



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Charles FRANCES

**Dégénérescence locale des transformations conformes
pseudo-riemanniennes**

Tome 62, n° 5 (2012), p. 1627-1669.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2012__62_5_1627_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2012, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*
<http://www.cedram.org/>

DÉGÉNÉRESCENCE LOCALE DES TRANSFORMATIONS CONFORMES PSEUDO-RIEMANNIENNES

par Charles FRANCES (*)

RÉSUMÉ. — Nous étudions l'ensemble $Conf(M, N)$ des immersions conformes entre deux variétés pseudo-riemanniennes (M, g) et (N, h) . Nous caractérisons notamment l'adhérence de $Conf(M, N)$ dans l'espace des applications continues $C^0(M, N)$, et décrivons quelques propriétés géométriques de (M, g) lorsque cette adhérence est non triviale.

ABSTRACT. — We study the set $Conf(M, N)$ of conformal immersions between two pseudo-Riemannian manifolds (M, g) and (N, h) . We characterize the closure of $Conf(M, N)$ in the space of continuous maps from M to N , and we investigate the geometric properties of (M, g) whenever this closure is nontrivial.

1. Introduction

Cet article porte sur l'étude de l'ensemble $Conf(M, N)$ des immersions conformes lisses, entre deux variétés connexes pseudo-riemanniennes (M, g) et (N, h) , également lisses, de même signature (p, q) . Il s'agit des immersions $f : M \rightarrow N$ qui satisfont $f^*h = e^\sigma g$, avec σ une fonction lisse sur M . On sera particulièrement intéressé par les manières dont peuvent dégénérer de telles immersions conformes, autrement dit, par « l'infini » de $Conf(M, N)$. Un moyen de comprendre cet infini consiste à décrire, lorsqu'ils existent, les points de l'adhérence de $Conf(M, N)$ dans $C^0(M, N)$, qui ne sont pas dans $Conf(M, N)$. Ici, $C^0(M, N)$ désigne l'espace des applications continues de

Mots-clés : transformations conformes, structures pseudo-riemanniennes.

Classification math. : 53A30, 53C50.

(*) Je souhaiterais remercier chaleureusement Karin Melnick pour d'intéressantes conversations sur le sujet. Par ailleurs, ce travail a bénéficié du soutien de l'ANR GEODYCOS.

M dans N , que l'on munit de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de M .

Lorsque l'on est en présence de deux variétés riemanniennes (M, g) et (N, h) de même dimension $n \geq 2$, on dispose de résultats très généraux, prouvés par J. Ferrand dans [6], qui traitent de l'ensemble $Q_K(M, N)$ des plongements K -quasi-conformes entre (M, g) et (N, h) , où $K \geq 1$ (voir également les travaux [10] et [17] dans le cadre de l'espace euclidien). Il ressort essentiellement des théorèmes A, B et C de [6], que si une suite (f_k) de $Q_K(M, N)$ admet une limite f dans $\mathcal{C}^0(M, N)$, alors f appartient à $Q_K(M, N)$ ou f est une application constante. De plus, si l'on est dans ce dernier cas, la variété (M, g) est K -quasi-conforme à un ouvert de \mathbf{R}^n . Autrement dit, les applications quasi-conformes entre variétés riemanniennes dégénèrent comme le font les transformations de Möbius.

Notre objectif est de comprendre ce qu'il advient en signature quelconque, pour les *immersions* conformes, donc sans hypothèse d'injectivité, mais en se limitant aux applications lisses, et à la dimension ≥ 3 . On travaille donc dans le contexte des structures géométriques rigides.

Notre premier résultat caractérise les *familles normales* de $\text{Conf}(M, N)$, c'est-à-dire celles qui sont relativement compactes dans $\mathcal{C}^0(M, N)$. Nous allons en fait donner un critère local simple, qui assure la relative compacité au sein des applications lisses.

THÉORÈME 1.1. — *Soient $(M, [g])$ et $(N, [h])$ deux structures conformes pseudo-riemanniennes de signature (p, q) , $p + q \geq 3$. Soit \mathcal{F} une famille d'immersions conformes lisses de $(M, [g])$ dans $(N, [h])$. On suppose qu'il existe $x \in M$ tel que :*

- (1) *L'ensemble $E := \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans N .*
- (2) *La famille \mathcal{F} est équicontinue en x .*

Alors il existe un ouvert $U \subset M$ contenant x tel que $\mathcal{F}|_U$ soit relativement compacte dans $\mathcal{C}^\infty(U, N)$, pour la topologie de la convergence \mathcal{C}^∞ sur les compacts de U .

On veut maintenant décrire quelles applications peuvent apparaître dans l'adhérence de $\text{Conf}(M, N)$ dans $\mathcal{C}^0(M, N)$. Le théorème 1.1 assure déjà que ces applications sont nécessairement lisses. On peut en fait dire beaucoup plus grâce au théorème ci-dessous. Nous rappelons qu'une sous-variété Σ de (M, g) est dite dégénérée lorsque la restriction de g à Σ est dégénérée. Si $x \in \Sigma$, le radical isotrope en x est le plus grand sous-espace de $T_x \Sigma$ qui soit orthogonal à $T_x \Sigma$ pour la forme g_x . La variété Σ est dite totalement isotrope lorsque la restriction de g à Σ est identiquement nulle. Dans le

cadre riemannien, les sous-variétés dégénérées sont les points. Enfin, la notion de sous-variété totalement géodésique conforme sera introduite en Section 3.3.

THÉORÈME 1.2. — Soient $(M, [g])$ et $(N, [h])$ deux structures conformes pseudo-riemanniennes de signature (p, q) , $p + q \geq 3$. Soit $f_k : (M, [g]) \rightarrow (N, [h])$ une suite d'immersions conformes lisses qui converge uniformément sur les compacts de M vers une application $f \in \mathcal{C}^0(M, N)$. Alors l'application f est de classe \mathcal{C}^∞ et de rang constant, et la convergence de (f_k) vers f est \mathcal{C}^∞ sur les compacts de M . De plus, on est dans exactement l'un des trois cas suivants :

- (1) L'application f appartient à $Conf(M, N)$.
- (2) L'application f est constante. Dans ce cas, (M, g) est localement conformément Ricci-plate.
- (3) (a) Localement, f est une submersion sur une sous-variété lisse, de dimension non nulle, totalement isotrope de N .
 (b) Les fibres de f sont des sous-variétés totalement géodésiques conformes, qui sont dégénérées. Le radical isotrope de ces fibres a pour dimension le rang de f .

Dans le cadre riemannien, le cas (3) ne peut pas se produire. On retrouve que la limite d'une suite d'immersions conformes riemanniennes est soit une immersion conforme, soit une application constante. En signature lorentzienne, les limites possibles de suites d'immersions conformes sont soit des immersions conformes, soit des applications constantes, soit des submersions sur une géodésique de lumière de (N, h) , dont les fibres sont des hypersurfaces dégénérées, totalement géodésiques conformes, de (M, g) . Les deux derniers cas se produisent réellement, par exemple dans le cadre des variétés lorentziennes (M, g) *autosimilaires*, c'est-à-dire celles admettant un flot conforme φ^t pour lequel $(\varphi^t)^*g = e^{-2t}g$. Le lecteur pourra notamment consulter les sections 5 et 6 de l'article [1], qui correspondent au cas (2) du Théorème 1.2, et la section 7 qui illustre le cas (3).

Dans tous les cas, l'énoncé précédent montre que lorsque $Conf(M, N)$ n'est pas fermé dans $\mathcal{C}^0(M, N)$, la variété (M, g) présente des propriétés géométriques intéressantes. Dans les cadres riemanniens et lorentziens, on peut préciser ces résultats pour obtenir :

THÉORÈME 1.3. — Soient $(M, [g])$ et $(N, [h])$ deux structures pseudo-riemanniennes de même signature (p, q) , $p + q \geq 3$. On suppose que $Conf(M, N)$ n'est pas fermé dans $\mathcal{C}^0(M, N)$. Alors :

- (1) Si $(M, [g])$ est riemannienne, elle est localement conformément plate.
- (2) Si $(M, [g])$ est lorentzienne, alors elle est localement conformément Ricci-plate. Si de plus l'adhérence de $\text{Conf}(M, N)$ dans $\mathcal{C}^0(M, N)$ contient une application constante, alors $(M, [g])$ est localement conformément plate.

Enfin, notre dernier théorème est de nature dynamique. Étant donnée une suite (f_k) de $\text{Conf}(M, N)$ qui converge dans $\mathcal{C}^0(M, N)$ vers une application f , le Théorème 1.2 nous dit que les fibres de f sont des sous-variétés de M . Si x et y sont dans la même fibre, alors $f_k(x)$ et $f_k(y)$ ont bien entendu la même limite. La question est maintenant de savoir « à quelle vitesse » les points $f_k(x)$ et $f_k(y)$ se rapprochent. Le résultat qui suit peut être vu comme un pendant conforme de [19, Théorèmes 1.1 et 1.2], et donne l'existence de « vitesses critiques » naturellement associées à la suite (f_k) , qui définissent à leur tour des sous-feuilletages totalement géodésiques conformes des fibres de f . Avant de donner l'énoncé précis, rappelons que si (a_k) et (b_k) sont deux suites de réels positifs, alors $a_k = \Theta(b_k)$ signifie qu'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour k suffisamment grand :

$$C_1 b_k \leq a_k \leq C_2 b_k.$$

Par $a_k = O(b_k)$, on entend qu'il existe $C > 0$ tel que pour k suffisamment grand, $a_k \leq C b_k$.

THÉORÈME 1.4. — Soit (f_k) une suite de $\text{Conf}(M, N)$ qui converge uniformément sur les compacts de M vers une application limite f . Quitte à remplacer (f_k) par une suite extraite, il existe :

- Un entier $s \geq 1$ et une filtration de TM , $\mathcal{F}_0 = \{0\} \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{F}_{s-1} \subsetneq TM$, qui s'intègre en s feuilletages lisses totalement géodésiques conformes de M , $F_0 \subsetneq \dots \subsetneq F_{s-1}$.
- Des suites $\mu_1(k), \dots, \mu_s(k)$ de \mathbf{R}_+^* qui convergent dans \mathbf{R}_+ , vérifiant, lorsque $s \geq 2$, $\mu_j(k) = o(\mu_{j+1}(k))$ pour $j \in \{1, \dots, s-1\}$, et des entiers n_1, \dots, n_s de \mathbf{N}^* avec $n_1 + \dots + n_s = n$, tels que pour tout $k \in \mathbf{N}$, la matrice

$$\begin{pmatrix} \mu_1(k)I_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_s(k)I_{n_s} \end{pmatrix}$$

préserve la classe conforme de la forme quadratique $2x_1 x_{p+q} + \dots + 2x_p x_{q+1} + \sum_{p+1}^q x_i^2$,

satisfaisant les propriétés suivantes :

- (1) (a) Un vecteur non nul $u \in T_x M$ appartient à $T_x M \setminus \mathcal{F}_{s-1}(x)$, si et seulement si pour toute suite (u_k) de $T_x M$ qui converge vers u ,

$$\|D_x f_k(u_k)\| = \Theta(\mu_s(k)).$$

- (b) Lorsque $s \geq 2$, un vecteur non nul $u \in T_x M$ appartient à $\mathcal{F}_j(x) \setminus \mathcal{F}_{j-1}(x)$, $j = 1, \dots, s-1$, si et seulement si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :

- (i) Pour toute suite (u_k) de $T_x M$ qui converge vers u ,

$$\mu_j(k) = O(\|D_x f_k(u_k)\|).$$

- (ii) Il existe une suite (u_k) de $T_x M$ qui converge vers u telle que $\|D_x f_k(u_k)\| = \Theta(\mu_j(k))$.

- (2) Chaque $x \in M$ admet un voisinage U_x tel que la feuille locale $F_j^{loc}(x)$ de x dans U_x soit caractérisée par :

- (a) Un point y appartient à $U_x \setminus F_{s-1}^{loc}(x)$ si et seulement si pour toute suite (y_k) de U_x qui converge vers y , $d(f_k(x), f_k(y_k)) = \Theta(\mu_s(k))$.

- (b) Lorsque $s \geq 2$, un point y appartient à $F_j^{loc}(x) \setminus F_{j-1}^{loc}(x)$, $j = 1, \dots, s-1$, si et seulement si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :

- (i) Pour toute suite (y_k) de U_x qui converge vers y ,

$$\mu_j(k) = O(d(f_k(x), f_k(y_k))).$$

- (ii) Il existe une suite (y_k) de U_x qui converge vers y telle que $d(f_k(x), f_k(y_k)) = \Theta(\mu_j(k))$.

Nous verrons en Section 8 que l'entier s , les sous-variétés $F_j^{loc}(x)$ et les suites $\mu_j(k)$, s'ils vérifient les conclusions 2 (a), (b) du théorème, sont uniques (à équivalence près en ce qui concerne les suites $\mu_j(k)$).

L'information apportée par le Théorème 1.4 est surtout intéressante lorsque l'entier s vaut au moins 2, mais il n'est pas inutile de clarifier ses conclusions dans le cas simple où $s = 1$. Une seule suite $\mu_1(k)$ intervient alors, conduisant à deux situations qualitativement distinctes. La première, où la limite de $\mu_1(k)$ n'est pas nulle, correspond au cas où l'application limite f est dans $Conf(M, N)$. La situation est alors dynamiquement triviale, et la conclusion du théorème l'est également. La seconde possibilité correspond au cas où $\mu_1(k)$ tend vers 0, ce qui implique que la suite (f_k) converge vers une application f constante. Aussi, lorsque x et y sont

deux points de M , la distance $d(f_k(x), f_k(y))$ tend vers 0. Le point 2 (a) du théorème précise cette conclusion et nous dit que pour x et y distincts, suffisamment proches dans M , la distance $d(f_k(x), f_k(y))$ est un $\Theta(\mu_1(k))$. En fait, en utilisant le point 1 (a) du théorème, on peut montrer par une preuve totalement identique à celle, donnée en section 6.2, du théorème 1.3, que lorsque f n'appartient pas à $Conf(M, N)$ et que l'entier s vaut 1, la variété M est localement conformément plate.

2. Prérequis algébriques et géométriques

2.1. L'univers d'Einstein

Nous commençons par de brefs rappels géométriques sur l'espace modèle conformément plat de signature (p, q) , avec $p \leq q$. Pour une étude plus détaillée, nous renvoyons le lecteur à [2] ou [8].

Soit $\mathbf{R}^{p+1, q+1}$ l'espace \mathbf{R}^{p+q+2} muni de la forme quadratique :

$$Q^{p+1, q+1}(x) := 2x_0x_{p+q+1} + \dots + 2x_px_{q+1} + \sum_{p+1}^q x_i^2$$

Le cône isotrope de cette forme quadratique est noté $\mathcal{N}^{p+1, q+1}$. La restriction de $Q^{p+1, q+1}$ fournit une métrique dégénérée sur $\mathcal{N}^{p+1, q+1} \setminus \{0\}$, dont le noyau est de dimension 1, et est tangent aux génératrices du cône $\mathcal{N}^{p+1, q+1}$. Ainsi, le projectivisé $\mathbf{P}(\mathcal{N}^{p+1, q+1} \setminus \{0\})$ est une sous-variété lisse de \mathbf{RP}^{p+q+1} , naturellement munie d'une classe conforme de métriques non dégénérées, de signature (p, q) . On appelle *univers d'Einstein* de signature (p, q) , et l'on note $\text{Ein}^{p, q}$, cette variété compacte $\mathbf{P}(\mathcal{N}^{p+1, q+1} \setminus \{0\})$ munie de la structure conforme ci-dessus.

L'espace $\text{Ein}^{0, q}$ n'est autre que la sphère \mathbf{S}^q munie de la classe conforme de la métrique « ronde » $g_{\mathbf{S}^q}$. Pour $p \geq 1$, le produit $\mathbf{S}^p \times \mathbf{S}^q$, muni de la classe conforme de la métrique produit $-g_{\mathbf{S}^p} \oplus g_{\mathbf{S}^q}$, est un revêtement double, conforme, de $\text{Ein}^{p, q}$.

Soit $O(p+1, q+1)$ le groupe des transformations linéaires qui laissent $Q^{p+1, q+1}$ invariante. L'action naturelle de $O(p+1, q+1)$ sur $\text{Ein}^{p, q}$ préserve la structure conforme de $\text{Ein}^{p, q}$, et il s'avère que $O(p+1, q+1)$ est tout le groupe des difféomorphismes conformes de $\text{Ein}^{p, q}$ (voir [8] ou [15], ainsi que les références de [12]).

Dans tout l'article nous appellerons o le point de $\text{Ein}^{p, q}$ correspondant à $[e_0]$. Son stabilisateur $P \subset O(p+1, q+1)$ est un sous-groupe parabolique isomorphe au produit semi-direct $(\mathbf{R}_+^* \times O(p, q)) \ltimes \mathbf{R}^{p, q}$, avec $n = p+q$. Du point de vue conforme, $\text{Ein}^{p, q}$ est donc l'espace homogène $O(p+1, q+1)/P$.

2.2. L’algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(p + 1, q + 1)$

L’algèbre de Lie $\mathfrak{o}(p + 1, q + 1)$ est composée des matrices X de taille $(p + q + 2) \times (p + q + 2)$ qui satisfont l’identité :

$$X^t J_{p+1,q+1} + J_{p+1,q+1} X = 0.$$

Ici, $J_{p+1,q+1}$ est la matrice dans la base (e_0, \dots, e_{n+1}) de la forme quadratique $Q^{p+1,q+1}$.

L’algèbre $\mathfrak{o}(p + 1, q + 1)$ s’écrit comme une somme $\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{n}^+$, où :

$$\begin{aligned} \mathfrak{z} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & 0 & \\ & & -a \end{pmatrix} : a \in \mathbf{R} \right\} \\ \mathfrak{s} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & M & \\ & & 0 \end{pmatrix} : M \in \mathfrak{o}(p, q) \right\} \\ \mathfrak{n}^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -x^t \cdot J_{p,q} & 0 \\ & 0 & x \\ & & 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R}^{p,q} \right\} \\ \mathfrak{n}^- &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ x & 0 & \\ 0 & -x^t \cdot J_{p,q} & 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R}^{p,q} \right\} \end{aligned}$$

On notera également $\mathfrak{r} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{s}$. Par N^+, N^- et Z , on désignera les sous-groupes connexes de $O(p + 1, q + 1)$ dont l’algèbre de Lie est $\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-$ et \mathfrak{z} respectivement. Il existe par ailleurs dans $O(p + 1, q + 1)$ un sous-groupe isomorphe à $O(p, q)$, dont l’algèbre de Lie est \mathfrak{s} : il sera noté S . Enfin, on appellera R le produit $Z \times S$, dont l’algèbre de Lie est \mathfrak{r} . Ce groupe est isomorphe au produit $\mathbf{R}_+^* \times O(p, q)$.

Dans $\mathfrak{o}(p + 1, q + 1)$, on appelle \mathfrak{a} l’algèbre constituée des matrices :

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_{p+1} & & & \\ & & & 0_{q-p} & & \\ & & & & -\alpha_{p+1} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & -\alpha_1 \end{pmatrix} : \alpha_1, \dots, \alpha_{p+1} \in \mathbf{R} \right\}.$$

Dans l'expression ci-dessus, 0_{q-p} désigne la matrice nulle de taille $q - p$. On appelle \mathfrak{a}^+ le sous-ensemble de \mathfrak{a} pour lequel $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_{p+1} \geq 0$, et l'on pose $A^+ := e^{\mathfrak{a}^+}$ (l'image de \mathfrak{a}^+ par l'exponentielle dans $O(p+1, q+1)$).

2.3. Le groupe parabolique P

Le groupe P est le stabilisateur du point $o = [e_0]$ dans $O(p+1, q+1)$. Il s'agit du sous-groupe $(Z \times S) \times N^+ \subset O(p+1, q+1)$. Comme nous l'avons vu, il est isomorphe au produit semi-direct $(\mathbf{R}_+^* \times O(p, q)) \ltimes \mathbf{R}^{p,q}$, i.e au groupe conforme de l'espace $\mathbf{R}^{p,q}$. Cet isomorphisme n'est pas fortuit. Il existe en effet une immersion conforme $j : \mathbf{R}^{p,q} \rightarrow \text{Ein}^{p,q}$, appelée *projection stéréographique*, et donnée en coordonnées projectives par la formule $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto [-\frac{Q^{p,q}(x)}{2}, x_1, \dots, x_n, 1]$. L'image $j(\mathbf{R}^{p,q})$ est le complémentaire dans $\text{Ein}^{p,q}$ du cône de lumière passant par o .

2.3.1. Le groupe P comme groupe de transformations affines

L'application j conjugue l'action naturelle de P sur le complémentaire du cône de lumière issu de o , à l'action affine de $(\mathbf{R}_+^* \times O(p, q)) \ltimes \mathbf{R}^{p,q}$ sur $\mathbf{R}^{p,q}$. Grâce à la projection stéréographique j , on verra souvent les éléments de P *comme des transformations affines* de $\mathbf{R}^{p,q}$, notées $A + T$, où $A \in \mathbf{R}_+^* \times O(p, q)$ est la partie linéaire, et $T \in \mathbf{R}^{p,q}$ le facteur de translation.

Vu comme élément de $O(p+1, q+1)$, une translation de vecteur $v \in \mathbf{R}^{p,q}$ admet l'expression :

$$(2.1) \quad n^+(v) := \begin{pmatrix} 1 & -v^t \cdot J_{p,q} & -\frac{Q^{p,q}(v)}{2} \\ & 1 & v \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des translations forme le groupe N^+ , d'algèbre de Lie \mathfrak{n}^+ . L'application $n^+ : \mathbf{R}^{p,q} \rightarrow N^+$ est un isomorphisme de groupes.

Vu dans $O(p+1, q+1)$, un élément $\lambda A \in \mathbf{R}_+^* \times O(p, q)$ s'exprime comme :

$$(2.2) \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

- (2) $\pi_M : \hat{M} \rightarrow M$ est un P fibré principal au-dessus de M .
- (3) la forme ω est une 1-forme à valeurs dans \mathfrak{g} , satisfaisant les propriétés suivantes :
 - Pour chaque $\hat{x} \in \hat{M}$, $\omega_{\hat{x}} : T_{\hat{x}}\hat{M} \rightarrow \mathfrak{g}$ est un isomorphisme d’espaces vectoriels.
 - Pour tout $X \in \mathfrak{p}$ et $\hat{x} \in \hat{M}$, $\omega_{\hat{x}}(\frac{d}{dt} R_{e^{tX}}.\hat{x}) = X$.
 - Pour tout $p \in P$, $(R_p)^*\omega = (\text{Ad } p^{-1}).\omega$.

Ici, R_p désigne l’action à droite de $p \in P$ sur \hat{M} , et e^{tX} est l’exponentielle dans le groupe G . Une 1-forme ω comme ci-dessus s’appelle une *connexion de Cartan* sur \hat{M} .

Il faut penser à une géométrie de Cartan comme un analogue courbe du modèle plat $(\mathbf{X}, G, \omega_G)$ où ω_G est la forme de Maurer-Cartan sur G .

Prenons à présent l’exemple de l’espace homogène $\mathbf{X} := \text{Ein}^{p,q} = \text{O}(p+1, q+1)/P$, et d’une géométrie de Cartan (M, \hat{M}, ω) modelée sur $\text{Ein}^{p,q}$. Pour tout $x \in M$ et $\hat{x} \in \hat{M}$ dans la fibre de x , il existe un isomorphisme naturel :

$$\iota_{\hat{x}} : \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \rightarrow T_x M$$

défini par $\iota_{\hat{x}}(\bar{\xi}) := D_{\hat{x}}\pi_M(\omega_{\hat{x}}^{-1}(\xi))$, où ξ est un représentant quelconque dans \mathfrak{g} de la classe $\bar{\xi} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. L’isomorphisme $\iota_{\hat{x}}$ satisfait la relation d’équivariance :

$$(3.1) \quad \iota_{\hat{x}.p^{-1}}((\text{Ad } p).\bar{\xi}) = \iota_{\hat{x}}(\bar{\xi}), \quad \forall p \in P.$$

Soit $\lambda^{p,q}$ une métrique de signature (p, q) sur \mathfrak{n}^- , qui soit $(\text{Ad } S)$ -invariante (notons qu’une telle métrique est unique à multiplication par un scalaire près). Alors $\mathcal{C} = [\lambda^{p,q}]$ est l’unique classe conforme de produits scalaires de signature (p, q) qui soit $(\text{Ad } P)$ -invariante sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, $\iota_{\hat{x}}(\mathcal{C})$ définit une classe conforme de signature (p, q) sur $T_x M$, indépendante du choix de $\hat{x} \in \hat{M}$ au-dessus de x . Autrement-dit, une géométrie de Cartan (M, \hat{M}, ω) modelée sur $\text{Ein}^{p,q}$ définit une classe conforme $[g]$ de métriques de signature (p, q) sur M .

Le fibré \hat{M} étant fixé, il existe *a priori* beaucoup de connexions de Cartan ω définissant la classe $[g]$ sur M . De même que dans le contexte métrique, il existe une unique connexion compatible sans torsion (la connexion de Levi-Civita), il existe un choix de normalisation adéquat qui rend ω unique (voir la Section 3.1.1 ci-dessous). Précisément, voir [16, chap. 7, Prop. 3.1 p.285], [11], on peut énoncer le :

THÉORÈME 3.1 (E. Cartan). — *Soit $(M, [g])$ une structure conforme pseudo-riemannienne de signature (p, q) , $p+q \geq 3$. Alors il existe une unique géométrie de Cartan (M, \hat{M}, ω) normale, modelée sur $\text{Ein}^{p,q}$, définissant la*

structure conforme $(M, [g])$ par la procédure ci-dessus. En particulier, tout difféomorphisme conforme local ϕ sur M se remonte en un automorphisme local de fibré (renoté ϕ) qui préserve ω .

Dans la suite, si $(M, [g])$ est une structure conforme pseudo-riemannienne de dimension $n \geq 3$, nous appellerons le triplet (M, \hat{M}, ω) donné par le théorème 3.1, le *fibré normal de Cartan* défini par $(M, [g])$.

3.1.1. Courbure conforme et connexion normale

Pour une géométrie de Cartan (M, \hat{M}, ω) modelée sur un espace $\mathbf{X} = G/P$, on a une notion de courbure K définie, pour tout couple de champs de vecteurs \hat{X} et \hat{Y} sur \hat{M} par (voir [16] p.176, p. 191) :

$$K(\hat{X}, \hat{Y}) := d\omega(\hat{X}, \hat{Y}) + [\omega(\hat{X}), \omega(\hat{Y})].$$

En particulier, si \hat{X} et \hat{Y} sont ω -constants, on obtient :

$$(3.2) \quad K(\hat{X}, \hat{Y}) = [\omega(\hat{X}), \omega(\hat{Y})] - \omega([\hat{X}, \hat{Y}]).$$

Par ailleurs, en un point où \hat{X} ou \hat{Y} est tangent aux fibres de \hat{M} , la courbure s'annule. On peut donc également voir la courbure comme une application $\kappa : \hat{M} \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{g})$. Cette fonction courbure s'annule au-dessus d'un ouvert $U \subset M$ si et seulement si cet ouvert est localement conformément plat.

L'application κ satisfait la relation d'équivariance :

$$(3.3) \quad (\text{Ad } p^{-1}) \cdot \kappa_{\hat{x} \cdot p^{-1}}((\text{Ad } p) \cdot \xi, (\text{Ad } p) \cdot \eta) = \kappa_{\hat{x}}(\xi, \eta).$$

Dans le cas où (M, \hat{M}, ω) est le fibré normal de Cartan d'une structure conforme pseudo-riemannienne $(M, [g])$, alors la condition de normalisation sur ω dit deux choses : d'une part que la fonction courbure κ , au lieu d'être à valeurs dans $\text{Hom}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{g})$ est à valeurs dans $\text{Hom}(\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{n}^+)$, et d'autre part que la composante $\kappa_{\mathfrak{s}}$ est dans le noyau de l'homomorphisme de Ricci (voir [16] p.280, et la Prop. 3.1 p.285). Cette composante $\kappa_{\mathfrak{s}}$ de κ sur \mathfrak{s} correspond au tenseur de Weyl W sur la variété M ([16] p.236 et p.290), via la formule : $W_y(u, v)w = [\kappa_{\mathfrak{s}}(\iota_y^{-1}(u), \iota_y^{-1}(v)), \iota_y^{-1}(w)]$.

3.2. Application exponentielle conforme

Le choix d'un élément Z dans $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(p+1, q+1)$ définit naturellement un champ de vecteurs \hat{Z} sur \hat{M} par la relation $\omega(\hat{Z}) = Z$. Si $Z \in \mathfrak{g}$, on note ψ_Z^t le flot local engendré sur \hat{M} par le champ \hat{Z} . En chaque $\hat{x} \in \hat{M}$,

on définit $\mathcal{W}_{\hat{x}} \subset \mathfrak{g}$ l'ensemble des Z tels que ψ_Z^t est défini pour $t \in [0, 1]$ en \hat{x} . On définit l'application exponentielle en \hat{x} :

$$\exp(\hat{x}, \cdot) : \mathcal{W}_{\hat{x}} \rightarrow \hat{M}$$

par :

$$\exp(\hat{x}, Z) := \psi_Z^1.\hat{x}$$

Il est standard de montrer que $\mathcal{W}_{\hat{x}}$ est un voisinage de 0, et que l'application $\xi \mapsto \exp(\hat{x}, \xi)$ réalise un difféomorphisme d'un voisinage $\mathcal{V}_{\hat{x}} \subset \mathcal{W}_{\hat{x}}$ contenant 0 sur un voisinage de \hat{x} dans \hat{M} .

3.2.1. Application exponentielle et immersions conformes

Soient $(M, [g])$ et $(N, [h])$ deux structures pseudo-riemanniennes de signature (p, q) , $p + q \geq 3$. On appelle (M, \hat{M}, ω^M) et (N, \hat{N}, ω^N) les fibrés normaux de Cartan associés. Pour ne pas alourdir les notations, on appellera indistinctement \exp les applications exponentielles sur \hat{M} et \hat{N} . Soit f une immersion conforme de $(M, [g])$ dans $(N, [h])$. Alors f se remonte en une immersion, notée f , du fibré (M, \hat{M}, ω) dans le fibré (N, \hat{N}, ω^N) , qui satisfait de plus $f^*(\omega^N) = \omega^M$. Soit $Z \in \mathfrak{g}$, et \hat{Z}_1 (resp. \hat{Z}_2) le champ de vecteurs sur \hat{M} (resp. sur \hat{N}) satisfaisant $\omega^M(\hat{Z}_1) = Z$ (resp. $\omega^N(\hat{Z}_2) = Z$). Alors $f_*(\hat{Z}_1) = \hat{Z}_2$, et si $p \in P$, $(R_p)_*(\hat{Z}) = \hat{Z}_p$, où $Z_p := (\text{Ad } p^{-1}).Z$. On en déduit la propriété d'équivariance très importante suivante. Pour tout $\xi \in \mathcal{W}_{\hat{x}}$, et $p \in P$, on a $(\text{Ad } p).\xi \in \mathcal{W}_{f(\hat{x}).p^{-1}}$ et :

$$(3.4) \quad f(\exp(\hat{x}, \xi)).p^{-1} = \exp(f(\hat{x}).p^{-1}, (\text{Ad } p).\xi).$$

3.3. Sous-variétés totalement géodésiques conformes

Dans toute cette section, $(M, [g])$ désigne une structure conforme pseudo-riemannienne de dimension $n \geq 3$, et de signature (p, q) . On interprète cette structure conforme comme une géométrie de Cartan modelée sur $\text{Ein}^{p,q}$, et l'on appelle (M, \hat{M}, ω) le fibré normal de Cartan.

La connexion de Cartan ω définit une notion de transport parallèle sur le fibré \hat{M} : si $\alpha : [0, 1] \rightarrow \hat{M}$ est une courbe lisse et si $\xi \in \mathfrak{g}$ est un vecteur, alors $\omega_{\alpha(t)}^{-1}(\xi)$ définit un champ de vecteurs le long de la courbe α , que l'on qualifiera de « parallèle ». Les courbes de \hat{M} dont le vecteur tangent est parallèle sont les $t \mapsto \exp(\hat{x}, \xi)$, $\hat{x} \in \hat{M}$, $\xi \in \mathfrak{g}$. On définit les *segments géodésiques conformes* (paramétrés) de M comme les projections sur M de courbes de la forme $t \mapsto \exp(\hat{x}, \xi)$, $\hat{x} \in \hat{M}$, $\xi \in \mathfrak{n}^-$ (noter que l'on se

limite aux vecteurs ξ horizontaux). Par exemple, sur la sphère standard riemannienne \mathbf{S}^n , les segments géodésiques conformes sont les arcs de grands cercles, ainsi que leurs images par les transformations de Möbius. Nous ne détaillerons pas les propriétés de ces courbes dans cet article (voir [4], [5]).

De manière générale, étant donné $\mathcal{S} \subset \mathfrak{g}$ un sous-espace vectoriel, on peut se demander si la distribution de $T\hat{M}$ définie par $\omega^{-1}(\mathcal{S})$ admet une ou plusieurs feuilles intégrales. Autrement dit, existe-t-il une sous-variété $\hat{S} \subset \hat{M}$ telle que $\omega(T\hat{S}) = \{\mathcal{S}\}$; on dit alors que \hat{S} est une sous-variété *parallèle* de \hat{M} . Notons que nécessairement, si \hat{S} est une sous-variété intégrale de $\omega^{-1}(\mathcal{S})$ passant par \hat{x} , alors pour \mathcal{U} un voisinage de 0 suffisamment petit, $\exp(\hat{x}, \mathcal{S} \cap \mathcal{U}) \subset \hat{S}$.

L'existence de sous-variétés parallèles de dimension > 1 traduit souvent des propriétés géométriques particulières de la structure conforme $(M, [g])$. À titre d'exemple, citons le :

LEMME 3.2. — *Si la distribution de $T\hat{M}$ définie par $\omega^{-1}(\mathfrak{n}^-)$ admet une feuille intégrale \hat{S} passant par $\hat{x} \in \hat{M}$, alors il existe un ouvert de M contenant $x := \pi_M(\hat{x})$ qui est localement conformément plat.*

Preuve. — soit Z_1, \dots, Z_n une base de \mathfrak{n}^- , et $\hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_n$ les champs ω -constants de \hat{M} associés, alors on a en chaque point \hat{y} de \hat{S} la relation :

$$K(\hat{Z}_i, \hat{Z}_j) = [Z_i, Z_j] - \omega([\hat{Z}_i, \hat{Z}_j]) = -\omega([\hat{Z}_i, \hat{Z}_j]).$$

Comme $\omega(T\hat{S}) \subset \mathfrak{n}^-$ par définition, on a qu'en chaque $\hat{y} \in \hat{S}$, $K(\hat{Z}_i, \hat{Z}_j) \in \mathfrak{n}^-$. La connexion de Cartan étant normale, sa courbure est à valeurs dans $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{o}(p, q) \oplus \mathfrak{n}^+$. On conclut que $K = 0$ sur \hat{S} , et comme \hat{S} se projette sur un ouvert contenant $\pi_M(\hat{x})$, le lemme s'ensuit. \square

Par analogie avec les géodésiques conformes, on va maintenant définir les sous-variétés totalement géodésiques conformes de M comme des projections sur M de certaines sous-variétés parallèles de \hat{M} .

DÉFINITION 3.3 (Sous-variétés totalement géodésiques conformes). — *Soit $\Sigma \subset M$ une sous-variété. On dit que Σ est totalement géodésique conforme lorsque :*

- *Il existe une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h} := \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{p}_1$ dans \mathfrak{g} , avec $\mathfrak{n}_1 \subset \mathfrak{n}^-$, $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}$, telle que $\omega^{-1}(\mathfrak{h})$ admette une feuille intégrale \hat{S} dans \hat{M} .*
- *La sous-variété Σ s'écrit $\Sigma = \pi_M(\hat{S})$.*

Comme nous l'avons dit, il n'y a génériquement pas de sous-variété totalement géodésique de dimension ≥ 2 .

3.4. Existence locale de métriques Ricci-plates dans la classe conforme

Soit (M, \hat{M}, ω) le fibré normal de Cartan d'une variété pseudo-riemannienne conforme $(M, [g])$. Nous avons vu au Lemme 3.2 que si \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} , l'existence d'une feuille intégrale à la distribution $\omega^{-1}(\mathfrak{h})$ sur $T\hat{M}$ pouvait avoir des conséquences géométriques intéressantes. Un autre cas remarquable est donné par la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4. — *Si la distribution $\omega^{-1}(\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{s})$ admet une feuille intégrale $\hat{M}_0 \subset \hat{M}$ passant par $\hat{x} \in \hat{M}$, alors il existe un voisinage U de $x = \pi_M(\hat{x})$, et une métrique Ricci-plate dans la classe conforme $[g]_U$.*

Preuve. — dans la preuve, on va identifier $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ à \mathfrak{n}^- , via un isomorphisme qui commute à l'action adjointe de $Z \times S$. On considérera alors $\iota_{\hat{x}}$ comme un isomorphisme entre \mathfrak{n}^- et $T_x M$. Après cette identification, la relation :

$$(3.5) \quad \iota_{\hat{x}.p^{-1}}((\text{Ad } p).\xi) = \iota_{\hat{x}}(\xi)$$

est encore valable lorsque $\xi \in \mathfrak{n}^-$, et $p \in Z \times S \subset P$.

La feuille intégrale \hat{M}_0 , si elle est choisie maximale, est stable par l'action à droite de S° sur \hat{M} . Quitte à prendre le saturé par l'action de S , nous supposons dans ce qui suit que \hat{M}_0 est stable par l'action de S . Soit \mathcal{U} un voisinage de 0 dans \mathfrak{g} , assez petit pour que $\xi \mapsto \pi_M(\exp(\hat{x}, \xi))$ soit un difféomorphisme de $\mathcal{U} \cap \mathfrak{n}^-$ sur son image. On note $\hat{\Sigma} := \exp(\hat{x}, \mathfrak{n}^- \cap \mathcal{U})$, et \hat{U} le saturé de $\hat{\Sigma}$ par l'action de S ; c'est un ouvert de \hat{M}_0 difféomorphe au produit $\hat{\Sigma} \times S$. On pose également $U := \pi_M(\hat{\Sigma})$, qui est un voisinage de $x := \pi_M(\hat{x})$. Les fibres de la restriction $\bar{\pi}_M$ de π_M à \hat{U} sont exactement les orbites de S , et $\bar{\pi}_M : \hat{U} \rightarrow U$ est un S -fibré principal (ou de manière équivalente, un $O(p, q)$ -fibré principal).

La donnée de la sous-variété \hat{U} permet de définir une métrique h sur U comme suit : pour tout $y \in U$ et $u, v \in T_y M$, $h_y(u, v) := \lambda^{p,q}(\iota_{\hat{y}}^{-1}(u), \iota_{\hat{y}}^{-1}(v))$. Vérifions que h est définie sans ambiguïté; si $\hat{y}' \in \hat{U}$ est dans la même fibre que \hat{y} , alors $\hat{y}' = \hat{y}.p$ pour un élément $p \in S$. Alors par la relation (7.1), pour tout $u \in T_y M$, $\iota_{\hat{y}}^{-1}(u) = (\text{Ad } p).\iota_{\hat{x}.p}^{-1}(u)$. Comme le produit $\lambda^{p,q}$ est invariant par l'action adjointe de S , on a bien $\lambda^{p,q}(\iota_{\hat{y}}^{-1}(u), \iota_{\hat{y}}^{-1}(v)) = \lambda^{p,q}(\iota_{\hat{y}'}^{-1}(u), \iota_{\hat{y}'}^{-1}(v))$.

Soit \hat{R} le fibré des repères orthonormés de h . Si (ξ_1, \dots, ξ_n) est une base orthonormée de \mathfrak{n}^- , on définit un isomorphisme de fibrés φ entre \hat{U} et \hat{R} de la façon suivante : pour $\hat{y} \in \hat{U}$, on pose $\varphi(\hat{y}) := (\iota_{\hat{y}}(\xi_1), \dots, \iota_{\hat{y}}(\xi_n))$.

Appelons maintenant $\tilde{\omega}$ la restriction de la connexion de Cartan ω à $T\hat{U}$. Il s'agit d'une connexion de Cartan sur le S-fibré \hat{U} , à valeurs dans $\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{s}$, qui définit la métrique h . Le point essentiel est que si \hat{Z}_i et \hat{Z}_j sont deux champs de vecteurs ω -constants, avec $\omega(\hat{Z}_i) \in \mathfrak{n}^-$ et $\omega(\hat{Z}_j) \in \mathfrak{n}^-$, alors dès que $\hat{y} \in \hat{U}$, les vecteurs $\hat{Z}_i(\hat{y}), \hat{Z}_j(\hat{y})$ et $[\hat{Z}_i, \hat{Z}_j](\hat{y})$ appartiennent tous trois à $T_{\hat{y}}\hat{U}$. On en déduit que les fonctions courbures $\kappa : \hat{M} \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^2(\mathfrak{n}^-), \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{n}^+)$ et $\tilde{\kappa} : \hat{U} \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^2(\mathfrak{n}^-), \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{s})$ de $\tilde{\omega}$, *coïncident sur* \hat{U} . Ainsi, si $\kappa_{\mathfrak{s}}$ est la composante selon \mathfrak{s} de κ , on a $\kappa = \kappa_{\mathfrak{s}} = \tilde{\kappa}$ en restriction à \hat{S} . La première conséquence est que $\tilde{\kappa}$ est en fait à valeurs dans $\text{Hom}(\Lambda^2(\mathfrak{n}^-), \mathfrak{s})$, ce qui signifie qu'elle est sans torsion. C'est donc que $\tilde{\omega}$ est la connexion de Levi-Civita de h (voir [16] chap 6. pour une présentation du « problème » d'équivalence dans le cadre métrique). Maintenant, le fait que $\kappa_{\mathfrak{s}} = \tilde{\kappa}$ sur \hat{U} signifie que sur U , le tenseur de courbure de h coïncide avec le tenseur de Weyl. En effet, le premier est donné par $R_y(u, v)w = [\tilde{\kappa}_{\hat{y}}(\iota_{\hat{y}}^{-1}(u), \iota_{\hat{y}}^{-1}(v)), \iota_{\hat{y}}^{-1}(w)]$, tandis que le second s'exprime comme $W_y(u, v)w = [\kappa_{\mathfrak{s}}(\iota_{\hat{y}}^{-1}(u), \iota_{\hat{y}}^{-1}(v)), \iota_{\hat{y}}^{-1}(w)]$. La courbure de Ricci de h doit alors s'annuler (voir [3] Théorème 1.114, p. 47, et [16] Proposition 1.4, p. 229 pour la décomposition de l'espace des tenseurs de courbure en composantes irréductibles sous l'action de $O(p, q)$). \square

4. Familles normales d'immersions conformes

Dans toute cette section, $(M, [g])$ et $(N, [h])$ désignent deux structures conformes pseudo-riemanniennes de même signature (p, q) , avec $p + q \geq 3$. Jusqu'à la fin de l'article, on désignera par (M, \hat{M}, ω^M) et (N, \hat{N}, ω^N) les fibrés normaux de Cartan associés aux structures conformes sur M et N respectivement.

4.1. Holonomie d'une suite d'immersions conformes

Soit $f_k : (M, g) \rightarrow (N, h)$, $k \in \mathbb{N}$, une famille d'immersions conformes. On suppose que $x \in M$ est tel que $f_k(x)$ soit relativement compacte dans N . On dit alors qu'une suite (h_k) de P est *une suite d'holonomie de* (f_k) en x s'il existe une suite (\hat{x}_k) dans la fibre de x , contenue dans un compact de \hat{M} , et telle que $f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}$ soit également contenue dans un compact de \hat{N} . Remarquons que, sous l'hypothèse où $f_k(x)$ est relativement compacte dans M , il existe toujours au moins une suite d'holonomie associée à (f_k) .

4.1.1. Suites équivalentes

La notion de suite d'holonomie est stable « par perturbation compacte » : si (h_k) est une suite d'holonomie de (f_k) en x , alors il en va de même pour toute suite $h'_k = l_1(k)h_k l_2(k)$, où $l_1(k)$ et $l_2(k)$ sont des suites relativement compactes de P . On dit alors que (h_k) et (h'_k) sont équivalentes. Du fait que l'action de P sur \hat{M} et \hat{N} est propre, il est facile de vérifier que réciproquement, deux suites d'holonomies de (f_k) en x sont toujours équivalentes. Donc, ce qui a vraiment un sens, c'est la classe d'équivalence des suites d'holonomies de (f_k) en un point x . Mais dans tout l'article, et par abus de langage, on dira fréquemment : soit (h_k) l'holonomie de (f_k) en x . On entendra par là que (h_k) est un représentant de la classe d'équivalence de suites d'holonomies en x . On sera souvent amené à changer une suite d'holonomie en une autre qui lui est équivalente.

4.2. Notion de stabilité.

Soit $f_k : (M, g) \rightarrow (N, h)$ une suite d'immersions conformes.

DÉFINITION 4.1 (Stabilité). — On dit que la suite (f_k) est stable en $x \in M$ si $f_k(x)$ converge vers une limite $z_\infty \in N$, et si pour toute suite (x_k) de M convergeant vers x , $f_k(x_k)$ tend également vers z_∞ . La suite (f_k) est dite fortement stable en x s'il existe un voisinage U de x dans M tel que $f_k(\bar{U})$ converge vers $z_\infty \in N$ pour la topologie de Hausdorff.

On va également dégager une notion de stabilité pour les suites de P :

DÉFINITION 4.2. — Une suite (h_k) de P est dite stable si c'est une suite de A^+ . De manière équivalente, (h_k) est stable si elle s'écrit :

$$h_k = \text{diag}(\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k)) \in \mathbf{R}_+^* \times O(p, q),$$

avec $\lambda_1(k) \geq \dots \geq \lambda_n(k) \geq 1$; en particulier les suites $(\frac{1}{\lambda_i(k)})_{k \in \mathbf{N}}$, $i = 1, \dots, n$, sont bornées. La suite (h_k) est dite fortement stable lorsqu'elle est stable et que de plus les suites $(\frac{1}{\lambda_i(k)})_{k \in \mathbf{N}}$, $i = 1, \dots, n$ tendent vers 0.

Le lemme suivant va montrer que la propriété, pour une suite (f_k) comme ci-dessus, d'être stable en x , se lit sur l'holonomie (h_k) de (f_k) en x . En particulier, une suite (h_k) de P , vue comme suite d'immersions conformes de $\text{Ein}^{p,q}$, est stable en o (au sens de la définition 4.1) si et seulement si elle est stable au sens de 4.2. Il n'y a donc pas d'ambiguïté dans la terminologie.

LEMME 4.3. — *La suite (f_k) est stable en $x \in M$ (resp. fortement stable) si et seulement si $f_k(x)$ converge vers $z_\infty \in N$ et s’il existe en x une suite d’holonomie (h_k) qui soit stable (resp. fortement stable).*

Preuve. — on commence par supposer que $f_k(x)$ converge vers z_∞ et que (f_k) est stable en x . On se donne (h_k) une suite d’holonomie de (f_k) en x , et l’on exprime h_k sous forme affine :

$$h_k = \sigma_k L_k + T_k$$

où (σ_k) , (L_k) et (T_k) sont des suites de \mathbf{R}_+^* , $O(p, q)$ et $\mathbf{R}^{p,q}$ respectivement. On peut écrire $L_k = L_{1k} D_k L_{2k}$ où D_k est un élément de $O(p, q)$, de la forme $D_k = \text{diag}(\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k))$, avec $\lambda_1(k) \geq \dots \geq \lambda_n(k) > 0$. Les suites (L_{1k}) , (L_{2k}) appartiennent à $O(p, q)$ et sont relativement compactes. Ainsi, quitte à remplacer (h_k) par une suite équivalente, on peut supposer que (h_k) est égale à $\sigma_k D_k (Id + \tau_k)$. Notre but dans un premier temps, est de montrer :

FAIT 4.4. — *Si (f_k) est stable en x , alors la suite (τ_k) doit être bornée.*

Preuve. — d’après les expressions matricielles (2.1) et (2.2) données en section 2.3, la suite (h_k) s’exprime dans $O(p + 1, q + 1)$ sous la forme :

$$\left(\begin{array}{ccc} \sigma_k & -\sigma_k \tau_k^t \cdot J_{p,q} & -\frac{\sigma_k}{2} Q^{p,q}(\tau_k) \\ & D_k & D_k \cdot \tau_k \\ & & \sigma_k^{-1} \end{array} \right).$$

Supposons par l’absurde que (τ_k) ne soit pas bornée. On écrit :

$$\tau_k^t := (\tau_1(k), \dots, \tau_n(k)).$$

Quitte à considérer une suite extraite de (f_k) , il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|\tau_i(k)| \rightarrow \infty$. Soit $j = n + 1 - i$ si $i \in \{1, \dots, p\} \cup \{q + 1, \dots, n\}$, et $j = i$ sinon. Notons Δ le projectivisé de $\text{Vect}(e_0, e_j)$ sur $\text{Ein}^{p,q}$. Alors h_k préserve Δ et son action se fait via la transformation de $PSL(2, \mathbf{R})$ suivante :

$$\left(\begin{array}{cc} \sigma_k & -\sigma_k \tau_i(k) \\ 0 & \lambda_j(k) \end{array} \right).$$

Ainsi, il existe un paramétrage projectif de Δ au voisinage de o , donné par $s \mapsto \pi_G(e^{s\zeta})$, tel que $e^{(\text{Ad } h_k) \cdot s\zeta} = e^{\alpha_k(s)\zeta} \cdot p_k(s)$, où $\alpha_k(s) = \frac{\lambda_j(k)s}{\sigma_k - \sigma_k \tau_i(k)s}$ est définie sur $I_k := \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{\tau_i(k)}\}$, et $p_k : I_k \rightarrow P$ est une courbe valant 1_G en 0. Comme (h_k) est une suite d’holonomie de (f_k) , quitte à considérer une suite extraite de (f_k) , on peut supposer qu’il existe une suite (\hat{x}_k) qui converge vers \hat{x} , telle que $f_k(\hat{x}_k) \cdot h_k^{-1}$ converge vers $\hat{z} \in \hat{N}$. On choisit $\lambda > 0$ assez petit pour que $\hat{y} \mapsto \exp(\hat{y}, \lambda\zeta)$ soit bien défini sur un voisinage de \hat{z} ,

et que de plus $\pi_N(\exp(\hat{z}, \lambda\zeta)) \neq z_\infty$ (c'est possible puisque ζ est transverse à \mathfrak{p}).

Quitte à considérer à nouveau une suite extraite de (f_k) , on peut supposer que $\frac{1}{c\tau_i(k)}$ est de signe constant, par exemple positif. L'image $\alpha_k(]0, \frac{1}{\tau_i(k)}[)$ est $] -\infty, 0[$ ou $]0, \infty[$. Là encore, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que c'est toujours le même intervalle, par exemple $]0, \infty[$ (les autres cas se traitent de façon similaire). Ainsi, pour tout k , il existe $s_k \in]0, \frac{1}{\tau_i(k)}[$ tel que $\alpha_k(s_k) = \lambda$. Par ailleurs, $s_k \rightarrow 0$ puisque $|\tau_i(k)| \rightarrow \infty$.

Pour k suffisamment grand, on peut écrire :

$$(4.1) \quad f_k(\exp(\hat{x}_k, s_k\zeta)).h_k^{-1} = \exp(f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}, \lambda\zeta).p_k(s_k).$$

Expliquons pourquoi cette relation est vraie. Soit (S, \hat{S}, ω^S) le fibré normal de Cartan d'une variété pseudo-riemannienne conforme S de signature (p, q) . Si $\lambda : I \rightarrow \hat{S}$ et $p : I \rightarrow P$ sont deux courbes de classe C^1 , et si l'on pose $\gamma(t) = \lambda(t).p(t)$, alors (voir [16, p. 208]) :

$$(4.2) \quad \omega^S(\gamma'(t)) = (\text{Ad } p(t))^{-1}.\omega^S(\lambda'(t)) + \omega_G(p'(t)),$$

où ω_G désigne la forme de Maurer-Cartan sur le groupe $G = O(p+1, q+1)$. On peut appliquer l'équation (4.2), dans le modèle $(G/P, G, \omega_G)$, à l'égalité $e^{(\text{Ad } h_k).s\zeta} = e^{\alpha_k(s)\zeta}.p_k(s)$, et l'on obtient :

$$(\text{Ad } h_k).\zeta = \alpha'_k(s)(\text{Ad } p_k(s))^{-1}.\zeta + \omega_G(p'_k(s)).$$

Posons :

$$\gamma_1(s) := f_k(\exp(\hat{x}_k, s\zeta)).h_k^{-1} = \exp(f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}, s(\text{Ad } h_k).\zeta)$$

et

$$\gamma_2(s) := \exp(f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}, \alpha_k(s)\zeta).p_k(s).$$

On a

$$\omega^N(\gamma'_1(s)) = (\text{Ad } h_k).\zeta$$

et l'équation (4.2) fournit :

$$\omega^N(\gamma'_2(s)) = \alpha'_k(s)(\text{Ad } p_k(s))^{-1}.\zeta + \omega_G(p'_k(s)).$$

Les courbes $s \mapsto \gamma_1(s)$ et $s \mapsto \gamma_2(s)$ satisfont donc la même équation différentielle du premier ordre, et valent toutes deux $f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}$ en 0, donc elles sont égales, ce qui justifie la relation (4.1).

En projetant l'égalité (4.1) sur M et N , on obtient :

$$f_k(\pi_M(\exp(\hat{x}_k, s_k\zeta))) = \pi_N(\exp(f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}, \lambda\zeta)).$$

Or $\pi_M(\exp(\hat{x}_k, s_k \zeta))$ tend vers x puisque $s_k \rightarrow 0$.
 En revanche, $\pi_N(\exp(f_k(\hat{x}_k) \cdot h_k^{-1}, \lambda \zeta))$ tend vers $\pi_N(\exp(\hat{z}, \lambda \zeta)) \neq z_\infty$. Cela contredit le fait que (f_k) est stable en x . \square

On déduit de ce qui précède que (τ_k) est une suite bornée, et que par conséquent, (h_k) est équivalente dans P à une suite de la forme $h_k = \text{diag}(\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k)) \in \mathbf{R}_+^* \times O(p, q)$, où $\lambda_1(k) \geq \dots \geq \lambda_n(k) > 0$. On veut à présent montrer :

FAIT 4.5. — Si (f_k) est stable (resp. fortement stable) en x , alors les suites $\frac{1}{\lambda_i(k)}$ sont bornées (resp. tendent vers 0).

Preuve. — supposons par l'absurde que le Fait 4.5 n'a pas lieu. Il existe alors une suite (ξ_m) de vecteurs de \mathfrak{n}^- qui tend vers 0, et une suite extraite (h_{k_m}) telle que $(\text{Ad } h_{k_m}) \cdot \xi_m$ tende vers $\xi \neq 0$. Quitte à multiplier ξ_m par un $\epsilon > 0$ assez petit, on peut supposer que l'application exponentielle est bien définie sur un voisinage de (\hat{z}, ξ) dans $\hat{N} \times \mathfrak{g}$, et que $\exp(\hat{z}, \xi) \neq z_\infty$. On écrit alors :

$$f_{k_m}(\pi_M(\exp(\hat{x}_{k_m}, \xi_m))) = \pi_N(\exp(f_{k_m}(\hat{x}_{k_m}) \cdot h_{k_m}^{-1}, (\text{Ad } h_{k_m}) \cdot \xi_m)).$$

Or $\pi_M(\exp(\hat{x}_{k_m}, \xi_m))$ tend vers x .
 En revanche, $\pi_N(\exp(f_{k_m}(\hat{x}_{k_m}) \cdot h_{k_m}^{-1}, (\text{Ad } h_{k_m}) \cdot \xi_m))$ tend vers $\pi_N(\exp(\hat{z}, \xi) \neq z_\infty)$: contradiction avec la stabilité de (f_k) en x .

Maintenant, si l'une des suites $\frac{1}{\lambda_i(k)}$ ne tend pas vers 0, alors il existe une suite extraite $\frac{1}{\lambda_i(k_m)}$ ayant une limite non nulle λ . On choisit $\xi_i \in \mathfrak{n}^-$ un vecteur propre de $\text{Ad } h_k$ pour la valeur propre $\frac{1}{\lambda_i(k)}$. Notons que $\text{Ad } h_k$ est diagonale dans une base indépendante de k , donc ξ_i peut être choisi indépendant de k . Ainsi :

$$f_{k_m}(\pi_M(\exp(\hat{x}_{k_m}, s \xi_i))) = \pi_N(\exp(f_{k_m}(\hat{x}_{k_m}) \cdot h_{k_m}^{-1}, \frac{1}{\lambda_i(k_m)} s \xi_i)).$$

Pour s petit, $\pi_M(\exp(\hat{x}_{k_m}, s \xi_i))$ converge vers un point proche de x , tandis que $\pi_N(\exp(f_{k_m}(\hat{x}_{k_m}) \cdot h_{k_m}^{-1}, \frac{1}{\lambda_i(k_m)} s \xi_i))$ converge vers $\exp_N(\hat{z}, \lambda s \xi_i)$, qui est différent de z_∞ .

La suite (f_k) n'est pas fortement stable en x dans ce cas. \square

Le Fait 4.5 affirme que si (f_k) est stable en x (resp. fortement stable), alors (h_k) est une suite stable (resp. fortement stable) de P . Il nous reste à montrer que réciproquement, si $f_k(x)$ tend vers z_∞ et si (f_k) admet une suite d'holonomie (h_k) en x qui est une suite stable (resp. fortement stable) de P , alors (f_k) est stable (resp. fortement stable) en x . Supposons pour commencer que la suite d'holonomie (h_k) est stable, et s'écrit $\text{diag}(\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k))$, où les suites $\frac{1}{\lambda_i(k)}$ sont bornées. On considère une

suite (\hat{x}_k) de la fibre de x contenue dans un compact de \hat{M} , de sorte que $f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}$ soit contenue dans un compact de \hat{N} . Soit (y_k) une suite qui tend vers x . Alors pour k assez grand, on peut écrire $y_k = \pi_M(\exp(\hat{x}_k, \xi_k))$, pour une certaine suite (ξ_k) de \mathfrak{n}^- qui tend vers 0. On obtient que :

$$f_k(\exp(\hat{x}_k, \xi_k)).h_k^{-1} = \exp(f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}, (\text{Ad } h_k).\xi_k).$$

Or les $\frac{1}{\lambda_i(k)}$ étant bornées, on a $(\text{Ad } h_k).\xi_k \rightarrow 0$. En projetant sur la variété N , on obtient bien $f_k(y_k) \rightarrow z_\infty$: la suite (f_k) est stable en x .

Si de plus, on sait que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_i(k)} = 0$ pour $i = 1, \dots, n$, alors pour tout ensemble relativement compact K de \mathfrak{n}^- , on a $(\text{Ad } h_k).K \rightarrow 0$ (la limite étant prise pour la topologie de Hausdorff). On choisit à présent U un voisinage suffisamment petit de x , de sorte que pour tout k assez grand, il existe $\mathcal{U}_k \subset \mathfrak{n}^-$ un voisinage de 0 tel que $\xi \mapsto \pi_M(\exp(\hat{x}_k, \xi))$ soit un difféomorphisme de \mathcal{U}_k sur U . Par relative compacité de la suite (\hat{x}_k) , si U est pris assez petit, les \mathcal{U}_k sont tous inclus dans un compact de \mathfrak{n}^- . On obtient alors :

$$f_k(\exp(\hat{x}_k, \mathcal{U}_k)).h_k^{-1} = \exp(f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}, (\text{Ad } h_k).\mathcal{U}_k).$$

En projetant cette relation sur M et N , on aboutit à $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(U) = z_\infty$, la limite étant prise pour la topologie de Hausdorff. La suite (f_k) est bien fortement stable en x . □

4.3. Caractérisation des familles normales : preuve du théorème 1.1

Ici, $(M, [g])$ et $(N, [h])$ sont deux structures pseudo-riemanniennes de signature (p, q) , $p + q \geq 3$, et \mathcal{F} est une famille d’immersions conformes de $(M, [g])$ dans $(N, [h])$. Il est clair que s’il existe un voisinage U de x tel que la famille $\mathcal{F}|_U$ est d’adhérence compacte dans $\mathcal{C}^0(U, N)$, alors d’une part, $E = \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans N , et de plus \mathcal{F} est équicontinue en x .

Nous allons supposer réciproquement qu’il existe $x \in M$ tel que $E = \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ soit relativement compact dans N , et que de plus \mathcal{F} soit équicontinue en x . On veut montrer l’existence de $U \subset M$ un ouvert contenant x , tel que toute suite de $\mathcal{F}|_U$ admet une sous-suite qui converge vers une application lisse, la convergence étant C^∞ sur les compacts de U . On commence par choisir un compact $\mathcal{K} \subset \hat{N}$ qui se projette surjectivement sur l’adhérence \bar{E} de E dans N . On choisit également $\hat{x} \in \hat{M}$ dans la fibre de x . Pour tout $f \in \mathcal{F}$, on choisit $p(f) \in \text{P}$ tel que $f(\hat{x}).p(f)^{-1} \in \mathcal{K}$. On

hérite ainsi d'une application $p : \mathcal{F} \rightarrow P$. Nous allons voir que l'hypothèse d'équicontinuité de \mathcal{F} en x va avoir des conséquences sur l'image de p .

Tout d'abord, on écrit $p(f)$ sous forme affine $p(f) = \sigma(f)L(f) + T(f)$, où $\sigma(f) \in \mathbf{R}_+^*$, $L(f) \in O(p, q)$, et $T(f) \in \mathbf{R}^{p,q}$. On note K_0 le compact maximal de $O(p, q)$. En effectuant une décomposition de Cartan de $L(f)$, on écrit $p(f) = L_1(f)A(f)L_2(f) + T(f)$, où $L_1(f)$ et $L_2(f)$ sont dans K_0 et $A(f) = \text{diag}(\lambda_1(f), \dots, \lambda_n(f)) \in \mathbf{R}_+^* \times O(p, q)$ vérifie $\lambda_1(f) \geq \dots \geq \lambda_n(f) > 0$. On écrit finalement $p(f) = L_1(f)A(f)(id + \tau(f))L_2(f)$. On commence alors par remarquer qu'il existe un compact $K_1 \subset P$ tel que l'application $f \mapsto id + \tau(f)$ soit à valeurs dans K_1 . Si tel n'était pas le cas, il existerait une suite (f_k) de \mathcal{F} telle que $\tau_k := \tau(f_k)$ ne soit pas bornée dans $\mathbf{R}^{p,q}$. Quitte à considérer une suite extraite de (f_k) , on peut supposer que $f_k(x)$ tend vers $z_\infty \in N$. Mais nous avons vu au Fait 4.4 que dans ce cas, (f_k) n'était pas stable en x . Ceci contredirait l'équicontinuité de la famille \mathcal{F} en x . De la même manière, il existe un compact $K_2 \subset M(n, \mathbf{R})$ de sorte que l'application $f \mapsto A(f)^{-1}$ soit à valeur dans K_2 . Si tel n'était pas le cas, on pourrait trouver une suite (f_k) de \mathcal{F} , telle que $f_k(x) \rightarrow z_\infty$, et telle que $A(f_k) = \text{diag}(\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k))$ vérifie $1/\lambda_i(k) \rightarrow +\infty$ pour un certain $i \in \{1, \dots, n\}$. Mais le Fait 4.5 impliquerait que (f_k) n'est pas stable en x , et une fois de plus, la famille \mathcal{F} ne serait pas équicontinue en x .

En résumé, si l'on appelle $K = K_1K_0$, on a montré qu'il existe deux applications $L_1 : \mathcal{F} \rightarrow K_0$ et $L'_2 : \mathcal{F} \rightarrow K$ telles que pour tout $f \in \mathcal{F}$, on ait :

$$p(f) = L_1(f)A(f)L'_2(f).$$

Appelons $\mathcal{K}.K_0$ le compact de \hat{N} obtenu en prenant les unions des translatés à droite de \mathcal{K} par des éléments de K_0 . On choisit \mathcal{U} et \mathcal{V} deux voisinages relativement compacts de 0 dans \mathfrak{n}^- , tels que :

- (1) L'application $\Phi : \xi \mapsto \pi_M(\exp(\hat{x}, \xi))$ est définie et injective sur $\overline{\mathcal{U}}$, et réalise un difféomorphisme de \mathcal{U} sur un ouvert $U \subset M$ contenant x .
- (2) Pour tout $\hat{y} \in \mathcal{K}.K_0$, l'application $\Psi_{\hat{y}} : \xi \mapsto \pi_N(\exp(\hat{y}, \xi))$ est injective sur $\overline{\mathcal{V}}$, et réalise un difféomorphisme de \mathcal{V} sur son image.
- (3) Pour tout $l^{-1} \in K^{-1}K_2$, $(\text{Ad } l).\overline{\mathcal{U}}$ est inclus dans \mathcal{V} .

Considérons (f_k) une suite de \mathcal{F} . Nous allons montrer qu'il existe une sous-suite de (f_k) qui converge, au sens de la topologie C^∞ sur U , vers une application $f \in \mathcal{C}^\infty(U, N)$. Pour alléger les expressions, on appellera $l_k := A(f_k)L'_2(f_k)$, et $\hat{z}_k := f_k(\hat{x}).p(f_k)^{-1}.L_1(f_k)$. On peut alors écrire :

$$f_k(\hat{x}).l_k^{-1} = \hat{z}_k.$$

Comme (l_k^{-1}) est à valeurs dans le compact $K^{-1}K_2$, on peut extraire une sous-suite de (f_k) telle que $(\text{Ad } l_k)_{|\mathfrak{n}^-}$ converge vers $L \in \text{End}(\mathfrak{n}^-, \mathfrak{g})$, et \hat{z}_k converge vers $\hat{z} \in \mathcal{K}K_0$. Appelons $f : U \rightarrow N$ l'application définie, pour tout $\xi \in \mathcal{U}$ comme suit :

$$f(\pi_M(\exp(\hat{x}, \xi))) := \pi_N(\exp(\hat{z}, L(\xi))).$$

Comme $f = \Psi_{\hat{z}} \circ L \circ \Phi^{-1}$ est une composée de transformations lisses, on a bien $f \in \mathcal{C}^\infty(U, N)$. Nous pouvons à présent achever la démonstration du Théorème 1.1 grâce au :

LEMME 4.6. — *La convergence de (f_k) vers f est \mathcal{C}^∞ sur l'ouvert U .*

Preuve. — on considère \hat{W} un voisinage ouvert de \hat{z} dans \hat{N} , et \mathcal{W} un voisinage ouvert de 0 dans \mathfrak{n}^- , contenant $L(\mathcal{U})$, tels que l'application $\exp : \hat{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \hat{N}$ soit définie. Il s'agit d'une application lisse. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $\varphi_k : \mathcal{U} \rightarrow \hat{W} \times \mathcal{W}$ par :

$$\varphi_k(\xi) = (\hat{z}_k, L_k(\xi)).$$

Comme les L_k sont des applications linéaires, la suite (φ_k) converge pour la topologie \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{U} vers $\varphi_\infty : \xi \mapsto (\hat{z}, L(\xi))$. Maintenant, étant donné que sur U , on a $f_k = \pi_N \circ \exp \circ \varphi_k \circ \Phi^{-1}$ et $f = \pi_N \circ \exp \circ \varphi_\infty \circ \Phi^{-1}$, on obtient la convergence \mathcal{C}^∞ de (f_k) vers f . □

4.4. Intégrabilité de certaines distributions associées aux suites stables

Nous finissons la Section 4 par un résultat d'intégrabilité, qui sera également un point clé dans la preuve du Théorème 1.4, en Section 7. Nous considérons ici une suite (f_k) d'immersions conformes de $(M, [g])$ dans $(N, [h])$, et nous supposons que (f_k) tend uniformément sur les compacts de M vers une application f . Le contenu de la Proposition 4.8 ci-dessous est que lorsque $f \notin \text{Conf}(M, N)$, des sous-variétés totalement géodésiques conformes non triviales apparaissent sur M .

Notation 4.7. — Jusqu'à la fin de l'article, on va munir \mathfrak{g} d'un produit scalaire euclidien $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$, et on appellera $\| \cdot \|_{\mathfrak{g}}$ la norme associée. Si $\xi \in \mathfrak{g}$ et $r > 0$, on appellera $\mathcal{B}(\xi, r)$, $r > 0$ la boule de centre ξ et rayon r , relativement à la norme $\| \cdot \|_{\mathfrak{g}}$.

Soit $x \in M$. Comme (f_k) tend uniformément vers f sur les compacts de M , la suite (f_k) est stable en x , et par le Lemme 4.3, elle admet en

x une suite d'holonomie (h_k) dans A^+ . En particulier, l'action adjointe de $\text{Ad } h_k$ sur \mathfrak{g} est diagonalisable sur \mathbf{R} : il existe des suites positives $\nu_1(k) < \dots < \nu_m(k)$, ainsi qu'une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_m$, de sorte que $(\text{Ad } h_k)|_{\mathfrak{g}_j} = \nu_j(k) \text{Id}_{\mathfrak{g}_j}$. Quitte à considérer une sous-suite de (f_k) , et à remplacer (h_k) par une suite équivalente dans P , on peut supposer :

- (1) Il existe (\hat{x}_k) une suite de \hat{M} dans la fibre de x , qui converge vers \hat{x} , et telle que $\hat{z}_k := f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}$ converge vers $\hat{z} \in \hat{N}$.
- (2) Chaque suite $(\nu_j(k))$ admet une limite dans $\mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$, et $\nu_j(k) = o(\nu_{j+1}(k))$, pour tout $1 \leq j \leq m - 1$.

Dans ce qui suit, nous allons appeler l le plus grand entier de $\{1, \dots, m\}$ pour lequel $\sup_{k \in \mathbf{N}} \nu_j(k) < \infty$. Pour chaque $j \in \{1, \dots, m\}$, on appelle $\mathfrak{g}^{(j)} := \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_j$. Soient \mathcal{U} et \mathcal{V} deux voisinages de 0 dans \mathfrak{g} tels que $\xi \mapsto \exp(\hat{x}, \xi)$ et $\zeta \mapsto \exp(\hat{z}, \zeta)$ soient des difféomorphismes de \mathcal{U} et \mathcal{V} sur leurs images respectives \hat{U} et \hat{V} . Quitte à restreindre \mathcal{V} , il existe $r_0 > 0$ tel que $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}(0, r_0)$ et pour tout $\hat{z}' \in \exp(\hat{z}, \mathcal{V})$, l'application $\zeta \mapsto \exp(\hat{z}', \zeta)$ soit définie sur $\mathcal{B}(0, r_0)$, et réalise un difféomorphisme de $\mathcal{B}(0, r_0)$ sur son image. On munit \hat{N} d'une métrique riemannienne, et l'on appelle \hat{d} la distance que cette métrique induit sur l'ouvert $\exp(\hat{z}, \mathcal{V})$. Localement, sur une variété, les distances induites par deux métriques riemanniennes différentes sont équivalentes. Ainsi, quitte à restreindre \mathcal{U}, \mathcal{V} , et r_0 , il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 , telles que si $\hat{z}' \in \exp(\hat{z}, \mathcal{V})$ et $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{B}(0, r_0)$, on a :

$$(4.3) \quad C_1 \|\zeta_1 - \zeta_2\|_{\mathfrak{g}} \leq \hat{d}(\exp(\hat{z}', \zeta_1), \exp(\hat{z}', \zeta_2)) \leq C_2 \|\zeta_1 - \zeta_2\|_{\mathfrak{g}}.$$

On choisit maintenant \mathcal{U} assez petit pour qu'il existe $C_3 > 0$, tel que $\forall j \in \{1, \dots, l\}, \forall \xi \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{g}^{(j)}, \forall k \in \mathbf{N}$, on ait :

$$(4.4) \quad \|(\text{Ad } h_k).\xi\|_{\mathfrak{g}} \leq C_3 \nu_j(k) \leq \min\left(\frac{r_0}{2}, \frac{C_1 r_0}{C_2 4}\right).$$

Ceci est possible puisque les suites $\nu_j(k)$ ont une limite finie pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on appelle $\hat{S}_j(k)$ la sous-variété $\exp(\hat{x}_k, \mathcal{U} \cap \mathfrak{g}^{(j)})$.

Notre objectif est maintenant de montrer la proposition ci-dessous (voir également le Théorème 2.6 de [18] dans le cadre isométrique) :

PROPOSITION 4.8. — *Pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$, il existe $r_1 > 0$ tel que la sous-variété :*

$$\hat{S}_j := \exp(\hat{x}, \mathfrak{g}^{(j)} \cap \mathcal{B}(0, r_1))$$

soit une feuille intégrale de la distribution de \hat{M} définie par $(\omega^M)^{-1}(\mathfrak{g}^{(j)})$. De plus, $S_j := \pi_M(\hat{S}_j)$ est une sous-variété totalement géodésique conforme de M .

Preuve. — choisissons $r_1 > 0$ tel que $\mathcal{B}(0, r_1) \subset \mathcal{U}$. Nous voulons montrer que si $\hat{y} = \exp(\hat{x}, \xi)$, où $\xi \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{g}^{(j)}$, alors $\omega^M(T_{\hat{y}}\hat{S}_j) = \mathfrak{g}^{(j)}$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on pose $\hat{y}_k := \exp(\hat{x}_k, \xi)$. On choisit $r_2 > 0$ assez petit pour que $\mathcal{B}(\xi, r_2) \subset \mathcal{B}(0, r_1)$. Alors $\hat{D}_k := \exp(\hat{x}_k, \mathcal{B}(\xi, r_2) \cap \mathfrak{g}^{(j)})$ est inclus dans $\hat{S}_j(k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Pour toute suite (\hat{y}'_k) telle que $\hat{y}'_k \in \hat{D}_k$, on peut écrire $\hat{y}'_k = \exp(\hat{x}_k, \xi_k)$, où $\xi_k \in \mathcal{B}(\xi, r_2) \cap \mathfrak{g}^{(j)}$. Comme $f_k(\hat{y}'_k).h_k^{-1} = \exp(\hat{z}_k, (\text{Ad } h_k).\xi_k)$, on tire des relations (4.3) et (4.4) :

$$(4.5) \quad \hat{d}(f_k(\hat{y}'_k).h_k^{-1}, \hat{z}_k) \leq C_2 C_3 \nu_j(k).$$

On définit $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{U}$ par : $\exp(\hat{y}_k, \mathcal{D}_k) = \hat{D}_k$. Pour la topologie de Hausdorff, \hat{D}_k tend vers $\hat{D} := \exp(\hat{x}, \mathcal{B}(\xi, r_2) \cap \mathfrak{g}^{(j)})$, et donc \mathcal{D}_k tend vers $\mathcal{D} \subset \mathfrak{g}^{(j)}$. On aura $\omega^M(T_{\hat{y}}\hat{S}_j) = \mathfrak{g}^{(j)}$ si l'on parvient à montrer que $\mathcal{D} \subset \mathfrak{g}^{(j)}$. Dans la suite, nous allons noter $\delta_k := \sup_{\eta \in \mathcal{D}_k} \|(\text{Ad } h_k).\eta\|_{\mathfrak{g}}$.

LEMME 4.9. — Si $j = l$, alors la suite (δ_k) est bornée.

Preuve. — si ce n'est pas le cas, quitte à passer à des suites extraites, on va avoir $\delta_k \rightarrow \infty$. Par connexité de \mathcal{D}_k , il va alors exister (η_k) avec $\eta_k \in \mathcal{D}_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, satisfaisant $\|(\text{Ad } h_k).\eta_k\|_{\mathfrak{g}} = r_0$. Soit $\hat{y}'_k := \exp(\hat{y}_k, (\text{Ad } h_k).\eta_k)$, $\hat{z}'_k := f_k(\hat{y}_k).h_k^{-1}$ et $\hat{z}''_k := f_k(\hat{y}'_k).h_k^{-1}$. Alors l'inégalité (4.3) donne $\hat{d}(\hat{z}''_k, \hat{z}'_k) \geq C_1 r_0$, tandis que (4.3) et (4.4) donnent :

$$\hat{d}(\hat{z}''_k, \hat{z}_k) + \hat{d}(\hat{z}'_k, \hat{z}_k) \leq 2C_2 \min\left(\frac{r_0}{2}, \frac{C_1 r_0}{C_2 4}\right) \leq C_1 \frac{r_0}{2}.$$

L'inégalité triangulaire conduit alors à $C_1 r_0 \leq C_1 \frac{r_0}{2}$: contradiction. \square

Du fait que les limites de $(\nu_{l+1}(k)), \dots, (\nu_m(k))$ sont $+\infty$, on déduit du Lemme 4.9 que pour toute suite (η_k) de \mathcal{D}_k , les valeurs d'adhérences de (η_k) doivent être dans $\mathfrak{g}^{(l)}$. Donc $\mathcal{D} \subset \mathfrak{g}^{(l)}$ et \hat{S}_l est bien une feuille intégrale de $(\omega^M)^{-1}(\mathfrak{g}^{(l)})$.

On va maintenant s'intéresser au cas $j < l$.

LEMME 4.10. — Si $j \in \{1, \dots, l - 1\}$, la suite (δ_k) est en $o(\nu_{j+1}(k))$.

Preuve. — si les conclusions du lemme sont inexactes, il existe une constante $C_4 > 0$ et une suite extraite de (δ_k) , renotée (δ_k) , satisfaisant $\delta_k \geq C_4 \nu_{j+1}(k)$ pour tout k .

Par connexité de $(\text{Ad } h_k)(\mathcal{D}_k)$, il va exister une suite (η_k) , avec $\eta_k \in \mathcal{D}_k$ pour tout k , et telle que $\|(\text{Ad } h_k).\eta_k\|_{\mathfrak{g}} = C_4 \nu_{j+1}(k)$. Quitte à choisir C_4 assez petit, on aura $C_4 \nu_{j+1}(k) \leq \frac{r_0}{2}$ pour tout k . Si l'on pose $\hat{z}'_k :=$

$f_k(\hat{y}_k).h_k^{-1}$ et $\hat{z}_k'' := f_k(\exp(\hat{y}_k, \eta_k)).h_k^{-1} = \exp(\hat{z}'_k, (\text{Ad } h_k).\eta_k)$, on obtient, au vu de (4.3) :

$$(4.6) \quad \hat{d}(\hat{z}_k'', \hat{z}'_k) \geq C_1 C_4 \nu_{j+1}(k).$$

En utilisant (4.5), et en appliquant l'inégalité anti-triangulaire à \hat{z}_k, \hat{z}'_k et \hat{z}_k'' , on aboutit à l'inégalité $C_2 C_3 \nu_j(k) \geq \hat{d}(\hat{z}_k'', \hat{z}_k) \geq C_1 C_4 \nu_{j+1}(k) - C_2 C_3 \nu_j(k)$: ceci contredit $\nu_j(k) = o(\nu_{j+1}(k))$. \square

Le lemme précédent nous dit que si (η_k) est une suite de \mathfrak{g} satisfaisant $\eta_k \in \mathcal{D}_k$ pour tout k , alors $\|(\text{Ad } h_k).\eta_k\|_{\mathfrak{g}} = o(\nu_{j+1}(k))$. En particulier, on a pour toute suite extraite $\eta_{\sigma(k)}$ que $\|(\text{Ad } h_{\sigma(k)}).\eta_{\sigma(k)}\|_{\mathfrak{g}} = o(\nu_{j+1}(\sigma(k)))$. Ainsi, toute valeur d'adhérence de (η_k) doit être dans $\mathfrak{g}^{(j)}$. On a bien $\mathcal{D} \subset \mathfrak{g}^{(j)}$, et \hat{S}_j est une feuille intégrale de $\mathfrak{g}^{(j)}$.

Pour finir, il nous reste à vérifier que pour $j \in \{1, \dots, l\}$, $S_j := \pi_M(\hat{S}_j)$ est une sous-variété totalement géodésique de M . On commence par remarquer que $\mathfrak{g}^{(j)}$ est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} . Comme les composantes sur \mathfrak{n}^- et \mathfrak{p} d'un vecteur propre de $\text{Ad } h_k$ sont elles-mêmes des vecteurs propres de $\text{Ad } h_k$, associés à la même valeur propre, on peut écrire $\mathfrak{g}^{(j)} = \mathfrak{n}_j^- \oplus \mathfrak{p}_j$ où \mathfrak{n}_j^- et \mathfrak{p}_j sont deux sous-algèbres de Lie de \mathfrak{n}^- et \mathfrak{p} respectivement. Appelons P_j le sous-groupe connexe de P dont l'algèbre de Lie est \mathfrak{p}_j . Soit $\hat{x} \in \hat{S}_j$. La sous variété $\hat{\Sigma}_j := \exp(\hat{x}, \mathcal{U} \cap \mathfrak{n}_j^-)$ est transverse aux orbites de l'action à droite de P , donc à celles de P_j . Le saturé de $\hat{\Sigma}_j$ par P_j est une sous-variété $\hat{M}_j \subset \hat{S}_j$ difféomorphe au produit $\hat{\Sigma}_j \times P_j$. On a $\omega^M(T\hat{M}_j) \subset \mathfrak{n}_j^- \oplus \mathfrak{p}_j$, et il y a en fait égalité pour des raisons de dimension. Finalement, \hat{M}_j est une feuille intégrale de $(\omega^M)^{-1}(\mathfrak{g}^{(j)})$ passant par \hat{x} , et $\hat{M}_j \cap \hat{S}_j$ est un voisinage ouvert de \hat{x} dans \hat{S}_j . Par conséquent $\pi_M(\hat{M}_j \cap \hat{S}_j)$ est un voisinage ouvert de $x = \pi_M(\hat{x})$ dans S_j , et ce voisinage est, par définition, un morceau de sous-variété totalement géodésique conforme de M . Ceci étant valable pour tout $x \in S_j$, on obtient que S_j elle-même est totalement géodésique conforme. \square

5. Description de l'adhérence de $\text{Conf}(M, N)$ dans $\mathcal{C}^0(M, N)$: preuve du Théorème 1.2

Nous considérons toujours $(M, [g])$ et $(N, [h])$ deux structures conformes pseudo-riemanniennes de même signature (p, q) , avec $p+q \geq 3$. Nous supposons qu'une suite d'immersions conformes $f_k : (M, [g]) \rightarrow (N, [h])$ converge vers $f \in \mathcal{C}^0(M, N)$, uniformément sur les compacts de M . Par le Théorème 1.1, l'application f est en fait lisse, et la convergence de (f_k) vers

f est C^∞ sur les compacts. Nous allons décrire précisément l'application f , et tirer des conséquences géométriques pour $(M, [g])$ lorsque la limite f n'appartient pas à $Conf(M, N)$.

Soit $x \in M$. La convergence uniforme de (f_k) sur les compacts de M assure que (f_k) est stable en x . Il existe donc en x une suite d'holonomie (h_k) qui soit dans $A^+ \subset \mathbf{R}_+^* \times O(p, q)$. En particulier, $h_k = \text{diag}(\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k))$, et les suites $\frac{1}{\lambda_i(k)}$ sont bornées. On reprend les notations de la Section 4.4, et quitte à considérer une suite extraite de (f_k) , on fera les mêmes hypothèses simplificatrices qu'en 4.4 : les transformations $\text{Ad } h_k$ sont simultanément diagonalisables, et l'on peut écrire

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_m, \text{ avec } (\text{Ad } h_k)|_{\mathfrak{g}_j} = \nu_j(k) Id_{\mathfrak{g}_j},$$

où $\nu_1(k) < \dots < \nu_m(k)$ sont des suites qui convergent dans $\mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$, et qui satisfont $\nu_j(k) = o(\nu_{j+1}(k))$. L'entier l est toujours le plus grand entier j de $\{1, \dots, m\}$ tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_j(k)$ soit fini. Observons que puisque la suite (f_k) est stable, $\mathfrak{n}^- \subset \mathfrak{g}^{(l)}$. La suite $L_k := (\text{Ad } h_k)|_{\mathfrak{n}^-}$ est ainsi relativement compacte dans $\text{End}(\mathfrak{n}^-)$. Quitte à considérer une suite extraite de (f_k) , qui convergera toujours vers f , on peut supposer que (L_k) admet une limite $L \in \text{End}(\mathfrak{n}^-)$, et qu'il existe \hat{x}_k dans la fibre $\pi_M^{-1}(x)$, qui converge vers \hat{x} , de sorte que la suite $\hat{z}_k := f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}$ converge vers $\hat{z} \in \hat{N}$ au-dessus de $f(x)$. Soient \mathcal{U} et \mathcal{V} comme en section Section 4.4. Quitte à rétrécir ces ouverts, on supposera de plus que $\xi \mapsto \pi_M(\exp(\hat{x}, \xi))$ et $\zeta \mapsto \pi_N(\exp(\hat{z}, \zeta))$ sont des difféomorphismes de $\mathcal{U} \cap \mathfrak{n}^-$ et $L(\mathcal{U} \cap \mathfrak{n}^-)$ sur leurs images respectives. On appelle $\hat{U} = \exp(\hat{x}, \mathcal{U})$ et $U = \pi_M(\exp(\hat{x}, \mathcal{U} \cap \mathfrak{n}^-))$. Si $y \in U$ s'écrit $y = \pi_M(\exp(\hat{x}, \xi))$, avec $\xi \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{n}^-$, on a $f_k(y) = \pi_N(\exp(\hat{z}_k, L_k(\xi)))$, converge vers $\pi_N(\exp(\hat{z}, L(\xi)))$. On conclut que la restriction de f à U est donnée par l'expression :

$$f(\pi_M(\exp(\hat{x}, \xi))) = \pi_N(\exp(\hat{z}, L(\xi))), \text{ pour tout } \xi \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{n}^-.$$

Nous allons à présent examiner les différents cas qui peuvent se présenter, suivant la nature de l'application L .

5.1. Premier cas : l'application L appartient à $\text{GL}(\mathfrak{n}^-)$.

Dans ce cas, $L(\mathcal{U} \cap \mathfrak{n}^-)$ est un ouvert de \mathfrak{n}^- qui contient l'origine, et f est un difféomorphisme de U sur son image. Comme la convergence de (f_k) vers f est C^∞ , et que les f_k sont conformes, on obtient que f appartient à $Conf(U, N)$.

5.2. Second cas : l'application L est l'application nulle.

Ce cas interviendra lorsque chaque suite $(\lambda_1(k)), \dots, (\lambda_n(k))$ tend vers l'infini. L'application f est alors constante sur U . Ce cas a des conséquences géométriques intéressantes. On va en effet montrer la :

PROPOSITION 5.1. — *Si l'application limite f est constante sur U , alors il existe un voisinage U' de x dans U qui est conformément Ricci-plat.*

Preuve. — il existe un plus grand entier $l_0 \in \{1, \dots, m\}$ tel que pour tout $j \in \{1, \dots, l_0\}$, on ait $\nu_j(k) \rightarrow 0$. Du fait que toutes les suites $(\lambda_1(k)), \dots, (\lambda_n(k))$ tendent vers l'infini, et que donc leurs inverses tendent vers 0, on a l'inclusion $\mathfrak{n}^- \subset \mathfrak{g}^{(l_0)} := \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{l_0}$, et également $\mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{g}_{l_0+1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_m$. En particulier, on conclut que $\mathfrak{g}^{(l_0)} \subset \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{s}$ (en effet, on a a priori $\mathfrak{g}^{(l_0)} \subset \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{s}$ mais la composante selon \mathfrak{z} est triviale puisque comme $h_k \in A^+$, $\text{Ad } h_k$ agit par l'identité sur la composante \mathfrak{z} , et ne la contracte donc pas). On va maintenant pouvoir montrer :

LEMME 5.2. — *Sur \hat{U} , la distribution $(\omega^M)^{-1}(\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{s})$ admet une feuille intégrale.*

Preuve. — d'après la Proposition 4.8, si $r > 0$ est assez petit, alors $\hat{S}_{l_0} := \exp(\hat{x}, \mathcal{B}(0, r) \cap \mathfrak{g}^{(l_0)})$ est une sous-variété de \hat{U} , qui est une feuille intégrale de $(\omega^M)^{-1}(\mathfrak{g}^{(l_0)})$. Quitte à choisir $r > 0$ encore plus petit, la sous-variété $\hat{\Sigma} := \exp(\hat{x}, \mathcal{B}(0, r) \cap \mathfrak{n}^-)$ est transverse aux orbites de l'action à droite de $S \subset P$ sur \hat{U} . Le saturé de $\hat{\Sigma}$ par cette action de S est une sous-variété $\hat{M}_0 \subset \hat{V}$, difféomorphe au produit $\hat{\Sigma} \times S$. Remarquons que si $\hat{y}_0 \in \hat{\Sigma}$, alors $\omega^M(T_{\hat{y}_0} \hat{\Sigma}) \subset \mathfrak{g}^{(l_0)} \subset \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{s}$, car $\hat{\Sigma} \subset \hat{S}_{l_0}$. Soit maintenant $\hat{y} \in \hat{M}_0$. On écrit $\hat{y} = \hat{y}_0.p^{-1}$, où $\hat{y}_0 \in \hat{\Sigma}$ et $p \in S$. Si \mathcal{O} désigne la S -orbite passant par \hat{y} , on a le scindement $T_{\hat{y}} \hat{M}_0 = T_{\hat{y}}(\hat{\Sigma}.p^{-1}) \oplus T_{\hat{y}} \mathcal{O}$. Les propriétés d'équivariance de la connexion de Cartan conduisent à $\omega^M(T_{\hat{y}}(\hat{\Sigma}.p^{-1})) = (\text{Ad } p).\omega^M(T_{\hat{y}_0} \hat{\Sigma})$, d'où

$$\omega^M(T_{\hat{y}}(\hat{\Sigma}.p^{-1})) \subset (\text{Ad } p).\mathfrak{g}^{(l_0)} \subset \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{s}.$$

D'autre part $\omega^M(T_{\hat{y}} \mathcal{O}) \subset \mathfrak{s}$. Finalement, $\omega^M(T_{\hat{y}} \hat{M}_0) \subset \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{s}$, et il y a en fait égalité pour des raisons de dimension : la sous-variété \hat{M}_0 est une feuille intégrale de la distribution $(\omega^M)^{-1}(\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{s})$. □

La Proposition 5.1 est maintenant une simple conséquence du lemme ci-dessus et de la Proposition 3.4. □

5.3. Troisième cas : fibration sur une sous-variété totalement dégénérée

Si l'on n'est pas dans les deux premiers cas L n'est ni inversible, ni nulle. Par les deux cas traités précédemment, on vérifie que ceci n'est possible que lorsque la signature n'est pas riemannienne, *i.e* $p \geq 1$. Remarquons que puisque $h_k \in A^+ \subset \mathbf{R}_+^* \times O(p, q)$, les suites $(\lambda_i(k))$ s'écrivent $\lambda_i(k) = \sigma_k \alpha_i(k)$, où la matrice $\text{diag}(\alpha_1(k), \dots, \alpha_n(k))$ est dans $O(p, q)$. En particulier, les $\alpha_i(k)$ satisfont la relation $\alpha_i(k) = \frac{1}{\alpha_{n-i+1}(k)}$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. Lorsque $q > p$, et $i \in \{p + 1, \dots, n - p\}$, on a $\alpha_i(k) = 1$. Comme $h_k \in A^+$, on a les inégalités $\alpha_1(k) \geq \dots \geq \alpha_n(k)$, et $\frac{\sigma_k}{\alpha_1(k)} \geq 1$. On conclut que si (σ_k) est bornée dans $[1, +\infty[$, il en va de même pour $(\alpha_1(k))$ et l'on est dans le premier cas ci-dessus, où $L \in \text{GL}(\mathfrak{n}^-)$. Ainsi (σ_k) tend vers l'infini. Comme on n'est pas dans le second cas ci-dessus, où L est constante, il existe $n - p + 1 \leq r \leq n$ minimal tel que pour $i \in \{r, \dots, n\}$, $\sigma_k \alpha_i(k)$ soit bornée dans $[1, +\infty[$. Soit $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ la base de \mathfrak{n}^- définie par :

$$\epsilon_i = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ e_i & & 0 & & \\ & & & & \\ 0 & -e_i^t \cdot J_{p,q} & & & 0 \end{pmatrix},$$

(e_1, \dots, e_n) étant la base canonique de $\mathbf{R}^{p,q}$. Comme l'expression de $(\text{Ad } h_k)|_{\mathfrak{n}^-}$, dans la base $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, est $\text{diag}(\frac{\alpha_1(k)}{\sigma_k}, \dots, \frac{\alpha_n(k)}{\sigma_k})$, l'image $\text{Im } L$ n'est autre que $\text{Vect}(\epsilon_r, \dots, \epsilon_n)$, et le noyau $\text{Ker } L$ est $\text{Vect}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{r-1})$.

5.3.1. Description des fibres de $f|_U$

De l'expression $f(\pi_M(\exp(\hat{x}, \xi))) = \pi_N(\exp(\hat{z}, L(\xi)))$, pour tout $\xi \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{n}^-$, et de l'injectivité de $\zeta \mapsto \exp(\hat{z}, \zeta)$ sur $L(\mathcal{U} \cap \mathfrak{n}^-)$, on tire que la fibre $F(x) := \{y \in U \mid f(y) = f(x)\}$ est donnée par $\pi_M(\exp(\hat{x}, \text{Ker } L \cap \mathcal{U}))$. Comme $\exp(\hat{x}, \text{Ker } L \cap \mathcal{U})$ est transverse aux fibres de \hat{M} , $F(x)$ est une sous-variété lisse de U . Le fait qu'elle est totalement géodésique conforme résultera du Théorème 1.4. En effet, dans le cas que nous sommes en train d'étudier, l'entier s du Théorème 1.4 est au moins 2 et la fibre $F(x)$ est une feuille intégrale de la distribution \mathcal{F}_{s-1} . La propriété qu'ont ces feuilles d'être totalement géodésiques conformes sera montrée en section 7.3.

Nous avons déjà observé que l'espace tangent à une sous-variété totalement géodésique conforme a une signature constante. Ici, la signature des fibres de f est celle de $\text{Ker } L$ relativement à la métrique $\lambda^{p,q}$. Or

$\text{Ker } L$ est l'espace $\text{Vect}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{r-1})$, où $r > n - p$ a été défini ci-dessus. Dans la base $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, la forme $\lambda^{p,q}$ (voir la Section 3.1) est conforme à $2\xi_1\xi_n + \dots + 2\xi_p\xi_{q+1} + \sum_{p+1}^q \xi_i^2$. Le sous-espace $\text{Ker } L$ est donc dégénéré, et son radical est $\text{Vect}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-r+1})$. Observons que ce radical est de dimension $n - r + 1$, qui est exactement la dimension de $\text{Vect}(\epsilon_r, \dots, \epsilon_n) = \text{Im } L$. Autrement dit, le radical de $F(x)$ a pour dimension le rang de f .

5.3.2. Description de l'image de $f|_U$

On s'intéresse à présent à l'image $f(U)$ de l'application f . Il s'agit de $\Sigma = \pi_N(\exp(\hat{z}, L(\mathcal{U} \cap \mathfrak{n}^-)))$. Comme nous l'avons déjà signalé, $\zeta \mapsto \pi_N(\exp(\hat{z}, \zeta))$ est un difféomorphisme de $L(\mathcal{U} \cap \mathfrak{n}^-)$ sur son image. Ainsi, Σ est une sous-variété lisse de N . Nous allons en déterminer la signature.

Soit $y \in U$. On écrit $y = \pi_M(\exp(\hat{x}, \xi))$, où $\xi \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{n}^-$. Pour k suffisamment grand, on peut également écrire $y = \pi_M(\exp(\hat{x}_k, \xi_k))$, où (ξ_k) est une suite de \mathfrak{n}^- qui tend vers ξ . On pose $\hat{y}_k := \exp(\hat{x}_k, \xi_k)$. Alors $\hat{z}'_k := f_k(\hat{y}_k) \cdot h_k^{-1} = \exp(\hat{x}_k, L_k(\xi_k))$ tend vers $\hat{z}' := \exp(\hat{z}, L(\xi))$. Soit maintenant $0 < r_1 \ll 1$ très petit, tel que $\xi' \mapsto \pi_N(\exp(\hat{y}, \xi'))$ soit un difféomorphisme de $\mathcal{B}(0, r_1) \cap \mathfrak{n}^-$ sur un voisinage $U_y \subset U$ de y . Si $y' \in U_y$, on peut écrire $y' = \pi_M(\exp(\hat{y}, \xi'))$, avec $\xi' \in \mathcal{B}(0, r_1) \cap \mathfrak{n}^-$. Pour k assez grand, on aura aussi $y' = \pi_M(\exp(\hat{y}_k, \xi'_k))$, avec (ξ'_k) une suite de \mathfrak{n}^- qui tend vers ξ' . De la relation $f_k(y') = \pi_N(\exp(\hat{z}'_k, L_k(\xi'_k)))$, on déduit que f est donnée sur U_y par $f(\pi_M(\exp(\hat{y}, \xi'))) = \pi_N(\exp(\hat{z}', L(\xi')))$, $\xi' \in \mathcal{B}(0, r_1) \cap \mathfrak{n}^-$. On en déduit que l'espace tangent à $f(U)$ en $f(y)$ est $\iota_{\hat{z}'}(\text{Im } L)$, et ce pour tout $y \in U$. La signature de Σ est donc celle de $\text{Im } L$ relativement à $\lambda^{p,q}$. Comme $\text{Im } L$ coïncide avec $\text{Vect}(\epsilon_r, \dots, \epsilon_n)$, donc est incluse dans $\text{Vect}(\epsilon_{n-p+1}, \dots, \epsilon_n)$, c'est un sous-espace totalement dégénéré de \mathfrak{n}^- , relativement à $\lambda^{p,q}$. La sous-variété Σ est également totalement dégénérée.

5.3.3. Conclusion

En chaque point $x \in M$, on a décrit l'allure locale de f selon que l'on était dans le cas décrit en 5.1, 5.2 ou 5.3. Ces cas s'excluent mutuellement, et l'ensemble des points conduisant à un cas donné est clairement ouvert. Aussi, par connexité de la variété M , l'un des trois cas précédents décrit le comportement de f au voisinage de chaque point de M .

- Si l'on est dans le cas 5.1, cela veut dire que f est localement une immersion conforme d'un ouvert de M dans un ouvert de N . Ainsi $f \in \text{Conf}(M, N)$.

- Si l'on est dans le cas 5.2, f est localement constante, donc constante par connexité de M . Par ailleurs, la Proposition 5.1 montre que chaque point admet un voisinage où une métrique de la classe conforme est Ricci-plate. La variété (M, g) est localement conformément Ricci-plate dans ce cas.
- Enfin, si l'on est dans le cas 5.3, la fibre passant par chaque point est une sous-variété totalement géodésique conforme, qui est dégénérée, et dont le radical a pour dimension le rang de f . Chaque point $x \in M$ admet un voisinage U tel que $f(U)$ soit une sous-variété lisse totalement isotrope de N .

6. Conséquences géométriques de la dégénérescence en signatures riemanniennes et lorentziennes

Considérons $(M, [g])$ et $(N, [h])$ deux structures pseudo-riemanniennes de même signature (p, q) , $p+q \geq 3$. On aimerait caractériser géométriquement les cas où $\text{Conf}(M, N)$ n'est pas fermé dans $\mathcal{C}^0(M, N)$, autrement dit les cas où existe une suite (f_k) d'immersions conformes qui dégèrent vers une application limite $f : M \rightarrow N$ qui n'est pas une immersion conforme. Nous commençons par établir un résultat technique en Section 6.1, puis nous répondrons, au moins localement à la question ci-dessus dans le cas des variétés riemanniennes et lorentziennes.

6.1. Uniformité de l'holonomie

Nous commençons par montrer qu'il existe une même suite d'holonomie, valable en chaque point de M , pour la suite (f_k) .

LEMME 6.1. — *On suppose que $f_k : (M, g) \rightarrow (N, h)$ est une suite d'immersions conformes qui converge dans $\mathcal{C}^0(M, N)$ vers une application f . Alors il existe une même suite stable (h_k) de P , qui soit une suite d'holonomie de (f_k) en tous les points de M . De plus, quitte à considérer une suite extraite de (f_k) , il existe dans la fibre $\pi_M^{-1}(x)$ de chaque point $x \in M$, une suite convergente (\hat{x}_k) , telle que $f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}$ converge dans \hat{N} .*

Preuve. — soit $x \in M$. Comme (f_k) est supposée converger vers f uniformément sur les compacts de M , (f_k) est stable en x . Il existe donc en x une suite d'holonomie (h_k) qui soit dans $A^+ \subset \mathbf{R}_+^* \times O(p, q)$. En particulier, $h_k = \text{diag}(\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k))$, $\lambda_1(k) \geq \dots \geq \lambda_n(k) \geq 1$. La suite

$L_k := (\text{Ad } h_k)|_{\mathfrak{n}^-}$ est ainsi relativement compacte dans $\text{End}(\mathfrak{n}^-)$. Par définition d'une suite d'holonomie, il existe une suite (\hat{x}_k) relativement compacte de \hat{M} , dans la fibre de x , telle que $f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}$ soit également relativement compacte dans \hat{N} . On se fixe U un voisinage de x suffisamment petit, de sorte que pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe $\mathcal{U}_k \subset \mathfrak{n}^-$ un voisinage de 0 pour lequel $\xi \mapsto \pi_M(\exp(\hat{x}_k, \xi))$ soit un difféomorphisme de \mathcal{U}_k sur U .

Soit $y \in U$. Il existe une suite ξ_k de \mathfrak{n}^- , $\xi_k \in \mathcal{U}_k$, telle que pour tout k , $\pi_M(\exp(\hat{x}_k, \xi_k)) = y$. On peut alors écrire :

$$(6.1) \quad f_k(\exp(\hat{x}_k, \xi_k)).h_k^{-1} = \exp(f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}, (\text{Ad } h_k).\xi_k).$$

La suite $\exp(f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}, (\text{Ad } h_k).\xi_k)$ est relativement compacte dans \hat{N} , et il s'ensuit que (h_k) est une suite d'holonomie de (f_k) en y .

On définit une relation d'équivalence sur M comme suit : deux points x_1 et x_2 de M sont équivalents (on note $x_1 \sim x_2$) si et seulement si les suites d'holonomies (h_k) et (h'_k) de (f_k) en x_1 et x_2 respectivement sont équivalentes dans P (voir section 4.1). L'argument précédent montre que les classes d'équivalence de la relation \sim sont des ouverts de M . Par connexité de M , il ne peut donc y avoir qu'une seule classe d'équivalence, ce qui prouve le premier point du lemme.

On reprend les notations ci-dessus. Quitte à considérer une suite extraite de (f_k) (et la suite extraite correspondante de (h_k)), on peut supposer que \hat{x}_k tend vers \hat{x} dans la fibre au-dessus de x , que $f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}$ converge vers $\hat{z} \in \hat{N}$, et que L_k converge vers $L \in \text{End}(\mathfrak{n}^-)$. Alors, si $y \in U$, on peut écrire pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\pi_M(\exp(\hat{x}_k, \xi_k)) = y$ avec $\xi_k \in \mathcal{U}_k$. Cette fois, la suite (ξ_k) tend vers $\xi \in \mathfrak{n}^-$. La relation (6.1) assure alors que $f_k(\exp(\hat{x}_k, \xi_k)).h_k^{-1}$ converge vers $\exp(\hat{z}, L(\xi))$. Notons que $\exp(\hat{x}_k, \xi_k)$ est une suite de la fibre $\pi_M^{-1}(y)$ qui converge vers $\hat{y} := \exp(\hat{x}, \xi)$. En résumé, nous venons de montrer que chaque point $x \in M$ admet un voisinage ouvert U avec la propriété : *de toute suite extraite $(f_{\sigma(k)})$ de (f_k) , on peut extraire une nouvelle sous-suite $(f_{\varphi(k)})$, de sorte que pour tout $y \in U$, il existe dans la fibre $\pi_M^{-1}(y)$ une suite convergente (\hat{y}_k) , telle que $f_{\varphi(k)}(\hat{y}_k).h_{\varphi(k)}^{-1}$ converge dans \hat{N} .* Comme M est réunion dénombrable de compacts, un procédé diagonal standard permet d'obtenir le second point du lemme. □

6.2. Théorème 1.3 : le cadre riemannien

Le Théorème 1.2 donne les différentes possibilités pour l'application limite f . Dans le cas riemannien, il s'agit nécessairement d'une application constante. Quitte à considérer une sous-suite de (f_k) (qui convergera

toujours vers f), nous allons supposer que les conclusions du Lemme 6.1 sont satisfaites. Par le Lemme 6.1, la suite (f_k) admet une même suite d'holonomie stable (h_k) en tout point de M , et comme on est en signature riemannienne, la suite (h_k) est de la forme $\text{diag}(\lambda_k, \dots, \lambda_k) \in A^+$, où $1/\lambda_k \rightarrow 0$. Notons que pour tout $\xi \in \mathfrak{n}^-$, on a $(\text{Ad } h_k).\xi = \frac{1}{\lambda_k}.\xi$. Soit $x \in M$, et soit (\hat{x}_k) une suite de la fibre $\pi_M^{-1}(x)$ qui converge vers \hat{x} , telle que $\hat{z}_k := f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}$ converge vers $\hat{z} \in \hat{N}$. Comme $\text{Ad } h_k$ agit par l'homothétie de rapport $1/\lambda_k$ (resp. λ_k) sur \mathfrak{n}^- (resp. sur \mathfrak{n}^+), et trivialement sur $\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{s}$, la relation d'équivariance sur la courbure (voir (3.3) en Section 3.1.1) :

$$(\text{Ad } h_k^{-1}).\kappa_{\hat{z}_k}((\text{Ad } h_k).\xi, (\text{Ad } h_k).\eta) = \kappa_{\hat{x}_k}(\xi, \eta)$$

montre que $\kappa_{\hat{x}}(\xi, \eta) = 0$ pour tout $\xi, \eta \in \mathfrak{n}^-$. Ainsi la courbure de la connexion normale de Cartan associée à $(M, [g])$ s'annule : (M, g) est localement conformément plate.

Remarque 6.2. — Dans [6], J. Ferrand obtient, en supposant que les applications (f_k) sont injectives, que (M, g) est en fait conformément équivalent à un ouvert de \mathbf{R}^n . On pourrait retrouver ce résultat avec les méthodes présentées ci-dessus, en s'inspirant de [9], Section 6.

6.3. Théorème 1.3 : le cadre lorentzien

On suppose désormais que (M, g) et (N, h) sont lorentziennes, de dimension ≥ 3 . Là encore, par le Lemme 6.1, la suite (f_k) admet une même suite d'holonomie stable (h_k) en tout point de M , et comme on est en signature lorentzienne, la suite (h_k) est de la forme $h_k = \text{diag}(\sigma_k \lambda_k, \sigma_k, \dots, \sigma_k, \frac{\sigma_k}{\lambda_k})$, avec $1 \leq \lambda_k \leq \sigma_k$, et $\sigma_k \rightarrow \infty$. L'action de $\text{Ad } h_k$ sur \mathfrak{g} est diagonale. L'espace \mathfrak{n}^- est la somme de trois espaces propres \mathfrak{n}_1^- , \mathfrak{n}_2^- et \mathfrak{n}_3^- , associés respectivement aux valeurs propres $\frac{1}{\sigma_k \lambda_k}$, $\frac{1}{\sigma_k}$ et $\frac{\lambda_k}{\sigma_k}$. Sur $\mathfrak{p} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{n}^+$, les valeurs propres sont $\lambda_k, 1, \frac{1}{\lambda_k}, \sigma_k \lambda_k, \sigma_k$ et $\frac{\sigma_k}{\lambda_k}$. On en déduit aisément le :

FAIT 6.3. — *Si (η_k) est une suite de \mathfrak{p} qui converge vers η , alors il existe une constante $C > 0$, qui dépend de la suite (η_k) , telle que*

$$\|(\text{Ad } h_k^{-1}).\eta_k\|_{\mathfrak{g}} \leq C \lambda_k.$$

Soit $x \in M$, et soit (\hat{x}_k) une suite de la fibre $\pi_M^{-1}(x)$ qui converge vers \hat{x} , telle que $\hat{z}_k := f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}$ converge vers $\hat{z} \in \hat{N}$. Du Fait 6.3, on déduit le :

FAIT 6.4. — (1) Soit $(\xi, \eta) \in \mathfrak{n}_1^- \times \mathfrak{n}_2^-$; il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|(\text{Ad } h_k^{-1}) \cdot \kappa_{\hat{z}_k}((\text{Ad } h_k) \cdot \xi, (\text{Ad } h_k) \cdot \eta)\|_{\mathfrak{g}} \leq C \frac{1}{\sigma_k^2}.$$

(2) Soit $(\xi, \eta) \in \mathfrak{n}_1^- \times \mathfrak{n}_3^-$; il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|(\text{Ad } h_k^{-1}) \cdot \kappa_{\hat{z}_k}((\text{Ad } h_k) \cdot \xi, (\text{Ad } h_k) \cdot \eta)\|_{\mathfrak{g}} \leq C \frac{\lambda_k}{\sigma_k^2}.$$

(3) Soit $(\xi, \eta) \in \mathfrak{n}_2^- \times \mathfrak{n}_3^-$; il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|(\text{Ad } h_k^{-1}) \cdot \kappa_{\hat{z}_k}((\text{Ad } h_k) \cdot \xi, (\text{Ad } h_k) \cdot \eta)\|_{\mathfrak{g}} \leq C \frac{\lambda_k^2}{\sigma_k^2}.$$

Le Théorème 1.2 donne deux possibilités pour l'application limite f : il s'agit soit d'une application constante, soit d'une submersion lisse sur un segment géodésique de lumière de (N, h) .

6.3.1. Si f est constante, (M, g) est localement conformément plate

Dans ce cas, la preuve du Théorème 1.2 montre que les suites σ_k et λ_k vérifient, outre les propriétés énoncées ci-dessus, $\frac{\lambda_k}{\sigma_k} \rightarrow 0$. Réécrivons la relation d'équivariance sur la courbure :

$$(\text{Ad } h_k^{-1}) \cdot \kappa_{\hat{z}_k}((\text{Ad } h_k) \cdot \xi, (\text{Ad } h_k) \cdot \eta) = \kappa_{\hat{x}_k}(\xi, \eta).$$

Comme les trois suites $\frac{1}{\sigma_k^2}$, $\frac{\lambda_k}{\sigma_k^2}$ et $\frac{\lambda_k^2}{\sigma_k^2}$ tendent vers 0, le Fait 6.4 conduit à $\kappa_{\hat{x}}(\xi, \eta) = 0$ pour tout $\xi, \eta \in \mathfrak{n}^-$; la variété (M, g) est localement conformément plate.

6.3.2. Si f est une submersion sur une géodésique de lumière de (N, h) , (M, g) est localement conformément Ricci-plate

Dans ce cas, la suite $(\frac{\sigma_k}{\lambda_k})$ admet une limite finie dans $]0, 1]$. Nous pouvons alors supposer, quitte à multiplier à droite (h_k) par une suite convergente de A^+ , que $\lambda_k = \sigma_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, et que cette limite est 1. L'action adjointe de $\text{Ad } h_k$ sur \mathfrak{g} est diagonale, avec pour valeurs propres $\nu_1(k) = \frac{1}{\sigma_k^2}$, $\nu_2(k) = \frac{1}{\sigma_k}$, $\nu_3(k) = 1$, $\nu_4(k) = \sigma_k$ et enfin $\nu_5(k) = \sigma_k^2$. Les sous-espaces propres associés sont $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_5$, comme en Section 4.4. On appelle $\mathcal{G}^+ = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3$, le sous-espace faiblement stable associé à $\text{Ad } h_k$. La Proposition 4.8 assure que pour $r_1 > 0$ choisi suffisamment petit, $\hat{S}_+ := \exp(\hat{x}, \mathcal{B}(0, r_1) \cap \mathcal{G}^+)$ est une feuille intégrale de $(\omega^M)^{-1}(\mathcal{G}^+)$. Appelons \mathcal{H}^+ le sous-espace $\mathfrak{n}^- + \mathfrak{g}_2$. Comme $\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{G}^+$, la distribution $\hat{\mathcal{H}} := \{(\omega^M)^{-1}(\mathcal{H}^+) \mid \hat{y} \in \hat{S}_+\}$ est une distribution de $T\hat{S}_+$.

LEMME 6.5. — *La distribution $\hat{\mathcal{H}} \subset T\hat{S}_+$ est intégrable.*

Preuve. — Soit ξ_1, \dots, ξ_m une base de \mathcal{H}^+ , de sorte que chaque ξ_i soit dans \mathfrak{n}^- , soit dans $\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{s}$, et $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_m$ les m champs ω^M -constants associés sur \hat{M} . Rappelons que la courbure de la connexion ω^M , évaluée sur les \hat{X}_i , est donnée par la formule $d\omega^M(\hat{X}_i, \hat{X}_j) + [\omega^M(\hat{X}_i), \omega^M(\hat{X}_j)]$, si bien que :

$$[\xi_i, \xi_j] - \kappa_{\hat{y}}(\xi_i, \xi_j) = \omega^M([\hat{X}_i, \hat{X}_j](\hat{y})), \quad j = 1, \dots, m.$$

L'objectif est de montrer que $\hat{\mathcal{H}}$ est involutive, *i.e* pour tout $\hat{y} \in \hat{S}_+$, $\omega^M([\hat{X}_i, \hat{X}_j](\hat{y})) \in \mathcal{H}^+$.

Si $(\xi_i, \xi_j) \in \mathfrak{n}^- \times (\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{s})$, ou $(\xi_i, \xi_j) \in (\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{s}) \times (\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{s})$, alors $\kappa_{\hat{y}}(\xi, \xi) = 0$, et donc $\omega^M([\hat{X}_i, \hat{X}_j](\hat{y})) \in \mathcal{H}^+$ puisque $[\mathfrak{n}^-, \mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{n}^-$, et $[\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{s}, \mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{n}^-$.

Il reste à examiner le cas où ξ_i et ξ_j sont tous deux dans \mathfrak{n}^- . On écrit $\hat{y} := \exp(\hat{x}, \xi)$, où $\xi \in \mathcal{B}(0, r_1) \cap \mathcal{G}^+$. Du fait que $(\text{Ad } h_k)|_{\mathcal{G}^+}$ converge dans $\text{End}(\mathcal{G}^+, \mathfrak{g})$, on a que $\hat{z}'_k := f_k(\exp(\hat{x}_k, \xi)) \cdot h_k^{-1} = \exp(\hat{z}_k, (\text{Ad } h_k) \cdot \xi)$ converge vers $\hat{z}' \in \hat{N}$. Appelons $\hat{y}_k := \exp(\hat{x}_k, \xi)$. De la relation d'équivariance :

$$(\text{Ad } h_k^{-1}) \cdot \kappa_{\hat{z}'_k}((\text{Ad } h_k) \cdot \xi_i, (\text{Ad } h_k) \cdot \xi_j) = \kappa_{\hat{y}_k}(\xi_i, \xi_j),$$

et des points (1) et (2) du Fait 6.4, on tire que $\kappa_{\hat{y}}(\xi_i, \xi_j) \in \mathfrak{g}_1$ si $(\xi_i, \xi_j) \in \mathfrak{n}_1^- \times \mathfrak{n}_2^-$, et $\kappa_{\hat{y}}(\xi_i, \xi_j) \in \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \subset \mathcal{H}^+$ si $(\xi_i, \xi_j) \in \mathfrak{n}_1^- \times \mathfrak{n}_3^-$. On a encore $\omega^M([\hat{X}_i, \hat{X}_j](\hat{y})) \in \mathcal{H}^+$ dans ces deux cas.

Enfin, si $(\xi_i, \xi_j) \in \mathfrak{n}_1^- \times \mathfrak{n}_3^-$, alors la relation d'équivariance pour la courbure s'écrit :

$$\frac{1}{\sigma_k} \kappa_{\hat{z}'_k}(\xi_i, \xi_j) = (\text{Ad } h_k) \cdot \kappa_{\hat{y}_k}(\xi_i, \xi_j).$$

Comme $\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{s}$ est le seul sous-espace propre contracté de \mathfrak{p} , on établit facilement le :

FAIT 6.6. — *Si (η_k) est une suite de \mathfrak{p} qui converge vers η , et si $\|(\text{Ad } h_k) \cdot \eta_k\|_{\mathfrak{g}} \rightarrow 0$, alors $\eta \in \mathfrak{g}_2$.*

Par le Fait 6.6, on conclut que $\kappa_{\hat{y}}(\xi_i, \xi_j) \in \mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{s} \subset \mathcal{H}^+$, et finalement $\omega^M([\hat{X}_i, \hat{X}_j](\hat{y})) \in \mathcal{H}^+$ lorsque $(\xi_i, \xi_j) \in \mathfrak{n}_1^- \times \mathfrak{n}_3^-$. Ceci achève la preuve du lemme. □

On va en déduire que $(\omega^M)^{-1}(\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{s})$ admet une feuille intégrale dans \hat{M} , passant par \hat{x} , et conclure qu'un voisinage de x est conformément Ricci-plat, grâce à la Proposition 3.4. La preuve est la même que celle du Lemme 5.2 : on commence par considérer \hat{H} , la feuille intégrale de $\hat{\mathcal{H}}$ passant par \hat{x} . Pour $r > 0$ assez petit, la sous-variété $\hat{\Sigma} := \exp(\hat{x}, \mathcal{B}(0, r) \cap \mathfrak{n}^-)$ est transverse

aux orbites de l'action à droite de S sur \hat{N} . De plus $\hat{\Sigma}$ est une sous-variété de \hat{H} ; en particulier $\omega^M(T\hat{\Sigma}) \subset \mathcal{H}^+ \subset \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{s}$. Le saturé de $\hat{\Sigma}$ par l'action de S est une sous-variété \hat{M}_0 , et on a $\omega^M(T\hat{M}_0) \subset (\text{Ad } S).\mathcal{H}^+ + \mathfrak{s} \subset \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{s}$. On a égalité pour des raisons de dimension, et finalement \hat{M}_0 est une feuille intégrale de $(\omega^M)^{-1}(\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{s})$.

7. Le théorème de stratification dynamique 1.4

Dans tout ce qui suit, on va munir la variété pseudo-riemannienne (N, h) d'une métrique riemannienne auxiliaire λ , qui définit une distance d sur N . Si u est un vecteur de TN , on désignera par $\|u\|$ la norme de ce vecteur pour la métrique λ . Bien entendu, les énoncés seront indépendants de ce choix d'une métrique auxiliaire. On considère une suite d'immersions conformes $f_k : (M, g) \rightarrow (N, h)$, et l'on suppose que (f_k) tend vers $f \in \mathcal{C}^0(M, N)$, uniformément sur les compacts de M . La preuve du Théorème 1.4 va être l'objet des trois sections 7.1, 7.2, 7.3 ci-dessous.

7.1. Définition des suites $(\mu_j(k))_{k \in \mathbb{N}}$ et des distributions \mathcal{F}_j .

On commence par remplacer (f_k) par une suite extraite, renotée (f_k) , qui satisfait aux deux conclusions du Lemme 6.1. L'une de ces conclusions est l'existence d'une suite (h_k) de A^+ qui soit suite d'holonomie de (f_k) en chaque point de M . C'est cette suite d'holonomie qui, après d'autres extractions éventuelles, va déterminer les suites $\mu_1(k), \dots, \mu_s(k)$ du Théorème 1.4.

Écrivons $h_k = \text{diag}(\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k))$, avec $\lambda_1(k) \geq \dots \geq \lambda_n(k) \geq 1$. Il existe s entiers non nuls n_1, \dots, n_s tels que pour tout couple d'indices $1 \leq i \leq j \leq n$, le quotient $\frac{\lambda_i(k)}{\lambda_j(k)}$ est borné dans $[1, +\infty)$ si et seulement si on a $n_l + 1 \leq i \leq j \leq n_{l+1}$ pour un certain $l \in \{0, \dots, s - 1\}$ (on a adopté la convention $n_0 = 0$). En particulier, les quotients $\frac{\lambda_i(k)}{\lambda_j(k)}$ sont tous bornés dans $[1, +\infty)$ si et seulement si $s = 1$, auquel cas $n_1 = n$. Quitte à remplacer (h_k) par une suite équivalente de P , on peut supposer que pour tout $l \in \{0, \dots, s - 1\}$, et tout couple d'indices $n_l + 1 \leq i \leq j \leq n_{l+1}$, $\lambda_i(k) = \lambda_j(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si $j \in \{1, \dots, s\}$, on note $\mu_j(k) = \frac{1}{\lambda_{n_j}(k)}$. On a $\mu_1(k) \leq \dots \leq \mu_s(k) \leq 1$, et l'action de $(\text{Ad } h_k)$ sur \mathfrak{n}^- se fait par une transformation diagonale de valeurs propres $\mu_1(k), \dots, \mu_s(k)$. Quitte à extraire encore, on peut supposer que chaque suite $(\mu_j(k))$ admet une limite

dans \mathbf{R}_+ , et que, lorsque $s > 1$, on a $\frac{\mu_{j+1}(k)}{\mu_j(k)} \rightarrow \infty$, pour tout $j \in \{1, \dots, s-1\}$. Notons que les suites $\mu_j(k)$ tendent vers 0, sauf éventuellement pour $j = s$.

On décompose $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ en somme directe :

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{p} = \mathcal{N}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{N}_s,$$

où $(\text{Ad } h_k)|_{\mathcal{N}_j} = \mu_j(k) \text{Id}_{\mathcal{N}_j}$. On pose de plus $\mathcal{N}_0 := \{0\}$. Si n_j désigne la dimension de \mathcal{N}_j , alors du fait que $\text{Ad } h_k$ agit conformément pour $\lambda^{p,q}$, on a bien que la matrice

$$\begin{pmatrix} \mu_1(k)I_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_s(k)I_{n_s} \end{pmatrix}$$

présERVE la classe conforme de $2x_1x_n + \dots + 2x_px_{n-p+1} + \sum_{p+1}^q x_i^2$.

Soit $\mathcal{E}_0 = \{0\} \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{E}_s = \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ la filtration définie par $\mathcal{E}_j := \mathcal{N}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{N}_j$ pour $j \in \{1, \dots, s\}$.

Soit $x \in M$. Comme (f_k) satisfait aux conclusions du Lemme 6.1, il existe une suite (\hat{x}_k) dans la fibre $\pi_M^{-1}(x)$ qui tend vers $\hat{x} \in \pi_M^{-1}(x)$, de sorte que $\hat{z}_k := f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}$ tende vers $\hat{z} \in \hat{N}$ au-dessus de $f(x)$. On définit alors :

$$\mathcal{F}_j(x) := \iota_{\hat{x}}(\mathcal{E}_j), \quad j \in \{0, \dots, s-1\},$$

où $\iota_{\hat{x}} : \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \rightarrow T_x M$ désigne l'isomorphisme défini en section 3.1. À première vue, le sous-espace $\mathcal{F}_j(x)$ semble dépendre du point \hat{x} , limite de la suite (\hat{x}_k) . En fait, il n'en est rien, comme le montre le :

LEMME 7.1. — Soient (\hat{x}_k) et (\hat{x}'_k) deux suites de la fibre $\pi_M^{-1}(x)$, qui convergent vers \hat{x} et \hat{x}' respectivement, et telles que $f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}$ et $f_k(\hat{x}'_k).h_k^{-1}$ convergent dans \hat{N} . Alors $\iota_{\hat{x}}(\mathcal{E}_j) = \iota_{\hat{x}'}(\mathcal{E}_j)$, pour tout $j \in \{0, \dots, s-1\}$.

Preuve. — l'assertion est triviale lorsque $s = 1$. On suppose donc que $s > 1$. Les points \hat{x} et \hat{x}' étant dans la même fibre, on écrit : $\hat{x}' = \hat{x}.p$, avec $p \in P$. D'après la relation (3.1), le lemme revient à montrer que $(\text{Ad } p).\mathcal{E}_j = \mathcal{E}_j$ pour tout $j = 1, \dots, s-1$.

On écrit $\hat{x}'_k = \hat{x}_k.p_k$, où (p_k) est une suite de P qui tend vers p . On a alors :

$$f_k(\hat{x}'_k).h_k^{-1} = f_k(\hat{x}_k).p_k.h_k^{-1} = f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}.h_k.p_k.h_k^{-1}.$$

Comme, par hypothèse, $f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}$ et $f_k(\hat{x}'_k).h_k^{-1}$ convergent, la suite $h_k.p_k.h_k^{-1}$ doit converger vers $\tilde{p} \in P$ car l'action de P sur \hat{N} est propre et libre. Supposons par l'absurde qu'il existe $\xi \in \mathcal{N}_{j_0}$ tel que $(\text{Ad } p).\xi \notin \mathcal{E}_{j_0}$.

Pour tout k , $(\text{Ad } p_k).\xi = \sum_{i>j_0} \xi_{ik} + \xi'_k$, avec chaque $\xi_{ik} \in \mathcal{N}_i$, et $\xi'_k \in \mathcal{E}_{j_0}$. Par hypothèse, il existe $m > j_0$ tel que $\xi_{mk} \rightarrow \xi_{m\infty} \neq 0$. Finalement :

$$(\text{Ad } h_k p_k h_k^{-1}).\xi = \sum_{i>j_0} \frac{\mu_i(k)}{\mu_{j_0}(k)} \xi_{ik} + \xi''_k,$$

où $\xi''_k \in \mathcal{E}_{j_0}$. Comme $\frac{\mu_m(k)}{\mu_{j_0}(k)} \rightarrow \infty$, la composante de $(\text{Ad } h_k p_k h_k^{-1}).\xi$ selon \mathcal{N}_m n'est pas bornée, ce qui est absurde puisque $(\text{Ad } h_k p_k h_k^{-1}).\xi \rightarrow (\text{Ad } \tilde{p}).\xi$. □

7.2. Caractérisation métrique des \mathcal{F}_j

Pour ce qui suit, on va identifier $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ à \mathfrak{n}^- , via un isomorphisme qui commute à l'action adjointe de $Z \times S$. On verra donc la filtration $\mathcal{E}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{E}_{s-1}$ dans \mathfrak{n}^- , et on considérera $\iota_{\hat{x}}$ comme un isomorphisme entre \mathfrak{n}^- et $T_x M$. Après cette identification, la relation :

$$(7.1) \quad \iota_{\hat{x}.p^{-1}}((\text{Ad } p).\xi) = \iota_{\hat{x}}(\xi)$$

est encore valable lorsque $\xi \in \mathfrak{n}^-$, et $p \in Z \times S \subset P$. Si $z \in N$, et $\hat{z} \in \hat{N}$ est dans la fibre au-dessus de z , on notera également $\iota_{\hat{z}}$ l'identification entre \mathfrak{n}^- et $T_z N$. Rappelons que si f est une immersion conforme de (M, g) dans (N, h) , alors :

$$(7.2) \quad D_x f(\iota_{\hat{x}}(\xi)) = \iota_{f(\hat{x})}(\xi).$$

On reprend les notations de la section précédente : (\hat{x}_k) est une suite de \hat{M} qui tend vers \hat{x} de sorte que $\hat{z}_k := f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}$ tende vers $\hat{z} \in \hat{N}$ au-dessus de $z := f(x)$.

Par ailleurs, comme la suite (\hat{z}_k) est contenue dans un compact de \hat{N} , il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que pour tout $k \in \mathbf{N}$, et $\xi \in \mathfrak{n}^-$, on ait :

$$(7.3) \quad c_1 \|\xi\|_{\mathfrak{g}} \leq \|\iota_{\hat{z}_k}(\xi)\| \leq c_2 \|\xi\|_{\mathfrak{g}}.$$

On considère pour commencer $u \in T_x M$ non nul, et une suite (u_k) de $T_x M$ qui tend vers u . On écrit pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u_k = \iota_{\hat{x}_k}(\xi_k)$, avec $\xi_k \in \mathfrak{n}^-$. La suite ξ_k tend vers $\xi := \iota_{\hat{x}}^{-1}(u)$. Par définition des distributions $\mathcal{F}_j(x)$, le vecteur u appartient à $T_x M \setminus \mathcal{F}_{s-1}(x)$ si et seulement si $\xi \in \mathfrak{n}^- \setminus \mathcal{E}_{s-1}$. En décomposant chaque ξ_k selon la somme $\mathcal{N}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{N}_s$, on voit aisément que ceci est équivalent à :

$$(7.4) \quad \|(\text{Ad } h_k).\xi_k\|_{\mathfrak{g}} \sim c\mu_s(k),$$

pour un certain réel $c > 0$ (qui dépend de la suite (ξ_k)). Des relations (7.1) et (7.2), on tire par ailleurs :

$$(7.5) \quad D_x f_k(u_k) = \iota_{z_k}((\text{Ad } h_k) \cdot \xi_k).$$

Ainsi, la relation (7.3), jointe à (7.4) et (7.5), montre que $u \in T_x M \setminus \mathcal{F}_{s-1}(x)$ si et seulement si $\|D_x f_k(u_k)\| = \Theta(\mu_s(k))$. Ceci prouve le point 1, (a) du Théorème 1.4.

On suppose à présent que $s > 1$, et l'on considère $u \in \mathcal{F}_j(x) \setminus \mathcal{F}_{j-1}(x)$, $j \in \{1, \dots, s-1\}$. On peut écrire $u = \iota_{\hat{x}}(\xi)$ où $\xi \in \mathcal{E}_j \setminus \mathcal{E}_{j-1}$. Soit (u_k) une suite de $T_x M$ qui converge vers u , et on écrit pour tout $k \in \mathbb{N} : u_k := \iota_{\hat{x}_k}(\xi_k)$, où ξ_k est dans \mathfrak{n}^- et converge vers ξ . On décompose $\xi = \xi^{(1)} + \dots + \xi^{(s)}$ selon la somme directe $\mathcal{N}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{N}_s$. On écrit également $\xi_k = \xi_k^{(1)} + \dots + \xi_k^{(s)}$, où $\xi_k^{(j)}$ appartient à \mathcal{N}_j . La suite $(\xi_k^{(j)})$ a une limite non nulle, et par conséquent, on tire de l'expression $(\text{Ad } h_k) \cdot \xi_k = \mu_1(k)\xi_k^{(1)} + \dots + \mu_s(k)\xi_k^{(s)}$ que :

$$(7.6) \quad \mu_j(k) = O(\|(\text{Ad } h_k) \cdot \xi_k\|_{\mathfrak{g}}).$$

Les relations (7.5) et (7.3) conduisent à :

$$\mu_j(k) = O(\|D_x f_k(u_k)\|),$$

et le point (1), (b), (i) est satisfait.

Considérons à présent la suite $u_k := \iota_{\hat{x}_k}(\xi)$. Il s'agit d'une suite de $T_x M$ qui converge vers u . On a l'équivalence $\|(\text{Ad } h_k) \cdot \xi\|_{\mathfrak{g}} \sim c\mu_j(k)$, où $c > 0$. Les relations (7.3) et (7.5) conduisent donc à :

$$\|D_x f_k(u_k)\| = \Theta(\mu_j(k)),$$

et le point (1), (b), (ii) est satisfait.

Réciproquement, considérons un vecteur non nul $u \in T_x M$, satisfaisant aux conditions (1), (b), (i) et (1), (b), (ii) pour un certain indice $j_0 \in \{1, \dots, s-1\}$. Par le point (1), (a), u n'appartient pas à $T_x M \setminus \mathcal{F}_{s-1}(x)$. Par conséquent, u appartient à un certain $\mathcal{F}_{j_1}(x) \setminus \mathcal{F}_{j_1-1}(x)$, $j_1 \in \{1, \dots, s-1\}$. Or, à cause de la propriété $\mu_l(k) = o(\mu_{l+1}(k))$, $\forall l \in \{1, \dots, s\}$, les points (1), (b), (i) et (1), (b), (ii) ne peuvent pas être vérifiés pour deux indices distincts $j_0 \neq j_1$. On conclut que $j_0 = j_1$. On obtient ainsi l'équivalence (1), (b) du Théorème 1.4.

7.3. Intégrabilité des distributions \mathcal{F}_j et caractérisation métrique des feuilles locales

Il nous reste à prouver l'intégrabilité des \mathcal{F}_j , le fait que les feuilles F_j sont totalement géodésiques conformes, ainsi que la caractérisation métrique

locale. Nous gardons les mêmes notations que ci-dessus : pour $x \in M$, on choisit une suite (\hat{x}_k) de \hat{M} dans la fibre au-dessus de x , qui converge vers $\hat{x} \in \hat{M}$, et telle que $\hat{z}_k := f_k(\hat{x}_k).h_k^{-1}$ converge vers \hat{z} .

On définit $U_x := \pi_M(\exp(\hat{x}, \mathcal{B}(0, r_1)))$, où $r_1 > 0$. Quitte à choisir r_1 assez petit, U_x est un ouvert contenant x , et $\xi \mapsto \pi_M(\exp(\hat{x}, \xi))$ est un difféomorphisme de $\mathcal{B}(0, r_1) \cap \mathfrak{n}^-$ sur U_x . Pour $j = 0, \dots, s - 1$, on définit $N_j(x) := \pi_M(\exp(\hat{x}, \mathcal{E}_j \cap \mathcal{B}(0, r_1)))$.

LEMME 7.2. — *Pour $j \in \{0, \dots, s - 1\}$, $N_j(x)$ est une sous-variété lisse, totalement géodésique conforme, contenue dans U_x , et est partout tangente à \mathcal{F}_j .*

Preuve. — l’assertion à montrer étant triviale pour $j = 0$, nous supposons dans ce qui suit que $s > 1$ et $j \in \{1, \dots, s - 1\}$. Comme en section 4.4, en considérant éventuellement une suite extraite de (f_k) , on a une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_m$, de sorte que $(\text{Ad } h_k)|_{\mathfrak{g}_j} = \nu_j(k)Id_{\mathfrak{g}_j}$, où chaque suite $(\nu_j(k))$ admet une limite dans $\mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$, et $\nu_j(k) = o(\nu_{j+1}(k))$, pour tout $1 \leq j \leq m - 1$. Il existe des indices $i_1 \leq \dots \leq i_s$ tels que $\mu_j(k) = \nu_{i_j}(k)$ pour $j \in \{1, \dots, s\}$. Si l’on se fixe un indice j , alors la Proposition 4.8 affirme que quitte à restreindre r_1 , la sous-variété $\hat{S}_j = \exp(\hat{x}, \mathfrak{g}^{(i_j)} \cap \mathcal{B}(0, r_1))$ est une feuille intégrale de la distribution $(\omega^M)^{-1}(\mathfrak{g}^{(i_j)})$. Maintenant, $\exp(\hat{x}, \mathcal{E}_j \cap \mathcal{B}(0, r_1)) \subset \hat{S}_j$ est transverse aux fibres de π_M , donc $N_j(x)$ est une sous-variété lisse de M . Par ailleurs, on montre comme dans la preuve de la Proposition 4.8, que $\mathfrak{g}^{(i_j)}$ est une sous-algèbre de \mathfrak{g} , qui s’écrit $\mathfrak{g}^{(i_j)} = \mathfrak{n}_{i_j}^- \oplus \mathfrak{p}_{i_j}$, où $\mathfrak{n}_{i_j}^-$ et \mathfrak{p}_{i_j} sont deux sous-algèbres de \mathfrak{n}^- et \mathfrak{p} respectivement. Par ailleurs, toujours comme dans la preuve de la Proposition 4.8, on montre que $N_j(x) = \pi_M(\hat{S}_j)$. Il s’ensuit que $N_j(x)$ est totalement géodésique conforme.

Nous allons maintenant montrer que $N_j(x)$ est tangente à la distribution \mathcal{F}_j . Soit $y \in N_j(x)$. On écrit $y = \pi_M(\hat{y})$ où $\hat{y} := \exp(\hat{x}, \xi)$, $\xi \in \mathcal{E}_j \cap \mathcal{B}(0, r_1)$. Alors $T_y N_j(x) = D_{\hat{y}} \pi_M(T_{\hat{y}} \hat{S}_j) = \iota_{\hat{y}}(\mathfrak{g}^{(i_j)} \cap \mathfrak{n}^-) = \iota_{\hat{y}}(\mathcal{E}_j)$. Rappelons maintenant que l’on a extrait une sous-suite de (f_k) , de sorte que $(\text{Ad } h_k)|_{\mathfrak{n}^-}$ converge vers $L \in \text{End}(\mathfrak{n}^-)$. Il s’ensuit que $f_k(\exp(\hat{x}_k, \xi)).h_k^{-1}$ converge vers $\exp(\hat{z}, L(\xi))$. Comme $\exp(\hat{x}_k, \xi)$ tend vers \hat{y} , on déduit du Lemme 7.1 que $\iota_{\hat{y}}(\mathcal{E}_j) = \mathcal{F}_j(y)$. □

On vient de montrer que la distribution \mathcal{F}_j définit un feuilletage pour $j = \{0, \dots, s - 1\}$, et que $N_j(x)$ est la feuille passant par x dans U_x : on la note désormais $F_j^{loc}(x)$.

7.3.1. Caractérisation métrique des feuilles locales

Les distances induites par deux métriques riemanniennes sur une variété sont localement équivalentes ; on a par conséquent :

LEMME 7.3. — *Il existe un voisinage compact K de \hat{z} dans \hat{N} , et des réels strictement positifs c_1, c_2 et r_0 , tels que si $\hat{z}' \in K$ et $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{B}(0, r_0) \cap \mathfrak{n}^-$:*

$$c_1 \|\xi_1 - \xi_2\|_{\mathfrak{g}} \leq d(\pi_N(\exp(\hat{z}', \xi_1)), \pi_N(\exp(\hat{z}', \xi_2))) \leq c_2 \|\xi_1 - \xi_2\|_{\mathfrak{g}}$$

On supposera par la suite que l'on a choisi $r_0, r_1 > 0$ assez petits pour que $\zeta \mapsto \exp(\hat{z}', \zeta)$ soit un difféomorphisme de $\mathcal{B}(0, r_0) \cap \mathfrak{n}^-$ sur son image pour tout $\hat{z}' \in K$, et que l'on ait de plus, $\forall k \in \mathbf{N}$:

$$(\text{Ad } h_k).(\mathcal{B}(0, r_1) \cap \mathfrak{n}^-) \subset \mathcal{B}(0, r_0) \cap \mathfrak{n}^-.$$

On commence par montrer le point 2, (a) du Théorème 1.4. Soit $y \in U_x$, et (y_k) une suite de U_x qui tend vers y . Alors $y = \exp(\hat{x}, \xi)$, avec $\xi \in \mathcal{B}(0, r_1) \cap \mathfrak{n}^-$, et pour tout k , on peut écrire $y_k = \exp(\hat{x}_k, \xi_k)$, avec $\xi_k \rightarrow \xi$. Le point y appartient à $U_x \setminus F_{s-1}^{loc}(x)$ si et seulement si $\xi \in \mathfrak{n}^- \setminus \mathcal{E}_{s-1}$. Par (7.4) et le Lemme 7.3, ceci équivaut à :

$$d(f_k(x), f_k(y_k)) = \Theta(\mu_s(k)).$$

Soit maintenant $s > 1$ et $y \in F_j^{loc}(x) \setminus F_{j-1}^{loc}(x)$, $j \in \{1, \dots, s-1\}$. Alors $y = \pi_M(\exp(\hat{x}, \xi))$, où $\xi \in \{\mathcal{E}_j \setminus \mathcal{E}_{j-1}\} \cap \mathcal{B}(0, r_1)$. Soit (y_k) une suite de U_x qui converge vers y , et on écrit comme ci-dessus $y_k = \exp(\hat{x}_k, \xi_k)$, avec $\xi_k \rightarrow \xi$. Nous avons déjà vu que $\mu_j(k) = O(\|(\text{Ad } h_k).\xi_k\|_{\mathfrak{g}})$, ce qui, au vu du Lemme 7.3, conduit à :

$$\mu_j(k) = O(d(f_k(x), f_k(y_k))).$$

Le point (2), (b), (i) est donc satisfait.

Considérons la suite de points $y_k := \pi_M(\exp(\hat{x}_k, \xi))$, qui tend vers y . De la relation $\|(\text{Ad } h_k).\xi\|_{\mathfrak{g}} \sim c\mu_j(k)$, où $c > 0$, et du Lemme 7.3, on déduit :

$$(7.7) \quad d(f_k(x), f_k(y_k)) = \Theta(\mu_j(k)),$$

et le point (2), (b), (ii) est satisfait.

Réciproquement, soit $y \in U_x \setminus \{x\}$ satisfaisant les points (2), (b), (i) et (2), (b), (ii) pour un certain indice $j_0 \in \{0, \dots, s-1\}$. Par le (2), (a), $y \notin U_x \setminus F_{s-1}^{loc}(x)$. Donc il existe $j_1 \in \{0, \dots, s-1\}$ tel que $y \in F_{j_1}^{loc}(x) \setminus F_{j_1-1}^{loc}(x)$. Les points (2), (b), (i) et (2), (b), (ii) sont donc également vérifiés pour l'indice j_1 , ce qui implique $j_1 = j_0$. Ceci achève donc la preuve du point (2), (b) du Théorème 1.4.

8. Appendice : unicité des feuilles locales $F_j^{loc}(x)$ et des suites $\mu_j(k)$ dans le Théorème 1.4

Soit x un point de M . Le Théorème 1.4 assure l'existence d'une stratification dynamique sur un voisinage U_x de x , définie par des sous-variétés $F_0^{loc}(x) = \{x\} \subsetneq \dots \subsetneq F_{s-1}^{loc}(x) \subsetneq U_x$, et des suites $\mu_1(k), \dots, \mu_s(k)$, qui satisfont aux conclusions 2, (a), et 2, (b) lorsque $s > 1$, du théorème. Nous allons prouver l'unicité de cette stratification, au sens où si $H_0^{loc} := \{x\} \subsetneq \dots \subsetneq H_{r-1}^{loc}(x) \subsetneq U_x$ est une autre famille de sous-variétés, et si $\eta_1(k), \dots, \eta_r(k)$ sont d'autres suites, qui vérifient $\eta_j(k) = o(\eta_{j+1}(k))$ pour $j \in \{1, \dots, r-1\}$ lorsque $r > 1$, ainsi que les conclusions 2, (a), et 2, (b) lorsque $r > 1$, du Théorème 1.4, alors $r = s$, $H_j^{loc}(x) = F_j^{loc}(x)$, et $\eta_j(k) = \Theta(\mu_j(k))$, pour tout $j = 1, \dots, s$.

Si r ou s vaut 1, l'assertion est claire, si bien que nous supposons dans ce qui suit que r et s valent au moins 2. Commençons par choisir y et y' non nuls, différents de x , dans $F_1^{loc}(x)$ et $H_1^{loc}(x)$ respectivement. Le point 2, (b), (ii) assure qu'il existe une suite (y_k) qui tend vers y , telle que $d(f_k(x), f_k(y_k)) = \Theta(\mu_1(k))$, et il existe une suite (y'_k) qui tend vers y' telle que $d(f_k(x), f_k(y'_k)) = \Theta(\eta_1(k))$. Par le point 2, (b), (i), on doit avoir $\eta_1(k) = O(d(f_k(x), f_k(y_k)))$ et $\mu_1(k) = O(d(f_k(x), f_k(y'_k)))$, d'où il ressort que $\eta_1(k) = O(\mu_1(k))$ et $\mu_1(k) = O(\eta_1(k))$. On aboutit à $\eta_1(k) = \Theta(\mu_1(k))$. Cette information, jointe au 2, (b) assure que $y \in H_1^{loc}(x)$ et $y' \in F_1^{loc}(x)$. Ainsi $H_1^{loc}(x) = F_1^{loc}(x)$.

Supposons que $\min(r, s) > 2$, et que pour $j \in \{2, \dots, \min(r, s) - 1\}$, on ait prouvé $F_{j-1}^{loc}(x) = H_{j-1}^{loc}(x)$. Choisissons $y \in F_j^{loc}(x) \setminus F_{j-1}^{loc}(x)$, et $y' \in H_j^{loc}(x) \setminus H_{j-1}^{loc}(x)$. Par 2, (b), (ii), il existe (y_k) qui converge vers y et telle que $d(f_k(x), f_k(y_k)) = \Theta(\mu_j(k))$. Par ailleurs,

$$y \in (U_x \setminus H_{r-1}^{loc}(x)) \bigcup_{i=j}^{r-1} H_i^{loc}(x) \setminus H_{i-1}^{loc}(x).$$

Les points 2, (a) et 2, (b), (i) assurent que $\eta_j(k) = O(d(f_k(x), f_k(y_k)))$. On conclut que $\eta_j(k) = O(\mu_j(k))$. Le même raisonnement appliqué à y' donne que $\mu_j(k) = O(\eta_j(k))$, et finalement $\eta_j(k) = \Theta(\mu_j(k))$. Par le point 2, (b), on obtient $x \in H_j^{loc}(x) \setminus H_{j-1}^{loc}(x)$ et $y' \in F_j^{loc}(x) \setminus F_{j-1}^{loc}(x)$. On conclut finalement que $F_j^{loc}(x) = H_j^{loc}(x)$.

Supposons que $s = \min(r, s)$. Alors, le raisonnement précédent permet d'obtenir par induction que pour tout $j \leq s - 1$, $\mu_j(k) = \Theta(\eta_j(k))$ et $F_j^{loc}(x) = H_j^{loc}(x)$. Le point 2, (a) du théorème affirme alors que pour tout point $y \in U_x \setminus F_{s-1}^{loc}(x)$ (et donc pour tout $y \in U_x \setminus H_{s-1}^{loc}(x)$), et

toute suite (y_k) qui converge vers y , on a $d(f_k(x), f_k(y_k)) = \Theta(\mu_s(k))$. On doit ainsi avoir $\eta_j(k) = \Theta(\mu_s(k))$ pour tout $j = s, \dots, r$. Comme $\eta_j(k) = o(\eta_{j+1}(k))$, on obtient que $r = s$, et $\eta_s(k) = \Theta(\mu_s(k))$. Ceci achève la preuve de l'unicité.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. ALEKSEEVSKI, « Self-similar Lorentzian manifolds », *Ann. Global Anal. Geom.* **3** (1985), n° 1, p. 59-84.
- [2] T. BARBOT, V. CHARETTE, T. DRUMM, W. GOLDMAN & K. MELNICK, « A primer on the (2+1) Einstein universe. », in *Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry*, ESI Lectures in Mathematics and Physics, 2008.
- [3] A. BESSE, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (**3**), vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [4] A. ČAP, J. SLOVÁK & V. ŽÁDNÍK, « On distinguished curves in parabolic geometries », *Transform. Groups* **9** (2004), n° 2, p. 143-166.
- [5] J. FERRAND, « Les géodésiques des structures conformes », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **294** (1982), n° 18, p. 629-632.
- [6] ———, « Convergence and degeneracy of quasiconformal maps of Riemannian manifolds », *J. Anal. Math.* **69** (1996), p. 1-24.
- [7] ———, « The action of conformal transformations on a Riemannian manifold », *Math. Ann.* **304** (1996), n° 2, p. 277-291.
- [8] C. FRANCES, « Géométrie et dynamique lorentziennes conformes », Thèse, ENS Lyon, 2002, available at <http://mahery.math.u-psud.fr/frances/>.
- [9] ———, « Sur le groupe d'automorphismes des géométries paraboliques de rang 1 », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **40** (2007), n° 5, p. 741-764, English version : *eprint arXiv :math/0608.537v1*.
- [10] F. W. GEHRING, « The Carathéodory convergence theorem for quasiconformal mappings in space », *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No.* **336/11** (1963), p. 21.
- [11] S. KOBAYASHI, *Transformation groups in differential geometry. Reprint of the 1972 edition.*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, 21 pages.
- [12] W. KUEHNEL & H. RADEMACHER, « Liouville's theorem in conformal geometry », *Pures et Appl.* (9) (to appear).
- [13] M. OBATA, « The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds », *J. Differential Geometry* **6** (1971/72), p. 247-258.
- [14] R. SCHOEN, « On the conformal and CR automorphism groups », *Geom. Funct. Anal.* **5** (1995), n° 2, p. 464-481.
- [15] M. SCHOTTENLOHER, *A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [16] R. SHARPE, *Differential Geometry : Cartan's generalization of Klein's Erlangen Program*, Springer, New York, 1997.
- [17] J. VÄSSÄLÄ, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 229, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- [18] A. ZEGHIB, « Sur les actions affines des groupes discrets », *Ann. Inst. Fourier* **47** (1997), p. 641-685.
- [19] ———, « Isometry groups and geodesic foliations of Lorentz manifolds. I. Foundations of Lorentz dynamics », *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999), n° 4, p. 775-822.

- [20] ———, « Isometry groups and geodesic foliations of Lorentz manifolds. II. Geometry of analytic Lorentz manifolds with large isometry groups », *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999), n° 4, p. 823-854.

Manuscrit reçu le 19 juillet 2010,
accepté le 15 mars 2011.

Charles FRANCES
Université Paris-Sud
Laboratoire de Mathématiques,
91405 ORSAY Cedex.
Charles.Frances@math.u-psud.fr