



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Rachel OLLIVIER & Vincent SÉCHERRE

Modules universels en caractéristique naturelle pour un groupe réductif fini

Tome 65, n° 1 (2015), p. 397-430.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2015__65_1_397_0



© Association des Annales de l'institut Fourier, 2015,

Certains droits réservés.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier »
(<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales
d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>).

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

MODULES UNIVERSELS EN CARACTÉRISTIQUE NATURELLE POUR UN GROUPE RÉDUCTIF FINI

par Rachel OLLIVIER & Vincent SÉCHERRE (*)

RÉSUMÉ. — Soit k un corps fini de caractéristique p , soit G le groupe des points k -rationnels d'un groupe réductif connexe défini sur une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_p$ de k et U les points k -rationnels du radical unipotent d'un sous-groupe de Borel B défini sur k . Nous étudions le module universel C des fonctions de G dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ invariantes par translation par U , en tant que module sur son algèbre de G -endomorphismes H . En utilisant un résultat de Cabanes, nous prouvons que C est plat sur H si et seulement si la catégorie des H -modules de dimension finie est équivalente à celle des $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentations de dimension finie de G engendrées par leurs vecteurs U -invariants. En particulier, nous étudions la platitude de C dans le cas où $G = \mathrm{GL}(n, k)$, en fonction du cardinal de k . Dans un travail ultérieur, nous montrerons comment ces résultats de platitude impliquent des résultats analogues pour le module universel de $\mathrm{GL}(3)$ sur un corps p -adique.

ABSTRACT. — Let k be a finite field of characteristic p , let G be the group of k -rational points of a connected reductive group defined over an algebraic closure $\overline{\mathbb{F}}_p$ of k , and let U be the k -rational points of the unipotent radical of a Borel subgroup B defined over k . We study the universal module C of $\overline{\mathbb{F}}_p$ -valued functions on G that are invariant under translation by U , as a module over its G -endomorphism algebra H . Using a theorem by Cabanes, we prove that C is flat over H if and only if the category of finite dimensional H -modules is equivalent to the category of finite dimensional $\overline{\mathbb{F}}_p$ -representations of G generated by their U -invariant subspace. We study more specifically the flatness of C when $G = \mathrm{GL}(n, k)$ depending on the cardinality of k . In a subsequent paper, we will focus on $n = 3$ and will show how some of these flatness results imply analogous statements for the universal module of the group $\mathrm{GL}(3)$ over a p -adic field.

Mots-clés : Représentation modulaire ; Groupe réductif fini ; Algèbre de Hecke.

Classification math. : 20C33, 20C08.

(*) Les auteurs sont en partie financés par l'Agence Nationale de la Recherche (réf. ANR-2011-BS01-005-02). V. S. a également bénéficié du soutien financier de l'EPSRC (grant GR/T21714/01).

1. Introduction

1. Soit \mathbf{G} un groupe réductif connexe défini sur un corps fini k de caractéristique p et soit \mathbf{U} le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel \mathbf{B} de \mathbf{G} . Notons respectivement G, U, B les groupes de points k -rationnels correspondants, et notons C l'espace des fonctions de G à valeurs dans une clôture algébrique $\overline{\mathbf{F}}_p$ de k qui sont invariantes par translations à gauche par U . Nous appellerons C un module universel pour G . L'action de G par translations à droite fait de C une représentation de G , dont l'algèbre d'endomorphismes H est l'algèbre de Hecke de G relativement à U . On s'intéresse dans cet article aux représentations de G à coefficients dans $\overline{\mathbf{F}}_p$ et à leurs liens avec les modules sur l'algèbre de Hecke H .

2. Plus précisément, C est à la fois une représentation de G et un module à gauche sur H , et on a un foncteur :

$$(1.1) \quad V \mapsto \mathrm{Hom}_G(C, V)$$

de la catégorie des représentations de G à coefficients dans $\overline{\mathbf{F}}_p$ vers celle des modules à droite sur H . L'ordre de U n'étant pas inversible dans $\overline{\mathbf{F}}_p$, ce foncteur n'est pas exact en général. Toutefois il induit une bijection entre classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G et classes d'isomorphisme de modules simples sur H ([7]). Il admet un adjoint à droite, le foncteur de tensorisation par C au-dessus de H , et nous cherchons à quelles conditions C est plat comme module sur H . A partir d'un résultat de [4] exploitant le fait que H est auto-injective, nous obtenons le résultat suivant (voir la proposition 2.15).

THÉORÈME A. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Le foncteur (1.1) induit une équivalence entre la catégorie des $\overline{\mathbf{F}}_p$ -représentations de dimension finie engendrées par leurs vecteurs U -invariants et la catégorie des modules à droite sur H de dimension finie.*
- (2) *le H -module C est plat.*

3. Supposons maintenant que $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, $n \geq 1$ et notons C_1 l'espace des fonctions de G dans $\overline{\mathbf{F}}_p$ invariantes par translations à gauche par B et H_1 son algèbre d'endomorphismes. Nous cherchons des critères de platitude de C et C_1 comme modules sur H et H_1 en fonction du cardinal q de k . Nos résultats sont rassemblés dans le théorème suivant (proposition 5.16).

THÉORÈME B. — (1) *Pour $n = 2$, le H_1 -module C_1 est plat.*

- (2) Pour $n = 2$, le H -module C est plat si et seulement si $q = p$.
- (3) Pour $n = 3$, le H_1 -module C_1 est plat si et seulement si $q = p$.
- (4) Pour $n = 3$, le H -module C est plat si et seulement si $q = 2$.
- (5) Pour $n \geq 4$ et $q \neq p$, le H_1 -module C_1 n'est pas plat.
- (6) Pour $n \geq 4$ et $q \neq 2$, le H -module C n'est pas plat.

4. Ce travail est motivé par l'étude des représentations mod p des groupes réductifs p -adiques. Plus précisément, F étant un corps localement compact non archimédien de corps résiduel k , il sert de point de départ à l'étude dans [19] des représentations modulo p de $GL_3(F)$ dans l'esprit de [16, 17] qui traitait du cas de $GL_2(F)$. Nous montrons dans [19] comment on peut, via la résolution des modules universels p -adiques établie dans [22] par le biais de systèmes de coefficients sur l'immeuble de Bruhat-Tits, transférer à $GL_3(F)$ les résultats de platitude (ou de non-platitude) du présent article pour $GL_3(k)$.

5. Les sections 2 et 4 sont écrites pour un groupe réductif fini G quelconque. Le résultat principal de la section 2 est la proposition 2.15 qui implique le Théorème A de cette introduction. Dans la section 4, on introduit les foncteurs d'induction et de restriction relativement à un sous-groupe parabolique de G et on étudie la compatibilité entre ces foncteurs et le foncteur (1.1). Une conséquence est la proposition 4.13, qui donne une condition nécessaire de platitude pour C en termes de platitude pour les modules universels relatifs aux sous-groupes de Levi standards de G .

6. Le cas de $G = GL_n(k)$ avec $n = 2, 3$ est traité dans les sections 3 et 5 respectivement, en calculant explicitement les suites de composition des séries principales de G , en s'appuyant sur des résultats de [7, 16] et [10, 11]. Le cas où $n \geq 4$ s'en déduit en appliquant les résultats de la section 4 sur l'induction parabolique (corollaire 4.14).

Remerciements

Nous remercions Shaun Stevens, Marc Cabanes et Florian Herzig pour de fructueuses discussions à propos de ce travail.

Le premier auteur remercie le Laboratoire de Mathématiques de Versailles qui lui a fourni un cadre de travail chaleureux et dynamisant durant la gestation de cet article.

Le second auteur remercie l'Institut de Mathématiques de Luminy et l'Université de la Méditerranée Aix-Marseille 2 (désormais Aix-Marseille Université) où la majeure partie de ce travail a été réalisée.

Notations et conventions

Fixons un nombre premier p , un corps fini k de caractéristique p et une clôture algébrique $\overline{\mathbf{F}}_p$ de k . Si \mathbf{H} est un $\overline{\mathbf{F}}_p$ -groupe algébrique linéaire défini sur k , on notera $\mathbf{H}(k)$ le groupe de ses points k -rationnels.

Par représentation d'un groupe fini, on entendra représentation $\overline{\mathbf{F}}_p$ -linéaire de dimension finie.

2. Catégories de représentations de G et algèbres de Hecke

2.1. Le groupe réductif fini G

Soit \mathbf{G} un $\overline{\mathbf{F}}_p$ -groupe réductif connexe défini sur k . Fixons un tore k -déployé maximal \mathbf{S} de \mathbf{G} . Soient \mathbf{T} le centralisateur de \mathbf{S} dans \mathbf{G} et \mathbf{N} son normalisateur dans \mathbf{G} . Fixons un sous-groupe de Borel \mathbf{B} de \mathbf{G} contenant \mathbf{T} et notons \mathbf{U} son radical unipotent. Notons G le groupe $\mathbf{G}(k)$ des points k -rationnels de \mathbf{G} , ainsi que $B = \mathbf{B}(k)$, $T = \mathbf{T}(k)$ et $U = \mathbf{U}(k)$.

Soit Φ l'ensemble des racines de \mathbf{G} relatives à \mathbf{S} et soit $W = \mathbf{N}/\mathbf{T} \simeq \mathbf{N}(k)/\mathbf{T}(k)$. Le choix de \mathbf{B} détermine un ensemble $\Delta \subseteq \Phi$ de racines simples et un ensemble \mathcal{S} de réflexions engendrant W .

D'après [9, Lemma 5.2], le quadruplet $(G, B, \mathbf{N}(k), \mathcal{S})$ est une BN-paire fortement déployée de caractéristique p , c'est-à-dire qu'on a les propriétés suivantes (voir [5, Definition 2.20]) :

- (1) on a $B^{w_0} \cap B = T$, où w_0 est l'élément de plus grande longueur de W ;
- (2) on a $B = TU$, U est un p -sous-groupe de Sylow de B et T est commutatif, d'ordre premier à p et normalise U ;
- (3) pour toute partie J de \mathcal{S} , l'intersection $U \cap U^{w_J}$ est un sous-groupe distingué de U , où w_J est l'élément de plus grande longueur du sous-groupe de Weyl W_J de W engendré par J .

Ainsi on peut appliquer les résultats de [5]. Nous appliquerons aussi occasionnellement les résultats de [7], valables pour des BN-paires déployées de caractéristique p .

Notons ℓ la longueur associée au système de Coxeter (W, \mathcal{S}) , qu'on relève à $\mathbf{N}(k)$ par inflation. D'après [5, Proposition 6.6], le groupe G est l'union disjointe des doubles classes UnU , $n \in \mathbf{N}(k)$, et on a $UnUn'U = Unn'U$ si et seulement si $\ell(n) + \ell(n') = \ell(nn')$ pour tous $n, n' \in \mathbf{N}(k)$.

Exemple 2.1. — Pour $n \geq 1$, soit $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbf{F}}_p)$. Notons \mathbf{S} le sous-groupe des matrices diagonales. On a $\mathbf{T} = \mathbf{S}$, et W s'identifie au groupe symétrique S_n . Soit \mathbf{B} le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. On a une décomposition $\mathbf{B} = \mathbf{T}\mathbf{U}$, où \mathbf{U} est formé des matrices triangulaires unipotentes supérieures. On a $G = \mathrm{GL}_n(k)$, le groupe $\mathbf{N}(k)$ est le produit semi-direct de \mathbf{T} et du groupe des matrices de permutation de G , et \mathcal{S} est formé des éléments correspondant aux transpositions $i \leftrightarrow i + 1$ pour $i \in \{1, \dots, n - 1\}$.

2.2. Catégories de représentations

On note $\mathcal{R} = \mathcal{R}(G)$ la catégorie des représentations de G (sur des $\overline{\mathbf{F}}_p$ -espaces vectoriels de dimension finie) et \mathcal{E} la sous-catégorie pleine de \mathcal{R} constitué des représentations engendrées par leurs vecteurs U -invariants.

Le résultat classique suivant est essentiel dans l'étude de la catégorie \mathcal{R} . Si V est une représentation de G , on note V^U l'espace de ses vecteurs U -invariants.

LEMME 2.2 ([23], proposition 26). — *Pour toute représentation V dans \mathcal{R} , on a $V = 0$ si et seulement si $V^U = 0$.*

Soit C la représentation de G induite à partir du caractère trivial de U . C'est l'espace des fonctions de G dans $\overline{\mathbf{F}}_p$ invariantes par translations à gauche par U , muni de l'action de G par translations à droite. Elle est engendrée par la fonction caractéristique $\mathbf{1}_U$ de $U \subseteq G$, qui est U -invariante. (Plus généralement, étant donnée une partie X de G , on notera $\mathbf{1}_X$ sa fonction caractéristique.)

Si V est une représentation de G et si $f \in \mathrm{Hom}_G(C, V)$, le vecteur $f(\mathbf{1}_U)$ est invariant par U . En outre, l'application $f \mapsto f(\mathbf{1}_U)$ est un isomorphisme de $\overline{\mathbf{F}}_p$ -espaces vectoriels de $\mathrm{Hom}_G(C, V)$ dans V^U (réciprocité de Frobenius).

LEMME 2.3. — *Une représentation de G appartient à \mathcal{E} si et seulement s'il existe un entier $b \geq 1$ tel qu'elle soit isomorphe à un quotient de C^b .*

Démonstration. — Soit V une représentation de G , et soit $b \geq 1$ un entier. Par réciprocité de Frobenius, on a un isomorphisme de $\overline{\mathbf{F}}_p$ -espaces vectoriels :

$$\mathrm{Hom}_G(C^b, V) \rightarrow (V^U)^b$$

associant à tout homomorphisme de C^b dans V une famille de b vecteurs de V invariants par U . Un tel homomorphisme est surjectif si et seulement si la famille qui lui correspond engendre V comme représentation de G . \square

Remarque 2.4. — La sous-catégorie \mathcal{E} est stable par quotients dans \mathcal{R} (compte tenu du lemme 2.3, tout quotient d'un quotient de C^b , $b \geq 1$, est un quotient de C^b) mais pas toujours par sous-objets dans \mathcal{R} , c'est-à-dire qu'une sous-représentation dans \mathcal{R} d'un objet de \mathcal{E} n'appartient pas toujours à \mathcal{E} (voir la section 3).

Étant donnée une représentation V de G , on note V^\vee sa représentation contragrédiente. Le foncteur $V \mapsto V^\vee$ est exact de \mathcal{R} dans \mathcal{R} .

LEMME 2.5. — *La représentation C est isomorphe à sa contragrédiente.*

Démonstration. — Si l'on identifie C à l'espace des fonctions de $U \setminus G$ dans $\overline{\mathbf{F}}_p$, l'espace dual est engendré par les fonctions d'évaluation $\text{ev}(x) : f \mapsto f(x)$, pour $x \in U \setminus G$. On vérifie que :

$$g \cdot \text{ev}(x) = \text{ev}(xg^{-1}),$$

pour tout $g \in G$, de sorte que l'homomorphisme $\overline{\mathbf{F}}_p$ -linéaire $\mathbf{1}_x \mapsto \text{ev}(x)$, associant à la fonction caractéristique $\mathbf{1}_x$ de la classe $x \in U \setminus G$ sa fonction d'évaluation, est un isomorphisme de représentations de G . \square

On vérifie au moyen des lemmes 2.3 et 2.5 qu'une représentation de \mathcal{R} appartient à \mathcal{E} si et seulement s'il existe un entier $b \geq 1$ tel que sa représentation contragrédiente est isomorphe à une sous-représentation de C^b .

DÉFINITION 2.6. — *On note \mathcal{B} la plus grande sous-catégorie pleine de \mathcal{E} qui soit stable par le foncteur $V \mapsto V^\vee$.*

D'après ce qui précède, \mathcal{B} est la sous-catégorie pleine de \mathcal{R} constituée des représentations qui sont à la fois quotients et sous-représentations de C^b pour un entier $b \geq 1$ assez grand, ou encore, si l'on préfère, des représentations images d'un élément de $\text{End}_G(C^b)$ pour un entier $b \geq 1$.

La dualité $V \mapsto V^\vee$ préservant l'irréductibilité, et toute représentation irréductible de G étant engendrée par ses vecteurs U -invariants (voir le lemme 2.2), toute représentation irréductible de G est dans \mathcal{B} .

2.3. L'algèbre de Hecke du sous-groupe unipotent U

Soit H la $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbre des G -endomorphismes de C . Par réciprocity de Frobenius, elle s'identifie à l'espace C^U des fonctions de G dans $\overline{\mathbf{F}}_p$ qui sont invariantes par U par translations à droite et à gauche, muni du produit :

$$f * f' : g \mapsto \sum_{x \in U \setminus G} f(gx^{-1})f'(x)$$

pour $f, f' \in H$ et $g \in G$, où x décrit un système quelconque de représentants de $U \backslash G$ dans G . L'unité de H est la fonction caractéristique $\mathbf{1}_U$. D'après le paragraphe 2.1, les fonctions :

$$\tau_n = \mathbf{1}_{UnU}, \quad n \in \mathbf{N}(k),$$

forment une base de H comme $\overline{\mathbf{F}}_p$ -espace vectoriel, et on a :

$$(2.1) \quad \tau_n \tau_{n'} = \tau_{nn'} \quad \Leftrightarrow \quad \ell(n) + \ell(n') = \ell(nn')$$

pour tous $n, n' \in \mathbf{N}(k)$.

Selon [21, Theorem 2.4] (voir aussi [5, Proposition 6.11]), l'algèbre H est une algèbre de Frobenius, c'est-à-dire qu'il existe une forme linéaire de H dans $\overline{\mathbf{F}}_p$ dont le noyau, pour tout $f \in H$ non nulle, ne contient ni fH ni Hf . Elle est donc auto-injective et a les propriétés suivantes.

LEMME 2.7. — *Soit \mathfrak{m} un H -module (à droite ou à gauche) de type fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) \mathfrak{m} est plat.
- (2) \mathfrak{m} est projectif.
- (3) \mathfrak{m} est injectif.

Démonstration. — De façon générale, tout module projectif est plat. L'implication réciproque provient de [15, Theorem 4.38] et du fait que H est un anneau noethérien. Enfin l'équivalence entre 2 et 3 est donnée par [1, Proposition 1.6.2]. □

COROLLAIRE 2.8. — *Soit \mathfrak{m} un H -module (à droite ou à gauche) et soit \mathfrak{n} un sous-module projectif de type fini de \mathfrak{m} . Alors \mathfrak{n} est un facteur direct de \mathfrak{m} .*

Signalons que, si K est un sous-groupe de G , alors C^K est un sous- H -module à gauche de C .

COROLLAIRE 2.9. — *Soit U' un sous-groupe de U . Alors le H -module à gauche $C^{U'} \simeq H$ est un facteur direct de $C^{U'}$. En particulier, c'est un facteur direct de C .*

On note \mathcal{M} la catégorie des modules à droite de type fini sur H . On considère le foncteur :

$$\mathbf{F} : V \mapsto \text{Hom}_G(C, V)$$

de \mathcal{E} dans \mathcal{M} , admettant un adjoint à gauche :

$$\mathbf{T} : \mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m} \otimes_H C,$$

où C est considéré à la fois comme un H -module à gauche et une représentation de G .

LEMME 2.10. — *Le foncteur $\mathbf{F} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ est fidèle.*

Remarque 2.11. — Soit V une représentation de G . Par adjonction, il correspond à l'identité de $\mathrm{Hom}_H(V^U, V^U)$ un homomorphisme $V^U \otimes_H C \rightarrow V$ de représentations de G , dont l'image est la sous-représentation de V engendrée par V^U .

Le théorème suivant est dû à Cabanes ([4, Theorem 2], voir aussi [5, Theorem 1.25]).

THÉORÈME 2.12 (Cabanes). — *Le foncteur \mathbf{F} induit une équivalence de catégories entre \mathcal{B} et \mathcal{M} .*

Plus précisément, on a la propriété suivante (voir [5, Lemma 1.26]).

FAIT 2.13. — *Pour tout H -module à droite de type fini \mathfrak{m} , il existe un homomorphisme injectif de \mathfrak{m} dans H^d , pour un entier $d \geq 1$ convenable.*

Étant donné un H -module à droite de type fini \mathfrak{m} , on choisit un entier $d \geq 1$ et un homomorphisme injectif ι de \mathfrak{m} dans H^d . Ceci permet d'identifier \mathfrak{m} à un sous-espace de $\mathrm{Hom}_G(C, C^d)$, et de former l'image de l'application naturelle :

$$\mathfrak{m} \otimes_H C \rightarrow H^d \otimes_H C \simeq C^d,$$

qu'on note $V = V(\mathfrak{m}, \iota)$. On a le résultat suivant (voir [5, Lemma 1.27]).

FAIT 2.14. — *La représentation V est dans la catégorie \mathcal{B} , sa classe d'isomorphisme ne dépend pas de d et ι et le H -module à droite $\mathbf{F}(V)$ est isomorphe à \mathfrak{m} .*

2.4. Critères de platitude

Le foncteur \mathbf{F} est fidèle et essentiellement surjectif de \mathcal{E} dans \mathcal{M} (voir le lemme 2.10 pour la première assertion, la seconde découlant par exemple du théorème 2.12). Nous établissons des conditions pour qu'il soit plein.

Rappelons (voir [25, A.3]) que la représentation C est quasi-projective si, pour toute représentation V de G et tout morphisme surjectif $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(C, V)$, le morphisme $\mathbf{F}(\varphi) \in \mathrm{Hom}_H(H, V^U)$ obtenu par restriction est surjectif.

PROPOSITION 2.15. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) Le foncteur $\mathbf{F} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$ est plein.
- (2) Le foncteur $\mathbf{T} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$ est exact.
- (3) Les catégories \mathcal{E} et \mathcal{B} coïncident.
- (4) Le H-module à gauche C est plat.
- (5) Le H-module à gauche C est projectif.
- (6) Le foncteur \mathbf{F} est une équivalence de catégories de \mathcal{E} dans \mathcal{M} et \mathbf{T} en est un quasi-inverse.
- (7) La représentation C est quasi-projective de type fini.
- (8) La sous-catégorie \mathcal{E} est stable par sous-objets dans \mathcal{R} .

Démonstration. — (3 \Rightarrow 1, 2, 8) On suppose que les catégories \mathcal{E} et \mathcal{B} coïncident. Alors \mathbf{F} induit une équivalence de catégories de \mathcal{E} dans \mathcal{M} . Ainsi son adjoint \mathbf{T} est exact et \mathbf{F} est plein. En outre \mathcal{E} est stable par sous-objets dans \mathcal{R} puisque c'est le cas de \mathcal{B} .

(1 \Rightarrow 3) On suppose que \mathbf{F} est plein. Si V est dans \mathcal{E} , alors il existe un morphisme injectif de H-modules de $\mathbf{F}(V)$ dans H^d pour un entier $d \geq 1$ (voir le fait 2.13). Il est de la forme $\mathbf{F}(\varphi)$ pour $\varphi \in \text{Hom}_G(V, C^d)$, et il reste à voir que φ est injectif. Par hypothèse, la restriction $\mathbf{F}(\varphi)$ de φ à V^U est injective, de sorte que l'espace des vecteurs U-invariants du noyau de φ dans \mathcal{R} est trivial. On en déduit que ce noyau est trivial (voir le lemme 2.2), c'est-à-dire que φ est injective, donc que V est dans \mathcal{B} .

(2 \Rightarrow 3) On suppose que \mathbf{T} est exact. D'après le fait 2.13, pour tout H-module à droite de type fini \mathfrak{m} , on a un homomorphisme injectif de \mathfrak{m} dans H^d pour un entier $d \geq 1$. En appliquant \mathbf{T} , on obtient un homomorphisme injectif de représentations de G de $\mathbf{T}(\mathfrak{m})$ dans C^d , ce qui prouve que \mathbf{T} est à valeurs dans \mathcal{B} . Il s'agit donc de l'adjoint de la restriction de \mathbf{F} à \mathcal{B} , qui est une équivalence de catégories d'après le théorème 2.12. Étant donné V dans \mathcal{E} , on a une suite exacte dans \mathcal{R} :

$$(2.2) \quad 0 \rightarrow Q \rightarrow \mathbf{T}\mathbf{F}(V) = V^U \otimes_H C \rightarrow V \rightarrow 0$$

où Q désigne le noyau de la projection canonique de $\mathbf{T}\mathbf{F}(V)$ sur V . Puisque \mathbf{T} est à valeurs dans \mathcal{B} , le foncteur $\mathbf{F}\mathbf{T}$ est isomorphe au foncteur identité de \mathcal{M} , de sorte que, en appliquant \mathbf{F} à (2.2), on obtient la suite exacte de H-modules :

$$0 \rightarrow \mathbf{F}(Q) \rightarrow \mathbf{F}(V) \rightarrow \mathbf{F}(V)$$

où l'homomorphisme de droite est l'identité. On en déduit que $\mathbf{F}(Q)$, donc Q , est trivial. Ainsi $\mathbf{T}\mathbf{F}(V)$ est canoniquement isomorphe à V , donc V est dans \mathcal{B} .

(2 \Leftrightarrow 4) Si C est plat comme H -module, alors le foncteur $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m} \otimes_H C$ de \mathcal{M} dans \mathcal{R} est exact, donc \mathbf{T} est exact. Inversement, si \mathfrak{n} est un H -module à droite et \mathfrak{m} un sous-module de \mathfrak{n} , on a un homomorphisme :

$$(2.3) \quad \mathfrak{m} \otimes_H C \rightarrow \mathfrak{n} \otimes_H C$$

dans \mathcal{R} . Si \mathbf{T} est exact, alors le noyau de (2.3) dans \mathcal{E} est trivial, ce qui équivaut à dire que son noyau dans \mathcal{R} est trivial. Le foncteur $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m} \otimes_H C$ de \mathcal{M} dans \mathcal{R} est donc exact, c'est-à-dire que C est plat comme H -module à gauche.

(4 \Leftrightarrow 5) C'est une conséquence du lemme 2.7.

(1 \Leftrightarrow 7) D'après le lemme 2.2, la représentation C est sans C -torsion dans la terminologie de [25], c'est-à-dire que, pour toute sous-représentation non nulle V de C , le H -module $\mathbf{F}(V)$ est non nul. On déduit alors du théorème 9 de l'appendice de [25] que 1 et 7 sont équivalentes.

(8 \Rightarrow 1) Si \mathcal{E} est stable par sous-objets dans \mathcal{R} , la proposition 2 et le théorème 4 de l'appendice de [25] impliquent la condition 1. \square

Dès que le H -module C n'est pas plat, il y a donc des représentations dans \mathcal{E} qui ne sont pas dans \mathcal{B} . On en donne un exemple à la proposition 3.3.

2.5. Décomposition de C et de H

Notons $\hat{\mathbf{T}}$ le groupe des $\overline{\mathbf{F}}_p$ -caractères du groupe abélien \mathbf{T} . Par transitivité de l'induction, la représentation C de G se décompose sous la forme :

$$(2.4) \quad C = \bigoplus_{\chi \in \hat{\mathbf{T}}} C_\chi$$

où C_χ désigne la représentation de G induite à partir du caractère de B obtenu en composant χ avec la surjection canonique de B sur \mathbf{T} . (Il s'agit de la représentation de G par translations à droite sur l'espace des fonctions f de G dans \mathbf{R} qui vérifient $f(tug) = \chi(t)f(g)$ pour tous $t \in \mathbf{T}$, $u \in U$, $g \in G$.)

Pour $\chi \in \hat{\mathbf{T}}$, posons :

$$(2.5) \quad \varepsilon_\chi = |\mathbf{T}|^{-1} \cdot \sum_{t \in \mathbf{T}} \chi(t) \tau_t \in H$$

qui est la projection de C sur C_χ relativement à (2.4). Pour tout $t \in \mathbf{T}$, on a $\varepsilon_\chi \tau_t = \chi(t)^{-1} \varepsilon_\chi$.

Pour $w \in W$ et $\chi \in \hat{\mathbf{T}}$, le caractère $\chi^w : t \mapsto \chi(n t n^{-1})$ ne dépend pas du choix du représentant n de w dans $\mathbf{N}(k)$. Ceci définit une action de W

sur \hat{T} . Pour $\chi \in \hat{T}$ et $s \in \mathcal{S}$, on a $\tau_s \varepsilon_\chi = \varepsilon_{\chi^s} \tau_s$ et, d'après [7, Theorem 4.4], on a :

$$(2.6) \quad (\tau_s)^2 \varepsilon_\chi = \begin{cases} -\tau_s \varepsilon_\chi & \text{si } \chi^s = \chi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les τ_s et les ε_χ pour $s \in \mathcal{S}$ et $\chi \in \hat{T}$ forment un système générateur de l'algèbre H .

Soit Γ l'ensemble des orbites de \hat{T} sous W . Pour toute orbite $\gamma \in \Gamma$, notons ε_γ la somme des ε_χ pour $\chi \in \gamma$. Pour $\chi, \chi' \in \hat{T}$, l'espace $\text{Hom}_G(C_\chi, C_{\chi'})$ est non nul si et seulement si χ, χ' sont dans la même orbite sous W . Ainsi les $\varepsilon_\gamma, \gamma \in \Gamma$ forment une famille d'idempotents centraux orthogonaux de H qui décomposent l'unité $1_U \in H$.

Posons $H_\gamma = H\varepsilon_\gamma$ et notons C_γ la somme directe des C_χ pour $\chi \in \gamma$, qui est un H_γ -module à gauche. L'algèbre de Hecke H se décompose en la somme directe de $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbres H_γ pour $\gamma \in \Gamma$.

PROPOSITION 2.16. — *Le H -module C est plat si et seulement si le H_γ -module C_γ est plat pour toute orbite $\gamma \in \Gamma$.*

Démonstration. — Pour tout $\gamma \in \Gamma$, le module C_γ est plat sur H_γ si et seulement s'il est plat sur H . Le module C étant la somme directe des $C_\gamma, \gamma \in \Gamma$, il est plat sur H si et seulement si chaque C_γ est plat sur H , ce qui implique le résultat. □

On a le résultat suivant.

PROPOSITION 2.17 (Carter-Lusztig [7]). — *Soit V une représentation irréductible de G .*

- (1) *Il existe un unique caractère χ de T tel que V soit isomorphe à un quotient de C_χ .*
- (2) *L'espace des vecteurs U -invariants de V est de dimension 1 et la représentation de T sur V^U est égale à χ .*

2.6. Représentations ayant des vecteurs invariants par le sous-groupe de Borel

Notons 1 le caractère trivial de T . Son orbite sous W est réduite à $\{1\}$, et H_1 est isomorphe à l'algèbre des fonctions de G dans $\overline{\mathbf{F}}_p$ invariantes par translations à droite et à gauche par B , muni du produit :

$$f * f' : g \mapsto \sum_{B \backslash G} f(gx^{-1})f'(x)$$

pour $f, f' \in H_1, g \in G$, où x décrit un système (quelconque) de représentants de $B \backslash G$ dans G . L'unité de H_1 est $\mathbf{1}_B$. C'est une algèbre de Frobenius : on a donc un résultat analogue au lemme 2.7 pour les H_1 -modules.

On note \mathcal{M}_1 la sous-catégorie pleine de \mathcal{M} formée des H -modules à droite de type fini \mathfrak{m} tels que $\mathfrak{m} \cdot \varepsilon_1 = \mathfrak{m}$. Elle s'identifie naturellement à la catégorie $\mathcal{M}(H_1)$ des H_1 -modules à droite de type fini. D'après la formule (2.5), si V est une représentation de G , alors V^U est dans \mathcal{M}_1 si et seulement si $V^U = V^B$.

PROPOSITION 2.18. — *Soit V dans \mathcal{B} . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) on a $V^U = V^B$;
- (2) il existe $b \geq 1$ tel que V soit isomorphe à l'image d'un endomorphisme de C_1^b .

Démonstration. — Si V satisfait à la condition 2, elle est isomorphe à une sous-représentation de C_1^b pour un entier $b \geq 1$. La propriété $V^U = V^B$ suit alors de ce que $C_1^U = C_1^B$.

Si V satisfait à la condition 1, alors le module $\mathfrak{m} = V^U$ est dans \mathcal{M}_1 . D'après le fait 2.14, si ι est un homomorphisme injectif de H -modules de \mathfrak{m} dans H^d pour un entier $d \geq 1$ convenable, l'image de l'application naturelle de $\mathfrak{m} \otimes_H C$ dans C^d est isomorphe à V . Puisque $\mathfrak{m} \cdot \varepsilon_1 = \mathfrak{m}$, la représentation $\mathfrak{m} \otimes_H C$ s'identifie à $\mathfrak{m} \otimes_{H_1} C_1$, et son image dans C^d est incluse dans C_1^d , ce qui prouve que V satisfait à la condition 2. \square

Notons \mathcal{E}_1 la sous-catégorie pleine de \mathcal{R} formée des représentations engendrées par leurs vecteurs B -invariants et \mathcal{B}_1 la sous-catégorie pleine de \mathcal{B} formée des représentations V telles que $V^U = V^B$.

PROPOSITION 2.19. — *On suppose que C_1 est un H_1 -module plat. Alors :*

- (1) les catégories \mathcal{B}_1 et \mathcal{E}_1 coïncident ;
- (2) le foncteur \mathbf{F} induit une équivalence entre \mathcal{E}_1 et \mathcal{M}_1 .

Démonstration. — D'après le théorème 2.12 et la proposition 2.18, \mathbf{F} induit une équivalence de catégories entre \mathcal{B}_1 et \mathcal{M}_1 , et la seconde assertion découle de la première.

Soit V une représentation engendrée par l'espace \mathfrak{m} de ses vecteurs B -invariants. Soit ι un morphisme injectif de H -modules de \mathfrak{m} dans H^d pour $d \geq 1$ (voir le fait 2.13). Rappelons (fait 2.14) que V est isomorphe à l'image de l'application naturelle de $\mathfrak{m} \otimes_H C$ dans C^d . Puisque \mathfrak{m} est dans \mathcal{M}_1 , celle-ci s'identifie à l'image de l'application de $\mathfrak{m} \otimes_{H_1} C_1$ dans C_1^d .

Puisque C_1 est plat sur H_1 , cette dernière application est injective, c'est-à-dire que la représentation V est isomorphe à $\mathfrak{m} \otimes_{H_1} C_1$, ainsi qu'à une sous-représentation de C_1^d . Elle est donc dans \mathcal{B}_1 . \square

3. Le cas de $GL_2(k)$

Dans cette section, on suppose que $\mathbf{G} = GL_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$, donc $G = GL_2(k)$. Pour $\chi \in \hat{T}$, les facteurs irréductibles de C_χ sont tous de multiplicité 1. Ils sont décrits par Diamond dans [8, Proposition 1.1] (voir aussi Jeyakumar [14]). Notons s l'élément non trivial de W et q le cardinal de k . Une orbite $\gamma = \{\chi, \chi^s\} \in \Gamma$ est dite *régulière* si $\chi \neq \chi^s$. La structure de H_γ est déterminée dans [7, §4] par exemple.

Si l'orbite γ est régulière, alors l'algèbre H_γ est engendrée par $Y = \tau_s \varepsilon_\gamma$ et $X = \varepsilon_\chi$, avec les relations $Y^2 = 0$ et $YX + XY = Y$.

Sinon, la torsion par χ permet de se ramener au cas où $\gamma = \{1\}$, et l'algèbre H_1 est engendrée par $S = \tau_s \varepsilon_1$ avec la relation $S^2 + S = 0$.

PROPOSITION 3.1. — *Le H_1 -module à gauche C_1 est plat.*

Démonstration. — En tant que H_1 -module à gauche, H_1 est la somme directe des modules projectifs indécomposables $H_1 S = H_1 \tau_s$ et $H_1(S + \varepsilon_1)$. Une base de C_1 comme $\overline{\mathbf{F}}_p$ -espace vectoriel est $\{e_a, a \in k \cup \{\infty\}\}$, où e_∞ est la fonction caractéristique de B et e_a , pour $a \in k$, celle de :

$$Bs \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'image de e_a par τ_s est la somme des e_b pour les $b \in k \cup \{\infty\}$ tels que $b \neq a$ (voir par exemple [16, 2.2.1]). On en déduit que l'application de $H_1 \oplus (H_1 S)^{q-1}$ dans C_1 définie par :

$$(h, (h_a)_{a \in k^\times}) \mapsto h e_\infty + \sum_{a \in k^\times} h_a e_a$$

est un isomorphisme de H_1 -modules à gauche. On a prouvé que C_1 est un H_1 -module projectif, donc plat. \square

PROPOSITION 3.2. — *Le H -module à gauche C est plat si et seulement si $q = p$.*

Démonstration. — D'après la proposition 2.16, l'étude de la platitude du H -module à gauche C se ramène à celle des H_γ -modules à gauche C_γ . Si l'orbite $\gamma = \{\chi, \chi^s\}$ n'est pas régulière, on se ramène en tordant par χ au cas où $\gamma = \{1\}$, et la proposition 3.1 implique que C_γ est plat. On suppose

maintenant que γ est régulière. En tant que H_γ -module à droite, H_γ est la somme directe des modules $\varepsilon_\chi H_\gamma$ et $\varepsilon_{\chi^s} H_\gamma$ et on a la suite exacte de H_γ -modules à droite :

$$(3.1) \quad 0 \rightarrow \tau_s \varepsilon_{\chi^s} H_\gamma \rightarrow \varepsilon_\chi H_\gamma \rightarrow \tau_s \varepsilon_\chi H_\gamma \rightarrow 0.$$

D'après [7, Théorème 7.1], les représentations $\tau_s C_\chi$ et $\tau_s C_{\chi^s}$ sont irréductibles. Le calcul de leurs dimensions se trouve par exemple dans [20], dont le lemme 4.9 assure de plus que la somme de ces dimensions est égale à celle de C_χ si et seulement si $q = p$. Par conséquent, la suite :

$$(3.2) \quad 0 \rightarrow \tau_s C_{\chi^s} \rightarrow C_\chi \rightarrow \tau_s C_\chi \rightarrow 0$$

de représentations de G est exacte si et seulement si $q = p$. Si q est différent de p , cela signifie que l'exactitude de (3.1) n'est pas préservée par le produit tensoriel par le H_γ -module à gauche C_γ , qui n'est donc pas plat.

Supposons maintenant que q soit égal à p . Pour montrer que C_γ est plat, il suffit de montrer que, pour tout idéal à droite $A \subseteq H_\gamma$, l'homomorphisme naturel de $A \otimes_{H_\gamma} C_\gamma$ dans C_γ est injectif (voir [2], chapitre 1, §2, n°3, proposition 1). D'après (3.1), il suffit de le montrer pour les idéaux $\varepsilon_\chi H_\gamma$ et $\tau_s \varepsilon_\chi H_\gamma$ et leurs analogues obtenus en substituant χ^s à χ . Puisque ε_χ et ε_{χ^s} sont des idempotents orthogonaux, la seule vérification non triviale concerne $\tau_s \varepsilon_\chi H_\gamma$ et elle est assurée par l'exactitude de (3.2). \square

Dans le cas où $q \neq p$, on construit une représentation qui est dans \mathcal{E} sans être dans \mathcal{B} (voir la proposition 2.15).

PROPOSITION 3.3. — *Soit χ un caractère de T d'orbite régulière, et soit K le noyau dans \mathcal{R} de $\tau_s : C_{\chi^s} \rightarrow C_\chi$. On suppose que $q \neq p$. Alors K^\vee est dans \mathcal{E} sans être dans \mathcal{B} .*

Démonstration. — On a une suite exacte dans \mathcal{R} :

$$(3.3) \quad 0 \rightarrow K \rightarrow C_{\chi^s} \rightarrow \tau_s C_{\chi^s} \rightarrow 0$$

et puisque $q \neq p$, le noyau K contient strictement $\tau_s C_\chi$ d'après la preuve de la proposition 3.2. En passant aux U -invariants, on a les inclusions :

$$(\tau_s C_\chi)^U \subseteq K^U \subseteq C_{\chi^s}^U.$$

Puisque $\tau_s C_\chi$ est irréductible, le terme de gauche est de dimension 1 (voir la proposition 2.17), et l'on vérifie que celui de droite est de dimension 2. Si l'on avait $K^U = C_{\chi^s}^U$, la sous-représentation de K engendrée par K^U serait égale à C_{χ^s} . On aurait $K = C_{\chi^s}$, ce qui contredirait le fait que la restriction de τ_s à C_{χ^s} n'est pas nulle. Aussi K et $\tau_s C_\chi$ ont-elles le même espace de vecteurs U -invariants sans être égales, c'est-à-dire que K

est une sous-représentation de C mais n'est pas engendrée par ses vecteurs U -invariants. Sa contragrédiente est donc dans \mathcal{E} et pas dans \mathcal{B} . \square

4. Foncteurs paraboliques

Fixons dans cette section un sous-groupe parabolique \mathbf{P} de \mathbf{G} contenant \mathbf{B} et défini sur k . Notons $\mathbf{U}_\mathbf{P}$ son radical unipotent et \mathbf{M} son sous-groupe de Levi contenant \mathbf{T} .

Alors $\mathbf{M} \cap \mathbf{B}$ est un sous-groupe de Borel de \mathbf{M} contenant \mathbf{T} . L'ensemble des racines simples de \mathbf{M} relativement à $\mathbf{M} \cap \mathbf{B}$ est une partie $\Delta_\mathbf{M}$ de Δ . Notons $\Phi_\mathbf{M}$ l'ensemble des racines correspondant, vu comme une partie de Φ .

Posons $P = \mathbf{P}(k)$, $M = \mathbf{M}(k)$ et $N = \mathbf{U}_\mathbf{P}(k)$. On a ainsi $P = MN$.

4.1. Définition des foncteurs paraboliques

Notons $\mathbf{I}_\mathbf{P}$ le foncteur de $\mathcal{R}(M)$ dans $\mathcal{R}(G)$ défini pour toute représentation V de M par :

$$\mathbf{I}_\mathbf{P}(V) = \{f : G \rightarrow V \mid f(mng) = m \cdot f(g), m \in M, n \in N, g \in G\}$$

que l'on munit de l'action de G par translations à droite.

Pour $g \in G$ et $v \in V$, on note $[g, v]$ l'élément de $\mathbf{I}_\mathbf{P}(V)$ de support Pg et prenant en g la valeur v . On a $[g, v] = g^{-1} \cdot [1, v]$.

Le foncteur $\mathbf{I}_\mathbf{P}$ est exact de $\mathcal{R}(M)$ dans $\mathcal{R}(G)$. Il suffit en effet de vérifier que, si $f : V_1 \rightarrow V_2$ est un homomorphisme surjectif de représentations de M , alors, pour tous les $g \in G$ et $v_2 \in V_2$, la fonction $[g, v_2] \in \mathbf{I}_\mathbf{P}(V_2)$ se relève en $[g, v_1] \in \mathbf{I}_\mathbf{P}(V_1)$, où $v_1 \in V_1$ est un relèvement de v_2 .

Notons $\mathbf{R}_\mathbf{P}$ le foncteur de $\mathcal{R}(G)$ dans $\mathcal{R}(M)$ défini pour toute représentation V de G par :

$$\mathbf{R}_\mathbf{P}(V) = V^N = \{v \in V \mid n \cdot v = v, n \in N\}$$

que l'on munit de l'action de M par restriction.

Notons $\mathbf{J}_\mathbf{P}$ le foncteur de $\mathcal{R}(G)$ dans $\mathcal{R}(M)$ défini pour toute représentation V de G par :

$$\mathbf{J}_\mathbf{P}(V) = V_N = V/V(N)$$

(où $V(N)$ désigne le sous-espace de V engendré par les vecteurs de la forme $n \cdot v - v$, pour $v \in V$ et $n \in N$), que l'on munit de l'action naturelle de M .

Le foncteur $\mathbf{I}_\mathbf{P}$ est adjoint à gauche de $\mathbf{R}_\mathbf{P}$, et le foncteur $\mathbf{J}_\mathbf{P}$ est adjoint à gauche de $\mathbf{I}_\mathbf{P}$.

4.2. Un système de représentants minimal

Notons C_M la représentation de M induite à partir du caractère trivial de $U \cap M$. Soit

$$(4.1) \quad i_M : C_M \rightarrow C$$

le morphisme M -équivariant envoyant $\mathbf{1}_{U \cap M}$, la fonction caractéristique de $U \cap M$ dans M , sur $\mathbf{1}_U$. Son image est l'espace des éléments de C dont le support est inclus dans $UM = P$, sur lequel N agit trivialement. Notons H_M l'algèbre des endomorphismes de C_M , qu'on identifie au sous-espace de ses vecteurs $U \cap M$ -invariants. Notons W_M le sous-groupe parabolique de W correspondant à $\mathbf{P} \supseteq \mathbf{B}$.

Soit D_M l'ensemble des $w \in W$ tels que $w(\Delta_M) \subseteq \Phi^+$. D'après [5, Proposition 2.4] (voir aussi [6, Proposition 2.3.3]), chaque $d \in D_M$ est l'unique élément de dW_M de longueur minimale et D_M est un système de représentants de W/W_M dans W . On a aussi $UdUwU = UdwU$, c'est-à-dire $\tau_d \tau_w = \tau_{dw}$, pour tous $d \in D_M$ et $w \in W_M$. On en déduit le résultat suivant.

PROPOSITION 4.1. — *L'algèbre H est un H_M -module à droite (respectivement à gauche) libre de base $\{\tau_d\}_{d \in D_M}$ (respectivement de base $\{\tau_{d^{-1}}\}_{d \in D_M}$).*

Notons \bar{U} le sous-groupe unipotent maximal de \mathbf{G} opposé à \mathbf{U} relativement à \mathbf{T} et posons $\bar{U} = \bar{U}(k)$.

LEMME 4.2. — *Pour tout $d \in D_M$, on a les propriétés suivantes :*

- (1) $d(U \cap M)d^{-1} \subseteq U$ et $d(\bar{U} \cap M)d^{-1} \subseteq \bar{U}$.
- (2) $d^{-1}Ud \cap P \subseteq U$.
- (3) $d^{-1}UdN \cap M = U \cap M$.

Démonstration. — Pour tout $\alpha \in \Phi$, soit U_α le sous-groupe radiciel associé à α . Le sous-groupe de \mathbf{G} engendré par les $U_\alpha(k)$ pour $\alpha \in \Phi^+$ est égal à U et, pour tout $\alpha \in \Phi$ et tout $w \in W$, on a $wU_\alpha w^{-1} = U_{w(\alpha)}$. La propriété 1 est alors une conséquence de la caractérisation de D_M en termes de racines.

Ensuite, d'après [6, 2.5.12], tout élément $u \in U$ s'écrit de façon unique sous la forme $u = xy$, avec $x \in U \cap dUd^{-1}$ et $y \in U \cap d\bar{U}d^{-1}$. Si $d^{-1}ud$ appartient à P , alors $d^{-1}yd \in \bar{U} \cap P$, donc $y \in \bar{U}$. On en déduit que $y = 1$ et que $d^{-1}ud = d^{-1}xd \in U$, ce qui prouve 2.

Soient $n \in N$ et $u \in U$ tels qu'on ait $d^{-1}udn \in M$. D'après 2, l'élément $d^{-1}ud$ appartient à l'intersection $d^{-1}Ud \cap P \subseteq U$. On en déduit que $d^{-1}udn$

appartient à $U \cap M$, ce qui prouve que $d^{-1}UdN \cap M \subseteq U \cap M$. L'inclusion réciproque est une conséquence de 1. □

Notons que D_M est aussi un système de représentants des doubles classes de $U \backslash G/P$.

LEMME 4.3. — *L'application $j_M : H_M \rightarrow H$ définie par :*

$$j_M(\mathbf{1}_{(U \cap M)m(U \cap M)}) = \mathbf{1}_{UmU}, \quad m \in M,$$

est un homomorphisme injectif de $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbres, égal à la restriction de i_M à H_M .

Démonstration. — Pour $n \in \mathbf{N}(k) \cap M$, la fonction caractéristique de la double classe :

$$(U \cap M)n(U \cap M) = \coprod_x (U \cap M)nx$$

où x décrit un système de représentants de classes modulo $(U \cap M) \cap n^{-1}(U \cap M)n$ dans $U \cap M$, est envoyée par i_M sur la somme des $\mathbf{1}_{Unx}$. Comme $UnU = UnN(U \cap M)$, comme N est normalisé par n et comme $nx \in Un$ équivaut à $nxn^{-1} \in U \cap M$, la double classe UnU est l'union disjointe des Unx . Ainsi la restriction de i_M à H_M est égale à j_M . Enfin, comme on a l'égalité $UnUn'U = Un(U \cap M)n'U$ pour tout $n, n' \in \mathbf{N}(k) \cap M$, on vérifie que j_M est un homomorphisme de $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbres. □

On identifiera dorénavant H_M à son image dans H .

4.3. Calcul de C^N

On considère l'homomorphisme de représentations de M :

$$(4.2) \quad \xi_P : H \otimes_{H_M} C_M \rightarrow C^N, \quad h \otimes f \mapsto h * i_M(f),$$

où $*$ désigne l'action à gauche de H sur C .

PROPOSITION 4.4. — *L'application ξ_P est un isomorphisme à la fois de représentations de M et de H -modules à gauche.*

Démonstration. — Tout élément de C^N est combinaison linéaire de fonctions de la forme $\mathbf{1}_{UgN}$, où $g \in G$ peut être choisi de la forme $g = dm$, avec $d \in D_M$ et $m \in M$.

Fixons $d \in D_M$ et considérons l'application de M dans $U \backslash G/N$ définie par :

$$m \mapsto UdmN = UdNm.$$

Elle a pour image l'ensemble des doubles classes de $U \backslash G / N$ qui sont contenues dans UdP . D'après le lemme 4.2(1), pour tout $u \in U \cap M$, les éléments m et um ont la même image. Inversement, si $m, m' \in M$ ont la même image par cette application, alors, comme M normalise N , on trouve $Udmm'^{-1}N = UdN$, et donc mm'^{-1} appartient à $d^{-1}UdN \cap M$. D'après le lemme 4.2(3), on en déduit que $(U \cap M)m = (U \cap M)m'$. En d'autres termes, l'application :

$$\mathbf{1}_{U \cap M m} \mapsto \mathbf{1}_{U d m N}$$

est injective et M -équivariante de C_M dans C , et son image est le sous-espace des fonctions de C invariantes par N et supportées dans UdP . On voit maintenant que la réciproque de ξ_P est donnée par :

$$(4.3) \quad \mathbf{1}_{U d m N} \mapsto \tau_d \otimes \mathbf{1}_{(U \cap M)m}.$$

Enfin, on vérifie facilement que ξ_P est un morphisme de représentations de M et de H -modules à gauche. \square

Remarque 4.5. — On a vu au passage (4.3) que $\tau_d(\mathbf{1}_{U m}) = \mathbf{1}_{U d m N}$ pour $d \in D_M$, $m \in M$.

4.4. Diagrammes commutatifs

Puisque U se décompose sous la forme $(U \cap M) \cdot N$, on a :

$$(4.4) \quad V^U = \mathbf{R}_P(V)^{U \cap M}$$

pour toute représentation V de G , qui est une égalité de H_M -modules à droite.

PROPOSITION 4.6. — *Soit \mathfrak{m} un H_M -module à droite de type fini. Il existe un unique homomorphisme de représentations de G :*

$$(4.5) \quad \mathfrak{m} \otimes_{H_M} C \rightarrow \mathbf{I}_P(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M)$$

envoyant $x \otimes \mathbf{1}_{Ug}$ sur $[g, x \otimes \mathbf{1}_{U \cap M}]$ pour tous $x \in \mathfrak{m}$ et $g \in G$, et c'est un isomorphisme.

Démonstration. — Étant donné $x \in \mathfrak{m}$, notons f_x l'unique morphisme de C dans $\mathbf{I}_P(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M)$ envoyant $\mathbf{1}_U$ sur $[1, x \otimes \mathbf{1}_{U \cap M}]$ qui est bien défini puisque cette dernière est invariante par U . On vérifie que l'application $x \mapsto f_x$ est H_M -linéaire. Par adjonction, il lui correspond le morphisme (4.5), noté Ψ . A partir de (4.4), on a :

$$(4.6) \quad \text{Hom}_{H_M}(\mathfrak{m}, V^U) = \text{Hom}_{H_M}(\mathfrak{m}, \mathbf{R}_P(V)^{U \cap M})$$

pour toute représentation V de G . Par une succession d'ajonctions, on en déduit que le membre de gauche de (4.6) est \mathbf{F}_p -isomorphe à :

$$\mathrm{Hom}_H(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} H, V^U) \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C, V)$$

et le membre de droite à :

$$\mathrm{Hom}_M(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M, \mathbf{R}_P(V)) \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathbf{I}_P(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M), V)$$

pour toute représentation V de G , ce qui prouve que les deux membres de (4.5) sont isomorphes en tant que représentations de G . Il suffit donc de prouver que Ψ est surjectif. Or $\mathbf{I}_P(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M)$ est engendrée comme représentation de G par les fonctions $[1, x \otimes \mathbf{1}_{U \cap M}]$, avec $x \in \mathfrak{m}$, qui sont dans l'image de Ψ par construction. \square

Remarque 4.7. — En particulier, lorsque \mathfrak{m} est libre de rang 1, on obtient un isomorphisme de représentations entre C et $\mathbf{I}_P(C_M)$, qui n'est autre que l'isomorphisme naturel provenant de la transitivité de l'induction.

PROPOSITION 4.8. — *Pour toute représentation V de M , on a un isomorphisme de H -modules à droite entre $\mathbf{I}_P(V)^U$ et $V^{U \cap M} \otimes_{H_M} H$.*

Démonstration. — Étant donné $d \in D_M$ et $x \in V^{U \cap M}$, notons $\psi_{d,x}$ la fonction U -invariante de $\mathbf{I}_P(V)$ de support $Pd^{-1}U$ et prenant la valeur x en d^{-1} . L'ensemble des $\psi_{d,x}$ pour $d \in D_M$ et x parcourant une base de $V^{U \cap M}$ est une base de $\mathbf{I}_P(V)^U$ (voir par exemple [24, I.5.6] en utilisant le lemme 4.2(2)). Soient $x \in V^{U \cap M}$, $w \in W_M$ et $d \in D_M$. Alors on a :

$$(4.7) \quad \psi_{1,x} \tau_{d^{-1}} = \psi_{d,x},$$

$$(4.8) \quad \psi_{1,x} \tau_w = \psi_{1,x} \tau_w.$$

Pour la première égalité, on remarque d'abord que $\psi_{1,x} \tau_{d^{-1}}$ est U -invariante de support $Pd^{-1}U$. Pour prouver que sa valeur en d^{-1} est x , il suffit de remarquer que pour $u \in U$, on a $Pd^{-1}u = Pd$ si et seulement si $Ud^{-1}u = Ud^{-1}$, ce qui est donné par le lemme 4.2(2). La seconde s'obtient aisément grâce à la décomposition de la double classe UnU décrite dans la preuve du lemme 4.3.

L'égalité (4.8) assure que l'on a un morphisme de H_M -modules à droite $V^{U \cap M} \rightarrow \mathbf{I}_P(V)^U$ bien défini par $x \mapsto \psi_{1,x}$. Il induit un morphisme H -équivariant :

$$(4.9) \quad V^{U \cap M} \otimes_{H_M} H \rightarrow \mathbf{I}_P(V)^U.$$

L'égalité (4.7) assure que (4.9) est surjective. D'après la proposition 4.1, les espaces en question ont même dimension. Donc (4.9) est bijective. \square

On déduit de la proposition 4.8 le résultat suivant.

PROPOSITION 4.9. — *Pour tout H-module à droite de type fini \mathfrak{m} , on a un isomorphisme de représentations de M entre $\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M$ et $\mathbf{J}_P(\mathfrak{m} \otimes_H C)$.*

Démonstration. — Par une succession d'adjonctions, on a :

$$\mathrm{Hom}_H(\mathfrak{m}, \mathbf{I}_P(V)^U) \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathfrak{m} \otimes_H C, \mathbf{I}_P(V)) \simeq \mathrm{Hom}_M(\mathbf{J}_P(\mathfrak{m} \otimes_H C), V)$$

pour toute représentation V de M, et :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_H(\mathfrak{m}, \mathrm{Hom}_{H_M}(H, V^{U \cap M})) &\simeq \mathrm{Hom}_H(\mathfrak{m}, \mathrm{Hom}_M(H \otimes_{H_M} C_M, V)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_M(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M, V). \end{aligned}$$

On en déduit que les représentations $\mathbf{J}_P(\mathfrak{m} \otimes_H C)$ et $\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M$ sont isomorphes. □

4.5. La représentation de Steinberg

Dans ce paragraphe, on suppose que $\mathbf{P} = \mathbf{B}$. Soit w_0 l'élément de plus grande longueur de W, et notons m sa longueur. Posons :

$$\mathfrak{st} = \tau_{w_0} \varepsilon_1 H = \tau_{w_0} H_1.$$

Pour chaque $s \in \mathcal{S}$, il y a une écriture réduite de w_0 finissant par s . On a donc $\tau_{w_0} \varepsilon_1 \tau_s = -\tau_{w_0} \varepsilon_1$ d'après (2.6). On en déduit que \mathfrak{st} est un H-module de dimension 1, correspondant au caractère signe de H_1 défini par $\tau_s \mapsto -1$ pour tout $s \in \mathcal{S}$.

Notons Σ la représentation irréductible de G lui correspondant, c'est-à-dire dont le H-module des vecteurs U-invariants est isomorphe à \mathfrak{st} .

LEMME 4.10. — *La représentation Σ est isomorphe à $\tau_{w_0} \varepsilon_1 C = \tau_{w_0} C_1$.*

Démonstration. — Le H-module \mathfrak{st} se plonge canoniquement dans H. D'après le fait 2.14, la représentation Σ est l'image du morphisme de C dans C défini par $f \mapsto \tau_{w_0} \varepsilon_1 f$. □

Notons St la représentation de Steinberg de G, définie comme le quotient de $\mathbf{I}_B(1) = C_1$ par la somme des $\mathbf{I}_{P_s}(1)$ pour $s \in \mathcal{S}$, avec $P_s = B \cup BsB$.

PROPOSITION 4.11. — *La représentation de Steinberg St est irréductible et isomorphe à Σ .*

Démonstration. — Avec les notations du paragraphe 2.5, pour tout $s \in \mathcal{S}$, posons :

$$\tau_s^* = \tau_s + \sum_{\chi^s = \chi} \varepsilon_\chi$$

la somme portant sur les caractères $\chi \in \hat{T}$ tels que $\chi^s = \chi$. D'après (2.6), on a $\tau_s \tau_s^* = \tau_s^* \tau_s = 0$. On a donc $\tau_{w_0} \varepsilon_1 \tau_s^* = 0$ pour tout $s \in \mathcal{S}$. Or $\tau_s^* \varepsilon_1$ est la fonction caractéristique de P_s , de sorte que St est isomorphe au quotient de C_1 par la somme des $\tau_s^* C_1$ pour $s \in \mathcal{S}$. Ainsi l'application $f \mapsto \tau_{w_0} f$ de C_1 dans $\tau_{w_0} C_1$ induit un morphisme surjectif :

$$(4.10) \quad \text{St} \rightarrow \tau_{w_0} C_1.$$

Il reste à voir que ce morphisme est injectif.

LEMME 4.12. — *Choisissons une écriture réduite $s_{i_m} \dots s_{i_1}$ de w_0 . Pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, on a :*

$$\varepsilon_1 \in (-1)^j \tau_{s_{i_j} \dots s_{i_1}} \varepsilon_1 + \tau_{s_{i_j}}^* H_1 + \dots + \tau_{s_{i_1}}^* H_1.$$

Démonstration. — Pour $j = 1$, on a en effet $\varepsilon_1 (\tau_{s_{i_1}}^* - \tau_{s_{i_1}}) = \varepsilon_1$. Supposons le lemme vrai au rang j , avec $1 \leq j \leq m - 1$, et écrivons :

$$\begin{aligned} (-1)^j \tau_{s_{i_j} \dots s_{i_1}} \varepsilon_1 &= (-1)^j (\tau_{s_{i_{j+1}}}^* - \tau_{s_{i_{j+1}}}) \tau_{s_{i_j} \dots s_{i_1}} \varepsilon_1 \\ &\in (-1)^{j+1} \tau_{s_{i_{j+1}} \dots s_{i_1}} \varepsilon_1 + \tau_{s_{i_{j+1}}}^* H_1. \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit par récurrence. □

Le lemme au rang $j = m$ assure que pour $f \in C_1$, l'égalité $\tau_{w_0} f = 0$ implique que f appartient à $\tau_{s_{i_m}}^* C_1 + \dots + \tau_{s_{i_1}}^* C_1$. Autrement dit, l'application (4.10) est injective. □

Ceci montre que la définition de la représentation de Steinberg utilisée ici coïncide avec [5, Définition 6.13].

4.6. Condition nécessaire de platitude pour le H-module C

PROPOSITION 4.13. — *Si C est un H-module plat, alors C_M est un H_M -module plat.*

Démonstration. — Soit \mathfrak{m} un idéal à droite de H_M . Notons K le noyau de l'application naturelle :

$$(4.11) \quad \mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M \rightarrow C_M.$$

Le foncteur \mathbf{I}_P est exact, si bien que le noyau de :

$$\mathbf{I}_P(\mathfrak{m} \otimes_{H_M} C_M) \rightarrow \mathbf{I}_P(C_M)$$

est isomorphe à $\mathbf{I}_P(K)$. Les isomorphismes fournis par la proposition 4.6 assurent alors que le noyau de l'application naturelle :

$$(4.12) \quad \mathfrak{m} \otimes_{H_M} C \rightarrow C$$

est lui aussi isomorphe à $\mathbf{I}_P(K)$. La proposition 4.1 dit que le H_M -module à gauche H est libre, de sorte que $\mathfrak{m} \otimes_{H_M} H$ est isomorphe à l'idéal à droite de H engendré par \mathfrak{m} . Par conséquent, si C est un H -module plat, (4.12) est injective, $\mathbf{I}_P(K)$ est la représentation nulle, et le noyau K de (4.11) est trivial. Nous avons prouvé que si C est un H -module plat, alors l'application (4.11) est injective pour tout idéal à droite \mathfrak{m} de H_M , c'est-à-dire que C_M est un H_M -module plat. \square

COROLLAIRE 4.14. — *Notons $C^{(n)}$ et $H^{(n)}$ les quantités C et H associées à $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ pour $n \geq 1$. S'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que le $H^{(n_0)}$ -module $C^{(n_0)}$ ne soit pas plat, alors, pour tout $n \geq n_0$, le $H^{(n)}$ -module $C^{(n)}$ n'est pas plat.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition 4.13 avec $M = \mathrm{GL}_{n_0}(k) \times \mathrm{GL}_{n-n_0}(k)$, et de remarquer que $C_M = C^{(n_0)} \otimes C^{(n-n_0)}$ n'est pas plat sur $H_M = H^{(n_0)} \otimes H^{(n-n_0)}$ puisque $C^{(n_0)}$ n'est pas plat sur $H^{(n_0)}$. \square

On déduit de ce corollaire et de la proposition 3.2 le résultat suivant.

COROLLAIRE 4.15. — *On suppose que $q \neq p$. Pour tout entier $n \geq 2$, le $H^{(n)}$ -module $C^{(n)}$ n'est pas plat.*

Rappelons que l'extension des scalaires de H_M à H préserve la platitude [2, I.2.7] et la projectivité [3, II.5.1]. À ceci s'ajoute le résultat suivant, conséquence de la proposition 4.1.

LEMME 4.16. — *Tout H_M -module à gauche \mathfrak{m} est un facteur direct de la restriction de $H \otimes_{H_M} \mathfrak{m}$ à H_M .*

Démonstration. — D'après la proposition 4.1, l'espace vectoriel $H \otimes_{H_M} \mathfrak{m}$ s'identifie à la somme directe des $\tau_d \mathfrak{m}$ pour $d \in D_M$. Soit \mathfrak{n} la somme directe des $\tau_d \mathfrak{m}$ pour $d \in D_M - \{1\}$. C'est un sous-espace vectoriel de $H \otimes_{H_M} \mathfrak{m}$. Pour prouver le lemme, il suffit de s'assurer que ce sous-espace est stable sous l'action de H_M . Rappelons que l'algèbre H_M est engendrée par les τ_s et les τ_t pour $s \in \mathcal{S} \cap W_M$ et $t \in T$.

Puisque tout élément $t \in T$ est de longueur nulle dans $\mathbf{N}(k)$, les relations (2.1) assurent que, pour tout $d \in D_M$, on a l'égalité :

$$\tau_t \tau_d = \tau_d \tau_{d^{-1}td},$$

et l'on remarque que $d^{-1}td \in T$. Ainsi, un sous-espace de la forme $\tau_d \mathfrak{m}$ avec $d \in D_M$ est stable sous l'action de τ_t pour $t \in T$. On en déduit que \mathfrak{n} est stable sous l'action de τ_t pour tout $t \in T$.

La preuve du lemme suivant donnée par [18, Proposition 2.2] dans le cas particulier $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n(k)$ se généralise immédiatement.

LEMME 4.17. — Soient $s \in \mathcal{S}$ et $d \in D_M$.

- (1) Si $\ell(sd) < \ell(d)$, alors $sd \in D_M$.
- (2) Si $\ell(sd) > \ell(d)$, alors ou bien $sd \in D_M$ ou bien $sd \in dW_M$.

Soit $s \in \mathcal{S} \cap W_M$ et soit $d \in D$ tel que $d \neq 1$. Si $\ell(sd) < \ell(d)$, alors $\tau_d = \tau_s \tau_{sd}$ et $sd \in D_M$ d'après le lemme 4.17. D'après (2.6), on a :

$$\tau_s^2 = -\tau_s \cdot \sum_{\chi^s = \chi} \varepsilon_\chi.$$

Ainsi l'élément :

$$a = - \sum_{\chi^s = \chi} \varepsilon_\chi$$

vérifie $\tau_s \tau_d = \tau_s a \tau_{sd}$. On en déduit que $\tau_s \tau_d \mathfrak{m} = \tau_s a \tau_{sd} \mathfrak{m}$, qui est inclus dans $\tau_s \tau_{sd} \mathfrak{m} = \tau_d \mathfrak{m}$ d'après l'argument précédent.

Si $\ell(sd) > \ell(d)$, alors $\tau_s \tau_d = \tau_{sd}$. Si $sd \in D_M$, alors $\tau_s \tau_d \mathfrak{m} = \tau_{sd} \mathfrak{m}$ est inclus dans \mathfrak{n} . Sinon, $sd \in dW_M$ d'après le lemme 4.17. Il y a donc $w \in W_M$ tel que $\tau_{sd} = \tau_d \tau_w$, de sorte que l'espace $\tau_s \tau_d \mathfrak{m} = \tau_d \tau_w \mathfrak{m}$ est inclus dans $\tau_d \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n}$. Ainsi, \mathfrak{n} est bien un H_M -module. □

COROLLAIRE 4.18. — Un H_M -module à gauche de type fini \mathfrak{m} est projectif si et seulement si le H -module $H \otimes_{H_M} \mathfrak{m}$ est projectif.

Démonstration. — On suppose que le H -module $H \otimes_{H_M} \mathfrak{m}$ est projectif. C'est un facteur direct d'un H -module libre. Par le lemme 4.16, le H_M -module à gauche \mathfrak{m} est donc un facteur direct d'une somme de copies de H . Comme H est un H_M -module à gauche libre, on en déduit que \mathfrak{m} est un H_M -module projectif. □

Grâce au lemme 2.7, on en déduit le résultat suivant.

COROLLAIRE 4.19. — Soit \mathfrak{m} un H_M -module à gauche de type fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) \mathfrak{m} est plat.
- (2) \mathfrak{m} est projectif.
- (3) \mathfrak{m} est injectif.
- (4) $H \otimes_{H_M} \mathfrak{m}$ est plat.
- (5) $H \otimes_{H_M} \mathfrak{m}$ est projectif.
- (6) $H \otimes_{H_M} \mathfrak{m}$ est injectif.

Grâce à la proposition 4.4, on en déduit la proposition suivante.

PROPOSITION 4.20. — *Le \mathbf{H} -module $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ est plat si et seulement si le $\mathbf{H}_{\mathbf{M}}$ -module $\mathbf{C}_{\mathbf{M}}$ est plat. Dans ce cas ils sont tous deux projectifs et le \mathbf{H} -module $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ est un facteur direct de \mathbf{C} .*

Démonstration. — Rappelons que le morphisme $\mathbf{i}_{\mathbf{M}}$ défini en (4.1) est injectif et que, d'après la proposition 4.4, le morphisme (4.2) est un isomorphisme de \mathbf{H} -modules entre $\mathbf{H} \otimes_{\mathbf{H}_{\mathbf{M}}} \mathbf{C}_{\mathbf{M}}$ et $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. Le résultat est alors une conséquence des corollaires 4.18 et 2.8. \square

5. Le cas de $\mathrm{GL}_n(k)$, $n \geq 3$

5.1. Représentations de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_{p^r})$

On suppose dans ce paragraphe que $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ comme dans l'exemple 2.1. Rappelons quelques résultats de [13] et [10, 11]. Notons \mathbf{X} le groupe des caractères algébriques de \mathbf{T} , que l'on identifie à \mathbf{Z}^n , et \mathbf{X}_+ l'ensemble des n -uplets $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{X}$ tels que $a_1 \geq \dots \geq a_n$. Pour $\lambda \in \mathbf{X}_+$, on note $\mathscr{W}(\lambda)$ l'espace des fonctions rationnelles :

$$\{f : \mathbf{G} \rightarrow \overline{\mathbf{F}}_p \mid f(gtu) = \lambda(t)^{-1} f(g), g \in \mathbf{G}, t \in \mathbf{T}, u \in \overline{\mathbf{U}}\}$$

qu'on munit de l'action de \mathbf{G} par translations à gauche. C'est une représentation algébrique de \mathbf{G} . Soit $\mathscr{L}(\lambda)$ son socle (c'est-à-dire son plus grand sous-module semi-simple). Pour $r \geq 0$, on pose :

$$\mathbf{X}_r = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{X}_+ \mid 0 \leq a_i - a_{i+1} \leq p^r - 1, i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Pour $r \geq 1$, soit \mathbf{F}_{p^r} le sous-corps de $\overline{\mathbf{F}}_p$ de cardinal p^r . Pour $\lambda \in \mathbf{X}_r$ et $i \in \{0, \dots, r-1\}$, on note $\mathscr{L}_r(\lambda)$ la restriction de $\mathscr{L}(\lambda)$ à $\mathbf{G}(\mathbf{F}_{p^r})$ et $\mathscr{L}_r(\lambda)^{(i)}$ la composée de $\mathscr{L}_r(\lambda)$ avec l'automorphisme de $\mathbf{G}(\mathbf{F}_{p^r})$ induit par $x \mapsto x^{p^i}$. On a les résultats suivants.

PROPOSITION 5.1. — *On fixe un entier $r \geq 1$.*

- (1) *Pour tout $\lambda \in \mathbf{X}_r$, la représentation $\mathscr{L}_r(\lambda)$ de $\mathbf{G}(\mathbf{F}_{p^r})$ est irréductible.*
- (2) *L'application $\lambda \mapsto \mathscr{L}_r(\lambda)$ induit une bijection entre $\mathbf{X}_r / (p^r - 1)\mathbf{X}_0$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathbf{G}(\mathbf{F}_{p^r})$.*
- (3) *L'espace des vecteurs $\mathbf{U}(\mathbf{F}_{p^r})$ -invariants de $\mathscr{L}_r(\lambda)$ est de dimension 1, et la représentation de $\mathbf{T}(\mathbf{F}_{p^r})$ sur cet espace est égale à λ .*
- (4) *Si $\lambda = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{X}_r$, alors $\lambda^* = (-a_n, \dots, -a_1) \in \mathbf{X}_r$ et $\mathscr{L}_r(\lambda^*)$ est isomorphe à la représentation contragrédiente de $\mathscr{L}_r(\lambda)$.*

(5) Soit $\lambda \in X_r$, qu'on écrit sous la forme :

$$(5.1) \quad \lambda = \lambda_0 + \lambda_1 p + \dots + \lambda_{r-1} p^{r-1}, \quad \lambda_i \in X_1, \quad i \in \{0, \dots, r-1\}.$$

Alors on a un isomorphisme de représentations de $\mathbf{G}(\mathbf{F}_{p^r})$:

$$(5.2) \quad \mathcal{L}_r(\lambda) \simeq \mathcal{L}_r(\lambda_0) \otimes \mathcal{L}_r(\lambda_1)^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_r(\lambda_{r-1})^{(r-1)}.$$

Démonstration. — Pour les deux premières assertions, voir [11, Appendix 1.3] et pour 3, voir [12, Lemma 2.5]. Pour les deux dernières, voir [13, II.3]. □

En comparant les propositions 5.1 et 2.17, on obtient le résultat suivant.

COROLLAIRE 5.2. — Soit $\lambda \in X_r$ et soit χ un caractère de $\mathbf{T}(\mathbf{F}_{p^r})$. La représentation $\mathcal{L}_r(\lambda)$ est un quotient irréductible de C_χ si et seulement si la restriction de λ à $\mathbf{T}(\mathbf{F}_{p^r})$ est égale à χ .

Exemple 5.3. — On suppose que n est égal à 2. Soit $\lambda = (a, b) \in X_r$, et écrivons $a - b$ sous la forme $e_0 + e_1 p + \dots + e_{r-1} p^{r-1}$ avec $e_i \in \{0, \dots, p-1\}$. Alors $\mathcal{L}_r(\lambda)$ est la représentation irréductible :

$$\text{Sym}^{e_0}(\overline{\mathbf{F}}_p^2) \otimes \dots \otimes \text{Sym}^{e_{r-1}}(\overline{\mathbf{F}}_p^2)^{(r-1)} \otimes \det^b$$

qui est de dimension $(e_0 + 1) \dots (e_{r-1} + 1)$.

5.2. Représentations de $\text{GL}_3(\mathbf{F}_{p^r})$

On suppose maintenant que $n = 3$. On rappelle quelques résultats sur la semi-simplification de C_χ pour $\mathbf{G} = \text{GL}_3(\mathbf{F}_p)$.

PROPOSITION 5.4. — Soit $(a, b, c) \in X_1$. Si :

$$(5.3) \quad 0 \leq a - b, b - c < p - 1 \quad \text{et} \quad p - 1 \leq a - c,$$

alors la représentation $\mathscr{W}(a, b, c)$ est de longueur 2. Sinon, $\mathscr{W}(a, b, c)$ est irréductible.

Démonstration. — Le résultat est dû à Jantzen : voir [10, Proposition 4.9]. □

On commence par étudier C_χ lorsque $\chi = 1$. Pour tout $\lambda \in X_1$, on note $\mathscr{W}_1(\lambda)$ la restriction de $\mathscr{W}(\lambda)$ à $\text{GL}_3(\mathbf{F}_p)$, qui est de longueur ≤ 2 d'après la proposition 5.4.

PROPOSITION 5.5. — *Dans le groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$, la semi-simplification de C_1 est égale à :*

$$(5.4) \quad \mathscr{W}_1(0, 0, 0) + 2 \cdot \mathscr{W}_1(p-1, 0, 0) + 2 \cdot \mathscr{W}_1(p-1, p-1, 0) + \mathscr{W}_1(2p-2, p-1, 0).$$

Chacune des représentations $\mathscr{W}_1(\lambda)$ apparaissant ci-dessus est irréductible, et on a :

$$(5.5) \quad \dim \mathscr{W}_1(0, 0, 0) = 1,$$

$$(5.6) \quad \dim \mathscr{W}_1(p-1, 0, 0) = p(p+1)/2,$$

$$(5.7) \quad \dim \mathscr{W}_1(p-1, p-1, 0) = p(p+1)/2,$$

$$(5.8) \quad \dim \mathscr{W}_1(2p-2, p-1, 0) = p^3.$$

Démonstration. — Le théorème [10, 5.1] donne la décomposition de la semi-simplification de C_1 en une somme de représentations $\mathscr{W}_1(\lambda)$ et la proposition 5.4 montre que ces représentations sont irréductibles. Plus précisément, ce théorème décrit la décomposition de la semi-simplification de la réduction modulo p de chacun des facteurs irréductibles de l'induite du \mathbf{Z}_p -caractère trivial de $\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)$ à $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$:

- la réduction modulo p du \mathbf{Z}_p -caractère trivial de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$ est isomorphe à la représentation irréductible $\mathscr{W}_1(0, 0, 0)$, qui est de dimension 1 ;
- la réduction modulo p de la \mathbf{Z}_p -représentation de Steinberg est isomorphe à la représentation irréductible $\mathscr{W}_1(2p-2, p-1, 0)$, qui est de dimension p^3 ;
- la \mathbf{Z}_p -représentation irréductible de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$ apparaissant avec multiplicité 2 dans l'induite à $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$ du \mathbf{Z}_p -caractère trivial de $\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)$ est de dimension $p^2 + p$. Sa réduction modulo p est isomorphe à la somme des deux représentations irréductibles $\mathscr{W}_1(p-1, 0, 0)$ et $\mathscr{W}_1(p-1, p-1, 0)$. Il suffit donc de montrer que ces deux-là ont la même dimension, ce qui découle du fait qu'elles sont duales d'après la proposition 5.1(4).

On en déduit le résultat annoncé. □

On étudie maintenant C_χ avec χ régulier, c'est-à-dire dont l'orbite sous l'action de W_0 est de cardinal 6.

PROPOSITION 5.6. — *Soit χ un caractère régulier de $T(\mathbf{F}_p)$. Alors C_χ est de longueur strictement supérieure à 6 dans la catégorie $\mathscr{R}(\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p))$.*

Démonstration. — On choisit $(a, b, c) \in X_1$ tel que χ soit le caractère :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^a y^b z^c.$$

Puisque χ est régulier, on a $p > 2$ et l'on peut supposer que $1 \leq a - b, b - c < p - 1$. D'après la formule [10, (5.2)], la semi-simplification de C_χ est :

$$\begin{aligned} & \mathscr{W}_1(a, b, c) + \mathscr{W}_1(p - 1 + b, p - 1 + c, a) + \mathscr{W}_1(p - 1 + c, a, b) \\ & + \mathscr{W}_1(2p - 2 + c, p - 1 + b, a) + \mathscr{W}_1(p - 1 + a, p - 1 + c, b) \\ & + \mathscr{W}_1(p - 1 + b, a, c). \end{aligned}$$

On vérifie que l'un des deux triplets (a, b, c) et $(p - 1 + a, p - 1 + c, b)$ satisfait à la condition (5.3) de la proposition 5.4, de sorte que l'une ou l'autre des représentations :

$$\mathscr{W}_1(a, b, c), \quad \mathscr{W}_1(p - 1 + a, p - 1 + c, b)$$

est de longueur 2, ce qui prouve l'assertion. □

Remarque 5.7. — On peut montrer de la même façon que, si l'orbite de χ sous l'action de W est de cardinal 3, alors C_χ est de longueur > 6 . Compte tenu de la proposition 5.5, on en déduit que C_χ est de longueur 6 si et seulement χ est invariant par W .

On en déduit le résultat suivant. Soit $r \geq 1$ un entier.

PROPOSITION 5.8. — *Soit $(a, b, c) \in X_r$. La représentation irréductible $\mathscr{L}_r(a, b, c)$ est isomorphe à un quotient de C_1 si et seulement si (a, b, c) est congru à l'un des poids :*

$$(5.9) \quad (0, 0, 0), (p^r - 1, 0, 0), (p^r - 1, p^r - 1, 0), (2p^r - 2, p^r - 1, 0),$$

modulo $(p^r - 1)X_0$. En outre, on a :

$$(5.10) \quad \dim \mathscr{L}_r(0, 0, 0) = 1,$$

$$(5.11) \quad \dim \mathscr{L}_r(p^r - 1, 0, 0) = (p(p + 1)/2)^r,$$

$$(5.12) \quad \dim \mathscr{L}_r(p^r - 1, p^r - 1, 0) = (p(p + 1)/2)^r,$$

$$(5.13) \quad \dim \mathscr{L}_r(2p^r - 2, p^r - 1, 0) = p^{3r}.$$

Démonstration. — La première partie de la proposition est une conséquence du corollaire 5.2. Ensuite, puisque $p^r - 1 = (p - 1)(1 + p + \dots + p^{r-1})$, chaque poids λ dans (5.9) se décompose sous la forme (5.1) avec des $\lambda_i \in X_1$ indépendants de i et respectivement égaux, suivant λ , à :

$$(5.14) \quad (0, 0, 0), (p - 1, 0, 0), (p - 1, p - 1, 0), (2p - 2, p - 1, 0).$$

Compte tenu de la formule (5.2) et de la proposition 5.5, on trouve les formules annoncées. \square

5.3. L'algèbre de Hecke H_1

D'après [7, 4], la $\overline{\mathbf{F}}_p$ -algèbre H_1 est engendrée par $S_1 = \tau_{s_1}\varepsilon_1$ et $S_2 = \tau_{s_2}\varepsilon_1$ avec les relations :

$$S_1S_2S_1 = S_2S_1S_2, \quad S_1^2 + S_1 = S_2^2 + S_2 = 0.$$

Remarquons que S_1 et S_2 sont les fonctions caractéristiques respectives de $B_{s_1}B$ et $B_{s_2}B$. Dans la suite, on pose $S_1^* = S_1 + \varepsilon_1$ et $S_2^* = S_2 + \varepsilon_1$. On pose :

$$X = -S_1S_2S_1, \quad Y = -S_1S_2^*S_1, \quad Z = -S_1^*S_2S_1^*, \quad \Omega = S_1^*S_2^*S_1^*.$$

On vérifie que ce sont des idempotents deux à deux orthogonaux de H_1 qui décomposent l'unité. Notons que X et Ω sont centraux et qu'on a les relations :

$$YS_2 = S_2^*Z, \quad S_2Y = ZS_2^*,$$

qui permettent en particulier de s'assurer que la somme $Y + Z$ est un idempotent central. Ainsi, les idéaux à droite XH_1, YH_1, ZH_1 et ΩH_1 sont des H_1 -modules projectifs indécomposables.

On sait (voir [5, Theorem 1.25]) que l'application $\mathfrak{m} \mapsto \text{soc}(\mathfrak{m})$ qui à un H_1 -module à droite associe son socle induit une bijection entre les classes d'isomorphisme de H_1 -modules projectifs indécomposables et les classes d'isomorphisme de H_1 -modules simples. On va expliciter cette bijection.

DÉFINITION 5.9. — Pour $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0, -1\} \subseteq \overline{\mathbf{F}}_p$, on désigne par $\chi_{\alpha_1, \alpha_2}$ le caractère de H_1 défini par $\chi_{\alpha_1, \alpha_2}(S_1) = \alpha_1$ et $\chi_{\alpha_1, \alpha_2}(S_2) = \alpha_2$.

L'application $(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \chi_{\alpha_1, \alpha_2}$ définit une bijection de $\{0, -1\} \times \{0, -1\}$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de H_1 -modules simples.

PROPOSITION 5.10. — On a :

$$\begin{aligned} \text{soc}(XH_1) &= \chi_{-1, -1}, & \text{soc}(YH_1) &= \chi_{0, -1}, \\ \text{soc}(ZH_1) &= \chi_{-1, 0}, & \text{soc}(\Omega H_1) &= \chi_{0, 0}. \end{aligned}$$

Démonstration. — On vérifie d'abord que les idéaux bilatères XH_1 et ΩH_1 sont de dimension 1 et correspondent respectivement aux caractères $\chi_{-1, -1}$ et $\chi_{0, 0}$. Ensuite, en utilisant la relation $S_1S_2^* = -YS_2^*$, on vérifie

que $YH_1 = S_1S_2^*H_1$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel de dimension 2 de base $\{YS_2, S_1S_2^*\}$. On a la suite exacte non scindée de H_1 -modules :

$$(5.15) \quad 0 \rightarrow YS_2H_1 = S_2^*ZH_1 \rightarrow YH_1 \xrightarrow{S_2} S_2YH_1 \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire que le H_1 -module à droite YH_1 est l'enveloppe projective de $\chi_{0,-1}$, et c'est une extension non scindée de $\chi_{-1,0}$ par $\chi_{0,-1}$. Le H_1 -module à droite YH_1 est l'enveloppe projective de $\chi_{0,-1}$. De même, on a la suite exacte de H_1 -modules :

$$(5.16) \quad 0 \rightarrow ZS_2^*H_1 = S_2YH_1 \rightarrow ZH_1 \xrightarrow{S_2^*} S_2^*ZH_1 \rightarrow 0.$$

C'est une extension non scindée de $\chi_{0,-1}$ par $\chi_{-1,0}$. Le H_1 -module ZH_1 à droite est l'enveloppe projective de $\chi_{-1,0}$. □

Ainsi les idéaux à droite de H_1 sont, à isomorphisme près, les H' -modules projectifs indécomposables XH_1, YH_1, ZH_1 et ΩH_1 , auxquels s'ajoutent les idéaux non projectifs S_2YH_1 et YS_2H_1 .

Remarque 5.11. — Notons que $S_2YC' = S_1^*S_2S_1C'$ et $YS_2C' = S_2^*S_1S_2C'$. Ainsi la classification de Carter et Lusztig ([7, Theorem 7.4]) assure que les représentations irréductibles de G possédant un vecteur B -invariant sont, à isomorphisme près :

$$XC', S_2YC', YS_2C', \Omega C'$$

et leurs espaces U -invariants (donc B -invariants) respectifs portent les caractères $\chi_{-1,-1}, \chi_{-1,0}, \chi_{0,-1}, \chi_{0,0}$ de H_1 .

5.4. Platitude de C_1

Rappelons que H_1 est une algèbre de Frobenius. On a le résultat suivant.

PROPOSITION 5.12. — *Le H_1 -module C_1 est plat si et seulement si $q = p$.*

Démonstration. — On note q le cardinal de k . Rappelons que C_1 est de dimension :

$$(G : B) = (1 + q)(1 + q + q^2).$$

En tant que H_1 -module, c'est la somme directe de $XC_1, (Y + Z)C_1$ et ΩC_1 . D'après le paragraphe 4.5, XC_1 est la représentation de Steinberg. Elle est irréductible et de dimension q^3 . On déduit du paragraphe précédent que le H_1 -module XC_1 est isomorphe à une somme directe de q^3 copies de H_1X . C'est un H_1 -module projectif.

L'élément Ω s'identifie dans C_1 à la fonction caractéristique de G . On en déduit que ΩC_1 est un espace vectoriel de dimension 1 sur lequel G agit trivialement (voir le paragraphe 4.5). En tant que H_1 -module, ΩC_1 est isomorphe à $H_1\Omega$ et c'est un H_1 -module projectif.

La sous-représentation $S_1^*C_1 \subseteq C_1$ est engendrée par la fonction caractéristique du sous-groupe parabolique $P_1 = B \cup Bs_1B$ de G . Elle est donc isomorphe à l'induite $\mathbb{I}_{P_1}(1)$ qui est de dimension $(G : P_1) = 1 + q + q^2$. Or $S_1^*C_1$ est la somme directe de ZC_1 et ΩC_1 , donc ZC_1 est de dimension $q + q^2$. Ainsi, la dimension de YC_1 est aussi $q + q^2$.

Le noyau de la restriction de S_2 à YC_1 contient $YS_2C_1 = S_2^*ZC_1$, et le noyau de la restriction de S_2^* à ZC_1 contient $S_2YC_1 = ZS_2^*C_1$. On a les complexes :

$$(5.17) \quad 0 \rightarrow YS_2C_1 \rightarrow YC_1 \xrightarrow{S_2} S_2YC_1 \rightarrow 0$$

et :

$$(5.18) \quad 0 \rightarrow ZS_2^*C_1 \rightarrow ZC_1 \xrightarrow{S_2^*} S_2^*ZC_1 \rightarrow 0$$

de représentations de G , dont nous discutons l'exactitude. D'après la remarque 5.11, les représentations YS_2C_1 et S_2YC_1 sont irréductibles. Comme elles ne sont isomorphes ni au caractère trivial, ni à la représentation de Steinberg, elles sont donc (d'après la proposition 5.8) de dimension :

$$(p(p + 1)/2)^r,$$

où l'on a posé $q = p^r$. Par conséquent, chacun des complexes est exact si et seulement si $q = p$.

Le H_1 -module à gauche $(Y + Z)C_1$ est plat si et seulement si, pour tout idéal à droite $A \subseteq H_1$, l'application :

$$A \otimes_{H_1} (Y + Z)C_1 \rightarrow C_1$$

est injective. Il suffit de tester cette propriété sur les idéaux indécomposables de H_1 , et, puisque X, Y, Z et Ω sont des idempotents orthogonaux, seuls les cas des idéaux S_2YH_1 et $S_2^*ZH_1$ nécessitent une vérification. Traitons le cas de S_2YH_1 en utilisant les complexes (5.15) et (5.17). Le cas de $S_2^*ZH_1$ s'obtiendrait de façon analogue en utilisant les complexes (5.16) et (5.18).

D'après [2, I.2.11], un élément $S_2Y \otimes c \in S_2Y \otimes_{H_1} (Y + Z)C_1$ est nul si et seulement s'il existe une famille finie $(h_i)_i$ de H_1 et une famille finie $(c_i)_i$ de $(Y + Z)C_1$ telles que $c = \sum_i h_i c_i$ et $S_2Yh_i = 0$ pour tout i , c'est-à-dire, d'après l'exactitude de (5.15), si et seulement si $c \in YS_2C_1 + ZC_1$. Si $q = p$, le complexe (5.17) est exact, donc cette condition est équivalente

à $S_2 Yc = 0$ et l'homomorphisme $S_2 Y \otimes_{H_1} (Y + Z)C_1 \rightarrow C_1$ est injectif. Si $q \neq p$, tensoriser (5.15) par le H_1 -module $(Y + Z)C_1$ donne le complexe (5.17) qui n'est pas exact. Donc $(Y + Z)C_1$ n'est pas plat.

La proposition 5.12 est démontrée. □

5.5. Platitude de C

On a le résultat suivant.

PROPOSITION 5.13. — *Le H-module C est plat si et seulement si $q = p = 2$.*

Démonstration. — Le fait que C n'est pas plat sur H lorsque q est différent de p est donné par le corollaire 4.15. On suppose maintenant que $q = p$.

Supposons que $p = 2$. Dans ce cas, le groupe \hat{T} est réduit au caractère trivial, et C est égal à C_1 . D'après la proposition 2.16 et la proposition 5.12, le H-module C est plat.

Supposons que $p > 2$, et soit $\chi \in \hat{T}$ un caractère de T. Le H-module correspondant à C_χ est $\varepsilon_\chi H$, qui est de dimension 6 et de base $\{\varepsilon_\chi \tau_w \mid w \in W_0\}$ en tant que $\overline{\mathbf{F}}_p$ -espace vectoriel. Puisque tous les H-modules simples sont de dimension 1 (voir par exemple [5, Theorem 6.10 (iii)]), ce module est de longueur 6 dans \mathcal{M} . Si C était un H-module plat, le foncteur **F** des U-invariants fournirait, d'après la proposition 2.15, une équivalence entre \mathcal{E} et \mathcal{M} . Pour montrer que C n'est pas un module plat, il suffit donc de trouver un caractère χ tel que la représentation C_χ de G soit de longueur strictement supérieure à 6 dans \mathcal{E} . Remarquons que, puisque toute représentation non nulle de G admet un vecteur U-invariant non trivial, les éléments irréductibles des catégories \mathcal{E} et \mathcal{R} coïncident. Il suffit donc de trouver χ tel que C_χ est de longueur strictement supérieure à 6 dans \mathcal{R} , ce qui a été fait à la proposition 5.6. □

Associé au corollaire 4.14, ce résultat fournit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5.14. — *On suppose que $q \neq 2$. Alors, pour tout $n \geq 3$, le $H^{(n)}$ -module $C^{(n)}$ n'est pas plat.*

On peut traiter le cas de C_1 de façon analogue. On note $C_1^{(n)}$ et $H_1^{(n)}$ les quantités C_1 et H_1 associées à $G = GL_n(k)$ pour $n \geq 1$. On déduit de la proposition 5.12 le résultat suivant.

COROLLAIRE 5.15. — *On suppose que $q \neq p$. Alors, pour tout $n \geq 3$, le $H_1^{(n)}$ -module $C_1^{(n)}$ n'est pas plat.*

Concluons en rassemblant les résultats des propositions 2.15, 2.19, 3.1, 3.2, 5.12, 5.13 et des deux corollaires précédents.

PROPOSITION 5.16. — *On a les résultats suivants.*

- (1) *Pour $n = 2$, le H_1 -module C_1 est plat.*
- (2) *Pour $n = 2$, le H -module C est plat si et seulement si $q = p$.*
- (3) *Pour $n = 3$, le H_1 -module C_1 est plat si et seulement si $q = p$.*
- (4) *Pour $n = 3$, le H -module C est plat si et seulement si $q = 2$.*
- (5) *Pour $n \geq 4$ et $q \neq p$, le H_1 -module C_1 n'est pas plat.*
- (6) *Pour $n \geq 4$ et $q \neq 2$, le H -module C n'est pas plat.*

On a enfin le théorème suivant.

THÉORÈME 5.17. — *Soit $n \geq 2$.*

- (1) *Si $n = 2$ et $q = p$, ou si $n = 3$ et $q = 2$, le foncteur \mathbf{F} des U -invariants est une équivalence de \mathcal{E} dans \mathcal{M} .*
- (2) *Si $n \geq 3$ et $q \neq 2$, ce foncteur n'est pas une équivalence de \mathcal{E} dans \mathcal{M} .*
- (3) *Si $n = 2$, ou si $n = 3$ et $q = p$, le foncteur \mathbf{F} est une équivalence de \mathcal{E}_1 dans \mathcal{M}_1 .*
- (4) *Si $n \geq 3$ et $q \neq p$, ce foncteur n'est pas une équivalence de \mathcal{E}_1 dans \mathcal{M}_1 .*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. J. BENSON, *Representations and Cohomology I, Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1991.
- [2] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative, Chapitres 1 et 2*, Hermann, Paris, 1961.
- [3] ———, *Algèbre, Chapitres 1 à 3*, Hermann, Paris, 1970.
- [4] M. CABANES, « A criterion of complete reducibility and some applications », in *Représentations linéaires des groupes finis* (M. Cabanes, éd.), Astérisque, vol. 181-182, Soc. Math. France, Paris, 1990, p. 93-112.
- [5] M. CABANES & M. ENGUEHARD, *Representation theory of finite reductive groups*, Cambridge University Press, 2004.
- [6] R. W. CARTER, *Finite Groups of Lie Type*, Wiley Interscience, 1985.
- [7] R. W. CARTER & G. LUSZTIG, « Modular representations of finite groups of Lie type », *Proc. London Math. Soc.* **32** (1976), p. 347-384.
- [8] F. DIAMOND, « A correspondence between representations of local Galois groups and Lie-type groups », in *L-functions and Galois representations / edited by David Burns, Kevin Buzzard and Jan Nekovář*, Cambridge University Press, 2007.

- [9] G. HENNIART & M.-F. VIGNÉRAS, « A Satake isomorphism for representations modulo p of reductive groups over local fields », 2011, prépublication, <http://www.math.jussieu.fr/~vigneras>.
- [10] F. HERZIG, « The weight in a Serre type conjecture for tame n -dimensional Galois representations », Thèse, Harvard University, 2006.
- [11] ———, « The weight in a Serre type conjecture for tame n -dimensional Galois representations », *Duke Math. J.* **149** (2009), p. 37-116.
- [12] ———, « A Satake isomorphism in characteristic p », *Compositio Math.* **147** (2011), n° 1, p. 263-283.
- [13] J. C. JANTZEN, *Representations of algebraic groups*, second éd., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 107, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [14] A. V. JEYAKUMAR, « Principal indecomposable representations for the group $SL(2, q)$ », *J. Algebra* **30** (1974), p. 444-458.
- [15] T. Y. LAM, *Lectures on modules and rings*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 189, Springer-Verlag, 1999.
- [16] R. OLLIVIER, « Platitude du pro- p -module universel de $GL_2(F)$ en caractéristique p », *Compositio Math.* **143** (2007), p. 703-720.
- [17] ———, « Le foncteur des invariants sous l'action du pro- p -Iwahori de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ », *J. für die reine und angewandte Mathematik* **635** (2009), p. 149-185.
- [18] ———, « Parabolic induction and Hecke modules in characteristic p for p -adic GL_n », *Algebra and Number Theory* **4-6** (2010), p. 701-742.
- [19] R. OLLIVIER & V. SÉCHERRE, « Modules universels de $GL(3)$ sur un corps p -adique en caractéristique p », prépublication.
- [20] V. PAŠKŪNAS, *Coefficient systems and supersingular representations of $GL_2(F)$* , vol. 99, Mém. Soc. Math. Fr. (NS), 2004.
- [21] H. SAWADA, « Endomorphism rings of split (B, N) -pairs », *Tokyo J. Math.* **1** (1978), n° 1, p. 139-148.
- [22] P. SCHNEIDER & U. STUHLER, « Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building », *Publ. Math. IHES* **85** (1997), p. 97-191.
- [23] J.-P. SERRE, *Linear representations of finite groups*, Graduate Texts in Math., vol. 42, Springer, 1977.
- [24] M.-F. VIGNÉRAS, *Représentations l -modulaires d'un groupe réductif p -adique avec $l \neq p$* , Progress in Mathematics, vol. 137, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.
- [25] ———, « Induced R -representations of p -adic reductive groups », *Selecta Math. (N.S.)* **4** (1998), n° 4, p. 549-623, with an appendix by Alberto Arabia.

Manuscrit reçu le 25 novembre 2013,
accepté le 3 juin 2014.

Rachel OLLIVIER
Columbia University,
2990 Broadway,
New York, NY 10027,
USA
ollivier@math.columbia.edu

Vincent SÉCHERRE
Laboratoire de Mathématiques de Versailles,
Université de Versailles Saint-Quentin,
45 avenue des États-Unis,
78035 Versailles Cedex,
France
vincent.secherre@math.uvsq.fr