



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Vincent CAVALIER & Daniel LEHMANN

**Introduction à l'étude globale des tissus sur une surface holomorphe**

Tome 57, n° 4 (2007), p. 1095-1133.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2007\\_\\_57\\_4\\_1095\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_4_1095_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# INTRODUCTION À L'ÉTUDE GLOBALE DES TISSUS SUR UNE SURFACE HOLOMORPHE

par Vincent CAVALIER & Daniel LEHMANN

---

RÉSUMÉ. — Beaucoup de concepts sur les tissus n'ont été étudiés que localement. Il apparaît que certains d'entre eux se laissent globaliser, mais pas toujours de façon immédiate. Le premier objectif de cet article est de préciser à chaque fois ce qu'il en est, et de mettre en place les outils utiles à une étude globale des tissus sur une surface holomorphe  $M$  arbitraire, et en particulier sur le plan projectif complexe  $\mathbb{P}_2$ . Certains concepts nouveaux vont alors apparaître, tels le type (ou le degré si  $M = \mathbb{P}_2$ ), la dicriticité, l'indiscernabilité (qui est le pendant géométrique de l'irréductibilité), ou la quasi-lissité. Ces notions, qui n'ont aucun intérêt localement au voisinage d'un point régulier du tissu, vont induire de nouvelles problématiques. Par exemple, nous démontrons que tout tissu dicritique et quasi-lisse sur  $\mathbb{P}_2$ , ou tout tissu linéaire, est de degré 0 et est par conséquent algébrique.

ABSTRACT. — Many notions on webs have been studied only locally near a regular point. It happens that some of them may be globalized, but not always in an obvious way. The first aim of this article is to make these facts precise, and to define the tools needed for a global study of webs on a holomorphic surface  $M$ , and in particular on the complex projective plane  $\mathbb{P}_2$ . By the way, some new concepts will appear, such as the type (or the degree if  $M = \mathbb{P}_2$ ), the dicriticality, the indistinguishability (which is the geometrical counterpart of the irreducibility), or the quasi-smoothness. These notions, which have no interest locally near a regular point of the web, induce new problems. For instance, we prove that any dicritical and quasi-smooth web on  $\mathbb{P}_2$ , or any linear web, has degree 0, hence is algebraic.

## 1. Introduction

Classiquement, on appelle  $d$ -tissu holomorphe sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}^2$  ( $d$  entier  $\geq 1$ ) la donnée d'une équation différentielle  $F(x, y, y') = 0$ , où  $F : U \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est un polynôme  $\sum_{i=0}^d a_i(x, y)(y')^{d-i}$  en  $y'$ , à coefficients

---

*Mots-clés* : tissus globaux, dicriticité, indiscernabilité, quasi-lissité, courbures de Blaschke et de Chern, relations abéliennes.

*Classification math.* : 14C21, 53A60.

$a_i(x, y)$  holomorphes, avec un coefficient  $a_0$  non identiquement nul. Si l'on multiplie  $F$  par une fonction holomorphe  $u(x, y)$  pouvant s'annuler dans  $U$ , il est clair qu'on ajoute la courbe  $u(x, y) = 0$  aux solutions de l'équation différentielle précédente ; afin d'éliminer de telles solutions parasites (ce qui est nécessaire si l'on veut que l'ensemble critique  $\Gamma_W$  défini ci-dessous soit de dimension complexe au plus 1), on supposera de plus  $F$  *épuré* au sens suivant : les germes des coefficients  $a_i$  en chaque point de  $U$  sont premiers entre eux dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes en ce point (i.e. leur PGCD est une unité). Les points *réguliers* d'un tel tissu sont les points  $(x, y)$  de  $U$  en lesquels l'équation  $F(x, y, y') = 0$  admet  $d$  racines  $p_i(x, y)$  distinctes en  $y'$  : au voisinage d'un tel point régulier, les solutions de l'équation différentielle appartiennent à  $d$  feuilletages  $\mathcal{F}_i$  holomorphes, deux à deux transverses, et de pente partout finie. On supposera que l'ensemble analytique discriminant, complémentaire dans  $U$  de l'ensemble des points réguliers, est de dimension complexe au plus 1.

Comme il est très artificiel d'éliminer les points à tangente verticale des solutions d'une équation différentielle sur un ouvert de  $\mathbb{C}^2$ , et que la notion même de "tangente verticale" n'a plus de sens si l'on étudie des tissus sur une surface holomorphe  $M$  arbitraire, on commencera par homogénéiser l'équation différentielle  $F(x, y, y') = 0$  en la remplaçant par l'équation  $\varpi = 0$ , où  $\varpi = \sum_{i=0}^d a_i(x, y)(dx)^i(dy)^{d-i}$  : c'est une section non identiquement nulle de la puissance symétrique  $d$ -ième  $S^d(T^*U)$  du fibré cotangent complexe  $T^*U$ , c'est-à-dire un polynôme homogène de degré  $d$  sur  $U$ , que l'on supposera épuré au sens où le polynôme  $F$  correspondant l'est. Ce polynôme homogène se décompose sous la forme  $\prod_{i=1}^d (r_i(x, y)dx + s_i(x, y)dy)$ , et les solutions de l'équation  $\varpi = 0$  sont les courbes holomorphes de  $U$  qui sont solutions de l'une des équations différentielles  $r_i dx + s_i dy = 0$ . Il n'est plus nécessaire dès lors de supposer  $a_0$  non identiquement nul.

Si l'on multiplie  $\sum_{i=0}^d a_i(x, y)(dx)^i(dy)^{d-i}$  par une fonction holomorphe  $u(x, y)$  partout non nulle, on ne change pas les solutions de l'équation différentielle. La donnée d'un tissu sur une surface holomorphe  $M$  va donc consister pratiquement en la donnée d'une famille  $(U_i, \varpi_i)_i$ , constituée d'un recouvrement  $\mathcal{U} = (U_i)_i$  de  $M$  par des ouverts et d'une famille  $(\varpi_i)_i$  de polynômes homogènes épurés  $\varpi_i \in S^d(T^*U_i)$  non identiquement nuls, de telle façon qu'il existe, sur chaque intersection  $U_i \cap U_j$ , une fonction holomorphe  $u_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$  ne s'annulant pas et telle que  $\varpi_i = u_{ij} \cdot \varpi_j$  : c'est la définition globale des tissus donnée par D. Cerveau dans [4].

Remarquant alors que les fonctions  $u_{ij}$  vérifient la condition de cocycle et définissent par conséquent un fibré vectoriel holomorphe en droites complexes  $E \rightarrow M$ , on constate que les polynômes  $\varpi_i$  se recollent pour définir globalement un polynôme homogène sur  $M$  à coefficients holomorphes dans  $E$ , c'est-à-dire un morphisme holomorphe de fibrés vectoriels  $\varpi : S^d(TM) \rightarrow E$ . Soit  $\varpi' : S^d(TM) \rightarrow E'$  le morphisme défini de façon analogue à partir d'une famille  $(U'_\alpha, \varpi'_\alpha)_\alpha$ . On dira qu'il définit le même tissu si, pour chaque couple  $(i, \alpha)$  tel que  $U_i \cap U'_\alpha \neq \emptyset$ , il existe une fonction holomorphe  $u_{i\alpha} : U_i \cap U'_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^*$  telle que  $\varpi_i = u_{i\alpha} \cdot \varpi'_\alpha$  sur  $U_i \cap U'_\alpha$ . Dans ce cas, on vérifie aisément qu'il existe un isomorphisme canonique de fibrés vectoriels holomorphes  $\Phi : E \rightarrow E'$  tel que  $\varpi' = \Phi \circ \varpi$ .

En résumé, on se donne un polynôme homogène  $\varpi : S^d(TM) \rightarrow E$  de degré  $d$  à coefficients dans un fibré holomorphe en droites complexes  $E \rightarrow M$ . On dira que c'est un  $d$ -tissu sur  $M$  si  $\varpi$  est épuré au sens suivant : s'il existe un point  $m_0$  de  $M$  et un germe en  $m_0$  de fonction holomorphe  $u$  telle que le germe de  $\varpi$  en  $m_0$  contienne  $u$  en facteur,  $u$  est alors inversible dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes. On supposera de plus que l'ensemble analytique discriminant égal à la réunion des ensembles discriminants de chaque  $\varpi_i$  est de dimension complexe  $\leq 1$  : il revient au même de dire que, parmi les formes de Pfaff locales  $r_i dx + s_i dy$  définies ci-dessus, il n'y en a pas deux qui soient les mêmes à multiplication près par une fonction holomorphe de  $(x, y)$ .

Le fibré  $E$  s'appelle le *type* du tissu. Lorsque  $M = \mathbb{P}_2$ , les  $d$ -tissus de degré  $n$  sont ceux tels que  $E = \mathcal{O}(n + 2d)$  (puissance tensorielle  $n + 2d$  du dual  $\mathcal{O}(1)$  du fibré tautologique  $\mathcal{O}(-1)$ ) : on verra que ce sont les tissus pour lesquels une droite générique de  $\mathbb{P}_2$  est tangente en  $n$  points distincts à une solution de l'équation différentielle, pas nécessairement la même en chacun de ces  $n$  points (pour  $d = 1$ , on retrouve la définition usuelle du degré d'un feuilletage). En particulier un  $d$ -tissu *algébrique* (équation différentielle dont les solutions sont les droites appartenant à une enveloppe algébrique de classe  $d$ ) est de degré 0 : une droite générique n'a en effet aucune raison d'appartenir à une telle enveloppe. On démontre la réciproque.

Nous fixons les notations à la section 2, et rappelons au passage quelques résultats plus ou moins connus relatifs à la variété  $\widetilde{M}$  des éléments de contact d'une surface holomorphe  $M$ . C'est en effet dans  $\widetilde{M}$  que se plonge naturellement la surface  $W$  d'équation locale  $F(x, y, p) = 0$  définissant le tissu.

Nous précisons dans la section 3 différents concepts utiles pour une étude globale des tissus, en nous laissant guider pour cela par le souci de préciser

ce qui, dans les définitions locales, dépend ou non des coordonnées locales utilisées. Par exemple, l'équation  $F'_x + pF'_y = 0$  (utilisée pour linéariser ou algébriser le tissu) n'a en général de sens intrinsèque que sur la courbe critique  $\Gamma_W$  d'équations locales ( $F = 0, F'_p = 0$ ). On distingue alors les tissus *dicritiques* pour lesquels cette expression est identiquement nulle sur la courbe critique, et les tissus *non-dicritiques*. Le complémentaire  $W_0$  de la courbe critique dans  $W$  est un revêtement à  $d$  feuillets au dessus de la partie régulière  $M_0$  du tissu dans  $M$ , induisant une holonomie qui est la "monodromie primaire" définie dans [Ce]. Il existe en effet sur la partie régulière  $W'$  de  $W$ , et en particulier sur  $W_0$ , un feuilletage naturel  $\tilde{\mathcal{F}}$  qui "décroît" le tissu en ce sens que ses feuilles se projettent sur celles du tissu. Dans le cas non-dicritique,  $\tilde{\mathcal{F}}$  est tangent aux fibres de la projection sur  $M$  le long de  $\Gamma_W$  : on en déduit en particulier un "théorème de résidus" qui exprime que la différence entre les restrictions à  $\Gamma_W$  des classes de Chern du fibré tangent aux fibres de la projection et du fibré tangent au feuilletage se localise près des points de  $\Gamma_W$  en lesquels  $F'_x + pF'_y$  est nul. Nous verrons aussi que la notion d'*irréductibilité* de la surface  $W$  est le pendant algébrique du concept géométrique d'*indiscernabilité* globale des feuilletages locaux associés au tissu : par exemple, pour le 2-tissu algébrique constitué par les tangentes à une conique propre (enveloppe de seconde classe irréductible) dans  $\mathbb{P}_2$ , on peut discerner deux feuilletages au voisinage de tout point appartenant au complémentaire  $M_0$  de la conique dans le plan projectif ; mais, ceci n'est plus possible sur tout  $M_0$ , alors que si l'enveloppe de seconde classe dégénère en deux points, les deux feuilletages correspondant restent discernables sur le complémentaire  $M_0$  de la droite joignant ces deux points. (Des observations de cette nature ont été faites dans [4]). La surface  $W$  est singulière sur l'intersection de deux composantes irréductibles. On dira que le tissu est *quasi-lisse* si toutes les composantes irréductibles de  $W$  sont lisses, ce qui est fréquent. Pour un tissu quasi-lisse, on peut appliquer divers résultats relatifs aux surfaces lisses (*cf.* par exemple le théorème 4.14 à la section suivante).

Les tissus sur  $\mathbb{P}_2$  sont étudiés dans la section 4. Notant  $\mathbb{P}'_2$  le plan projectif des droites de  $\mathbb{P}_2$ , la variété de contact  $\widetilde{\mathbb{P}}_2$  s'identifie alors à la sous-variété de  $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}'_2$  constituée par l'ensemble des couples formés d'un point de  $\mathbb{P}_2$  et d'une droite passant par ce point. C'est donc aussi la variété de contact de  $\mathbb{P}'_2$ , les deux espaces  $\mathbb{P}_2$  et  $\mathbb{P}'_2$  jouant alors des rôles parfaitement symétriques. Les surfaces dans  $\widetilde{\mathbb{P}}_2$  qui définissent à la fois un tissu sur  $\mathbb{P}_2$  et un tissu sur  $\mathbb{P}'_2$  (bi-tissus) sont celles correspondant aux tissus non-dicritiques de  $\mathbb{P}_2$  : un  $d$ -tissu de degré  $n$  non-dicritique sur  $\mathbb{P}_2$  est aussi un  $n$ -tissu

de degré  $d$  non-dicritique sur  $\mathbb{P}'_2$ , et de même que la classification des  $d$ -tissus algébriques équivaut à celle des courbes algébriques planes de degré  $d$ , la classification des  $d$ -tissus non-dicritiques de degré 1 équivaut à celle des feuilletages algébriques plans de degré  $d$ . D'autre part, à condition de n'utiliser que des coordonnées locales affines sur  $\mathbb{P}_2$ , l'équation  $F'_x + pF'_y = 0$  a exceptionnellement une signification intrinsèque sur tout  $W$ , indépendante des coordonnées affines choisies, et – dans le cas d'un bi-tissu – est l'équation locale de la courbe critique  $\Gamma'_W$  de  $W$  considéré comme tissu sur  $\mathbb{P}'_2$ . Nous démontrons que les tissus de degré 0 sont les tissus algébriques, que tout tissu linéaire sur  $\mathbb{P}_2$  est algébrique. Utilisant la théorie de Baum-Bott, nous montrons aussi que si un tissu sur  $\mathbb{P}_2$  est quasi-lisse, et si toutes ses composantes irréductibles sont dicritiques, le tissu est algébrique.

La section 5 est consacrée aux 3-tissus. Nous y rappelons la définition de la connexion de Chern [5], et donnons une définition intrinsèque globale de la connexion et de la courbure de Blaschke. Nous redémontrons que la nullité de la courbure de Blaschke ([1], [2], [8]) implique l'existence d'une relation abélienne <sup>1</sup> non triviale, en remarquant que la connexion de Chern est alors à la fois à courbure et à torsion nulles et qu'elle définit donc une structure localement affine adaptée au tissu.

Dans la section 6, nous étudions les relations abéliennes<sup>(1)</sup> pour  $d$  arbitraire. Nous proposons une définition globale, au dessus de toute la partie régulière  $M_0$  du tissu, du fibré vectoriel  $\mathcal{E}$  défini localement par Hénaut et de la connexion  $\nabla$  qu'il définit sur  $\mathcal{E}$ , tels que les sections  $\xi$  de  $\mathcal{E}$  à dérivée covariante nulle soient exactement les relations abéliennes ([9]). Les relations abéliennes sont les solutions d'une certaine équation aux dérivées partielles  $\mathcal{D}\xi = 0$ , où l'opérateur différentiel  $\mathcal{D}$  linéaire d'ordre 1 peut s'interpréter comme un morphisme  $D : J^1A \rightarrow B$  de fibrés vectoriels pour des fibrés vectoriels  $A$  et  $B$  de rangs respectifs  $d - 2$  et  $d - 1$  au dessus de tout  $M_0$ . Notant alors  $R_k$  le noyau du  $k$ -ième prolongement  $J^{k+1}A \rightarrow J^k B$  de  $D$ , c'est-à-dire l'espace des relations abéliennes formelles à l'ordre  $k + 1$ ,  $\mathcal{E}$  est égal à  $R_{d-4}$  : c'est un fibré vectoriel au dessus de  $M_0$ , et la projection naturelle  $R_{d-3} \rightarrow R_{d-4}$  est un isomorphisme. Puisque  $R_{d-3} = J^1 R_{d-4} \cap J^{d-2} A$ , l'inclusion naturelle  $R_{d-3} \subset J^1 R_{d-4}$  permet d'interpréter l'isomorphisme

---

(1) Sur un ouvert de la partie régulière d'un  $d$ -tissu au dessus duquel on peut discerner  $d$  feuilletages deux à deux transverses, une relation abélienne est la donnée d'une famille d'intégrales premières  $H_i$  pour chaque feuilletage  $\mathcal{F}_i$ , définies à constante additive près, et dont la somme  $\sum_{i=1}^d H_i$  est constante. Cette terminologie fait référence au théorème d'Abel (cf. par exemple [2]) qui peut s'énoncer ainsi : les tissus algébriques admettent localement  $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$  relations abéliennes linéairement indépendantes au voisinage de tout point régulier (le maximum du genre de la courbe algébrique duale de degré  $d$ ) .

précèdent comme définissant les relèvements horizontaux d'une certaine connexion  $\nabla$  sur  $R_{d-4}$  : c'est la connexion de Hénaut. L'un des avantages de cette théorie est que le rang de  $\mathcal{E}$  est  $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ , c'est-à-dire la dimension maximum de l'espace des germes de relations abéliennes en un point ([1], [2], [8], [9]). En particulier, si la courbure de la connexion de Hénaut est nulle, les relations abéliennes constituent un système local de coefficients de rang maximum : cette courbure est donc une bonne généralisation de la courbure de Blaschke. D'intéressantes applications de la théorie de Hénaut ont été données dans [13] [14], pour  $d = 4$  ou  $5$ .

Bien entendu, le problème se pose de généraliser ces méthodes et ces résultats en dimension supérieure.

Nous remercions vivement A. Hénaut et O. Ripoll pour d'utiles conversations.

## 2. Rappels sur la variété des éléments de contact d'une surface

Soit  $M$  une surface holomorphe (variété holomorphe de dimension complexe 2, non nécessairement compacte, mais sans singularité),  $TM$  son fibré tangent complexe, et  $\widetilde{M}$  l'espace total du fibré  $\mathbb{P}TM \xrightarrow{\pi} M$ , projectivisé de  $TM$  (pour tout point  $m \in M$ , la fibre  $\widetilde{M}_m = \pi^{-1}(m)$  est l'espace projectif  $\mathbb{P}(T_m M)$  des directions de droites dans  $T_m M$ ). Un point  $\widetilde{m}$  de  $\widetilde{M}$  est un *élément de contact* de  $M$  en  $m = \pi(\widetilde{m})$ . Pour tout vecteur  $v \in T_m M$  non nul,  $[v] \in \widetilde{M}_m$  désignera l'élément de contact engendré par  $v$ .

### 2.1. Coordonnées locales sur $\widetilde{M}$

Soit  $(x, y)$  un système de coordonnées locales holomorphes sur un ouvert  $U$  de  $M$ . Sur le complémentaire  $U_x$  dans  $\pi^{-1}(U)$  de l'ensemble des points de la forme  $[(\frac{\partial}{\partial y})_m]$ , on définit un système de coordonnées locales, en notant  $(x, y, p)$  les coordonnées du point  $[(\frac{\partial}{\partial x})_m + p(\frac{\partial}{\partial y})_m]$ ,  $(x, y)$  désignant celles de  $m$  dans  $U$ . On définit de même  $(x, y, q)$  comme les coordonnées du point  $[q(\frac{\partial}{\partial x})_m + (\frac{\partial}{\partial y})_m]$  sur l'ouvert  $U_y$  des points distincts de  $[(\frac{\partial}{\partial x})_m]$ , avec  $q = \frac{1}{p}$  sur  $U_x \cap U_y$ .

Si  $(x', y', p')$  sont les coordonnées locales associées à  $(x', y')$  au dessus d'un autre ouvert  $U'$  de  $M$ , on notera en abrégé  $\alpha = \frac{\partial x'}{\partial x}$ ,  $\beta = \frac{\partial x'}{\partial y}$ ,  $\gamma = \frac{\partial y'}{\partial x}$  et  $\delta = \frac{\partial y'}{\partial y}$  les coefficients de la matrice jacobienne  $\frac{D(x', y')}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

au dessus de  $U \cap U'$ . On obtient alors :  $p' = \frac{\gamma+p\delta}{\alpha+p\beta}$ . [Lorsque  $\beta \neq 0$ , on sous-entend évidemment que  $q' (= \frac{1}{p'})$  est nul pour  $p = -\frac{\alpha}{\beta}$ , et que  $p' = \frac{\delta}{\beta}$  lorsque  $q (= \frac{1}{p})$  est nul].

*Remarque 2.1.* — Posant  $x' = y, y' = x$ , on a alors  $p' = q$ . On peut donc considérer les changements de carte de  $(x, y, p)$  en  $(x, y, q)$  comme des changements de carte de  $(x, y, p)$  en  $(x', y', p')$  particuliers.

### 2.2. Le fibré vectoriel tautologique sur $\widetilde{M}$

On notera  $L$  le fibré vectoriel tautologique en droites de  $\mathbb{P}TM \xrightarrow{\pi} M$  au dessus de  $\widetilde{M}$  : c'est un sous-fibré vectoriel de  $\pi^{-1}(TM)$  dont la fibre en chaque point  $[v] \in \widetilde{M}$  est le sous-espace vectoriel de  $T_m M$  engendré par le vecteur  $v$ , où l'on a posé  $m = \pi([v])$ . On notera  $\check{L}$  le fibré vectoriel dual de  $L$ .

L'application  $\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} : \tilde{m} \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\pi(\tilde{m})} + p \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\pi(\tilde{m})}$  est une trivialisat-ion holomorphe locale de  $L$ , i.e. une section holomorphe partout non nulle au dessus du domaine de la carte locale  $(x, y, p)$ .

Pour tout entier  $k \geq 0$ , on notera  $\left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y}\right)^k$  (resp.  $\left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y}\right)^{-k}$ ) la section de la puissance tensorielle  $k$  de  $L$  (resp. de  $\check{L}$ ) qu'on déduit naturellement de  $\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y}$ .

Soit  $\frac{\partial}{\partial x'} + p' \frac{\partial}{\partial y'}$  la trivialisat-ion locale définie de façon analogue à partir de  $(x'y', p')$ .

LEMME 2.2. — *Les fonctions  $(\alpha + p\beta)$  définissent un système de fonctions de transition pour  $L$  au sens suivant :  $\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} = (\alpha + p\beta) \left(\frac{\partial}{\partial x'} + p' \frac{\partial}{\partial y'}\right)$  sur l'intersection des deux domaines.*

Démonstration immédiate.

### 2.3. Fibré tangent à $\widetilde{M}$

Notons  $\mathcal{V}$  le sous-fibré de  $T\widetilde{M}$  des vecteurs tangents aux fibres de  $\pi$ .

LEMME 2.3. — *Le fibré  $\mathcal{V}$  est canoniquement isomorphe à  $\pi^{-1}(\wedge^2 TM) \otimes \check{L}^2$ , d'où la suite exacte de fibrés vectoriels*

$$0 \rightarrow \pi^{-1} \left( \wedge^2 TM \right) \otimes \check{L}^2 \rightarrow T\widetilde{M} \xrightarrow{\pi^*} \pi^{-1}(TM) \rightarrow 0.$$



*Démonstration.* — Cela se lit immédiatement sur la matrice jacobienne

$$\frac{D(x', y', p')}{D(x, y, p)} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial x} & \frac{\partial p'}{\partial y} & \frac{\Delta}{(\alpha+p\beta)^2} \end{pmatrix}, \text{ où } \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

qui fournit un système de fonctions de transition de  $T\widetilde{M}$ . On identifie donc  $\frac{\partial}{\partial p}$  et  $(\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}) \otimes (\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y})^{-2}$ .

Le crochet d'un champ de vecteurs sur  $\widetilde{M}$  par un champ de vecteurs vertical passe aux quotients modulo les champs verticaux et définit donc un "crochet"

(champs verticaux)  $\times$  (sections de  $\pi^{-1}(TM)$ )  $\rightarrow$  (sections de  $\pi^{-1}(TM)$ )  
 linéaire par rapport aux champs verticaux, et en particulier une application

$$(\text{champs verticaux}) \times (\text{sections de } L) \rightarrow (\text{sections de } \pi^{-1}(TM))$$

d'où, par dualité, pour tout entier positif  $k$ , une dérivation de Lie

$$\theta_v : (\text{sections de } \check{L}^k) \rightarrow (\text{sections de } \pi^{-1}(S^k(T^*M)))$$

dépendant linéairement du champ vertical  $v$ . □

LEMME 2.4. — *Les sections de  $\check{L}^k$  qui sont annulées par tout  $\theta_v$  (on les dira "verticalement invariantes") sont les sections de  $\check{L}^k$  qui sont projection par  $\pi^{-1}(S^k(T^*M)) \rightarrow \check{L}^k$  d'une section de  $\pi^{-1}(S^k(T^*M))$  constante en  $p$ , c'est-à-dire image réciproque par  $\pi$  d'une section de  $S^k(T^*M)$ .*

*Démonstration évidente.*

### 2.4. Fibré vectoriel $\mathcal{L}$ et forme de contact tautologique sur $\widetilde{M}$

PROPOSITION 2.5. — *Il existe une 1-forme canonique  $\omega : T\widetilde{M} \rightarrow \mathcal{L}$  sur  $\widetilde{M}$ , à coefficients dans le fibré vectoriel  $\mathcal{L} = L \otimes \mathcal{V}$ , telle que, sur le domaine d'un système de coordonnées locales  $(x, y, p)$ ,  $\omega$  s'écrive*

$$(dy - p dx) \otimes \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y} \right) \otimes \frac{\partial}{\partial p} \right).$$

*Démonstration.* — Notons  $\eta$  la forme de contact  $\eta = dy - p dx$  sur le domaine de  $(x, y, p)$ , et  $\eta' = dy' - p'dx'$  définie de façon analogue sur le domaine de  $(x', y', p')$ . Le théorème résulte de la formule  $\eta' = \frac{\Delta}{\alpha+p\beta} \eta$  sur l'intersection des deux domaines, puisque  $\frac{\Delta}{\alpha+p\beta}$  est un système de fonctions de transition de  $\pi^{-1}(\wedge^2 TM) \otimes \check{L} = L \otimes \mathcal{V}$ . □

Cette forme  $\omega$  à coefficients dans  $\mathcal{L}$  sera appelée *forme de contact tautologique*.

*Remarque 2.6.* — Du calcul du déterminant de la matrice jacobienne  $\frac{D(x', y', p')}{D(x, y, p)}$ , on déduit aussi que les fibrés  $\wedge^3 T\widetilde{M}$  et  $\mathcal{L}^2$  sont canoniquement isomorphes.

### 3. Tissus sur une surface holomorphe $M$

Soient  $E \rightarrow M$  un fibré vectoriel holomorphe de rang 1, et  $d$  un entier  $\geq 1$ . Rappelons qu'un  $d$ -tissu sur  $M$  de type  $E$  est la donnée d'un polynôme homogène épuré  $\varpi : S^d(TM) \rightarrow E$  à coefficients dans  $E$ , dont l'ensemble discriminant est de dimension complexe  $\leq 1$ . On considérera aussi parfois  $\varpi$  comme une section holomorphe du fibré vectoriel  $S^d(T^*M) \otimes E$ .

#### 3.1. La surface $W$

En composant l'application  $L^d \rightarrow \pi^{-1}(S^d(TM))$  induite à partir de l'inclusion naturelle  $L \rightarrow \pi^{-1}(TM)$ , avec le morphisme

$$\pi^{-1}(\varpi) : \pi^{-1}(S^d(TM)) \rightarrow \pi^{-1}(E),$$

on obtient une section holomorphe  $s_W$  du fibré  $\check{L}^d \otimes \pi^{-1}(E)$ , verticalement invariante et non identiquement nulle. L'ensemble  $W = (s_W)^{-1}(0)$  des zéros de cette section est une surface analytique complexe dans  $\widetilde{M}$ .

On notera  $W'$  la partie régulière de  $W$ ,  $\Sigma(W) = W \setminus W'$  sa partie singulière, et  $\pi_W : W \rightarrow M$  la restriction de  $\pi$  à  $W$ .

Nous dirons que le tissu est *lisse* si la surface  $W$  n'a pas de singularité ( $W = W'$ ). Nous verrons que la surface  $W$  d'un tissu lisse est nécessairement irréductible ; nous dirons plus généralement que le tissu est *quasi-lisse* si toutes les composantes irréductibles de  $W$  sont lisses.

Tout tissu  $W$  sur  $M$  induit de façon naturelle un tissu  $W_U = W \cap \pi^{-1}(U)$  sur tout ouvert  $U$  de  $M$ .

On notera  $\tilde{x}, \tilde{y}$  et  $\tilde{p}$  les restrictions à  $W$  de  $x, y$  et  $p$ .

*Remarque 3.1.* — Soit  $\sigma_E$  une trivialisat on locale de  $E$  au-dessus d'un ouvert  $U$  de  $M$  admissible pour des coordonnées holomorphes locales  $(x, y)$ . La restriction de  $\varpi$     $U$  s'écrit alors sous la forme  $(\sum_{i=0}^d a_i(x, y)(dx)^i (dy)^{d-i}) \otimes \sigma_E$ , tandis que la restriction de  $s_W$  à  $\pi^{-1}(U)$  s'écrit :

$$F \cdot \left( \pi^{-1}(\sigma_E) \otimes \left( \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} \right)^{-d} \right), \text{ avec } F(x, y, p) = \sum_{i=0}^d a_i(x, y) p^{d-i}.$$

La surface  $W$  est donc définie localement par l'équation  $F(x, y, p) = 0$  ( $F$  étant épuré). Ceci prouve en particulier que le tissu est entièrement défini par la donnée de  $W$ .

### 3.2. Courbe critique et revêtement associé au tissu

Notons  $W_0$  l'ensemble des points  $\tilde{m}$  de  $W'$ , en lesquels la différentielle  $\pi_* : T_{\tilde{m}}W \rightarrow T_mM$  est un isomorphisme.

LEMME 3.2. — *Le complémentaire  $\Gamma_W$  de  $W_0$  dans  $W$  est un ensemble analytique complexe de dimension complexe au plus 1.*

*Démonstration.* — La projection  $\pi(\Gamma_W)$  est en effet la courbe discriminante qui est de dimension complexe 1. Si  $\Gamma_W$  contenait une composante  $K$  de dimension complexe 2, sa projection  $\pi(K)$  serait une solution parasite de l'équation différentielle, et la forme  $\varpi$  définissant le tissu ne serait pas réduite.  $\square$

On appelle  $\Gamma_W$  la *courbe critique* du tissu, et sa projection  $\pi(\Gamma_W)$  sur  $M$  sa *courbe discriminante*.

On appelle *partie régulière* du tissu la projection  $M_0 = \pi(W_0)$  de  $W_0$ .

#### Remarques 3.3.

1) Attention à la terminologie : la partie régulière  $M_0 = \pi(W_0)$  du tissu est en général strictement plus petite que la projection  $\pi(W')$  de la partie régulière  $W'$  de la surface  $W$ .

2) Il se peut que  $\Gamma_W$  soit vide même si  $M$  est compacte. Par exemple si  $M$  est égal à  $\mathbb{T}^2$ , où  $\mathbb{T}$  désigne un tore  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ , notons  $(x, y)$  les coordonnées canoniques sur  $\mathbb{C}^2$ , qui induisent des coordonnées locales encore notées  $(x, y)$  au voisinage de tout point de  $\mathbb{T}^2$ . Le fibré  $\pi : \widetilde{\mathbb{T}^2} \rightarrow \mathbb{T}^2$  est ici trivial. Pour le  $d$ -tissu sans singularité défini par  $F(x, y, p) = \prod_{k=0}^{d-1} (p - k)$ ,  $\Gamma_W$  est vide. Nous verrons que des situations analogues ne peuvent se produire lorsque  $M = \mathbb{P}_2$ .

Soit  $G(x', y', p') = \sum_{i=0}^d b_i(x', y')(p')^{d-i}$  l'équation locale de  $W$  définie de faç on analogue à  $F$  à partir de  $(x', y', p')$ , les deux trivialisations locales de  $E$  correspondantes,  $\sigma_E$  et  $\sigma'_E$  se déduisant l'une de l'autre sur leur domaine commun par une fonction holomorphe  $u$  ne s'annulant pas :  $\sigma_E = u \cdot \sigma'_E$ .

LEMME 3.4. — *La formule suivante est vérifiée :*

$$F'_p = u^{-1}(\alpha + p\beta)^{d-2} \Delta G'_{p'} + u^{-1} \cdot d \cdot (\alpha + p\beta)^{d-1} \beta G.$$

*Démonstration.* — Sur l'intersection des domaines de définition des cartes locales  $(x, y, p)$  et  $(x', y', p')$ ,  $F$  et  $G$  sont reliées par la formule :

$$G(x'(x, y), y'(x, y), (\gamma + p\delta)(\alpha + p\beta)^{-1}) \equiv u \cdot (\alpha + p\beta)^{-d} F(x, y, p).$$

On obtient la formule du lemme en dérivant par rapport à  $p$ . □

PROPOSITION 3.5.

- (i) La projection  $\pi_W : W_0 \rightarrow M_0$  est un revêtement à  $d$  feuilletts.
- (ii) La courbe critique  $\Gamma_W$  est égale à l'ensemble  $(s_\Gamma)^{-1}(0)$  des zéros d'une section holomorphe  $s_\Gamma$  du fibré  $[\pi^{-1}E \otimes \mathcal{V}^* \otimes \check{L}^d]_{|W}$  de base  $W$ , localement définie par les équations  $F'_p = 0$  et  $F = 0$ .

*Démonstration.* — L'ouvert  $W_0$  de  $W$  est précisément l'ensemble des points où l'équation  $F(x, y, p) = 0$  admet  $d$  racines distinctes en  $p$ . Pour  $F'_p \neq 0$ , le théorème des fonctions implicites permet d'affirmer que la restriction de  $\pi$  à  $W_0$  est un difféomorphisme local.

Au-dessus de  $W$ ,  $G = 0$ , d'où la formule  $F'_p = u^{-1}(\alpha + p\beta)^{d-2} \Delta G'_p$ , d'après le lemme 3.4. Puisque les fonctions  $u^{-1}(\alpha + p\beta)^{d-2} \Delta$  sont les fonctions de transition du fibré  $[\pi^{-1}E \otimes \mathcal{V}^* \otimes \check{L}^d]$ , les dérivées partielles  $F'_p$  et  $G'_p$  se recollent pour définir une section  $s_\Gamma$  de la restriction à  $W$  de ce fibré. □

*Remarque 3.6.* — Supposant  $M_0$  connexe, chaque composante connexe de  $W_0$  est elle-même un revêtement de  $M_0$ , dont la classe d'isomorphie est entièrement définie par la donnée d'une classe de conjugaison de sous-groupe du groupe fondamental  $\pi_1(M_0)$ . La famille de ces classes de conjugaison de sous-groupes est donc un invariant du tissu.

Par exemple, pour le 2-tissu algébrique formé des tangentes à une conique propre,  $M_0$  est le complémentaire de la conique dans  $\mathbb{P}_2$ , le groupe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  opère librement sur  $W_0$  en permutant les deux éléments de contact au dessus d'un point de  $M_0$ , et le sous groupe de  $\pi_1(M_0)$  associé au revêtement est un sous groupe normal d'ordre 2.

### 3.3. Tissus dicritiques et non-dicritiques

Soit  $G(x', y', p') = 0$  l'équation locale de  $W$  définie comme en la sous-section B ci-dessus à partir de  $(x', y', p')$  de façon analogue à  $F$  à partir de  $(x, y, p)$ .

LEMME 3.7. — *La formule suivante est vérifiée :*

$$\begin{aligned}
 F'_x + p F'_y &= u^{-1}(\alpha + p\beta)^{d+1} (G'_{x'} + p' G'_{y'}) \\
 &+ \left[ (u^{-1}(\alpha + p\beta)^d)'_x + p(u^{-1}(\alpha + p\beta)^d)'_y \right] G \\
 &+ u^{-1}(\alpha + p\beta)^d \left( \frac{\partial p'}{\partial x} + p \frac{\partial p'}{\partial y} \right) G'_{p'}.
 \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Sur l'intersection des domaines de définition des cartes locales  $(x, y, p)$  et  $(x', y', p')$ ,  $F$  et  $G$  sont reliées par la formule :

$$G(x'(x, y), y'(x, y), (\gamma + p\delta)(\alpha + p\beta)^{-1}) \equiv u \cdot (\alpha + p\beta)^{-d} F(x, y, p).$$

On obtient alors la formule du lemme en dérivant par rapport à  $x$  et à  $y$ . □

COROLLAIRE 3.8.

- (i) *Les expressions  $F'_x + p F'_y$  et  $G'_{x'} + p' G'_{y'}$ , se recollent donc au dessus de  $\Gamma_W$  pour définir une section  $s_\Sigma$  du fibré  $[\pi^{-1}(E) \otimes \check{L}^{d+1}]|_{\Gamma_W}$ , localement définie par les équations  $(F'_x + p F'_y = 0, F = 0, F'_p = 0)$ .*
- (ii) *Dans le cas particulier où  $M = \mathbb{P}_2$  et où l'on prend pour  $(x, y)$  et  $(x', y')$  des systèmes de coordonnées affines, les expressions  $F'_x + p F'_y$  et  $G'_{x'} + p' G'_{y'}$ , se recollent au dessus de tout  $W$  pour définir une section du fibré  $[\pi^{-1}(E) \otimes \check{L}^{d+1}]|_W$ , encore notée  $s_\Sigma$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.*

*Démonstration.* — Au-dessus de  $\Gamma_W$ ,  $G = 0$  et  $G'_{p'} = 0$ , d'où la formule  $F'_x + p F'_y = u^{-1}(\alpha + p\beta)^{d+1} (G'_{x'} + p' G'_{y'})$  d'après le lemme 3.7. Puisque les fonctions  $u^{-1}(\alpha + p\beta)^{d+1}$  sont les fonctions de transition du fibré  $[\pi^{-1}E \otimes \check{L}^{d+1}]$ , les expressions  $F'_x + p F'_y$  et  $G'_{x'} + p' G'_{y'}$  se recollent pour définir une section  $s_\Sigma$  de la restriction de ce fibré à  $\Gamma_W$ .

Lorsque  $(x, y)$  et  $(x', y')$  sont des systèmes de coordonnées affines sur  $\mathbb{P}_2$ , les changements de carte sont du type  $x' = \frac{x}{y}, y' = \frac{1}{y}$  ou  $x' = y, y' = x$ , et  $p' = \frac{-p}{y-px}$  ou  $p' = \frac{1}{p}$ . Dans les deux cas, l'expression  $\frac{\partial p'}{\partial x} + p \frac{\partial p'}{\partial y}$  est nulle de sorte que la relation  $F'_x + p F'_y = u^{-1}(\alpha + p\beta)^{d+1} (G'_{x'} + p' G'_{y'})$  reste valable sur tout  $W$ , et pas seulement sur  $\Gamma_W$ . □

Lorsque  $M = \mathbb{P}_2$ , nous appellerons *ensemble co-critique* et noterons  $\Gamma'_W$  l'ensemble des zéros de  $s_\Sigma$ . Nous y reviendrons au paragraphe 4.

DÉFINITION 3.9. — *Nous dirons qu'un tissu est non-dicritique<sup>(2)</sup> si la section  $s_\Sigma$  du fibré  $[\pi^{-1}(E) \otimes \check{L}^{d+1}]|_{\Gamma_W}$  n'est pas identiquement nulle, et*

<sup>(2)</sup> Des concepts voisins ont été définis par Dara [6].

dicritique<sup>(3)</sup> dans le cas contraire. Plus généralement, si  $s_\Sigma$  est nulle sur une composante irréductible  $C$  de  $\Gamma_W$ , nous dirons que le tissu est dicritique le long de  $C$ .

### 3.4. Feuilletage canonique $\tilde{\mathcal{F}}$ dans $W'$

Rappelons que  $W'$  désigne la partie lisse de la surface  $W$ . Soit  $\omega_{W'} : TW' \rightarrow \mathcal{L}|_{W'}$  la restriction de la forme  $\omega$  à  $TW'$  : elle est nécessairement intégrable puisque  $W'$  est de dimension 2, et définit par conséquent un feuilletage holomorphe  $\tilde{\mathcal{F}}$  sur  $W'$ . On appelle *feuille du tissu dans  $M$*  la projection par  $\pi$  de toute feuille de  $\tilde{\mathcal{F}}$  dans  $W'$  ou de son adhérence dans  $W$ .

**THÉORÈME 3.10.** — *On peut aussi définir ce feuilletage comme un morphisme holomorphe*

$$\ell : \mathcal{M} \rightarrow TW'$$

d'un certain fibré vectoriel en droites  $\mathcal{M}$  dans  $TW'$ ,

– localement défini par le champ de vecteurs :

$$X_1 = F'_p \left( \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} \right) - (F'_x + p F'_y) \frac{\partial}{\partial p},$$

(égal à  $F'_p \left( \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + p \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right)$  sur  $W_0$ ) dans le cas d'un tissu non-dicritique, auquel cas  $\mathcal{M} = [\pi^{-1}E^* \otimes \mathcal{V} \otimes L^{d+1}]|_{W'}$ ,

– localement défini par le champ de vecteurs :  $X_2 = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + p \frac{\partial}{\partial \bar{y}}$  sur  $W_0$ , et  $X_2 = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y}$  sur  $\Gamma_W$ , dans le cas dicritique, auquel cas  $\mathcal{M} = L|_{W'}$ .

*Démonstration.* — Le champ  $X_1$  appartient en effet au noyau de  $\omega$  ; il préserve  $W$  (il vérifie même :  $X.F \equiv 0$ ). Le champ

$$X'_1 = G'_{p'} \left( \frac{\partial}{\partial x'} + p' \frac{\partial}{\partial y'} \right) - (G'_{x'} + p' G'_{y'}) \frac{\partial}{\partial p'}$$

défini de façon analogue à partir des coordonnées  $(x', y', p')$  se recolle d'autre part avec  $X_1$  sur l'intersection des domaines de définition (y compris lorsque ceux-ci recourent  $\Gamma_W$ ) par la formule  $X_1 = u^{-1} \Delta(\alpha + p\beta)^{d-1} X'_1$ .

Dans le cas dicritique,  $X_1$  est identiquement nul sur  $\Gamma_W$ , la restriction à  $W_0$  de  $\frac{1}{F'_p} X_1$  se prolonge en  $X_2$  en dehors de  $\Gamma_W$ , tandis que  $X_2$  et  $X'_2$  se recollent par la formule  $X_2 = (\alpha + p\beta) X'_2$ .

<sup>(3)</sup> Dire qu'un feuilletage sur  $M$  est dicritique en tant que 1-tissu signifie qu'en tout point singulier  $m_0$  du feuilletage, la partie linéaire d'un champ de vecteurs le définissant localement est :

- soit radiale (auquel cas  $m_0$  est en particulier une singularité dicritique du feuilletage au sens usuel),
- soit nulle.

Puisque  $u^{-1}\Delta(\alpha + p\beta)^{d-1}$  (resp.  $\alpha + p\beta$ ) est la fonction de transition de  $[\pi^{-1}E^* \otimes \mathcal{V} \otimes L^{d+1}]|_{W'}$  (resp.  $L$ ), le théorème en résulte.  $\square$

**PROPOSITION 3.11.** — *La projection  $\pi_W : W_0 \rightarrow M_0$  du revêtement projective localement  $\tilde{\mathcal{F}}$  sur  $d$  feuilletages distincts  $\mathcal{F}_i$ , ( $1 \leq i \leq d$ ), deux à deux transverses sur  $M_0$ .*

*Démonstration.* — En un point  $\tilde{m} \in W_0$  se projetant en  $m \in M_0$ , la différentielle  $\pi_* : T_{\tilde{m}}W_0 \rightarrow T_mM$  est un isomorphisme, les restrictions  $\tilde{x}, \tilde{y}$  de  $x$  et  $y$  à  $W$  forment un système de coordonnées locales sur  $W_0$  au voisinage de ce point, par rapport auquel  $X$  s'écrit encore  $F'_p \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + p \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right)$  et  $\omega_W = (d\tilde{y} - p d\tilde{x}) \otimes \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + p \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right) \otimes \frac{\partial}{\partial p}$  ne peut être nulle. Les racines  $p_i(x, y)$  de l'équation  $F(x, y, p) = 0$  sont toutes distinctes sur  $W_0$ , puisque  $F'_p \neq 0$  : le feuilletage  $\mathcal{F}_i$  est en effet celui qui est engendré par le champ de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial x} + p_i(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ .  $\square$

*Remarques 3.12.*

1) Il faut prendre garde cependant au fait que ces  $d$  feuilletages ne sont discernables que localement. Globalement, ils peuvent ne pas l'être, ainsi que nous le verrons plus loin.

2) Dans les deux cas, dicritique et non-dicritique, la composée  $(\iota)_* \circ \ell : \mathcal{M} \rightarrow T\tilde{M}|_{W'}$  obtenue en composant  $\ell$  avec la différentielle de l'inclusion  $\iota : W' \subset \tilde{M}$  admet un prolongement naturel à tout  $W$ , ce que l'on résumera en disant que le feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  est défini sur tout  $W$ , même si  $W$  admet des singularités.

### 3.5. Partie singulière du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$

On appelle partie singulière du feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  la réunion  $\Sigma(\tilde{\mathcal{F}})$  de l'ensemble  $\Sigma(W)$  des points singuliers de  $W$  et de l'ensemble des points singuliers de  $\tilde{\mathcal{F}}$  dans la partie régulière  $W'$  de  $W$ .

**THÉORÈME 3.13.**

- (i) *Si le tissu n'est pas dicritique, la partie singulière  $\Sigma(\tilde{\mathcal{F}})$  du feuilletage est égale à l'ensemble  $s_{\Sigma}^{-1}(0)$  des zéros de la section  $s_{\Sigma}$  du fibré  $(\pi^{-1}(E) \otimes \check{L}^{d+1})|_{\Gamma_W}$ .*
- (ii) *Si le tissu est dicritique, le feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  n'a pas de singularité sur  $W'$ .*

*Démonstration.* — La partie (ii) est évidente, car le champ  $X_2$  ne s'annule jamais.

Supposons donc le tissu non-dicritique. En un point  $\tilde{m} \in W' \cap \Gamma_W$ , l'une au moins des dérivées partielles  $F'_x(\tilde{m})$  ou  $F'_y(\tilde{m})$  est non nulle. Si  $F'_x(\tilde{m}) \neq 0$ ,  $x$  est localement fonction de  $y$  et  $p$  d'après le théorème des fonctions implicites,  $(\tilde{y}, \tilde{p})$  forment un système de coordonnées locales sur  $W'$  au voisinage de ce point, et l'équation  $\omega_W = 0$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  s'écrit localement :  $(F'_x + \tilde{p}F'_y)d\tilde{y} + \tilde{p}F'_p d\tilde{p} = 0$ . Si  $F'_y(\tilde{m}) \neq 0$ ,  $y$  est localement fonction de  $x$  et  $p$ ,  $(\tilde{x}, \tilde{p})$  forment un système de coordonnées locales sur  $W'$  au voisinage de ce point, et l'équation  $\omega_W = 0$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$  s'écrit maintenant localement :  $(F'_x + \tilde{p}F'_y)d\tilde{x} + F'_p d\tilde{p} = 0$ . Dans tous les cas, les points singuliers de  $\tilde{\mathcal{F}}$  sur  $W'$  sont les points de  $W' \cap \Gamma_W$  vérifiant l'équation  $F'_x + pF'_y = 0$ .  $\square$

**Résidus des feuilletages non-dicritiques.** Soit  $C$  une composante irréductible lisse compacte de  $\Gamma_W$  le long de laquelle le tissu n'est pas dicritique. Notons  $\{m_\alpha\}$  l'ensemble des points (isolés) de  $C \cap \Sigma(\tilde{\mathcal{F}})$ . Au voisinage de chaque point  $m_\alpha$ , choisissons des coordonnées locales  $(x, y, p)$  ainsi qu'une trivialisat on locale de  $E$  d'où une équation locale  $F = 0$  du tissu, et notons  $\nu_\alpha$  l'ordre en  $m_\alpha$  de la restriction  $F'_x + pF'_y|_C$  de  $F'_x + pF'_y$  à  $C$ .

**THÉOREME 3.14.** — *La formule suivante est vérifiée :*

$$\sum_{\alpha} \nu_{\alpha} = -(\pi^* c_1(E) + (d + 1)c_1(L)) \frown [C],$$

dans laquelle la somme  $\sum_{\alpha} \nu_{\alpha}$  ne dépend pas des choix effectu es ci-dessus.

[La notation  $c_1$  désigne la première classe de Chern. Rappelons que c'est la seule qui soit non triviale pour les fibrés de rang 1, et qu'on peut la définir par exemple comme l'image de la classe d'isomorphie du fibré par l'isomorphisme  $\partial : H^1(\cdot, \mathbb{C}_d^*) \rightarrow H^2(\cdot, \mathbb{Z})$  induit en cohomologie par la suite exacte  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^*$ . On a identifi e la classe d'isomorphie du fibré à la classe de cohomologie du cocycle défini par un système de fonctions de transitions de ce fibré,  $\mathbb{C}_d^*$  désignant le faisceau des germes de fonctions différentiables à valeurs dans  $\mathbb{C}^*$ .]

*Démonstration.* — Le long de  $C$ , le feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  est tangent à  $\mathcal{V}$ , d'où un morphisme  $\mathcal{M}|_C \rightarrow \mathcal{V}|_C$  qui est un isomorphisme en dehors des points  $m_\alpha$ . La restriction à  $\Gamma_W$  du champ de vecteurs  $X_1$  définissant le feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  s'écrit localement  $X_1 = (F'_x + pF'_y) \frac{\partial}{\partial p}$ , de sorte que le morphisme ci-dessus s'exprime par la multiplication par  $F'_x + pF'_y$ , une fois  $\mathcal{M}|_C$  et  $\mathcal{V}|_C$  trivialis es par  $X_1$  et  $\frac{\partial}{\partial p}$  respectivement. On en déduit  $\sum_{\alpha} \nu_{\alpha} = c_1([\mathcal{M} - \mathcal{V}]) \frown [C]$ , d'où le résultat, d'après le corollaire 4 de [3].  $\square$



### 3.6. Irréductibilité et indiscernabilité

Soit  $W$  la surface dans  $\widetilde{M}$  associée à un  $d$ -tissu de type  $E$  sur une surface  $M$  ( $d \geq 2$ ), ensemble des zéros d'une section holomorphe  $s_W$  non identiquement nulle du fibré  $\pi^{-1}(E) \otimes \check{L}^d$ . S'il existe deux entiers  $d_1$  et  $d_2 \geq 1$  tels que  $d = d_1 + d_2$ , deux fibrés  $E_1$  et  $E_2$  de rang 1 sur  $M$  tels que  $E = E_1 \otimes E_2$ , un  $d_1$ -tissu  $W_1 = s_1^{-1}(0)$  et un  $d_2$ -tissu  $W_2 = s_2^{-1}(0)$  tels que  $s_W = s_1 \otimes s_2$  quand on identifie  $\pi^{-1}(E) \otimes \check{L}^d$  à  $\pi^{-1}(E_1) \otimes \pi^{-1}(E_2) \otimes \check{L}^{d_1} \otimes \check{L}^{d_2}$ , on dira que le tissu  $W$  est *réductible* en  $W_1 \cup W_2$ . Sinon, on le dira *irréductible*.

Si  $W$  est réductible en  $W_1 \cup W_2$ , on observera que tous les points de  $W_1 \cap W_2$  sont des points singuliers de la surface  $W$ . Par contre, génériquement, les tissus  $W$  irréductibles n'ont pas de point singulier, car – localement – les quatre équations  $F = 0$ ,  $F'_x = 0$ ,  $F'_y = 0$  et  $F'_p = 0$  n'ont aucune raison d'avoir des racines communes.

THÉORÈME 3.15.

- (i) Si  $W_0 = W \setminus \Gamma_W$  est une partie connexe de  $W$ , le tissu est irréductible.
- (ii) Réciproquement, si la surface  $W$  est compacte, connexe et sans singularité (cette dernière hypothèse impliquant en particulier que le tissu est irréductible), l'ouvert  $W_0 = W \setminus \Gamma_W$  de  $W$  est connexe lui aussi.

*Démonstration.* — Supposons  $W$  réductible en  $W_1 \cup W_2$ . La courbe critique  $\Gamma_W$  est alors égale à  $\Gamma_{W_1} \cup \Gamma_{W_2} \cup (W_1 \cap W_2)$ . Ainsi  $W_0$ , qui est recouvert par les deux ouverts disjoints non vides  $(W_1)_0 \setminus (W_1 \cap W_2)$  et  $(W_2)_0 \setminus (W_1 \cap W_2)$ , n'est certainement pas connexe.

Réciproquement, supposons la surface  $W$  compacte, connexe et sans singularité. Puisque la dimension réelle de la variété  $W$  sans singularité est 4, la suite exacte de cohomologie à coefficients entiers

$$0 \rightarrow H^0(W, W_0) \rightarrow H^0(W) \rightarrow H^0(W_0) \rightarrow H^1(W, W_0) \rightarrow \dots$$

devient, après dualités de Poincaré et d'Alexander :

$$0 \rightarrow H_4(\Gamma_W) \rightarrow H_4(W) \rightarrow H_4(W, \Gamma_W) \rightarrow H_3(\Gamma_W) \rightarrow \dots$$

Puisque la dimension réelle de  $\Gamma_W$  est 2,  $H_4(\Gamma_W)$  et  $H_3(\Gamma_W)$  sont nuls. On en déduit que  $H_4(W, \Gamma_W)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ ; il en est donc de même pour  $H^0(W_0)$ .  $\square$

COROLLAIRE 3.16. — *Tout tissu compact connexe se décompose sous la forme  $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_r$  en composantes  $W_j$  irréductibles, les*

composantes connexes de  $W_0$  étant les ouverts  $(W_j)_0 \setminus \bigcup_{i,i \neq j} (W_i \cap W_j)$  de cette décomposition (en nombre exactement égal à  $r$  si chaque composante irréductible  $W_j$  est lisse, et au moins égal à  $r$  dans le cas général).

On dira qu'un  $d$ -tissu  $W$  est *totalelement réductible* si  $r = d$  : cela veut dire que  $W$  est la réunion de  $d$  feuilletages  $W_j$  discernables.

Localement, au voisinage de tout point de  $M_0$ , un tissu est toujours totalement réductible : en effet, si le tissu a pour équation locale  $F(x, y, p) = 0$ ,  $F$  s'écrit :

$$F = a_0(x, y) \prod_{i=1}^d (p - p_i(x, y)) \text{ ou } a_d(x, y) \prod_{i=1}^d (q - q_i(x, y)),$$

les  $p_i$  (resp. les  $q_i$ ) étant tous distincts puisque  $(x, y)$  appartient à  $M_0$ . On appellera *ouvert de discernabilité* du tissu  $S$  tout ouvert  $U$  de  $M_0$  tel que la restriction  $W_U = W \cap \pi^{-1}(U)$  de  $W$  à  $U$  soit totalement réductible. Il revient au même de dire que la restriction à  $U$  du revêtement  $\pi_w : W_0 \rightarrow M_0$  est triviale.

On appelle *espace des feuilles de  $M_0$*  et l'on note  $W_0/\widetilde{\mathcal{F}}_0$  l'espace des feuilles de  $W_0$  pour le feuilletage  $\widetilde{\mathcal{F}}_0$  induit par  $\widetilde{\mathcal{F}}$  sur  $W_0$ , c'est-à-dire l'espace topologique quotient de  $W_0$  par la relation d'équivalence :  $\widetilde{m}_1 \sim \widetilde{m}_2$  si  $\widetilde{m}_1$  et  $\widetilde{m}_2$  appartiennent à une même feuille de  $\widetilde{\mathcal{F}}_0$ .

Soit  $m$  un point de  $M_0$  et  $F_i$  et  $F_j$  deux germes de feuilles distincts du tissu en  $m_0$  respectivement tangents aux feuilletages locaux  $\mathcal{F}_i$  et  $\mathcal{F}_j$ . Soient  $\widetilde{m}_i$  et  $\widetilde{m}_j$  les relèvements de  $m$  dans  $W_0$ , tels que les germes de feuilles de  $\widetilde{\mathcal{F}}$  en  $\widetilde{m}_i$  et  $\widetilde{m}_j$  se projettent respectivement sur  $F_i$  et  $F_j$ .

DÉFINITION 3.17. — *On dira que  $F_i$  et  $F_j$  sont globalement indiscernables si les feuilles de  $\widetilde{\mathcal{F}}_0$  passant par  $\widetilde{m}_i$  et  $\widetilde{m}_j$  appartiennent à une même composante connexe de  $W_0/\widetilde{\mathcal{F}}_0$ . Sinon on les dira globalement discernables.*

THÉORÈME 3.18.

- (i) *Si  $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_r$  admet  $r$  composantes irréductibles, l'espace des feuilles  $W_0/\widetilde{\mathcal{F}}_0$  admet au moins  $r$  composantes connexes par arcs. Il en admet exactement  $r$  si chaque surface  $W_i$  est lisse, compacte et connexe.*
- (ii) *Deux germes de feuilles du tissu en un point  $m$  de  $M_0$ ,  $F_i$  et  $F_j$ , sont globalement discernables si et seulement si les points  $\widetilde{m}_i$  et  $\widetilde{m}_j$  correspondants dans  $W_0$  n'appartiennent pas à la même composante connexe de  $W_0$ .*

*Démonstration.* — La première partie du théorème ne fait que résumer la discussion précédente. Si  $\widetilde{m}_i$  et  $\widetilde{m}_j$  appartiennent à une même composante connexe de  $S_0$ ,  $F_i$  et  $F_j$  sont globalement indiscernables, car l'image d'un espace connexe par l'application de passage aux quotients  $W_0 \rightarrow W_0/\widetilde{\mathcal{F}}_0$  est connexe. Réciproquement, si  $F_i$  et  $F_j$  sont globalement indiscernables,  $\widetilde{m}_i$  et  $\widetilde{m}_j$  ne peuvent appartenir à des composantes connexes distinctes de  $W_0$ , l'application précédente de passage aux quotients étant ouverte.  $\square$

### 3.7. Tissus linéarisables

On dira qu'un tissu sur une surface  $M$  arbitraire est *linéarisable* si, au voisinage de tout point de  $M_0$ , il existe des coordonnées locales  $(x, y)$  par rapport auxquelles les feuilles du tissu ont toutes une équation affine (c'est-à-dire de la forme  $ux + vy + w = 0$ ).

Supposons qu'il existe des coordonnées locales  $(x, y)$  sur un ouvert  $U$  de  $M$  telles que les feuilles du tissu aient toutes une équation affine relativement à ces coordonnées : si  $F(x_0, y_0, p_0) = 0$ , la solution de l'équation différentielle  $F(x, y, y') = 0$  passant par  $(x_0, y_0)$  et ayant en ce point la pente  $p_0$  doit vérifier l'identité  $F(x, p_0(x - x_0) + y_0, p_0) \equiv 0$ . En dérivant par rapport à  $x$  au point  $x_0$ , on voit que  $F'_x + pF'_y$  doit être nulle en tout point de  $\pi^{-1}(U) \cap W$ .

#### Remarques 3.19.

1) La nullité de l'expression  $F'_x + pF'_y$  n'a en général de sens intrinsèque que sur  $\Gamma_W$ . Or le domaine de la carte locale par rapport à laquelle l'équation des feuilles est affine n'a peut-être pas d'intersection avec  $\Gamma_W$ . Toutefois, lorsque  $M = \mathbb{P}_2$ , nous avons vu que cette nullité a un sens intrinsèque sur tout  $W$ , à condition de prendre pour  $(x, y)$  un système de coordonnées affines. Il ne sera plus alors seulement question de linéarisabilité, mais de linéarité : les feuilles du tissu seront des droites de  $\mathbb{P}_2$ .

2) Le 4-tissu d'équation  $xp^4 + y + (y - px)^4 = 0$  dans  $\mathbb{C}^2$  se prolonge en un tissu sur tout  $\mathbb{P}_2$ , qui est de degré 1 et n'est donc pas algébrique. Cependant, O. Ripoll a démontré qu'il était de rang maximum, donc linéarisable en vertu d'un théorème de Poincaré ([12], [11]).

3) **À propos du polynôme de linéarisation  $P_W$  de Hénaut ([7]) :** pour un tissu sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}^2$ ,  $P_W$  désigne le polynôme de degré  $d - 1$  en  $p$  qui interpole les valeurs de l'expression  $-(F'_x + pF'_y)/F'_p$  sur les  $d$  feuillettes de  $W_0$  (les solutions  $x \mapsto y(x)$  de l'équation différentielle  $F(x, y, y') = 0$  sont des solutions particulières de l'équation du second ordre  $y'' = P_W(x, y, y')$ ).

Rappelons les formules  $F'_x + pF'_y = u^{-1}(\alpha + p\beta)^{d+1}(G'_{x'} + p'G'_{y'})$  sur  $\Gamma_W$  dans le cas général, et même sur  $W$  dans le cas d'un changement de coordonnées affines sur  $\mathbb{P}_2$ , tandis que  $F'_p = u^{-1}(\alpha + p\beta)^{d-2} \Delta G'_{p'}$  sur  $W$ . On en déduit, sur  $\Gamma_W$  ou sur  $W$  selon les cas :

$$(F'_x + pF'_y)/F'_p = (\alpha + p\beta)^3 \Delta((G'_{x'} + p' G'_{y'})/G'_{p'}).$$

Ceci prouve que, pour une surface  $M$  arbitraire, les expressions  $-(F'_x + pF'_y)/F'_p$  ne se recollent qu'au dessus de  $\Gamma_W$  pour définir une section de  $[\check{L}^3 \otimes \pi^{-1}(\wedge^2 T^*M)]|_{\Gamma_W}$ , ce qui n'a de sens que dans le cas des tissus dicritiques, pour lesquels il existe une fonction holomorphe  $C$  telle que  $(F'_x + pF'_y) = C.F'_p$ . La nullité de  $P_W$  sur tout  $W_0$  dépend donc en général des coordonnées locales utilisées.

Lorsque  $M = \mathbb{P}_2$ , et si les seuls systèmes de coordonnées autorisés sont les coordonnées affines sur un ouvert affine, le recollement a aussi un sens sur tout  $W$ , définissant une section holomorphe de  $\check{L}^3 \otimes \pi^{-1}(\wedge^2 T^*M)|_W$  dans le cas des tissus dicritiques, et une section méromorphe de ce même fibré avec pôle sur  $\Gamma_W$  dans le cas non dicritique. Si les feuilles du tissu sont des droites (ou morceaux de droite) de  $\mathbb{P}_2$  (cas dicritique), cette section est identiquement nulle et réciproquement. On dit alors que le tissu est *linéaire*, ce qui est plus fort que linéarisable. Nous verrons ci-dessous, que s'il est linéaire et défini sur tout  $\mathbb{P}_2$ , il est automatiquement algébrique.

## 4. Tissus sur le plan projectif complexe $\mathbb{P}_2$

### 4.1. Éléments de contact sur $\mathbb{P}_2$

Notons  $(X, Y, Z)$  les coordonnées homogènes dans  $\mathbb{P}_2$ , et  $(u, v, w)$  les coordonnées homogènes dans le plan projectif dual  $\mathbb{P}'_2$  des droites projectives de  $\mathbb{P}_2$  : la droite de coordonnées  $(u, v, w)$  est la droite d'équation  $uX + vY + wZ = 0$  dans  $\mathbb{P}_2$ .

LEMME 4.1. — *La variété  $\widetilde{\mathbb{P}_2}$  s'identifie de façon naturelle au sous-espace des points  $([X, Y, Z], [u, v, w])$  de  $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}'_2$  tels que  $uX + vY + wZ = 0$  : un élément de contact est un couple formé d'un point  $[X, Y, Z]$  et d'une droite  $[u, v, w]$  passant par ce point. Par cette identification,  $\pi$  devient la restriction à  $\mathbb{P}_2$  de la première projection de  $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}'_2$ .*

*Démonstration.* — Soient  $(x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z})$  les coordonnées affines dans l'ouvert  $Z \neq 0$  de  $\mathbb{P}_2$ , et  $m$  le point de coordonnées affines  $(x, y)$ . On identifie

alors le point  $\left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)_m + p \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)_m \right]$  de  $\widetilde{\mathbb{P}}_2$  au couple  $([x, y, 1], [p, -1, y - px])$ . Réciproquement, si  $Zv \neq 0$ , on identifie le point  $([X, Y, Z], [u, v, w])$  de  $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}'_2$  tel que  $uX + vY + wZ = 0$  au point de coordonnées  $(x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z}, p = -\frac{u}{v})$ . On vérifie sans peine, que les identifications analogues sur les ouverts  $Zu \neq 0, Xv \neq 0, Xw \neq 0, Yu \neq 0$  et  $Yw \neq 0$  se recollent sur les intersections de ces différents ouverts.  $\square$

On appellera *ouvert affine* de  $\widetilde{\mathbb{P}}_2$  l'un des six ouverts précédents.

Les espaces  $\mathbb{P}_2$  et  $\mathbb{P}'_2$  jouent alors des rôles parfaitement symétriques : la deuxième projection  $\pi' : \widetilde{\mathbb{P}}_2 \rightarrow \mathbb{P}'_2$  est aussi un espace fibré en droites projectives, sur lequel on peut faire les mêmes constructions qu'avec  $\pi$ . Notons respectivement  $\mathcal{O}(-1)$  et  $\mathcal{O}'(-1)$  les fibrés tautologiques en droites de  $\mathbb{P}_2$  et  $\mathbb{P}'_2$ ,  $\mathcal{O}(1)$  et  $\mathcal{O}'(1)$  leur dual. Posons  $\ell = \pi^{-1}(\mathcal{O}(-1))$  et  $\ell' = \pi'^{-1}(\mathcal{O}'(-1))$ . Plus généralement,  $\ell^k$  (resp.  $\ell^{-k}$  ou  $\check{\ell}^k$ ) désignera, pour tout entier  $k \geq 0$ , la  $k$ -ième puissance tensorielle de  $\ell$  (resp. de son fibré dual  $\check{\ell}$ ), et de même pour  $(\ell')^k$  et  $(\ell')^{-k} = (\check{\ell}')^k$ .

LEMME 4.2.

- (i) Le fibré vectoriel  $\pi^{-1}(\wedge^2 T\mathbb{P}_2)$  s'identifie à  $\check{\ell}^3$ .
- (ii) Le fibré vectoriel  $L$  s'identifie au produit tensoriel  $\ell' \otimes \check{\ell}^2$ .
- (iii) Le fibré  $\mathcal{V}$  est isomorphe au fibré tautologique  $L'$  de  $\widetilde{\mathbb{P}}_2$  identifié au projectivisé de  $T\mathbb{P}'_2$ , et  $\mathcal{L} = L \otimes L'$ .

*Démonstration.* — Les fibrés  $\wedge^2 TM$  et  $TM$  ont même classe de Chern  $c_1$ . Puisque  $T\mathbb{P}_2 \oplus 1 = 3\mathcal{O}(1)$ , et puisqu'un fibré de rang 1 est entièrement défini par sa classe de Chern  $c_1$  à isomorphie près, la partie (i) du lemme en résulte.

Pour le changement de coordonnées affines  $(x' = \frac{x}{y}, y' = \frac{1}{y}, p' = \frac{-p}{y-px})$ , la fonction de transition  $\alpha + p\beta$  du fibré  $L$  s'écrit  $\alpha + p\beta = \frac{y-px}{y^2}$ , soit  $\alpha + p\beta = \Delta \frac{Y}{Z} \frac{w}{v}$  : c'est la fonction de transition de  $\ell' \otimes \ell \otimes \pi^{-1}(\wedge^2 T\mathbb{P}_2)$ . Pour le changement de coordonnées affines  $(x' = y, y' = x, p' = q)$ , on a de même :  $\alpha + p\beta = p$ , soit  $\alpha + p\beta = \Delta \frac{u}{v}$ , d'où l'isomorphisme  $L \cong \ell' \otimes \check{\ell}^2$ . La partie (ii) du lemme s'en suit.

Enfin,  $\mathcal{V}$  est isomorphe à  $\pi^{-1}(\wedge^2 T\mathbb{P}_2) \otimes \check{L}^2$ , soit  $\ell \otimes (\check{\ell}')^2$  d'après les calculs précédents, d'où (iii).  $\square$

### 4.2. Degré d'un tissu sur $\mathbb{P}_2$

Soit  $H(X, Y, Z; u, v, w)$  un polynôme en  $X, Y, Z, u, v, w$ , homogène de degré  $n$  par rapport aux variables  $(X, Y, Z)$ , et homogène de degré  $d$  par rapport aux variables  $(u, v, w)$ . On appellera  $(n, d)$  le bi-degré d'homogénéité de  $H$ . Soit  $W$  la surface d'équations  $(H = 0, uX + vY + wZ = 0)$  dans  $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ . Tout polynôme  $\overline{H}$  définissant la même surface  $W$  doit avoir le même bi-degré. L'entier  $n$  est en fait égal au nombre de points en lesquels une droite générique  $[u_0, v_0, w_0]$  de  $\mathbb{P}_2$  rencontre la surface d'équation  $H(X, Y, Z; u_0, v_0, w_0) = 0$  dans  $\mathbb{P}_2$ , c'est-à-dire est tangente à une solution de l'équation différentielle  $H(x, y, 1; y', -1, y - xy') = 0$  définie par  $W$ . Il a donc une signification géométrique indépendante du polynôme  $H$  qui a servi à définir la surface  $W$ . Ceci est vrai en particulier lorsque  $W$  est un tissu sur  $\mathbb{P}_2$ . On appellera  $n$  le *degré* du tissu ainsi défini.

Par restriction à l'ouvert affine  $Zv \neq 0$ , et relativement aux coordonnées affines  $(x, y, p)$  correspondantes,  $W$  a pour équation  $H(x, y, 1; p, -1, y - px) = 0$ , dont le premier membre est un polynôme de degré  $d$  en  $p$ , à coefficients  $a_i(x, y)$  polynomiaux de degré  $\leq n + d$  en  $(x, y)$ .

Montrons réciproquement que tout tissu sur  $\mathbb{P}_2$  peut-être défini par ce procédé à partir d'un tel polynôme  $H$ . Identifions  $\mathbb{C}^2$  à l'ouvert affine  $Z \neq 0$  de  $\mathbb{P}_2$ , avec les coordonnées affines  $x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z}$ .

#### THÉORÈME 4.3.

- (i) Un tissu sur  $\mathbb{P}_2$  est entièrement défini par sa restriction à  $\mathbb{C}^2$ .
- (ii) Pour qu'un tissu sur  $\mathbb{C}^2$ , d'équation  $F(x, y, p) = 0$ , puisse s'étendre en un tissu sur  $\mathbb{P}_2$ , il faut et il suffit que les coefficients  $a_i$  soient tous polynomiaux en  $(x, y)$ , où l'on a posé :  $F(x, y, p) = \sum_{i=0}^d a_i(x, y)p^{d-i}$ .

*Démonstration.* — Supposons d'abord tous les coefficients  $a_i$  polynomiaux. Notons  $k_i$  le degré de  $a_i$ , et  $k = \sup_i k_i$ . On peut alors homogénéiser  $F$  en posant :  $H_0(X, Y, Z; u, v, w) = Z^k v^d F(X/Z, Y/Z, -u/v)$ . Soit  $(n_0, d)$  le bi-degré de  $H_0$ . Considérons tous les polynômes

$$H_K(X, Y, Z; u, v, w) = H_0(X, Y, Z; u, v, w) + (uX + vY + wZ)K(X, Y, Z; u, v, w)$$

obtenus en faisant varier  $K$  dans l'ensemble des polynômes bi-homogènes de bidegré  $(n_0 - 1, d - 1)$ . Si l'un des polynômes  $H_K$  contient une puissance  $Z^r$  de  $Z$  en facteur ( $r \geq 1$ ), l'ensemble critique de  $(H_K = 0, uX + vY + wZ = 0)$  comprend tout l'ensemble  $Z = 0$ , de dimension complexe 2, et ne définit donc pas un tissu. Soit  $r_1$  le plus grand entier  $r$  obtenu en faisant varier  $K$

( $r_1 \leq n_0$ ). On suppose  $r_1$  réalisé par  $K_1$ , et l'on pose :  $H_1 = \frac{1}{Z^{r_1}} H_{K_1}$ . La surface  $W$  d'équations ( $H_1 = 0, uX + vY + wZ = 0$ ) définit un tissu sur  $\mathbb{P}_2$ , qui ne dépend pas du choix de  $K_1$ , et qui coïncide nécessairement avec tout autre tissu induisant sur  $\mathbb{C}^2$  le tissu originel.

Supposons maintenant qu'il existe des coefficients  $a_j$  non polynomiaux relativement à des coordonnées affines de  $\mathbb{C}^2$ , et soit  $i$  le plus petit des indices de tels coefficients. Relativement aux coordonnées affines  $(x', y', p')$  telles que  $x = \frac{x'}{y'}, y = \frac{1}{y'}$ , et  $p = \frac{-p'}{y' - p'x'}$ , l'équation du tissu devient  $\sum_{j=0}^d a_j \left(\frac{x'}{y'}, \frac{1}{y'}\right) (-p')^{d-j} (y' - p'x')^j$ , soit :  $\sum_{j=0}^d b_j(x', y')(p')^{d-j}$ . Pour que ce tissu soit holomorphe, il faut qu'il existe un entier  $\ell$  tel que, pour tout  $j$ ,  $(y')^\ell b_j(x', y')$  soit holomorphe. On obtient alors

$$b_{d-i}(x', y') = \sum_{j=0}^{i-1} a_{d-j} \left(\frac{x'}{y'}, \frac{1}{y'}\right) (h_{d-j})^i + a_{d-i} \left(\frac{x'}{y'}, \frac{1}{y'}\right) (h_{d-i})^i,$$

pour certaines fonctions  $h_{d-j}$  holomorphes : c'est la somme d'une fonction méromorphe en  $y'$  et d'une fonction à singularité essentielle, qui ne saurait se prolonger à tout le plan projectif. □

### 4.3. Cohomologie de $\widetilde{\mathbb{P}}_2$

Notons respectivement  $\xi = c_1(\check{\mathcal{L}})$ ,  $\xi' = c_1(\check{\mathcal{L}}')$  et  $\eta = c_1(\check{L})$  les classes de Chern des fibrés  $\pi^{-1}(\mathcal{O}(1))$ ,  $\pi'^{-1}(\check{\mathcal{O}}(1))$ , et  $\check{L}$ .

LEMME 4.4. — *Les formules suivantes sont vérifiées :*

- (i)  $\eta = \xi' - 2\xi$ ,
- (ii)  $H^*(\widetilde{\mathbb{P}}_2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\xi, \xi'] / (\xi^3, \xi'^3, \xi^2 + \xi'^2 - \xi\xi')$ .

*Démonstration.* — La formule (i) résulte de l'identité  $L = \ell' \otimes \ell^{-2}$  déjà démontrée.

Puisque la suite spectrale de la fibration  $\pi : \widetilde{\mathbb{P}}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$  dégénère, on voit immédiatement que  $H^*(\widetilde{\mathbb{P}}_2, \mathbb{Z})$  est libre en tant que groupe abélien gradué, engendré par  $\xi$  et  $\eta$  en tant qu'algèbre graduée,  $(\xi, \eta)$  formant une base de  $H^2$ ,  $(\xi^2, \xi\eta)$  formant une base de  $H^4$ , et  $(\xi^2\eta)$  une base de  $H^6$ . La formule (i) montre que l'on peut remplacer  $\eta$  par  $\xi'$  dans les assertions précédentes : l'algèbre  $H^*(\widetilde{\mathbb{P}}_2, \mathbb{Z})$  est donc un quotient de  $\mathbb{Z}[\xi, \xi']$ . Les relations  $\xi^3 = 0$  et  $\xi'^3 = 0$  sont évidentes puisque  $\mathbb{P}_2$  et  $\mathbb{P}'_2$  sont de dimension complexe 2. D'autre part, puisque  $(\xi^2, \xi\xi')$  forme une base de  $H^4$ , il doit nécessairement exister une relation  $\xi^2 + b\xi'^2 + c\xi\xi' = 0$  à coefficients  $b, c$  entiers. En fait,

$b$  est nécessairement égal à 1,  $\xi$  et  $\xi'$  jouant des rôles parfaitement symétriques. Multipliant respectivement par  $\xi$  et  $\xi'$  cette relation, on obtient  $\xi\xi'^2 + c\xi^2\xi' = 0$  et  $\xi^2\xi' + c\xi\xi'^2 = 0$ , d'où :  $c^2 = 1$ . Les classes de cohomologie  $\xi^2\xi'$  et  $\xi\xi'^2$  définissant la même orientation sur  $\mathbb{P}_2$ , il faut aussi que  $c$  soit négatif, d'où  $c = -1$ , et la formule (ii).  $\square$

*Remarques 4.5.* — La relation  $\xi'^3 = 0$  de la formule (ii) est redondante, car engendrée par les deux autres. Les classes  $\xi^2\xi'$  et  $\xi\xi'^2$  sont égales.

Voici une première application du calcul précédent :

**THÉORÈME 4.6.** — *Tout tissu  $W$  sur  $\mathbb{P}_2$  a une courbe critique  $\Gamma_W$  non vide.*

*Démonstration.* — De façon générale, lorsque  $M$  et  $W$  sont compactes, il suffit de montrer que  $c_1([\pi^{-1}E \otimes \mathcal{V}^* \otimes \check{L}^d]_{|W}) \smile [W]$  est différente de 0, pour en déduire que la section  $s_\Gamma$  doit nécessairement s'annuler quelquepart. La classe fondamentale  $[W]$  étant la duale de Poincaré de  $c_1([\pi^{-1}E \otimes \check{L}^d])$  dans  $\widetilde{M}$ , il revient au même de montrer que le produit

$$c_1([\pi^{-1}E \otimes \check{L}^d]) \smile c_1([\pi^{-1}E \otimes \mathcal{V}^* \otimes \check{L}^d])$$

des classes de Chern n'est pas nul. Pour un  $d$ -tissu de degré  $n$  sur  $\mathbb{P}_2$ , on obtient :  $\pi^{-1}E \otimes \mathcal{V}^* \otimes \check{L}^d = (\check{\ell}')^{d-2} \otimes \check{\ell}^{n+1}$ , et  $\pi^{-1}E \otimes \check{L}^d = (\check{\ell}')^d \otimes \check{\ell}^n$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} c_1([\pi^{-1}E \otimes \check{L}^d]) \smile c_1([\pi^{-1}E \otimes \mathcal{V}^* \otimes \check{L}^d]) &= ((d-2)\xi' + (n+1)\xi)(d\xi' + n\xi), \\ &= n(n+1)\xi^2 + (2n(d-1) + d)\xi\xi' + d(d-2)(\xi')^2. \end{aligned}$$

Comme il n'existe pas de couple d'entiers  $(d, n)$  avec  $n \geq 0$  et  $d \geq 1$ , tels que la matrice  $\begin{pmatrix} n(n+1) & 2n(d-1) + d & d(d-2) \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  soit de rang 0 ou 1, le théorème en résulte.  $\square$

#### 4.4. Tissus non-dicritiques sur $\mathbb{P}_2$ (bi-tissus et dualité)

Pour une surface  $W$  dans  $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ , il est équivalent de dire :

- qu'elle définit un  $d$ -tissu non-dicritique de degré  $n$  ( $n > 0$ ) sur  $\mathbb{P}_2$ ,
- qu'elle définit un  $n$ -tissu non-dicritique de degré  $d$  ( $d > 0$ ) sur  $\mathbb{P}'_2$ ,
- qu'elle définit à la fois un  $d$ -tissu sur  $\mathbb{P}_2$  et un  $n$ -tissu  $\mathbb{P}'_2$  (bi-tissu).



En effet, pour  $Zv \neq 0$  on peut poser :  $(X = x, Y = y, Z = 1, u = p, v = -1$  et  $w = y - p x)$ , de sorte que  $W$  est défini localement, en tant que tissu sur  $\mathbb{P}_2$ , par l'équation  $F(x, y, p) = 0$ , où

$$F(x, y, p) = H(x, y, 1; p, -1, y - p x).$$

En posant  $(X = x, Y = r + p x, Z = 1, u = p, v = -1$  et  $w = r)$ ,  $W$  est aussi défini localement par l'équation  $D(x, p, r) = 0$ , avec

$$D(x, p, r) = H(x, r + p x, 1; p, -1, r).$$

LEMME 4.7. — *Les formules suivantes sont vérifiées :*

$$(F'_x + p F'_y)(x, y, p) = (H'_X + p H'_Y)(x, y, 1; p, -1, y - p x)$$

$$\text{et } F'_p(x, y, p) = (H'_u - x H'_w)(x, y, 1; p, -1, y - p x).$$

De même :

$$(D'_p - x D'_r)(x, p, r) = (H'_u - x H'_w)(x, r + p x, 1; p, -1, r)$$

$$\text{et } D'_x(x, p, r) = (H'_X + p H'_Y)(x, r + p x, 1; p, -1, r).$$

En particulier, on obtient les formules de dualité :

$$F'_x + p F'_y = D'_x \quad \text{et} \quad F'_p = D'_p - x D'_r \quad \text{lorsque } vZ \neq 0.$$

Quand on prend pour  $(x, y)$  et  $(x', y')$  des systèmes de coordonnées affines, on vérifie aisément, comme déjà annoncé, que la relation  $F'_x + p F'_y = u^{-1}(\alpha + p\beta)^{d+1}(G'_{x'} + p' G'_{y'})$  est valable sur tout  $W$ , et pas seulement sur  $\Gamma_W$  : la section  $s_\Sigma$  peut donc s'étendre en une section  $s_{\Gamma'}$  du fibré  $(\pi^{-1}(E) \otimes \check{L}^{d+1})|_S$  définie sur tout  $W$ , dont l'ensemble des zéros s'appelle l'ensemble co-critique  $\Gamma'_W$ . La non-dicricité implique que  $\Gamma'_W$  est en fait une courbe l'ensemble co-critique une courbe qui est la courbe critique du  $n$ -tissu sur  $\mathbb{P}'_2$ , tandis que  $\Gamma_W$  est sa courbe co-critique, et que l'intersection  $\Gamma_W \cap \Gamma'_W$  est l'ensemble singulier  $\Sigma(\tilde{\mathcal{F}})$  du feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$ .

On notera que, pour  $\bar{H} = \lambda(H + (uX + vY + wZ)K)$ , coïncident aussi sur  $\widetilde{\mathbb{P}}_2$  les dérivées partielles  $H'_X$  et  $\bar{H}'_X$ ,  $H'_u$  et  $\bar{H}'_u$ , ainsi que les autres dérivées partielles en  $Y, Z$  ou  $v, w$ . On observe d'autre part les égalités  $H(x, y, 1; p, -1, y - p x) = \bar{H}(x, y, 1; p, -1, y - p x)$ , et  $H(x, r + p x, 1; p, -1, r) = \bar{H}(x, r + p x, 1; p, -1, r)$ .

COROLLAIRE 4.8. — *La courbe critique  $\Gamma_W$  est définie globalement dans  $\widetilde{\mathbb{P}}_2$  par les équations  $ZH'_u - XH'_w = 0$ ,  $XH'_v - YH'_u = 0$ ,  $YH'_w - ZH'_v = 0$ , et  $H = 0$ .*

*La courbe co-critique  $\Gamma'_W$  est définie dans  $\widetilde{\mathbb{P}}_2$  par les équations  $vH'_X - uH'_Y = 0$ ,  $wH'_Y - vH'_Z = 0$ ,  $uH'_Z - wH'_X = 0$  et  $H = 0$ .*

**THÉORÈME 4.9.** — *Pour tout tissu non-dicritique sur  $\mathbb{P}_2$ , l'ensemble singulier  $\Sigma(\tilde{\mathcal{F}}) = \Gamma_W \cap \Gamma'_W$  du feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  est non vide.*

*Démonstration.* — Pour prouver que  $\Gamma_W \cap \Gamma'_W$  est non vide, il revient au même, par dualité, de montrer que

$$[c_1([\pi^{-1}E \otimes \mathcal{V}^* \otimes \check{L}^d]) \smile c_1([\pi^{-1}E \otimes \check{L}^{d+1}])] \frown [W]$$

est non nul. Puisque la classe fondamentale  $[W]$  est la duale de Poincaré de  $c_1([\pi^{-1}E \otimes \check{L}^d])$  dans  $\widetilde{M}$ , il revient encore au même de montrer que le produit des classes de Chern

$$c_1([\pi^{-1}E \otimes \mathcal{V}^* \otimes \check{L}^d]) \smile c_1([\pi^{-1}E \otimes \check{L}^{d+1}]) \smile c_1([\pi^{-1}E \otimes \check{L}^d])$$

n'est pas nul. Pour un  $d$ -tissu de degré  $n$  sur  $\mathbb{P}_2$ , il s'agit donc de montrer que  $((d - 2)\xi' + (n + 1)\xi)((d + 1)\xi' + (n - 2)\xi)(d\xi' + n\xi)$  n'est pas nul dans  $H^6(\mathbb{P}_2)$ . Cette classe est égale à  $(3\sigma\pi - \sigma^2 + 3\sigma - 2\pi)\xi^2\xi'$  où l'on a posé  $\sigma = n + d$  et  $\pi = nd$ . Il est facile de voir que cette expression est toujours strictement positive pour  $n$  et  $d$  au moins égaux à 1 (le cas  $n = 0$  est dicritique). □

*Remarque 4.10.* — L'expression  $((d + 1)\xi' + (n - 2)\xi)$  est égale à  $-c_1([\mathcal{M} - \mathcal{V}])$ , d'où un calcul effectif du nombre d'intersection  $\Gamma_W \cdot \Gamma'_W$  ci-dessus en utilisant les résidus  $\nu_\alpha$  du théorème 3.14.

### 4.5. Tissus dicritiques sur $\mathbb{P}_2$ et tissus algébriques

On dit qu'un  $d$ -tissu sur  $\mathbb{P}_2$  est *algébrique* s'il est égal à l'ensemble des éléments de contact qui sont portés par une tangente à une enveloppe algébrique  $C$  de classe  $d$ . Si  $C$  est l'enveloppe algébrique de classe  $d$  définie par l'équation tangentielle  $\Phi(u, v, w) = 0$  (où  $\Phi$  désigne un polynôme homogène de degré  $d$ ), le  $d$ -tissu des tangentes à  $C$  est défini par  $H(X, Y, Z; u, v, w) = \Phi(u, v, w)$  qui ne dépend pas des variables  $X, Y, Z$ . Le degré du tissu est donc nul (le degré de bi-homogénéité de  $H$  est  $(0, d)$ ), et l'équation du tissu s'écrit localement, relativement aux coordonnées affines ci-dessus :  $\Phi(p, -1, y - px) = 0$ . À multiplication près par un scalaire,  $H$  est unique, puisque une expression de la forme  $K(uX + vY + wZ)$  ne peut avoir le bi-degré d'homogénéité  $(0, d)$ . Les tissus algébriques sont donc les tissus de degré  $n = 0$ .

**LEMME 4.11.** — *Pour qu'un tissu sur  $\mathbb{P}_2$  soit algébrique, il faut et il suffit que soit vérifiées simultanément l'identité  $F'_x + pF'_y \equiv 0$  sur  $\mathbb{P}_2$ , ainsi que toutes les identités analogues que l'on obtient avec les autres systèmes*

de coordonnées affines. Il suffit en fait qu'une seule de ces équations soit vérifiée, pour que les autres le soient aussi.

*Démonstration.* — Si  $W$  est un tissu algébrique,  $H'_X, H'_Y$  et  $H'_Z$  sont identiquement nuls, puisque  $H$  ne dépend pas de  $X, Y$  ou  $Z$ . Par conséquent  $vH'_X - uH'_Y \equiv 0$ , donc  $F'_x + pF'_y \equiv 0$  pour  $x = \frac{X}{Z}$  et  $y = \frac{Y}{Z}$ . Il en est de même pour les autres coordonnées affines.

Réciproquement, supposons le tissu défini par  $H$  de bi-degré  $(n, d)$ . Dire que  $F'_x + pF'_y$  est identiquement nul sur  $\widetilde{\mathbb{P}}_2$  pour  $x = \frac{X}{Z}$  et  $y = \frac{Y}{Z}$ , équivaut à écrire que  $vH'_X - uH'_Y$  est identiquement nul sur  $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ , de même que  $wH'_Y - vH'_Z$  et  $uH'_Z - wH'_X$ . Autrement dit, le vecteur  $(H'_X, H'_Y, H'_Z)$  de  $\mathbb{C}^3$  est colinéaire à  $(u, v, w)$  sur  $\widetilde{\mathbb{P}}_2$  : c'est dire qu'il existe  $K$  et  $a, b, c$  tels que  $H'_X \equiv Ku + a(uX + vY + wZ)$ ,  $H'_Y \equiv Kv + b(uX + vY + wZ)$  et  $H'_Z \equiv Kw + c(uX + vY + wZ)$ . L'identité d'Euler implique alors :

$$nH \equiv (K + aX + bY + cZ)(uX + vY + wZ).$$

Puisque  $H$  n'est certainement pas identiquement nulle pour  $uX + vY + wZ = 0$  (sinon,  $H$  ne définirait pas une surface dans  $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ ), c'est que  $n = 0$  : c'est dire que  $H$  ne dépend pas des variables  $X, Y$  et  $Z$ . □

On dit qu'un  $d$ -tissu sur  $\mathbb{P}_2$  est *linéaire* si toutes les feuilles de ce tissu sont des droites de  $\mathbb{P}_2$ . Par exemple, tout tissu algébrique est linéaire. Réciproquement, on a le

**THÉOREME 4.12.** — *Tout tissu linéaire sur  $\mathbb{P}_2$  est un tissu algébrique.*

*Démonstration.* — Soit  $H = 0$  une équation d'un tissu linéaire sur  $\mathbb{P}_2$ , et  $F(x, y, p) = 0$  l'équation du tissu qu'on en déduit au dessus d'un ouvert affine  $U$ . Puisque les feuilles du tissu ont toutes une équation affine relativement aux coordonnées affines  $(x, y)$  sur  $U$ , la solution de l'équation différentielle  $F(x, y, y') = 0$  passant par  $(x_0, y_0)$  et ayant en ce point la pente  $p_0$  telle que  $F(x_0, y_0, p_0) = 0$  doit vérifier l'identité  $F(x, p_0(x - x_0) + y_0, p_0) \equiv 0$ . En dérivant par rapport à  $x$  au point  $x_0$ , on voit que l'expression  $F'_x + pF'_y$  doit être nulle en tout point de  $\pi^{-1}(U) \cap W$ . L'expression  $vH'_X - uH'_Y$  doit donc cette fois être identiquement nulle sur  $W$  (ce qui est a priori plus faible que sur  $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ ) : autrement dit  $vH'_X - uH'_Y$  doit appartenir à l'idéal engendré par  $uX + vY + wZ$  et par  $H$  : il existe donc  $P$  et  $Q$  tels que

$$vH'_X - uH'_Y \equiv P(uX + vY + wZ) + QH.$$

On peut toujours s'arranger pour que  $P$  et  $Q$  soient bi-homogènes, auquel cas  $Q$  ne peut qu'être nul, car de bi-degré  $(-1, 1)$ . L'expression  $vH'_X - uH'_Y$  est donc identiquement nulle sur tout  $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ , de même que  $wH'_Y - vH'_Z$  et

$uH'_Z - wH'_X$  : il suffit alors d'appliquer le lemme précédent pour conclure. □

*Remarque 4.13.* — Pour un tissu algébrique, la section  $s_{\Gamma'}$  du fibré  $\pi^{-1}(E) \otimes \check{L}^{d+1}|_W$  est identiquement nulle. On en déduit :

- d'une part qu'un tissu algébrique n'est pas un bi-tissu,
- d'autre part que l'ensemble singulier  $\Sigma(\tilde{\mathcal{F}})$  du feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  se limite à l'ensemble singulier  $\Sigma(W) = W \setminus W'$  de  $W$ .

**THÉORÈME 4.14.** — *Si un tissu sur  $\mathbb{P}_2$  est quasi-lisse et si chacune de ses composantes irréductibles  $W_i$  est dicritique (en particulier si  $W$  est dicritique), le tissu est algébrique.*

*Démonstration.* — Il suffit évidemment de démontrer le théorème lorsqu'il n'y a qu'une seule composante irréductible.

Si  $W$  est lisse et si le tissu est dicritique, le feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  est en effet sans singularité. Les nombres de Chern

$$(c_1)^2([TW - L|_W]) \frown [W] \text{ et } c_2([TW - L|_W]) \frown [W]$$

doivent donc être nuls, d'après le théorème de Baum-Bott. Puisque  $[W]$  est le dual de Poincaré de  $c_1(N_W) = n \xi + d \xi'$ , où  $(n, d)$  désigne le bi-degré du tissu, il revient au même d'écrire que

$$(c_1)^2([TW - L|_W]) \smile (n \xi + d \xi') \text{ et } c_2([TW - L|_W]) \smile (n \xi + d \xi')$$

sont nuls dans  $H^6(\tilde{\mathbb{P}}_2)$ .

Or, le calcul des classes totales de Chern fournit successivement les formules :

$$\begin{aligned} c(\tilde{\mathbb{P}}_2) &= (1 + 3\xi + 3\xi^2)(1 - \xi + 2\xi'), \\ &= 1 + 2(\xi + \xi') + 6\xi\xi' + 6\xi^2\xi', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(\tilde{\mathbb{P}}_2)(c(N_W))^{-1}(c(L))^{-1} &= (1 + 2(\xi + \xi') + 6\xi\xi' + 6\xi^2\xi') \\ &\quad (1 + n \xi + d \xi')^{-1}(1 + 2\xi - \xi')^{-1}, \\ &= (1 + (-n\xi + (3 - d)\xi')) \\ &\quad + (3n\xi\xi' + n^2\xi^2 + 3(\xi')^2) + \dots \end{aligned}$$

On en déduit :

$$((c_1)^2([TW - L|_W]) \smile (n\xi + d\xi')) \frown [\tilde{\mathbb{P}}_2] = 3n(n(d - 2) + (d - 2)^2 - 1)$$

$$\text{et } (c_2([TW - L|_W]) \smile (n \xi + d \xi')) \frown [\tilde{\mathbb{P}}_2] = 3n(d - 1)(d + n - 1).$$

Ces deux expressions ne peuvent être simultanément nulles pour  $n \geq 0$  et  $d \geq 1$  que si  $n = 0$ . □

*Remarque 4.15.* — Si  $W$  n'est pas lisse, le tissu peut-être dicritique sans être un tissu algébrique. Voici un exemple de 3-tissu dicritique de degré 3, (avec une surface  $W$  admettant des singularités) : notant  $k$  et  $h$  des scalaires arbitraires, posons

$$H = u^3 Z^3 - X Z^2 u^2 v + (X^2 Z/3 - X Z^2 + k Z^3) u v^2 \\ - (X^3/27 - X^2 Z/6 + k X Z^2/3 + h Z^3 + Y Z^2) v^3.$$

Dans l'ouvert  $Zv \neq 0$ , le tissu est défini par  $F(x, y, p) = 0$ , avec

$$F(x, y, p) = p^3 + x p^2 + (x^2/3 - x + k) p + (x^3/27 - x^2/6 + k x/3 + h + y).$$

Puisque  $3(F'_x + p F'_y) = F'_p$ , le tissu est dicritique. Puisque  $F'_y \equiv 1$ ,  $W$  n'admet pas de point singulier pour  $Z \neq 0$ . Par contre, tous les points ( $Z = 0, v = 0$ ) sont des points singuliers de  $W$ .

## 5. Connexions de Chern et de Blaschke d'un 3-tissu. Aspect global

*Les résultats de cette section sont classiques, et remontent pour l'essentiel à Blaschke ou Chern. Nous en donnons ici une présentation ayant un sens global sur toute la partie régulière  $M_0$ , et relient l'existence d'une relation abcélienne sur un 3-tissu à la propriété – pour la connexion de Chern – d'être sans courbure ni torsion et de préserver par conséquent une structure localement affine. Voir aussi l'exposé de P. Nagy ([10]) sur les 3-tissus de codimension  $r$  dans une variété de dimension  $2r$ .*

Soit  $W$  un 3-tissu sur une surface  $M$ . L'application  $\pi : W_0 \rightarrow M_0$  est alors un revêtement à 3 feuillets, qui projette localement  $\tilde{\mathcal{F}}$  sur trois feuilletages distincts  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_3$  deux à deux transverses, sur  $M_0$  : tout point  $m \in M_0$  admet un voisinage  $U$  au dessus duquel le fibré complexe  $TM_0|_U$  admet trois sous-fibrés holomorphes de rang un,  $T_1, T_2$  et  $T_3$ , deux à deux transverses, et respectivement tangents à chacun de ces trois feuilletages locaux sur  $U$ . Pour toute permutation  $(i, j, k)$  de  $(1, 2, 3)$ , on notera  $\Phi_{jk}^i : T_j \xrightarrow{\cong} T_k$  l'isomorphisme naturel défini par la projection de  $T_j$  sur  $T_k$  parallèlement à  $T_i$ , et  $p_j^i : TM|_U \rightarrow T_j$  la projection sur  $T_j$  parallèlement à  $T_i$ . [Rappelons que ces trois feuilletages et ces trois fibrés n'ont pas nécessairement de sens global sur tout  $M_0$  : un ouvert tel que  $U$  sera appelé *ouvert de discernabilité*]. On dira, d'un champ de vecteurs  $X$  défini sur un ouvert de  $M_0$ , qu'il est *tangent au tissu  $W$* , s'il est tangent en tout point à l'un des trois feuilletages définis au voisinage du point, c'est-à-dire s'il est localement section de l'un des trois fibrés  $T_i$ .

### 5.1. Connexion de Chern

THÉOREME 5.1 (Chern). — Il existe une connexion sur  $TM_0$  et une seule ayant les propriétés suivantes :

- (i) Elle préserve le tissu au sens suivant : tout vecteur tangent au tissu (c'est-à-dire appartenant à l'un des trois espaces  $T_i$ ) reste tangent au tissu après transport parallèle relatif à cette connexion, ou -ce qui est équivalent- la dérivée covariante de tout champ de vecteurs  $X$  tangent au tissu est colinéaire à ce champ de vecteurs.
- (ii) Sa torsion est nulle.
- (iii) Elle est holomorphe.

Cette connexion possède aussi les propriétés suivantes (dont les deux premières, (iv) et (v), suffiraient encore à la caractériser) :

- (iv) Elle est de type  $(1, 0)$  :  $\nabla_Z Y = 0$  chaque fois que  $Y$  est holomorphe et  $Z$  anti-holomorphe.
- (v) Elle vérifie la formule

$$\nabla_X Y = p_Y^X([X, Y])$$

chaque fois que  $X$  et  $Y$  sont des champs de vecteurs locaux holomorphes, tous deux tangents au tissu et non colinéaires,  $p_Y^X$  désignant la projection locale parallèlement à  $X$  de  $TM_0$  sur le sous-espace de  $TM$  engendré par  $Y$ .

- (vi) Sur tout ouvert de discernabilité, la restriction  $\nabla^i$  de  $\nabla$  à  $T_i$  est une connexion de Bott à la fois pour  $\mathcal{F}_j$  et pour  $\mathcal{F}_k$ , où  $(i, j, k)$  désigne une permutation arbitraire de  $(1, 2, 3)$ , et où l'on a identifié  $T_i$  de façon naturelle au fibré normal à  $\mathcal{F}_j$  d'une part et au fibré normal à  $\mathcal{F}_k$  d'autre part.
- (vii) L'isomorphisme  $\Phi_{jk}^i : T_j \xrightarrow{\cong} T_k$  transporte  $\nabla^j$  sur  $\nabla^k$ .

Démonstration. — Notons  $X_1, X_2$  et  $X_3$  trois champs de vecteurs holomorphes définis localement sur un ouvert de discernabilité  $U$ , respectivement tangents à  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_3$ , et non nuls au voisinage d'un point de  $M_0$ . Posons  $p_j^i = p_{X_j}^{X_i}$ . Notons  $X, Y$ , et  $Z$  ces trois champs, sans préciser lequel est  $X_1, X_2$  ou  $X_3$ .

Si  $\nabla$  existe, les condition (i) et (iii) impliquent l'existence de trois 1-formes holomorphes  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  telles que  $\nabla X = \alpha X, \nabla Y = \beta Y$  et  $\nabla Z = \gamma Z$ . Puisque  $X$  et  $Y$  sont partout linéairement indépendants, les données de  $\alpha$  et  $\beta$  suffisent à définir  $\nabla$ . La condition (ii) de torsion nulle s'écrit :

$[X, Y] = \beta(X)Y - \alpha(Y)X$ . Par conséquent, si elle existe,  $\nabla$  doit nécessairement vérifier la propriété (v). Comme on a aussi  $[X, Z] = \beta(X)Z - \alpha(Z)X$ , et que  $X$  et  $Z$  sont linéairement indépendants en tout point, la forme  $\alpha$  est entièrement définie (par les crochets  $[X, Y]$  et  $[X, Z]$ ). De même  $\beta$  est entièrement définie : ceci prouve l'unicité de la restriction de  $\nabla$  à tout ouvert suffisamment petit de  $M_0$ , donc l'unicité de  $\nabla$  puisqu'une connexion au dessus de  $M_0$  est définie par ses restrictions aux ouverts d'un recouvrement de  $M_0$ . En outre, une telle connexion, si elle existe, vérifie nécessairement (iv) (puisqu'elle est holomorphe), et (vi) (qui ne fait que paraphraser (iv) et (v)). Elle vérifie également (vii) puisque, si l'on choisit  $Z$  de façon que  $Z - Y$  soit colinéaire à  $X$  (ce qui est toujours possible),  $p_Z^X([X, Z]) - p_Y^X([X, Y])$  est colinéaire à  $X$ .

La définition des formes  $\alpha$  et  $\beta$  comme à l'alinéa précédent permet effectivement de définir une connexion locale  $\nabla^U$  au dessus de  $U$ . Si  $\nabla^U X = \alpha X$ ,  $\nabla^U(uX) = (\alpha + \frac{du}{u})(uX)$  pour toute fonction holomorphe  $u$  ne s'annulant pas : quitte à multiplier  $X$  et  $Y$  par de telles fonctions, on peut donc choisir  $X$  et  $Y$  de façon que  $Z = X + Y$ . On en déduit la relation :  $\nabla^U Z = (\alpha + \beta)Z$ , qui prouve que le sous-espace engendré par  $Z$  est préservé lui aussi par la connexion  $\nabla^U$  (et que la forme  $\gamma$  est égale à  $\alpha + \beta$ ).

L'unicité de la connexion  $\nabla^U$  précédente implique que les connexions  $\nabla^U$  et  $\nabla^{U'}$  ainsi construites sur deux ouverts de discernabilité distincts  $U$  et  $U'$  induiront la même connexion sur  $U \cap U'$ . Les ouverts de discernabilité recouvrant  $M_0$ , il existe une unique connexion  $\nabla$  au dessus de tout  $M_0$  induisant  $\nabla^U$  sur chaque ouvert de discernabilité  $U$ . Et  $\nabla$  vérifie toutes les propriétés requises, puisque celles-ci sont des propriétés locales et qu'elles sont vérifiées par chaque connexion locale  $\nabla^U$ .  $\square$

**DÉFINITION 5.2.** — *La connexion  $\nabla$ , globalement définie sur  $M_0$ , s'appelle la connexion de Chern et sa courbure  $K : \wedge^2 TM_0 \rightarrow \text{Hom}(TM_0, TM_0)$  la courbure de Chern.*

## 5.2. Connexion de Blaschke

Sur tout ouvert de discernabilité  $U$ , on appelle *connexion locale de Blaschke* l'une quelconque des trois connexions locales  $\nabla^i$  sur  $T_i$  (isomorphes entre elles), et *courbure de Blaschke* la courbure  $\mathcal{K} : \wedge^2 TM_0 \rightarrow \text{Hom}(T_i, T_i)$  de  $\nabla^i$ .

Nous allons recoller ces fibrés locaux  $T_i$  en un même fibré  $A'$  au dessus de tout  $M_0$  de la manière suivante : on note  $A'_{m_0}$  l'ensemble des triplets (non

ordonnés)  $\{L_i, L_j, L_k\}$  formé de trois vecteurs tangents à  $M_0$  en un même point  $m_0$ , tels que  $L_i + L_j + L_k = 0$  et tels que  $L_i, L_j$  et  $L_k$  appartiennent respectivement à  $T_i, T_j$  et  $T_k$ . Cet ensemble possède une structure naturelle d'espace vectoriel complexe de dimension 1, et la réunion  $A' = \bigcup_{m_0} A'_{m_0}$  possède une structure naturelle de fibré vectoriel holomorphe en droites complexes au-dessus de  $M_0$ .

LEMME 5.3.

- (i) Sur tout ouvert de discernabilité  $U$  dans  $M_0$ , il existe des isomorphismes naturels  $\Phi_i : T_i \rightarrow A'|_U$  ( $i = 1, 2, 3$ ) tels que, pour toute permutation  $(i, j, k)$  de  $(1, 2, 3)$ ,  $\Phi_j \circ \Phi_{ij}^k$  soit égal à  $\Phi_i$ .
- (ii) Il existe une connexion holomorphe  $\nabla'$  et une seule sur  $A'$  dont la restriction à chaque ouvert de discernabilité  $U$  corresponde à la connexion locale de Blaschke  $\nabla^i$  sur  $T_i$  par l'isomorphisme  $\Phi_i$ .

*Démonstration.* — On remarque que la donnée de l'un quelconque des trois vecteurs  $L_i$  détermine les deux autres  $L_j$  et  $L_k$ , ce qui permet de définir  $\Phi_i$  comme l'isomorphisme  $L_i \mapsto \{L_i, L_j, L_k\}$  : la formule  $\Phi_j \circ \Phi_{ij}^k = \Phi_i$  est alors vérifiée, d'où (i). Cette formule de commutation et la partie (vii) du théorème 5.1 impliquent que la connexion  $\nabla'_U = \Phi_i(\nabla^i)$  sur  $A'|_U$  ne dépend pas de l'indice  $i$ , et qu'il existe une connexion  $\nabla'$  et une seule sur  $A'$  dont la restriction à chaque ouvert de discernabilité  $U$  soit égale à  $\nabla'_U$ . □

DÉFINITION 5.4. — La connexion  $\nabla'$  s'appelle la connexion de Blaschke et sa courbure

$$\mathcal{K} : \bigwedge^2 TM_0 \rightarrow \text{Hom}(TM_0, TM_0)$$

la courbure de Blaschke. Nous verrons dans la section suivante que la connexion duale de la connexion de Blaschke sur le fibré  $A \rightarrow M_0$  dual de  $A'$  a été généralisée par Hénaut au cas des  $d$ -tissus ( $d$  quelconque).

LEMME 5.5. — Les courbures de Blaschke et de Chern sont reliées par la formule :

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} (\text{Tr } K),$$

Tr  $K$  désignant la trace de  $K \in \text{Hom}(TM_0, TM_0)$ .

*Démonstration.* — En effet, si désigne  $\gamma$  la forme holomorphe de connexion de la connexion de Blaschke sur  $T_i$  relativement à une trivialisations holomorphe locale  $X_i$  de  $T_i$  (i.e.  $\nabla^i X_i = \gamma X_i$ ). La courbure de cette connexion s'écrit alors :  $\langle \mathcal{K}, X_i \rangle = d\gamma \otimes X_i$ . Décomposant localement  $TM|_U$  en  $T_i \oplus T_j$  ( $i \neq j$ ), la connexion de Chern a donc pour forme de



connexion, relativement à la trivialisaton  $(X_i, X_j)$ , la matrice  $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ , de sorte que  $K|_U = \begin{pmatrix} \mathcal{K} & 0 \\ 0 & \mathcal{K} \end{pmatrix}$  s'écrit localement  $\begin{pmatrix} d\gamma & 0 \\ 0 & d\gamma \end{pmatrix}$  relativement à la même trivialisaton. On en déduit :  $d\gamma = \frac{1}{2} (\text{Tr } K|_U)$ .  $\square$

*Remarques 5.6.*

1) La courbure de Blaschke est donc une 2-forme fermée sur  $M_0$ , dont la classe de cohomologie  $[\mathcal{K}]$  vérifie

$$\frac{1}{i\pi} [\mathcal{K}] = c_1(M_0),$$

d'après la théorie des classes caractéristiques de Chern-Weil,  $c_1(M_0) \in H^2(M_0, \mathbb{R})$  désignant la première classe de Chern à coefficients réels du fibré complexe à  $M_0$ .

2) Puisque  $\gamma$  est holomorphe,  $d\gamma \wedge d\gamma = 0$  (c'est un cas particulier du théorème d'annulation de Bott). On en déduit, que les monômes de Chern  $(c_1)^2(M_0)$  et  $c_2(M_0)$  sont nuls dans  $H^4(M_0, \mathbb{R})$ . Ceci redémontre par exemple qu'il n'existe pas de 3-tissu sans singularité sur  $\mathbb{P}_2$ . On en déduit plus généralement que la donnée d'un 3-tissu  $W$  sur une surface holomorphe  $M$  fournit une localisation des classes de Chern  $(c_1)^2(M)$  et  $c_2(M)$  au voisinage de la courbe discriminante  $\pi(\Gamma_W)$ .

### 5.3. Relations abéliennes pour les 3-tissus

Rappelons qu'une *relation abélienne* d'un 3-tissu, au voisinage de chaque point  $m_0$  de  $M_0$ , est la donnée de trois fonctions holomorphes  $f_1, f_2$  et  $f_3$ , telles que  $f_1 + f_2 + f_3 = \text{constante}$ , et telle que, pour tout  $i = 1, 2, 3$  chaque fonction  $f_i$  soit intégrale première du feuilletage local  $\mathcal{F}_i$ .

Puisqu'une intégrale première n'est définie qu'à une constante additive près, et puisque toute forme holomorphe fermée est localement la différentielle d'une fonction holomorphe, on appellera plus généralement relation abélienne sur un ouvert  $U$  de discernabilité de  $M_0$  la donnée de trois 1-formes holomorphes fermées  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  sur  $U$ , telles que  $\sum_i \omega_i = 0$ , et telle que le noyau de chaque  $\omega_i$  soit l'espace tangent à  $\mathcal{F}_i$ .

Si elle existe, une relation abélienne non triviale sur un 3-tissu est unique, à multiplication près des formes  $\omega_i$  par une même constante scalaire, et la courbure de Blaschke (ou de Chern) du 3-tissu est alors nécessairement nulle. Si une telle relation abélienne est non triviale, c'est-à-dire si les formes

$\omega_i$  sont non nulles, on peut toujours trouver des coordonnées locales holomorphes  $x$  et  $y$  au voisinage de  $m_0$ , de façon que les fonctions  $f_i(x, y)$  soient des fonctions affines par rapport aux variables  $x, y$ . On peut même choisir  $f_1(x, y) \equiv x$ , et  $f_2(x, y) \equiv y$ . On dira, d'une telle structure affine, qu'elle est *adaptée* au 3-tissu. Réciproquement, on a le

THÉORÈME 5.7 (Blaschke). — *Supposons la courbure de Blaschke d'un 3-tissu nulle sur  $M_0$ .*

- (i) *Il existe alors, au voisinage de chaque point de  $M_0$ , une structure affine et une seule adaptée au 3-tissu, et par conséquent il existe une relation abélienne non triviale.*
- (ii) *Si, de plus,  $M_0$  est simplement connexe,  $M_0$  tout entier est un ouvert de discernabilité pour le 3-feuilletage, et la relation abélienne non triviale est définie sur tout  $M_0$ .*

*Démonstration.* — Si la courbure de Blaschke est nulle, celle de Chern aussi, de sorte que la connexion de Chern est à la fois à courbure et à torsion nulle : elle définit donc une unique structure affine sur tout ouvert simplement connexe  $U$  de  $M_0$ , pour laquelle le parallélisme de  $T_{m_1}(U)$  sur  $T_{m_2}(U)$  est le transport parallèle relatif à cette connexion le long de n'importe quelle courbe différentiable dans  $U$  joignant  $m_1$  à  $m_2$  (ce transport parallèle ne dépend pas de la courbe, puisque la courbure est nulle et que  $U$  est simplement connexe). Par parallélisme, tout vecteur  $X_{m_0} \in T_{m_0}M$  est prolongé en un champ de vecteurs  $X$  sur tout  $U$ , qui est holomorphe (la connexion de Chern est holomorphe). Tout autre vecteur  $Y_{m_0} \in T_{m_0}M$  est prolongé en un champ de vecteurs  $Y$  qui commute avec  $X$ , puisque la connexion de Chern a une torsion nulle. Il suffit donc de choisir trois vecteurs  $(X_i)_{m_0} \neq 0 \in (T_i)_{m_0}$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) et de les prolonger par le procédé précédent en des champs  $X_i$  : puisque la connexion de Chern préserve localement chacun des trois feuillets  $\mathcal{F}_i$ , chaque  $X_i$  est tangent à  $\mathcal{F}_i$ , et puisque ces champs commutent deux à deux, ils sont invariants par le parallélisme défini sur  $U$  grâce au transport parallèle précédent. Ainsi, chaque  $\mathcal{F}_i$  possède localement une intégrale première  $f_i$ , affine pour la structure ainsi définie. On peut alors normaliser ces trois fonctions affines en les multipliant chacune par une constante de façon que leur somme soit constante, et qu'elles définissent une relation abélienne. Si  $M_0$  tout entier est simplement connexe, la construction précédente peut être faite sur tout  $M_0$ .  $\square$

## 6. Étude globale des relations abéliennes pour un $d$ -tissu

### 6.1. Relations abéliennes

On rappelle qu'une *relation abélienne* du tissu au dessus d'un ouvert de discernabilité  $U$  est la donnée d'une famille  $\rho = (\omega_i)_i$  de 1-formes  $\omega_i$  sur  $U$ , ( $1 \leq i \leq d$ ), possédant les propriétés suivantes :

- elles sont holomorphes,
- elles sont fermées,
- pour tout  $i$ , le noyau de  $\omega_i$  contient l'espace tangent à  $\mathcal{F}_i$ ,
- elles ont une somme nulle :  $\sum_{i=1}^d \omega_i = 0$ .

Sur un tel ouvert de discernabilité  $U$  sur  $M_0$ , notons  $F = a_0 \cdot \prod_{i=0}^d (p - p_i)$  la décomposition d'une équation  $F = 0$  du tissu sur  $\pi^{-1}(U)$ . Notons  $U_i$  l'ouvert  $p_i(U)$  dans  $W$  et  $(p_i)_*(\mathcal{F}_j)$  le feuilletage dans  $U_i$  qui se projette sur  $\mathcal{F}_j$  : l'ouvert  $\tilde{U} = \pi^{-1}(U) \cap W$  est la somme disjointe  $\coprod_i U_i$  des ouverts  $U_i$ , la restriction de  $\tilde{\mathcal{F}}$  à  $U_i$  n'étant autre que  $(p_i)_*(\mathcal{F}_i)$ .

Pour toute section holomorphe  $\xi$  du dual  $\check{\mathcal{L}}$  de  $\mathcal{L}$  au-dessus de  $\tilde{U}$ ,  $\langle \xi, \omega_W \rangle$  est une 1-forme scalaire holomorphe. Notons  $A(U)$  le sous-espace vectoriel de l'espace  $\Gamma(\tilde{U}, \check{\mathcal{L}})$  des sections holomorphes  $\xi$  de  $\check{\mathcal{L}}$  au-dessus de  $\tilde{U}$ , qui vérifient les deux relations :

- (i)  $d \langle \xi, \omega_W \rangle = 0$  sur  $\tilde{U}$ ,
- (ii)  $\sum_{i=1}^d (p_i)^*(\langle \xi, \omega_W \rangle) = 0$ . À tout  $\xi \in A(U)$ , associons la famille  $\rho = (\omega_i)_i$  des formes  $\omega_i = (p_i)^*(\langle \xi, \omega_W \rangle)$ .

LEMME 6.1. — L'application  $\xi \mapsto ((p_i)^*(\langle \xi, \omega_W \rangle))_{1 \leq i \leq d}$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels de  $A(U)$  sur  $R(U)$ .

*Démonstration.* — Que l'application ci-dessus prenne ses valeurs dans  $R(U)$  et soit linéaire est évident. Donnons-nous réciproquement une relation abélienne  $\rho = (\omega_i)_i$  sur  $U$ , notons  $S_i(\rho)$  l'ensemble des points de  $U$  en lesquels  $\omega_i$  est nul. Posons  $U'_i = p_i(U \setminus S_i(\rho))$ , et  $\tilde{U}' = \bigcup_i U'_i$ . Choisissons un champ de vecteurs holomorphe  $Y_i$  sur  $U \setminus S_i(\rho)$  tel que  $\omega_i(Y_i) \equiv 1$  : on définit alors la section holomorphe  $\sigma_0$  de  $\mathcal{L}$  au dessus de  $\tilde{U}'$ , comme égale à  $\omega_W((p_i)_*(Y_i))$  sur chaque  $U'_i$  (cette définition ne dépend pas du choix de  $Y_i$ ). La section  $\xi_0$  de  $\check{\mathcal{L}}|_{\tilde{U}'}$ , définie comme duale de  $\sigma_0$  (i.e. vérifiant :  $\langle \xi_0, \sigma_0 \rangle \equiv 1$ ) se prolonge par 0 sur  $\tilde{U} \setminus \tilde{U}'$  en une section holomorphe de  $\check{\mathcal{L}}$  définie sur tout  $\tilde{U}$ . Notant  $\eta$  la 1-forme scalaire sur  $\tilde{U}'$  telle que  $\omega_W = \eta \otimes \sigma_0$ , on obtient  $(p_i)^*(\eta) = \omega_i$  sur  $U \setminus S_i(\rho)$ . Puisque  $\langle \xi_0, \omega_W \rangle$  prolonge  $\eta$  à tout  $\tilde{U}$ ,  $\xi_0$  vérifie les propriétés (i) et (ii) et appartient donc à  $A(U)$ . Comme il est clair que l'application ainsi définie est réciproque

de celle définie dans l'énoncé du théorème, c'est que ces deux applications sont des isomorphismes d'espaces vectoriels.  $\square$

Ce lemme justifie la définition suivante d'une relation abélienne au dessus de n'importe quel ouvert  $U$  de  $M_0$  (qu'on ne suppose plus nécessairement être un ouvert de discernabilité) : notons  $\pi_W : \tilde{U} \rightarrow U$  la restriction à  $U$  du revêtement  $\pi_W : W_0 \rightarrow M_0$ .

**DÉFINITION 6.2.** — *On appelle espace des relations abéliennes pour le tissu  $W$  au-dessus d'un ouvert  $U$  de  $M_0$  le sous-espace vectoriel des sections holomorphes  $\xi \in \Gamma(\tilde{U}, \tilde{\mathcal{L}})$  telles que :*

- (i)  $d \langle \xi, \omega_W \rangle = 0$ ,
- (ii)  $\sum_{i=1}^d (p_i)^* \langle \xi, \omega_W \rangle = 0$ .

La dimension  $r(U)$  de cet espace vectoriel s'appelle le rang de  $W$  au-dessus de  $U$ .

**Remarques 6.3.**

1) La condition (ii) a toujours un sens même si l'on ne sait pas discerner les  $p_i$  sur tout l'ouvert  $U$  de  $M_0$ , car elle est symétrique par rapport à l'ensemble des indices  $i$ .

2) Cette définition a évidemment aussi un sens pour le germe du tissu en un point  $m \in M_0$ .

**6.2. L'opérateur différentiel  $\mathcal{D}$**

Nous allons interpréter les relations abéliennes comme les solutions de l'équation  $\mathcal{D}\xi = 0$ , où  $\mathcal{D}$  est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1 entre fibrés vectoriels holomorphes  $A$  et  $B$  sur  $M_0$ , de rangs respectifs  $d - 2$ , et  $d - 1$ . Cet opérateur différentiel coïncide localement avec l'opérateur  $\rho$  de [9] p. 437.

Pour tout fibré vectoriel holomorphe  $F \rightarrow W_0$  de rang  $r$  sur  $W_0$ , l'image directe du faisceau des germes de sections holomorphes de  $F$  par la projection du revêtement  $\pi_W : W_0 \rightarrow M_0$  est un faisceau  $\mathcal{O}_{M_0}$ -localement libre, et est par conséquent égal au faisceau des germes de sections holomorphes d'un fibré vectoriel holomorphe  $\pi_W(F) \rightarrow M_0$  de rang  $rd$  sur  $M_0$  : la fibre  $(\pi_W(F))_m$  en un point  $m$  de  $M_0$  est définie par l'égalité

$$(\pi_W(F))_m = \bigoplus_{\tilde{m} \in (\pi_W)^{-1}(m)} F_{\tilde{m}}.$$

En particulier, puisque  $TW_0 = (\pi_W)^{-1}(TM_0)$ , le fibré  $\pi_W(\bigwedge^k T^*W_0)$  (avec  $k = 0, 1$  ou  $2$ ) a une restriction à tout ouvert  $U$  de discernabilité qui est isomorphe à la somme  $(\bigwedge^k T^*(M_0)|_U)^d$  de  $d$  copies de  $\bigwedge^k T^*M_0|_U$  : pour tout élément  $\theta$  de  $\pi_W(\bigwedge^k T^*W_0)$  il existe un unique élément  $\hat{\theta} \in \bigwedge^k T^*W_0|_{\tilde{U}}$  tel que  $\theta = (\theta_i)_i$  avec  $\theta_i = (p_i)^*(\hat{\theta})$ .

LEMME 6.4. — Pour tout  $k = 0, 1, 2$ , l'application

$$\text{Tr} : \pi_W(\bigwedge^k T^*W_0) \rightarrow \bigwedge^k T^*M_0$$

définie par  $\theta \mapsto \sum_{i=1}^d (p_i)^*(\hat{\theta})$  ne dépend pas de la numérotation des  $d$  feuillettes du revêtement au dessus de  $U$ . C'est un homomorphisme surjectif de fibrés vectoriels.

On appellera trace cet homomorphisme.

Démonstration. — L'expression  $\sum_{i=1}^d (p_i)^*(\hat{\theta})$  a un sens intrinsèque, ne dépendant pas de la numérotation des  $d$  feuillettes du revêtement, car elle est symétrique par rapport à l'ensemble des indices  $i$ . Elle garderait même un sens sur un ouvert arbitraire de  $M$ , à condition de compter chaque  $p_i(x, y)$  avec son ordre de multiplicité lorsque  $(x, y)$  est un point de la courbe critique du tissu. L'application trace s'écrit localement :

$$\begin{aligned} (f_i)_i &\mapsto \sum_{i=1}^d f_i \quad \text{pour } k = 0, \\ (a_i d\tilde{x} + b_i d\tilde{y})_i &\mapsto \left(\sum_{i=1}^d a_i\right)dx + \left(\sum_{i=1}^d b_i\right)dy \quad \text{pour } k = 1, \\ \text{et } (f_i(d\tilde{x} \wedge d\tilde{y}))_i &\mapsto \left(\sum_{i=1}^d f_i\right)dx \wedge dy \quad \text{pour } k = 2. \end{aligned}$$

Elle est donc représentée :

– par la matrice  $(1 \ \cdots \ 1)$ , de taille  $d \times 1$  et de rang 1, pour  $k = 0$  ou 2

– et par la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ , de taille  $2d \times 2$  et de rang 2, pour  $k = 1$ . □

COROLLAIRE 6.5.

- (i) Le noyau du morphisme  $\xi \mapsto \text{Tr} \langle \xi, \omega_W \rangle$  de  $(\pi_W)(\check{L}|_{W_0})$  sur  $T^*M_0$  est un fibré vectoriel holomorphe  $A \rightarrow M_0$  sur  $M_0$ , de rang  $d - 2$ .

- (ii) *Le noyau du morphisme  $\text{Tr} : (\pi_W)(\Lambda^2 T^*W_0) \rightarrow \Lambda^2 T^*M_0$  est un fibré vectoriel holomorphe  $B \rightarrow M_0$  sur  $M_0$ , de rang  $d - 1$ .*
- (iii) *L'application  $\mathcal{D} : \xi \rightarrow d < \xi, \omega_W >$ ,  $\omega_W >$  est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1 de  $A$  dans  $B$ .*
- (iv) *Les relations abéliennes sont les sections holomorphes  $\xi$  de  $A$  telles que  $\mathcal{D}\xi = 0$ .*

*Démonstration.* — Toute section de  $(\pi_W)(\check{\mathcal{L}}|_{W_0})$  s'écrit localement  $\xi = f\xi_0$ , au dessus d'un ouvert  $U$  de discernabilité admissible pour les coordonnées locales  $(x, y, p)$  : où  $\xi_0$  désigne la trivialisaton locale  $(dx \wedge dy) \otimes (\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y})$  de  $\check{\mathcal{L}}$ , et  $f$  une fonction holomorphe sur  $\tilde{U} = \coprod_i U_i$  dont on notera  $f_i$  la restriction à  $U_i$ . La restriction de  $< \xi, \omega_W >$  à  $U_i$  s'écrit alors  $f_i(d\tilde{y} - p_i d\tilde{x})$ , et l'opérateur  $\xi \mapsto \text{Tr} < \xi, \omega_W >$  s'écrit localement  $(f_1, f_2, \dots, f_d) \mapsto (\sum_i f_i, \sum_i p_i f_i)$ . Comme la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ p_1 & p_2 & \dots & p_d \end{pmatrix}$  est de rang 2 puisque tous les  $p_i$  sont distincts sur  $M_0$ , l'opérateur précédent est surjectif et le noyau est un fibré holomorphe de rang  $d - 2$ , d'où la partie (i).

De même, le noyau de  $\text{Tr} : (\pi_W)_*(\Lambda^2 T^*W_0) \rightarrow \Lambda^2 T^*M_0$  est un fibré holomorphe de rang  $d - 1$ , puisque la matrice  $(1 \ \dots \ 1)$  est de rang 1, d'où la partie (ii).

Les relations  $\sum_i f_i \equiv 0$  et  $\sum_i (p_i f_i) \equiv 0$  impliquent  $\sum_i (f_i)'_x \equiv 0$  et  $\sum_i (p_i f_i)'_y \equiv 0$ . Puisque  $d(f_i(d\tilde{y} - p_i d\tilde{x})) = ((f_i)'_x + (p_i f_i)'_y)(d\tilde{x} \wedge d\tilde{y})$ , on en déduit que  $d < \xi, \omega_W >$  a une trace nulle dès l'instant que  $< \xi, \omega_W >$  a une trace nulle, d'où la partie (iii). □

### 6.3. La connexion de Hénaut (résumé)

Soit  $R_k$  l'espace des  $(k + 1)$ -jets solutions de  $\mathcal{D}\xi = 0$ , c'est-à-dire le noyau du  $k$ -ième prolongement  $D_k : J^{k+1}A \rightarrow J^k B$  de  $D : J^1 A \rightarrow B$  : c'est un fibré vectoriel sur  $M_0$ . Utilisant la théorie de Spencer, Hénaut a démontré ([9]) que  $R_{d-4}$  est un fibré vectoriel de rang  $(d - 1)(d - 2)/2$ , et que la projection naturelle  $\Psi : R_{d-3} \rightarrow R_{d-4}$  est un isomorphisme.

On peut alors interpréter cet isomorphisme comme définissant une connexion sur le fibré  $\mathcal{E} = R_{d-4}$  au dessus de  $M_0$ . En effet,  $R_{d-3}$  est égal à  $J^{d-2}A \cap J^1 R_{d-4}$ . Puisque  $J^1 R_{d-4}$  est l'espace des éléments de connexion sur  $R_{d-4}$  et puisque  $\Psi$  est linéaire,  $\Psi^{-1}$  est une connexion sur  $\mathcal{E}$ , qu'on appellera *la connexion de Hénaut*, et dont on appellera la courbure *la courbure de Hénaut*. Pour toute section  $\xi$  de  $A$  qui est une relation abélienne,  $j^{d-3}\xi$  est

une section de  $\mathcal{E}$  à dérivée covariante nulle puisque  $\Psi^{-1}(j^{d-3}\xi) = j^{d-2}\xi$ . Réciproquement, toute section de  $\mathcal{E}$  à dérivée covariante nulle est la section  $j^{d-3}\xi$  associée à une relation abélienne  $\xi$ .

En outre, la courbure de Hénaut, qui est une 2-forme à coefficients dans  $\text{Hom}(R_{d-4}, R_{d-4})$ , prend en fait ses valeurs dans  $g_{d-4} = \text{Ker}(R_{d-4} \rightarrow R_{d-5})$ , qui en est un sous-fibré vectoriel de rang un.

Si la courbure de Hénaut est nulle, les sections de  $\mathcal{E}$  à dérivée covariante nulle (et donc aussi les relations abéliennes) forment un système local de coefficients de rang  $(d-1)(d-2)/2$  : on retrouve que ce nombre est le rang maximum du tissu.

Dans le cas particulier  $d = 3$ ,  $\mathcal{E} = A$ , et la connexion de Hénaut coïncide avec la connexion duale de la connexion de Blaschke sur  $A'$  vue à la section précédente.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. BLASCHKE, « Einführung in die Geometrie der Gewebe », Birkhäuser Verlag, Basel, 1955.
- [2] W. BLASCHKE & G. BOL, « Geometrie der Gewebe », Springer Verlag, Berlin, 1938.
- [3] C. CAMACHO & D. LEHMANN, « Residues of holomorphic foliations relative to a general submanifold », *Bull. London Math. Soc.* **37** (2005), p. 435-445.
- [4] D. CERVEAU, « Théorèmes de type Fuchs pour les tissus feuilletés », in *Complex analytic methods in dynamical systems*, vol. 222, Astérisque, 1994 (IMPA, January 1992), p. 49-92.
- [5] S. S. CHERN, « Abzählungen für Gewebe », *Abh. Hamburg* **11** (1936), p. 163-170.
- [6] L. DARA, « Singularités génériques des équations différentielles multiformes », *Bol. Soc. Bras. Mat.* **6** (1975), p. 95-128.
- [7] A. HÉNAUT, « Sur la linéarisation des tissus de  $\mathbb{C}^2$  », *Topology* **32** (1993), p. 531-542.
- [8] ———, « Sur la courbure de Blaschke et le rang des tissus de  $\mathbb{C}^2$  », *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.* **51** (2000), p. 1-19.
- [9] ———, « On planar web geometry through abelian relations and connections », *Annals of Mathematics* **159** (2004), p. 425-445.
- [10] P. NAGY, « Webs and curvature », in *Web theory and related topics, Toulouse, 1996*, World Sci. Publishing Co., River Edge NJ, 2001 (J. Grifone and E. Salem eds.), p. 6-47.
- [11] I. NAKAI, « Curvature of curvilinear 4-webs and pencils of 1-forms : variation on a theorem of Poincaré, Mayrhofer and Reidemeister », *Comment. Math. Helv.* **73** (1998), p. 177-205.
- [12] H. POINCARÉ, « Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes », *Bul. Soc. Mat. de France, Ser. I* **29** (1901), p. 61-86.
- [13] O. RIPOLL, « Détermination du rang des tissus du plan et autres invariants géométriques », *C.R. Ac. Sc. Paris, Ser. I*, **431** (2005), p. 247-252.
- [14] ———, « Géométrie des tissus du plan et équations différentielles », Thèse, Université de Bordeaux I, 2005, 1-99.

Manuscrit reçu le 23 juin 2006,  
accepté le 24 septembre 2006.

Vincent CAVALIER & Daniel LEHMANN  
Université de Montpellier II  
Département des Sciences Mathématiques  
CP 051  
Place Eugène Bataillon  
34095 Montpellier Cedex 5 (France)  
cavalier@math.univ-montp2.fr  
lehmann@math.univ-montp2.fr