ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PAUL KRÉE

Les noyaux des opérateurs pseudo-différentiels classiques (OPDC)

Annales de l'institut Fourier, tome 19, nº 1 (1969), p. 179-194

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_1_179_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
19,1 (1969), 179 - 194

LES NOYAUX DES OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS CLASSIQUES (OPDC)

par Paul KRÉE

TABLE DES MATIERES

Pages

Le but de cet article est d'abord de décrire les noyaux des opérateurs pseudo-différentiels (o.p.d.). Rappelons à cet égard que les opérateurs singuliers intervenant dans les équations à intégrale principale (Giraud – Mikhlin – Calderon Zygmund – Seeley) étaient définis par leurs noyaux. De plus, R.T. Seeley dans [18] avait déjà décrit la partie du noyau d'un o.p.d. correspondant au symbole principal. Signalons que cette description permet d'étudier très simplement les propriétés des o.p.d. Le nouveau mode de présentation ainsi obtenu présente en plus les avantages suivants :

a) il donne une motivation de la définition de L. Hormander. En effet, on peut se demander pourquoi on suppose la propriété de développement asymptotique à l'infini de la fonction $p(x, \xi)$.

b) il suggère l'étude d'autres noyaux. Ainsi les noyaux étudiés par G. Giraud et P. Courrège sont définis sans utilisation de la transformation de Fourier. Ainsi, les o.p.d. du type Gevrey (voir [2]) ou du type analytique (voir [2] et [14]) peuvent être définis et étudiés de façon analogue à ce qui est fait ici.

c) il définit une topologie naturelle sur l'ensemble des o.p.d. d'un degré donné sur une variété donnée (topologie plus fine que celle des noyaux de L. Schwartz).

d) il utilise de façon moins systématique la transformation de Fourier. Il apparaît en effet que pour certaines études (symbole, inversion, . . .), il est plus commode d'utiliser la transformation de Fourier ; tandis que pour d'autres études (invariance par difféomorphisme en particulier), il est plus facile de raisonner sur le noyau $p(x, x - y)$. D'ailleurs, les analystes savent bien que la transformation de Fourier est un outil très puissant mais qu'on peut souvent s'en passer.

Le plan de l'article est le suivant. On étudie d'abord le cas des opérateurs de convolution (§ 1). On définit alors les OPDC en décrivant leurs noyaux, et l'on montre l'équivalence avec la définition usuelle (§ 2). On énonce un lemme de commutation (§ 3) qui permettrait d'établir les règles de calcul symbolique. L'invariance par difféomorphisme est prouvée au § 4. Pour une étude complète des OPDC à partir de cette nouvelle définition, nous renvoyons à [12] et [13].

1. Espace Γ^m de multiplicateurs et espace associé C^m de convoluteurs.

(1) DEFINITION (espace Γ^m). – *Γ^m est l'ensemble des fonctions $\beta(\xi)$ sur $\mathbf{R}^n_\xi$ qui sont C^∞ et qui admettent un développement asymptotique à l'infini :*

$$\beta(\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j(\xi) \quad \text{si} \quad |\xi| \longrightarrow \infty \tag{2}$$

où les fonctions β_j sont C^∞ et homogènes de degré $m_j = m - j$ en dehors de l'origine. On suppose de plus que pour tout entier N *et pour tout multiindice α, on a :*

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\alpha} \left(\beta(\xi) - \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j(\xi)\right) = \mathcal{O}(|\xi|^{m_N - \alpha}) \quad \textit{si} \quad |\xi| \longrightarrow \infty \tag{3}$$

On voit que Γ^m est un espace vectoriel que l'on peut munir des semi-normes suivantes :

– les semi-normes de $\mathcal{C}^\infty$: $|\beta|_{K,l} = \sup\limits_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq l}} \left|\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\alpha} \beta(\xi)\right|$

– pour chaque $j = 0,1,\ldots$, les semi-normes de $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, Σ étant la sphère unité :

$$|\beta|_{j,l} = \sup_{\substack{|\xi|=1 \\ |\alpha| \leq l}} \left|\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\alpha} \beta_j(\xi)\right|$$

– les semi-normes naturellement associées aux relations (3) :

$$|\beta|_{N,\alpha} = \sup_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{-m_N + |\alpha|} \left|\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{l} \left(\beta(\xi) - \sum_{0}^{N-1} \beta_j(\xi)\right)\right|$$

Γ^m est un espace de Frechet et l'on a la proposition suivante

(4) PROPOSITION. – *Soit β dans Γ^m. Soit $b = \overline{\mathcal{F}}\beta$.*

a) *Alors b est C^∞ en dehors de l'origine et toutes les dérivées de b sont à décroissance rapide.*

b) *Si tous les β_i sont nuls, b est dans* $\mathcal{S}$.

Ceci se démontre par la technique habituelle :

a) quel que soit k, on peut trouver l tel que :

$$\xi^k \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^l \beta(\xi) \quad \text{soit intégrable}$$

Par transformée de Fourier inverse, on en déduit que :

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^k (ix)^l\, b(x) \quad \text{est continue et bornée}$$

Comme ceci est d'autant plus vrai que $|l|$ est grand, il en résulte que toutes les dérivées de b (pour $x \neq 0$) sont à décroissance rapide.

b) si les β_i sont tous nuls, on voit que β est dans Γ^m quel que soit m (on dit que $\beta \in \Gamma^{-\infty}$).

Le raisonnement ci-dessus peut être alors repris en remplaçant l par zéro. On cherche à présent à caractériser l'ensemble des transformées de Fourier inverses des éléments de Γ^m. On introduit $pf_{\mathrm{C}}\, \beta_j$: c'est la distribution sur $\mathbf{R}^n$ représentée en dehors de l'origine par la fonction β_j et prolongée en une partie finie par la méthode complexe (voir [5]). Dans ces conditions $b_j = \overline{\mathcal{F}}(pf_{\mathrm{C}}\, \beta_j)$ est une distribution $\mathcal{C}^\infty$ dans le complémentaire de l'origine.

(5) *On introduit les définitions suivantes*

a) *pour tout nombre complexe α, α' désigne toujours le nombre complexe tel que* $\alpha + \alpha' + n = 0$.

b) *on dit qu'une distribution b sur* $\mathbf{R}^n_x$ *est pseudohomogène de degré α' lorsque :*

– *si $\alpha' \notin \mathrm{N}$, b est α'-homogène et $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de l'origine.*

– *si $\alpha' = k$, b s'écrit* $b = c + \log|x|\, \mathrm{P}(x)$

c est $\mathcal{C}^\infty$ et k-homogène
$\mathrm{P}(x)$ *est un polynome homogène de degré k.*

Dans ces conditions, comme β_j était homogène de degré $m_j = m - j$ dans le complémentaire de l'origine, b_j est pseudohomogène de degré $m_j' = -n - (m - j)$. Au développement asymptotique à l'infini de β suivant les β_j, il correspond un développement asymptotique à l'origine de $b = \overline{\mathcal{F}}\, \beta$ suivant les b_j (principe de réflection de L. Schwartz !)

(6) DEFINITION de C^m. — *La distribution b sur R^n_x appartient à C^m si elle est la somme d'une fonction de $\mathcal{S}$ et d'une distribution b', $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de l'origine, chaque dérivée de b' étant à décroissance rapide. La singularité de b' à l'origine dépend de m de la façon suivante*

a) *Si $m < 0$, b est une fonction localement intégrable admettant un développement asymptotique*

$$b'(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x) \quad \text{si} \quad x \longrightarrow 0 \tag{7}$$

Chaque b_j est pseudohomogène de degré $m'_j = (m-j)' = -n-m+j$ et l'on a

$$\forall N, \forall k, \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \left(b'(x)| - \sum_0^{N-1} b_j(x)\right) = \Theta(|x|^{m'_j - |k|} \log |x|) \quad \text{si} \quad x \longrightarrow 0 \tag{8}$$

b) *Si $m \geqslant 0$, il existe ε et $\tilde{b}$ dans $C_{-\varepsilon}$ et des distributions pseudohomogènes $b_0, b_1 \ldots b_k$ de degrés $m'_0 < m'_1 < \ldots < m'_k \leqslant -n$ telles que :*

$$b = \tilde{b} + \zeta\left(\sum_{j=0}^{k} p.f.b_j\right)$$

où ζ est une fonction de $\mathcal{D}$, égale à 1 au voisinage de l'origine.

On voit que les définitions ci-dessus ne dépendent pas des représentations choisies et que C^m est naturellement muni d'une topologie d'espace de Fréchet. (Lorsqu'on change de représentation, les seminormes de C^m changent, mais pas la topologie). Par définition le symbole de $b \sim \Sigma\, b_j$ dans C^m (resp $\beta \sim \Sigma\, \beta_j$ dans Γ^m) est la famille des $\mathcal{F} b_j = \beta_j$ (resp β_j).

(9) PROPOSITION. — *La transformation de Fourier établit un isomorphisme entre les espaces Γ^m et C^m.*

La démonstration utilise les

LEMME 1. — *Quel que soit le symbole (β_j), il existe un élément b de C^m ayant pour symbole $(\beta_j)_j$.*

Il suffit de transposer la preuve du lemme de Borel (voir aussi (20)).

LEMME 2. — *Soit k homogène ou pseudohomogène sur $\mathbf{R}^n_x$ et soit ζ dans $\mathcal{C}^\infty_0(\mathbf{R}^n_x)$ valant 1 au voisinage de l'origine. Alors $\mathcal{F}((1-\zeta)k)$ est $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de l'origine, toute dérivée de cette fonction étant à décroissance rapide.*

En effet,

$$\forall\, l\,,\ \exists\, k \text{ avec } \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k x^l((1-\zeta)k) \text{ intégrable.}$$

Donc

$$\xi^k\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^l \mathcal{F}((1-\zeta)k) \text{ est une fonction bornée continue.}$$

Preuve de la proposition.

a) Soit $m < 0$. Prenons b dans C^m et montrons que $\beta = \mathcal{F}b$ est dans Γ^m. β est $\mathcal{C}^\infty$ car pour tout k, $x^k b$ est intégrable ; donc $\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^k\beta$ est bornée continue.

La formule de Leibnitz et les relations (24) montrent qu'au voisinage de l'origine :

$$T(x) = \left(\frac{1\partial}{i\partial x}\right)^k (ix)^l\left(b' - \sum_{j=0}^{N-1} b_j - \zeta\, b_N\right) = \mathcal{O}\left(|x|^{|l|+\mathrm{Re}\, m'_{N+1}\,|k|}\right)$$

$T(x)$ est intégrable au voisinage de l'origine si :

$$|l| + \mathrm{Re}\, m'_{N+1} - |k| = |l| - n - \mathrm{Re}\, m + N + 1 - |k| > -n$$

soit $$-|k| > \mathrm{Re}\, m_N - |l| - 1$$

Si l'on note $[u]$ la partie entière du nombre réel u, on a

$$u < [u+1] < u+2$$

$T(x)$ est localement intégrable si l'on prend $-|k| = [\mathrm{Re}\, m_N - |l|]$ Pour la même valeur de $|k|$, $T(x)$ est intégrable à l'infini.

$$\text{Or, } \left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)^k (ix)^l\left(b' - \sum_0^{N-1} b_j\right) = T + \left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)^k (ix)^l((1-\zeta)b_N) - \\ - \left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)^k (ix)^l\, b_N$$

D'où par transformation de Fourier et vu le lemme 2

$$\xi^k \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^l \left(\beta' - \sum_0^{N-1} \beta_j\right) = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(|\xi|^{-\infty}) + \mathcal{O}(|\xi|^{\mathrm{Re}\, m_N - l + k})$$

$$\text{si} \quad |\xi| \longrightarrow \infty$$

Soit $\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^l \left(\beta'(\xi) - \sum_0^{N-1} \beta_j(\xi)\right) = \mathcal{O}(|\xi|^{\mathrm{Re}\, m_N - |l|})$ si $|\xi| \longrightarrow \infty$

On a une formule analogue lorsque β' est remplacé par $\beta = \mathcal{F} b' + \mathcal{F} b''$ puisque $\mathcal{F} b''$ est dans $\mathcal{S}$. La transformation de Fourier définit donc une application linéaire continue de C^m dans Γ^m.

Notons que si Re m n'est pas un entier on a :

$$\mathrm{Re}\, m_N - |l| - 1 < [\mathrm{Re}\, m_N - (l|] < \mathrm{Re}\, m_N - |l|$$

ce qui permet de se passer de la fonction ζ dans le raisonnement précédent en considérant au lieu de T :

$$T'(x) = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^k (ix)^l \left(b' - \sum_0^N b_j\right).$$

b) Supposons toujours $\mathrm{Re}\, m < 0$ et montrons que pour tout β de Γ^m (de symbole $(\beta_j)_j$), $b = \overline{\mathcal{F}} \beta$ est dans C^m. Or, vu le lemme 1, il existe $\widetilde{b}$ dans C^m de symbole (β_j). Vu a), $\gamma = \mathcal{F}\widetilde{b} - \beta$ appartient à Γ^m ; de plus γ a un symbole nul. Donc γ est dans $\mathcal{S}$ et $\overline{\mathcal{F}} \beta = \widetilde{b} - \overline{\mathcal{F}} \gamma$ est dans C^m.

c) Examinons à présent le cas où m est quelconque.

Donnons nous β dans Γ^m et montrons que $\overline{\mathcal{F}} \beta = b$ est dans C^m. β est la somme de $\widetilde{\beta}$ dans $\Gamma^{-\varepsilon}$ (ε convenable) et d'un nombre fini de distributions $(1 - \zeta)\beta_j$, où chaque β_j est homogène de degré > 0. La relation :

$$(1 - \zeta)\beta_j = p.f.\beta_j - \zeta(p.f.\beta_j)$$

montre qu'au voisinage de l'origine $\overline{\mathcal{F}}((1 - \zeta)\beta_j)$ est la somme d'une fonction analytique et d'une distribution homogène de degré m_j'. Donc b est dans C^m. On montre de la même façon que pour tout b dans C^m, $\beta = \mathcal{F} b$ est dans Γ^m ; car b est la somme d'un élément $\widetilde{b}$ de $C^{-\varepsilon}$ (ε convenable) et d'un nombre fini de distributions $T_j = \zeta$ $(p.f.b_j)$ où b_j est homogène de degré $m_j' \leqslant -n$. Vu le lemme 2, la relation

$$\zeta(p.f.b_j) = p.f.b_j - (1 - \zeta) b_j$$

montre que $\mathcal{F}T_j$ se comporte à l'infini comme la transformée de Fourier de $p.f.b_j$.

Précisons que dans la définition (8-b) les parties finies qui interviennent ne sont pas forcément définies par la méthode complexe. Il se peut par exemple que les distributions $pf_C b_j$ soient non nulles en dehors de l'origine : cas où $b*$ est un opérateur de dérivation.

2. Définition des opérateurs pseudo-différentiels sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$.

Le symbole.

Dans tout ce qui suit, m est un nombre réel (ou complexe) fixé et Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n_x$. On ne considèrera que des *o.p.d.* sur Ω pour lesquels on a $m_j = m - j$ pour tout entier $j \geqslant 0$.

(10) DEFINITION. – *Un* OPDC *de degré au plus m sur Ω est un opérateur linéaire de noyau* $p(x, x - y) \in \mathcal{D}'(\Omega) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(\Omega)$ où

$$z \longrightarrow p(x, z)$$

est une fonction indéfiniment dérivable à valeurs C^m :

$$p(x, z) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_x) \hat{\otimes} C^m_z \tag{11}$$

(12) *Remarque.* – L'opérateur linéaire $p : \mathcal{C}^\infty_0(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ est déterminé *seulement* par la restriction de $p(x, z)$ à l'ensemble des (x, z) tels que $x \in \Omega$ et $z \in \Omega - \Omega$.

Pour toute fonction φ de $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$, $\widetilde{\varphi} = p\varphi$ est donc une distribution sur Ω telle que pour toute Ψ dans $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$, on a :

$$< p\widetilde{\varphi}, \Psi > = < p(x, x - y), \varphi \otimes \Psi >$$

Cette relation entraîne, vu le théorème de Fubini (pour les distributions), que $\widetilde{\varphi}$ est la fonction continue :

$$x \longrightarrow \widetilde{\varphi}(x) = \int p(x, x - y)\, \varphi(y)\, dy = < p(x, x - .), \varphi(.) > \tag{13}$$

(14) PROPOSITION. – *Pour que le noyau p sur Ω soit un opérateur pseudo-différentiel d'ordre au plus m sur Ω, il faut et il suffit pour toute φ dans $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ qu'on ait $p\varphi = \widetilde{\varphi}$ telle que*

$$\widetilde{\varphi}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\xi \in \mathbf{R}_\xi^n} p(x, \xi)\, e^{i<x,\xi>}\, \widetilde{\varphi}(\xi)\, d\xi \qquad (15)$$

où $x \longrightarrow p(x, \xi)$ est une fonction C^∞ à valeurs dans Γ_ξ^m.

Notons d'ailleurs qu'une telle fonction est $\mathcal{C}^\infty$ et telle que

$$p(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x, \xi) \quad \text{si} \quad |\xi| \longrightarrow \infty$$

les fonctions p_j étant $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Omega \times \dot{\mathbf{R}}_\xi^n$ et homogènes de degré $m_j = m - j$ par rapport à ξ. De plus, quels que soient les multi-indices α et β, et le compact $K \subset \Omega$, on a pour tout entier $N \geqslant 1$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta \left(p - \sum_{j=0}^{N-1} p_j\right) = \left(|\xi|^{m_N - |\beta|}\right) \quad \text{si} \quad |\xi| \longrightarrow \infty$$

uniformément sur le compact K. Comme les propriétés ci-dessus caractérisent les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ définies sur Ω à valeurs dans Γ_ξ^m, la proposition (14) montre que la définition (10) des OPDC est équivalente à la définition de L. Hormander (voir [9]).

Démonstration de la proposition (14).

Pour toute fonction $p(x, z)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega, C_z^m)$, notons $\hat{p}(x, \xi)$ la fonction $\Omega \longrightarrow \Gamma_\xi^m$ qui au point x vaut la transformée de Fourier de $p(x, z)$ par rapport à z :

$$\mathcal{F}_z\, p(x, z) = \hat{p}(x, .)$$

Comme la transformation de Fourier réalise un isomorphisme entre C^m et Γ^m, on voit que

$$p(x, z) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, C_z^m) \Longleftrightarrow \hat{p}(x, \xi) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \Gamma_\xi^m)$$

De plus, le théorème de Parseval (étendu aux distributions) montre que l'on a (13) si et seulement si on a (15).

(16) LEMME. (voir [16]) – *Soient* S *et* T *deux distributions dont l'une est à support compact. Alors :*

$$\text{Supp Sing } S * T \subseteq \text{Supp Sing } S + \text{Supp Sing } T$$

(17) PROPOSITION (propriétés de continuité). – *Un* OPDC *sur* Ω *définit naturellement un opérateur linéaire continu de* $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *dans* $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *et de* $\mathcal{E}'(\Omega)$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$. *De plus, le support singulier de* $p(T) = \widetilde{T}$ *est contenu dans le support singulier de* T.

Démonstration. – Considérons l'application bilinéaire

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \times C^m \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \mathcal{C}^\infty(\Omega))$$
$$(a, b) \longrightarrow (a.)(b\, *)$$

Cette application est définie : ceci résulte du lemme (16). Cette application qui est séparément continue et bicontinue car $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et C^m sont des espaces de Frechet. Par conséquent, elle correspond à une application continue :

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \otimes C^m \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \mathcal{C}^\infty(\Omega))$$

Comme l'espace d'arrivée est complet, on obtient par prolongement une application continue :

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega, C^m) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \mathcal{C}^\infty(\Omega))$$

Donc tout OPDC p définit un opérateur linéaire continu :

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega).$$

On montre de la même manière que tout OPDC définit un opérateur linéaire continu de $\mathcal{E}'(\Omega)$ à $\mathcal{D}'(\Omega)$. Pour montrer que

$$\text{Supp Sing } p(T) \subseteq \text{Supp Sing } T \quad \text{pour } T \in \mathcal{E}'(\Omega)$$

on considère un ouvert Ω' contenu dans Ω et disjoint de K ; puis l'on raisonne comme précédemment à partir de l'application bilinéaire

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \times C^m \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}'(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega'), \mathcal{C}^\infty(\Omega'))$$
$$(a, b) \longrightarrow (a.)(b\, *)$$

(18) DEFINITION (symbole, symbole principal). – *Soit p un* OPDC *de degré au plus m de noyau $p(x, x-y)$. Soit $\hat{p}(x, \xi)$ la transformée de Fourier de $p(x, .)$. Par définition, le symbole de p est la série formelle*

$$\sigma(p) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x\,,\xi) \tag{19}$$

représentant le développement asymptotique de $p(x\,,\xi)$ lorsque $|\xi| \longrightarrow \infty$. Le symbole principal est la fonction $p_0(x\,,\xi)$.

Noter que pour construire un OPDC de symbole donné $\sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi)$, on peut prendre l'OPDC de noyau

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j(x\,,x \overset{\vee}{-} y)\, a\left(\frac{x-y}{\varepsilon_j}\right) \tag{20}$$

avec $\begin{cases} p_j(x\,,\overset{\vee}{.}) = \text{transformée de Fourier inverse de } p_j(x\,,.)\,;\ a \text{ dans} \\ \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n),\ a = 1 \text{ dans un voisinage de } 0. \text{ Une suite } (\varepsilon_j) \text{ tendant} \\ \text{suffisamment rapidement vers } 0. \end{cases}$

Autrement dit, on peut faire la construction de Borel (voir [9]) directement sur le noyau.

3. Lemme de commutation.

Vues les techniques usuelles de fonctions à valeurs vectorielles ([2], [16], [17]) les règles du calcul symbolique résultent du

(21) LEMME DE COMMUTATION. – *Soit a une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω et b une distribution de C^m. Alors le commutateur $c = [a\,.\,, b\,*]$ est un opérateur pseudo-différentiel classique sur Ω de degré au plus $m-1$ et de symbole*

$$-\sum_{a,j} \frac{1}{j\,!}\left(\frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\right)^a a \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^a \beta_j \tag{22}$$

où $\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j$ est le symbole de $b\,*$.

Plus précisément, le terme c_k du symbole $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x\,,\xi)$ est le terme de la somme (22) qui est homogène par rapport à ξ et le degré $m-1-k$.

Preuve.

a) Supposons d'abord que $m < 0$, de façon que b soit représenté par une fonction intégrable.

Alors c a pour noyau :

$$c(x, y) = a(x)\, b(x - y) - b(x - y)\, a(y) = [a(x) - a(y)]\, b(x - y).$$

Posant $z = y - x$, la formule de Taylor donne :

$$a(y) - a(x) = a(x + z) - a(x) = \sum_{1<|j|<\mathrm{N}} \frac{a^{(j)}(x)}{j!}\, z^j$$

$$+ \sum_{|j|=\mathrm{N}} \frac{\mathrm{N}}{j!} \int_0^1 (1 - t)^{\mathrm{N}-1} a^{(j)}(x + tz)\, z^j dt$$

D'où

$$c(x, y) = - \sum_{1<|j|<\mathrm{N}} (-1)^j \frac{a^{(j)}(x)}{j!} (x - j)^j\, b(x - y) - \mathrm{R_N}(x, x - y)$$

avec

$$\mathrm{R_N}(x, z) = (-1)^{\mathrm{N}} \sum_{|j|=\mathrm{N}} \frac{\mathrm{N}}{j!} z^j b(z) \int_0^1 (1 - t)^{\mathrm{N}-1} a^{(j)}(x - tz)\, dt$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^l \mathrm{R_N}(x, z) = (-1)^{\mathrm{N}} \sum_{|j|=\mathrm{N}} \frac{\mathrm{N}}{j!} \sum_{m \leqslant l} \int_0^1 (1 - t)^{\mathrm{N}-1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{m-l} (z^j b(z)) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^l$$

$$a^{(j)}(x - tz)\, dt = \mathcal{O}(|z|^{m+\mathrm{N}-|l|} \log |z|) \quad \text{si} \quad |z| \longrightarrow 0.$$

b) Si b est un opérateur différentiel, le lemme de commutation résulte de la formule de Leibniz.

c) Si le degré de b est positif ou nul, on se ramène aux cas précédents en utilisant la fonction ζ ($\mathcal{C}^\infty$, valant 0 au voisinage de l'origine et 1 au voisinage de l'infini)

$$\hat{b} = (1 - \zeta)\hat{b} + \frac{\zeta\, \hat{b}}{|\xi|^{2m+2}} |\xi|^{2m+2}$$

Soit $b = r + \Delta^{m+1} b'$ avec r dans $\mathcal{S}$ et b' dans C^{-m-2}. D'après a) $[a, r*]$ est un *o.p.d.* de symbole nul.

$$[a, \Delta^{m+1} b'] = a\,\Delta^{m+1} b' - (\Delta^{m+1} b')a$$
$$= \Delta^{m+1} [a, b'] + [a, \Delta^{m+1}]b'$$

Le 1er terme du 2e membre est un *o.p.d.*, comme étant le composé de *o.p.d.* $[a, b']$ et de l'opérateur différentiel Δ^{m+1}. Le 2e terme du 2e membre est le composé de b' et de l'opérateur différentiel $[a, \Delta^{m+1}]$. On a donc prouvé que $c = [a, b*]$, est toujours un *o.p.d.*

d) Pour vérifier que c a le symbole annoncé, il suffit de faire quelques calculs pour compléter les raisonnements.

4. Invariance par difféomorphisme.

Soit un noyau $P = P(x, y)$ sur l'ouvert Ω. Soit χ un difféomorphisme : $\Omega \longrightarrow \Omega'$. Par définition le transporté $\widetilde{P}$ du noyau P par χ est tel que pour toute φ de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega')$:

$$(\widetilde{P}\varphi)(y) = (P(\varphi \circ \chi))(\chi^{-1} y)$$

du moins dans le cas où $P\varphi$ est une fonction continue. On a donc pour toute Ψ de $C_0^\infty(\Omega)$

$$< \widetilde{P}\varphi, \Psi > = \int (\widetilde{P}\varphi)(y)\,\Psi(y)\,dy$$
$$= \int (P(\varphi \circ \chi))(\chi^{-1} y)\,\Psi(y)\,dy$$
$$= \int \Psi(y)\,dy \int P(\chi^{-1} y, z)\,\varphi(\chi z)\,dz$$
$$= \iint \Psi(\chi y')\,(\chi y')\,P(y', z)\,\varphi(\chi z)\,dy'\,dz$$

Ceci détermine le noyau $\widetilde{P}$ car le 1er membre s'écrit $< \widetilde{P}, \Psi \otimes \varphi >$ et parce que $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega'_x) \otimes \mathcal{C}_0^\infty(\Omega'_y)$ est dense dans $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega'_x \times \Omega'_y)$. Dans le cas particulier où P est une fonction localement sommable, nous avons

$$(\widetilde{P}\varphi)(y) = \int P(\chi^{-1}y, z)\,\varphi(\chi z)dz = \int P(\chi^{-1}y, \chi^{-1}u)\,\varphi(u)\,|\chi^{-1}(u)|\,du$$

soit
$$\widetilde{P}(x, y) = P(\chi^{-1}x, \chi^{-1}y)\,|\chi'^{-1}(y)| \tag{23}$$

(24) THEOREME. – *Soit p un opérateur pseudo-différentiel de degré m défini sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n_x$ et soit χ un difféomorphisme de Ω sur Ω'. Soit p_χ le transporté du noyau de p par χ. Alors pour tout ouvert relativement compact Ω_0 contenu dans Ω, le transporté par χ de $p\,|\,\Omega_0$ est un noyau coïncidant avec celui d'un o.p.d. Le symbole principal $p_{\chi,0}$ de cet o.p.d. est tel que*

$$p_{\chi,0}(\chi x, \xi) = p_0(x, <{}^t\chi'(x), \xi>)$$

Preuve.

a) Examinons d'abord le cas où $m < 0$, c'est-à-dire le cas d'un *o.p.d.* à noyau localement intégrable. Alors p_χ a pour noyau

$$q'(x, y) = p(\chi^{-1}(x), \chi^{-1}(x) - \chi^{-1}(y))\,.\,|\chi'^{-1}(y)|$$

Vu la proposition (49), il suffit de montrer que

$$q(x, y) = p(\chi^{-1}(x), \chi^{-1}(x) - \chi^{-1}(y))$$

coïncide pour $x \in \Omega_0$ avec le noyau d'un *o.p.d.* sur Ω_0. Posons $\chi^{-1} = \nu$. On a :

$$\nu(x) - \nu(y) = <\nu'(x), x-y> + \sum_{2 \leqslant k \leqslant r} \frac{\nu^{(k)}(x)}{k!}(x-y)^k + \varepsilon(x, y)$$

où $\varepsilon(x, y)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dominée par $|x-y|^{r+1}$ sur tout compact.

De même, on a :

$$p(\chi, a + c) = p(\chi, a) + \sum_{1 \leqslant \rho \leqslant m} \frac{1}{\rho!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\rho p(\chi, a)\,c^\rho + \eta(\chi, a, c)$$

On a donc en composant ces deux développements de Taylor

$$p(\nu x, \nu x - \nu y) = p(\nu x, <\nu'(x), x-y>) + \cdots$$

En évaluant avec soin le reste, on peut voir que $q(\chi, y)$ coïncide pour $(x, y) \in \Omega_0 \times \Omega_0$ avec le noyau d'un *o.p.d.* Le symbole principal de cet *o.p.d.* est

$$(x, \xi) \longrightarrow p_{\chi,0}(\chi, \xi) = \int p_0(\chi^{-1}x, < \chi'^{-1}(x), z >) \\ e^{-i <z,\xi>} |\chi'^{-1}(x)| \, dz$$

$$= \int p_0(\chi^{-1}x, z') e^{-i<(\chi' x) z', \xi>} \, dz$$

$$= \hat{p}_0(\chi^{-1}x, <{}^t\chi'(x), \xi>)$$

b) si $m < 0$, on a

$$p = r + p' \Delta^{m+1} \qquad \text{avec} \qquad \deg p' < 0$$

Remarquons alors que :

– le transporté de la somme de 2 noyaux est la somme des transportés de ces noyaux.

– le transporté d'un noyau $\mathcal{C}^\infty$ est un noyau $\mathcal{C}^\infty$.

– le transporté du composé de 2 noyaux est le composé des transportés.

– le transporté d'un opérateur différentiel est un opérateur différentiel.

De ces remarques et de a), il résulte que le théorème (24) est prouvé en général.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BOKOBZA et A. UNTERBERGER, Les opérateurs de Calderon Zygmund précises, *C.R. Acad. Sciences Paris* 260 (1965) p. 3265-3267.

[2] L. BOUTET de MONVEL et P. KREE, *Annales de l'Institut Fourier* (Grenoble) tome XVIII – fasc. 1 (1967) p. 295-323.

[3] H. CARTAN et L. SCHWARTZ, Le théorème d'Attyah Singer, *Sem. Fac. Sc. Paris* (1963-1964).

[4] P. COURREGE (livre à paraître).

[5] L. GARDING, Transformation de Fourier des distributions homogènes – *Bull. Soc. Math. France 89* – (1961) – p. 381-428.

[6] I.M. GELFAND et Z.J. SHAPIRO, Les fonctions homogènes et leurs applications, *Usp. Math. Nauk USSR*, Tome 10. 1055. n°3, 3-70.

[7] A. GROTHENDIECK, Produits tensoriels topologiques, *Mem. A.M. Sac.* n° 16, (1955).

[8] L. HORMANDER, Pseudo-differential operators of hypoelleptic type. Symposium in pure Mathematics, *American Math. Soc.* (1967).

[9] L. HORMANDER, Pseudo-differential operators – *Comm. Pure Appl. Math.* 18 (1965) 501-517.

[10] J. KOHN et L. NIRENBERG, An algebra of pseudo-differentiel operators – *Comm. Pure Appl. Math.* 18 (1965) 269-305.

[11] P. KREE, Distributions quasihomogènes, (Mémoires de la Société Mathématique de France – à paraître).

[12] P. KREE, Les noyaux des OPDC. *Séminaire de la faculté des sciences de Nice* (février 1968).

[13] P. KREE, Introduction à l'étude des OPDC. Séminaire à Bari (mai 1968).

[14] MARGULIES, Pseudo-differential operators of analytic type, *Bull. AMS* april 1967.

[15] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions. Tomes 1 et 2. Hermann 1950-51.

[16] L. SCHWARTZ, *Sem. Fac. Sc. Paris,* 1954-1955.

[17] L. SCHWARTZ, *Sem. Fac. Sc. Paris,* 1959-1960.

[18] R.T. SEELEY, Refinement of the functional calculus of Calderon and Zygmund, *Inday. Math.* 27 (1965) 521-531.

Manuscrit reçu le 18 novembre 1968

Paul KREE
Département de mathématiques
Faculté des sciences
Parc Valrose
06 – Nice