de x_0 sont les ensembles *e effilés* en $x_0 \notin e$ caractérisés aussi

(1) Cette seconde partie de la conférence a déjà été partiellement indiquée dans une communication au Congrès de Gènes (Oct. 63) de l'Unione mat. italiana et dans une conférence du Séminaire de Théorie du Potentiel (Paris, Janv. 64). Elle est développée dans un mémoire à paraître dans les Anaïs da Academia brasileira de Ciencias.

comme suit : $x_0 \notin \bar{e}$ ou bien il existe $u \in \Phi$ telle que

$$u(x_0) < \liminf_{x \in e,\ x \to x_0} u(x) \qquad (\text{selon } \mathcal{T}_1).$$

Si R_φ^e désigne $\inf u$, $u \in \Phi$ complétée, $u \geqslant \varphi$ sur e (φ fonction quelc. $\geqslant 0$), un critère d'effilement est $\inf_\sigma R_1^{e \cap \sigma}(x_0) < 1$ (σ voisinage variable de x_0). Il est important de caractériser le cas où cet $\inf_\sigma$ est 0 ; c'est l'effilement *fort*. On introduit aussi l'ineffilement fort par la condition

$$\inf_\sigma(\sup_\delta R_1^{e \cap \sigma \cap \complement \delta}(x_0)) \geqslant 1 \qquad (\sigma, \delta \text{ voisinages de } x_0).$$

L'intérêt de ces notions apparaît dans les théorèmes suivants, inspirés des théorèmes classiques et dont l'importance justifie le rappel. Considérons une application f d'un ensemble $E \subset \Omega$ non effilé en $x_0 \notin E$, dans un espace Ω' dont les voisinages de chaque point admettent une base dénombrable.

a) Supposons la sous-additivité dénombrable des réduites de 1, $R_1^e(x_0)$ par rapport à e et que l'effilement soit toujours fort en x_0.

Alors si f a une limite *fine* l en x_0, $f \underset{\mathcal{T}_1}{\to} l$ sur un voisinage fin convenable.

b) Supposons que x_0 admette une base dénombrable de voisinages et que l'ineffilement en x_0 soit toujours fort.

Alors toute valeur d'adhérence fine de f en x_0 est limite$_{\mathcal{T}_1}$ selon un ensemble convenable non effilé en x_0.

Supposons encore que, ayant choisi x_0 et $\Phi \geqslant 0$, $R_\varphi^e(x_0)$ possède la sous-additivité dénombrable en e et, en appelant poids de e, la quantité $R_\varphi^e(x_0)$, que pour tout E finement ouvert le poids de $\omega - E$ soit de inf. nul pour les ouverts $\omega \supset E$.

Alors toute application finement continue dans un espace à base dénombrable admet une restriction $\mathcal{T}_1$-continue sur une partie Ω_0 telle que $\Omega - \Omega_0$ soit de poids arbitrairement petit.

Cette théorie s'applique au potentiel classique (Ω espace de Green, Φ formée des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$) et même à diverses extensions axiomatiques, où l'on disposera donc des théorèmes précédents.

3. Après cette introduction de l'effilement « interne », examinons la notion bien différente d'effilement « minimal abstrait » qui généralise l'effilement à la frontière de Martin de la thèse Naïm [12] et suivons l'introduction donnée au début de la thèse Gowrisankaran [9].

On considère sur un ensemble non vide Ω sans topologie deux familles de fonctions réelles $\geqslant 0$, l'une, U, de fonctions (dites harmoniques) *finies*, formant un cône,
l'autre, P, de fonctions (dites potentiels) finis ou non, formant un cône *convexe*.

On convient que $0.\infty = 0$. U et P contiennent la fonction 0.

Axiome fondamental. — Soit Σ l'ensemble des $u + p$, $u \in \mathrm{U}$, $p \in \mathrm{P}$. On admet que

$$\mathrm{A}_1) \qquad v_1 \in \sum \text{ et } v_2 \in \sum \Rightarrow \inf(v_1, v_2) \in \sum$$

$$\mathrm{A}_2) \qquad u_1 + p_1 \leqslant u_2 + p_2 \Rightarrow u_1 \leqslant u_2$$

On supposera qu'il n'existe pas de $p \equiv +\infty$, sinon tout $u = 0$ et tout serait trivial. Toute décomposition $u + p$ est unique.

On dit que $u \in \mathrm{U}$ est *minimale* si

$$u_1 \in \mathrm{U} \text{ et } u_1 \leqslant u \Rightarrow u_1 = \alpha u \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$$

Remarque. — Supposons U convexe et considérons l'espace vectoriel des différences de deux u. Ordonnons le selon l'ordre naturel et supposons que U soit le cône positif correspondant. Alors dire que $u \not\equiv 0$ est minimal signifie que λu décrit une génératrice extrémale de U. Ces circonstances auront lieu dans les applications en vue.

Même notion de réduite $\mathrm{R}_f^{\mathrm{E}} = \inf\limits_{v \in \Sigma,\, v \geqslant f \text{ sur E}} v$ (f fonction $\geqslant 0$ majorée par un $v \in \Sigma$).

Effilement de E relatif à h minimale $\not\equiv 0$, $\in$U, *défini* par $\mathrm{R}_h^{\mathrm{E}} \not\equiv h$, ce qui équivaut à l'existence d'un potentiel majorant h sur E.

Alors les complémentaires des ensembles effilés relativement à h forment un *filtre* $\mathscr{F}_h$. On en déduit déjà que si $v \in \Sigma$, v/h pris sur l'ensemble où il a un sens a une limite selon $\mathscr{F}_h$ qui vaut inf v/h nécessairement finie.

On remarque que $\mathscr{F}_{\lambda h} \equiv \mathscr{F}_h$ quel que soit $\lambda > 0$ d'où l'introduction de la famille $\bar{h}$ des λh et du filtre correspondant noté $\mathscr{F}_{\bar{h}}$. L'ensemble des $\bar{h}$ sera dit *frontière minimale abstraite.*

Il est intéressant de l'interpréter comme une vraie frontière et les limites selon $\mathscr{F}_{\bar{h}}$ comme une limite au point $\bar{h}$ dans une topologie convenable sur l'ensemble $\Omega \cup$(ens. des $\bar{h}$) qui sera l'espace $\check{\Omega}$.

On part d'une topologie sur Ω pour laquelle les v sont s.c.i. et on introduit selon la 1ère théorie la topologie fine correspondante dans Ω.

On peut alors montrer qu'il existe sur $\Omega \cup \{$ens. des $\bar{h}\}$ une topologie dite *fine minimale*, la moins fine telle:

1) elle engendre sur Ω la topologie fine précédente,

2) les voisinages de tout $\bar{h}$ coupent Ω selon les ensembles de $\mathscr{F}_{\bar{h}}$.

Elle définit l'espace dit « minimal » $\check{\Omega}$.

Si la topologie de base sur Ω est séparée et si pour tout $x \in \Omega$, il existe un potentiel > 0 en x, l'espace $\check{\Omega}$ est séparé. Ainsi la frontière minimale abstraite devient la frontière de Ω dans $\check{\Omega}$ et les limites selon $\mathscr{F}_{\bar{h}}$ sont les limites selon la topologie fine minimale qui prolonge la topologie fine de Ω.

Je rappelle que l'intérêt de ces limites fines minimales est mis en évidence par les résultats de Naïm-Doob [12], [8] dans le cas classique (où les u et p sont les fonctions harmoniques $\geqslant 0$ et potentiels d'un espace de Green) et par l'extension à la théorie axiomatique des fonctions harmoniques que vient d'en faire Gowrisankaran [9].

III. Interprétation de l'effilement minimal comme effilement interne.

4. Considérons d'abord le cas classique de l'espace de Green Ω et l'espace de Martin $\hat{\Omega} = \Omega \cup \Delta$; la fonction de Green normalisée $K(x, y) = G(x, y)/G(x, y_0)$ se prolonge selon $K(X, y) (X \in \Delta)$, minimale pour $X \in \Delta_1 \subset \Delta$; Δ_1 est identifiable à l'ensemble des classes de fonctions minimales > 0.

On peut voir dans la thèse Naïm [12] que l'effilement de $E \subset \Omega$ en $X \in \Delta_1$, à notre sens minimal équivaut à X non adhérent à E (dans $\hat{\Omega}$) sinon à l'existence d'une mesure $\mu \geqslant 0$ sur Ω telle que

$$\int K(X, y)\, d\mu(y) < \liminf_{\substack{\text{selon } \hat{\Omega} \\ x \in E, x \to X}} \int K(x, y)\, d\mu(y)$$

On peut en déduire que *la topologie fine minimale* sur $\Omega \cup \Delta_1$ *est exactement la topologie fine* associée à cet ensemble *pourvu d'abord de la topologie Martin* et aux fonctions du type:

$$\int K(x, y)\, d\mu(y) \qquad x \in \Omega \cup \Delta_1, \qquad \mu \text{ mesure} \geqslant 0 \text{ sur } \Omega$$

Il est équivalent de considérer comme fonctions les *quotients* par G_{y_0} des potentiels de Green $\geqslant 0$ sur Ω, quotients prolongés par s.c.i. sur Δ_1 et en y_0. On peut encore y remplacer ces potentiels par toutes les fonctions surharmoniques $\geqslant 0$.

On trouvera dans la thèse Naïm une interprétation équivalente en utilisant des potentiels de noyau, non pas $K(x, y)$, mais $\Theta\ (x, y)$ obtenu par prolongement convenable de

$$\frac{G(x, y)}{G(x, y_0)G(y, y_0)}.$$

Passons à des *cas axiomatiques généraux.*

Je me place dans l'axiomatique que j'ai développée [4], [5] d'abord seulement avec les axiomes 1, 2, 3 et l'existence d'un potentiel > 0. Cela suffit déjà pour appliquer la théorie de l'effilement minimal abstrait en prenant pour u et p les fonctions harmoniques $\geqslant 0$ et les potentiels, puis comme topologie celle de l'espace fondamental Ω d'où un espace $\check{\Omega}$.

Ajoutons l'existence d'une base dénombrable d'ouverts, ce qui d'après Mokobodzki entraîne l'axiome 3′ et ajoutons aussi l'hypothèse dite d'« unicité » ou de proportionalité (proportionalité des potentiels de même support ponctuel).

Alors on peut introduire *un espace de Martin généralisé* comme suit: Considérons le cône S^+ convexe des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ et l'espace $\mathscr{E}$ des différences (c.à.d de certaines classes d'équivalence de couples de telles fonctions) pourvu de l'ordre spécifique (selon lequel S^+ est le cône positif) et de la topologie T de Mme Hervé [10]. On introduit une base $\mathscr{B}$ de S^+ métrisable et compacte. Les potentiels extrémaux de $\mathscr{B}$ qui sont les potentiels de $\mathscr{B}$ à supports ponctuels correspondent à ces supports et cette correspondance est un homéomorphisme avec Ω [9]. L'adhérence $\hat{\Omega}$ de leur ensemble est formée de cet ensemble et de fonctions harmoniques formant un compact Δ dont une partie Δ_1 est l'ensemble des éléments extrémaux harmoniques de $\mathscr{B}$, c.à.d. des fonctions harmoniques minimales de $\mathscr{B}$. Le compact $\hat{\Omega}$, considéré à un homéomorphisme près dépendant du choix de la base, et dont une partie partout dense est homéomorphe à Ω est l'espace de Martin généralisé; Δ est la frontière de Martin, Δ_1 sa partie minimale. $\hat{\Omega}$ s'introduit donc naturellement mais paraît moins utile que $\check{\Omega}$ défini sur $\Omega \cup \Delta_1$.

On ajoutera ensuite

a) l'axiome D (équivalent grâce aux autres hypothèses au théorème de convergence)

b) l'existence d'une base de domaines « complètement déterminants » ce qui permet d'utiliser la théorie de Mme Hervé [10] des fonctions harmoniques adjointes.

On fixera une base compacte mais on peut se ramener à utiliser celle qui est déterminée par la condition :

$$\int V \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 1 \qquad V \in S^+ \qquad \text{(préférable à la valeur 1 en } x_0\text{)}$$

(ω_0 domaine fixe complètement déterminant, $x_0 \in \omega_0$) car celle-ci est bien compacte.

Notons $p_x(y)$ le potentiel de la base choisie, de support ponctuel $x \in \Omega$, et aussi pour $x \in \Delta_1$ la fonction harmonique minimale de cette base que représente ce point x.

Alors *l'effilement* (*minimal*) de $E \subset \Omega$ en $X \in \Delta_1$ est encore *équivalent* à ce que X soit non adhérent à E dans la topologie Martin sinon à ce qu'il existe une mesure $\mu \geqslant 0$ dans telle que

$$\int p_X(y)\, d\mu(y) < \liminf_{\substack{x \in E, x \to X \\ \text{selon } \hat{\Omega}}} \int p_X(y)\, d\mu(y)$$

le premier membre étant d'ailleurs le prolongement par s.c.i. de $\int p_x(y)\, d\mu(y)$ dans Ω en $X \in \Delta_1$.

Ainsi les « potentiels adjoints » $\int p_x(y)\, d\mu(y)$ dans Ω prolongés par s.c.i. définissent sur $\Omega \cup \Delta_1$, pourvu de la topologie Martin, une *topologie fine* $\mathcal{T}_p$ (la moins fine, plus fine que celle de $\hat{\Omega}$, rendant ces fonctions continues) et *les ensembles de* Ω *qui sont effilés en* X *au sens minimal sont ceux de* Ω *qui sont effilés au sens interne correspondant à* $\mathcal{T}_p$.

Sous des conditions supplémentaires, cette topologie $\mathcal{T}_p$ sera *la topologie fine minimale*.

Il suffit d'ajouter α) que les potentiels adjoints à support ponctuel sont proportionnels, ce qui a lieu par exemple si les points non polaires sont isolés,
et β) que l'effilement interne dans Ω est *identique* à son effilement adjoint.

Ces conditions sont satisfaites d'après Mme Hervé, si Ω est un domaine p. ex. borné dans R^n et si l'on prend comme fonctions harmoniques, les solutions d'une équation linéaire du 2ème ordre elliptique, du moins pour des coefficients assez réguliers; l'effilement interne et son adjoint sont alors identiques à l'effilement classique.

Cas particulier : Considérons, sans ces dernières hypothèses (α, β) un point $x_1 \in \Omega$ *polaire* et le sous-espace connexe $\Omega - \{x_1\}$ pourvu *localement* des mêmes fonctions harmoniques. Les fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ y sont les restrictions de celles de Ω. On peut prendre la même base de cône; la nouvelle frontière de Martin ou minimale se déduit de l'ancienne par adjonction de $p_{x_1}(y)$. Ce point minimal X est caractérisé comme le seul où est effilé le complémentaire de tout voisinage de x_1 dans Ω. Et d'après un théorème de Mme Hervé, l'effilement minimal en X d'un ensemble de $\Omega - \{x_1\}$ est identique à l'effilement interne *adjoint* en x_1 dans Ω.

D'où en ajoutant les hypothèses (α, β) le critère d'effilement en x_1 qui s'exprime par l'effilement en X c.à.d. l'invariance de la réduite de p_{x_1}, bien connue dans le cas classique.

Cet exemple compare les deux types d'effilement aux points x_1 et X et nous amène à la seconde partie. Mais il resterait à utiliser l'interprétation générale de l'effilement minimal, donc à voir d'abord p. ex. si, comme dans le cas classique, l'effilement et l'ineffilement sont toujours forts dans la théorie de l'effilement interne utilisé pour l'interprétation.

IV. Effilement statistique classique des deux types—Applications.

5. Dans le cas classique d'une boule de R^n ou du demi-espace Ω, où l'espace de Martin est identifiable à l'adhérence et où la frontière de Martin est entièrement minimale, on connait d'autres résultats de comparaison, indiqués par Mme Lelong [11] qui avait introduit autrement, mais d'une manière qui se trouve équivalente, l'effilement à la frontière.

Ainsi l'effilement intérieur dans R^n ($n \geqslant 3$) d'un ensemble du demi-espace ou boule Ω, *implique* en un point-frontière, l'effilement minimal en ce point (identifié à un point minimal) mais cela n'est plus vrai pour $n = 2$, où les effilements sont indépendants. D'ailleurs ces résultats ne sont pas établis dans le mémoire de Mme Lelong mais Choquet les a récemment démontrés en détail.

Il s'ensuit que dans les axiomatiques générales, aucune implication n'est possible. Cependant je me suis aperçu qu'il y a bien la même implication que dans R^3 mais seulement *en un sens statistique* convenable.

On commencera par caractériser l'effilement non en un seul point mais aux points d'un ensemble, presque partout en un sens convenable.

Plaçons-nous dans le cas classique d'un espace de Green où l'on donne *deux ensembles e et* α. Nous allons donner des équivalents de la propriété:

A) *e est effilé* [2] *quasi-partout aux points de* α.

Disons qu'une famille $\mathscr{E}$ d'ensembles $E_i \subset \Omega$ $(i \in I)$ est évanescente si

$$\widehat{\inf_i R_1^{E_i}} \equiv 0,$$

ce qui équivaut à $\inf_i \hat{R}_1^{E_i} = 0$ q.p. ou à

$\inf_i \int \hat{R}_1^{E_i} \, d\rho_{x_0}^{\delta} = 0$ $\quad$ ($x_0 \in \delta$, domaine p. ex. régulier, $d\rho_{x_0}^{\delta}$ mes. harm.)

Une condition suffisante est que $\inf_i$ cap. ext. $E_i = 0$; elle est nécessaire lorsque, pour une suite exhaustive d'ouverts ω_p relativement compacts et i_p quelconque $\in I$, $\cup(\omega_p \cap E_{i_p}) \in \mathscr{E}$, ce qui est vérifié dans les énoncés B et B_1 de ce n° 5.

Alors on a d'abord les propriétés équivalentes presque triviales:

B) *La famille des intersections de e avec les voisinages fins* [3] *de* α *est évanescente.*

C) *Il existe dans* Ω *une fonction surharmonique* $V > 0$ *dont la restriction à e tend finement vers* $+\infty$ *en tout point de* α *finement adhérent à e.*

Il est plus difficile d'obtenir les mêmes propriétés équivalentes avec la topologie ordinaire, soit (B_1) avec les voisinages ordinaires, (C_1) avec limite et adhérence au sens ordinaire. (B_1) dérive de A par le th. suivant de Choquet: l'ensemble des points d'effilement d'un ensemble donné peut être enfermé dans un ouvert qui coupe l'ensemble donné suivant un ensemble de capacité extérieure arbitrairement petite. Mais on peut démontrer directement l'équivalence de A et C_1, de B_1 et C_1 d'où l'équivalence de A et B_1 qui contient ce théorème de Choquet ainsi démontré autrement.

Voici une extension naturelle; on dira qu'une famille est V-*évanescente*, pour V surharm. > 0 donnée,

si $\widehat{\inf_i R_V^{E_i}} \equiv 0$ ou, ce qui est équivalent $\inf_i \hat{R}_V^{E_i} = 0$ q.p.
ou encore $\inf_i \int \hat{R}_V^{E_i} \, d\rho_{x_0}^{\delta} = 0$.

Alors on cherchera des *équivalents de*:

a) *e* est effilé en tout point de α sauf aux points d'un ensemble polaire de mesure nulle pour la mesure associée à V dans Ω.

[2] C'est l'effilement rappelé plus haut de $e \setminus \{x\}$ en tout $x \in \alpha$, avec la restriction, si $x \in e$, que $\{x\}$ est non polaire.

[3] à un ensemble polaire près, aussi bien.

Nous aurons d'abord les équivalents:

b) La famille des intersections avec e des voisinages fins ([4]) de α est V-évanescente.

b_1) Même énoncé avec les voisinages ordinaires (propriété forte), puis

c) Il existe une fonction surharmonique $U > 0$ telle que, en prenant $U/V = +\infty$ lorsque $U = V = +\infty$, la restriction de U/V à e tend finement vers $+\infty$ en tout point de α finement adhérent à e, et

c_1) Même énoncé avec la topologie ordinaire (propriété forte).

6. Nous avons d'autre part des *énoncés analogues pour l'effilement à la frontière de Martin* Δ de l'espace de Green Ω; on a noté $\hat{\Omega}$ l'espace de Martin et $\check{\Omega}$ l'espace « minimal » $\Omega \cup \Delta_1$, pourvu de la topologie fine.

On introduit $e \subset \Omega$, $\alpha \subset \Delta_1$, h une fonction harmonique > 0 dans Ω, μ sa mesure canonique (sur Δ, chargeant Δ_1).

Les propositions suivantes sont équivalentes:

A′) e est effilé (au sens minimal) en tout point de α sauf aux points d'un ensemble de μ-mesure nulle.

B′) La famille des intersections avec e des voisinages *fins* de α (dans la topologie « fine » c.à.d. de $\check{\Omega}$) est h-évanescente et il est équivalent de remplacer ces voisinages par les ensembles de Ω dont le complémentaire est effilé en tout point de α.

B'_1) Même énoncé avec les voisinages de α dans la topologie de l'espace de Martin $\hat{\Omega}$ (forme forte).

C′) Il existe U surharmonique > 0 dans Ω tel que la restriction à e de U/h tende finement vers $+\infty$ en tout point de Δ_1 finement adhérent à e.

C'_1) Même énoncé avec la topologie de $\hat{\Omega}$ (forme forte).

On peut dans cet énoncé *remplacer h par une fonction surharmonique* V dont h est la plus grande minorante harmonique (en posant dans C et C_1, $U/V = +\infty$ lorsque $U = V = +\infty$).

7. *Application—Propriété d'implication.*

Soit un domaine $\Omega_0 \subset \bar{\Omega}_0 \subset \Omega$. Un point frontière minimal X relatif à Ω_0 sera dit associé à $x_1 \in \partial\Omega_0$, si pour tout voisinage δ de x_1, $\Omega_0 \setminus \delta$ est effilé au sens minimal en X.

Cela équivaut d'après Naïm [12], à ce que x_1 est « pôle unique dans $\bar{\Omega}_0$ » de la fonction minimale $K(X, y)$ ou à ce que le filtre $\mathscr{F}_X$ (des

([4]) à un ensemble polaire près.

complémentaires dans Ω_0 des effilés en X) converge dans $\bar{\Omega}_0$ vers le point x_1.

Théorème d'implication statistique.—

Soit $e \subset \Omega_0 \subset \Omega$ (espace de Green), effilé au sens interne de Ω aux points d'un ensemble α de $\partial\Omega_0$. Alors e est effilé au sens minimal relatif à Ω_0 aux points minimaux associés aux points de α à l'exception de points formant un ensemble de mesure nulle pour la mesure canonique correspondant à 1 *ou même à toute fonction harmonique* > 0 *dans* Ω_0 *qui se prolonge dans Ω selon une fonction surharmonique* $V > 0$.

Car la réduite R_V^e relative à Ω majore dans Ω_0 la même réduite relative à Ω_0. Alors la propriété forte B_1 ou (b_1) de l'effilement interne entraîne la propriété faible (B′) relative à V et à l'ensemble des points minimaux associés aux points de α; et celle-ci est équivalente à (A′) pour la mesure associée à V restreinte à Δ_1 c.à.d. à notre énoncé.

Soulignons *le cas particulier* d'une frontière assez régulière pour être identifiable à celle de Martin (c.à.d. pour que Ω_0 soit l'espace de Martin de Ω_0); alors l'effilement interne de e aux points de α entraîne l'effilement au sens minimal en ces points, *presque partout* au sens de la mesure harmonique ordinaire, c.à.d. dans le cas de la boule, au sens de la mesure de Lebesgue sur la sphère.

V. Extension axiomatique.

8. Dans l'axiomatique déjà rappelée, partons des hypothèses (H) (axiomes 1, 2, 3 *base dénombrable d'ouverts, existence d'un potentiel* > 0 *et axiome* D).

On étend la notion de famille V-évanescente, définie par $\inf_i \hat{R}_V^{E_i} = 0$ q.p. (avec les équivalents $\widehat{\inf_i R_V^{E_i}} = 0$ ou $\inf_i$. de la moyenne, nulle).

On étend la première série d'équivalences de la propriété: (A*): $e \subset \Omega$ est effilé q.p. aux points de $\alpha \subset \Omega$.

On choisit V_0 surharmonique > 0 *finie continue* quelconque et on obtient comme équivalence, que la famille $\omega \cap e$ est V_0-évanescente, où ω décrit les voisinages *fins* de α (forme faible B*) ou les voisinages dans Ω (forme forte B_1^*, difficile, correspondant à l'extension d'un théorème de Choquet mentionné plus haut). Une autre équivalence est encore l'existence de U surharmonique > 0 dont la restriction à e tend vers $+\infty$ en tout point de α adhérent à e, soit en topologie fine (forme faible C*) ou en topologie de Ω (forme forte C_1^*) Mais l'extension de l'interprétation forte du cas classique, de la V-évanescence, pour V-surharmonique > 0 quelconque, soulève ici des difficultés. Elle peut toutefois se faire exactement sous des hypothèses supplémentaires, c.à.d. en ajoutant la proportionalité des potentiels de même support ponctuel, l'existence d'une base de domaines complètement déterminants et l'identité de l'effilement et de l'effilement adjoint.

Passons à *l'effilement minimal.* Sans ces hypothèses supplémentaires, on peut étendre comme suit ce qui concerne la frontière minimale et l'espace $\check{\Omega}$ sans parler de frontière de Martin.

Si V est surharmonique > 0 quelconque dans Ω, appelons V-négligeable tout ensemble E de la frontière minimale tel que les traces sur Ω des voisinages fins de E (c.à.d. les ensembles de complémentaire effilé aux points de α) forment une famille V-évanescente. Cela équivaut à dire que les u surharmoniques $\geqslant 0$ satisfaisant à lim inf. fine $u/V \geqslant 1$ aux points de $E(u/V = +\infty$ si $u = V = +\infty)$ ont une enveloppe inférieure nulle, et il y a équivalence en remplaçant V par sa plus grande minorante harmonique h; E est alors de mesure nulle pour la mesure canonique ν_h associée à cette minorante (ou à V).

Comparons les propriétés

(A'*) $e \subset \Omega$ est effilé aux points d'une partie α de la frontière minimale sauf sur un ensemble β qui est V ou h-négligeable.

(A''*) Même énoncé en remplaçant β par un ensemble de mesure-ν_h nulle.

(B'*) La famille des intersections avec e des voisinages fins de α (ou des ensembles de complémentaire effilé en tout point de α) est V ou h-évanescente.

(C'*) Il existe une fonction surharmonique $U > 0$ telle que la restriction à e de U/V (infinie avec U et V simultanément) (ou de U/h, ce qui est en fait équivalent) tende finement vers $+\infty$ en tout point de α finement adhérent à e.

Alors $B'^* \Leftrightarrow C'^*$ et $A'^* \Rightarrow B'^* \Rightarrow A''^*$.

Dans l'hypothèse de « proportionalité » (ou même seulement si l'axiome R_h de Gowrisankaran est satisfait) les ensembles h-négligeables sont exactement les ensembles de mesure-ν_h nulle. Alors $A'^* \Leftrightarrow A''^* \Leftrightarrow B'^* \Leftrightarrow C'^*$.

Mais cette hypothèse de proportionalité permet aussi d'introduire l'« espace de Martin » $\hat{\Omega}$ et les travaux de Gowrisankaran permettent alors de montrer l'équivalence de A'* ou A''* avec des formes fortes $B_1'^*$, $C_1'^*$ qui ne diffèrent de B'^*, C'^* que par l'emploi de voisinages ou limites dans l'espace $\hat{\Omega}$.

9. *L'implication statistique.* — En considérant le domaine

$$\Omega_0 \subset \bar{\Omega}_0 \subset \Omega,$$

on étend la définition des points-frontière minimaux associés à un point de $\partial\Omega_0$.

Le théorème d'implication statistique s'étend : avec les seules hypothèses (H) (1, 2, 3, base dénombrable, potentiel > 0, axiome D) l'effilement de $e \subset \Omega_0$ aux points de $E \subset \partial\Omega_0$ (au sens interne dans Ω) implique l'effilement minimal aux points-frontière minimaux de Ω_0, associés aux points de E sauf sur un ensemble V_0-négligeable (et par suite de mesure nulle pour la mesure canonique associée à toute fonction harmonique > 0 et bornée dans Ω_0).

On peut ensuite étendre le complément du cas classique avec les hypothèses plus fortes introduisant les fonctions adjointes et l'identité de l'effilement avec l'effilement adjoint.

Terminons par quelques suggestions et applications. Il faudrait approfondir cette correspondance de frontières, comme on l'a fait dans le cas classique (Naïm). Par ailleurs, considérons la fonction caractéristique (indicateur) de $e \subset \Omega_0$. Elle admet la limite fine 0 aux points-frontière de Ω_0 finement adhérents à e (au sens de la topologie fine dans Ω) et par suite la limite fine 0 (au sens minimal) aux points minimaux de Ω_0 associés, sauf aux points d'un ensemble V_0-négligeable. Cela suggère de comparer pour une fonction quelconque les limites fines à la frontière de $\partial\Omega_0$ et les limites fines minimales. Voici dans cette étude à peine commencée un premier énoncé, dans le cas classique où le résultat est évident autrement par le mouvement brownien, mais qu'on peut espérer étendre. Soit f réelle bornée dans Ω_0 admettant une limite fine (au sens de la topologie fine classique dans Ω) à la frontière (c.à.d. à la frontière fine) p.p. au sens de la mesure harmonique classique; alors elle admet une limite fine minimale p.p. sur la frontière minimale (ou de Martin) au sens de la mesure harmonique du problème de Dirichlet-Martin (c.à.d. de la mesure associée à la représentation intégrale de 1).

Cela résulte de l'implication statistique, de certains raffinements [7] sur le problème de Dirichlet classique et sa solution (même valables en théorie axiomatique) de l'existence des limites fines minimales pour les fonctions harmoniques > 0 (Doob) (également valables en théorie axiomatique), mais aussi de propriétés de la correspondance des frontières, dont je réclamais justement l'étude étendue au cas axiomatique.

D'autre part tout cela devrait être réexaminé dans le cadre d'axiomatiques plus larges, comme celle de Bauer [1], [2].

Enfin il y a lieu, évidemment, d'approfondir les interprétations probabilistes. La théorie des limites fines ne semble donc pas près d'être terminée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BAUER, Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, *Math. Annalen*, 146 (1962), 1-59.

[2] H. BAUER, Weiterführung einer axiomatischen Potentialtheorie ohne Kern Wahrscheinlichkeitstheorie, 1 (1963), 197-229.

[3] M. BRELOT, Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel, *J. de Math.*, 19 (1940), 319-337.

[4] M. BRELOT, Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact, *Sem. de théorie du potentiel*, 2 (1958), Paris.

[5] M. BRELOT, Lectures on potential theory, *Collection du Tata Institute, Bombay*, No. 19 (1960).

[6] M. BRELOT, Introduction axiomatique de l'effilement, *Annali di Matematica* (Serie IV) 57 (1962), 77-96.

[7] M. BRELOT, Quelques propriétés et applications nouvelles de l'effilement, *Sem. théorie du potentiel*, VI fasc. 1 (1961-62), 1-27 à 1-40.

[8] J. L. DOOB, A non probabilistic proof of the relative Fatou theorem, *Annales Inst. Fourier*, 9 (1959), 293-300.

[9] K. GOWRISANKARAN, Extreme harmonic functions and boundary value problems, *Annales Inst. Fourier*, 13, fasc. 2 (1963), 307-358.

[10] Mme R. M. HERVÉ, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Annales Inst. Fourier*, 12 (1962), 415-571.

[11] Mme LELONG, Etude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace, *Annales E.N.S.*, 66 (1949), 125-159.

[12] L. NAÏM (Mme LUMER), Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel, *Annales Inst. Fourier*, 7 (1957), 183-285.

Marcel BRELOT,
Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre Curie,
Paris (5e).