

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YVES MEYER

JEAN-PIERRE SCHREIBER

## **Quelques fonctions moyennes-périodiques non bornées**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 19, n° 1 (1969), p. 231-236

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1969\\_\\_19\\_1\\_231\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_1_231_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## QUELQUES FONCTIONS MOYENNES-PÉRIODIQUES NON BORNÉES

par Y. MEYER et J. P. SCHREIBER

Soit  $D = \{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ , une suite de nombres réels vérifiant

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \lambda_n) = 0$ .

2)  $\lambda_n \neq n$ , pour une infinité de valeurs de  $n$ .

On se propose de montrer l'existence de fonctions moyenne-périodiques non bornées, à spectre (simple) dans  $D$ .

On désigne par  $B(\mathbb{R}^n)$  l'algèbre des transformées de Fourier des mesures bornées sur  $\mathbb{R}^n$  et on pose  $\|\hat{\mu}\|_{B(\mathbb{R}^n)} = \int d|\mu|$ . Pour un fermé  $E$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $B(E)$  est l'algèbre des restrictions à  $E$  des fonctions de  $B(\mathbb{R}^n)$ , munie de la norme quotient. On rappelle :

DEFINITION. — ([4] déf. 1.2.1). *On dira qu'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  possède un compact associé s'il existe un intervalle compact  $I$  et une constante  $K$ , tels que pour toute famille  $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  de nombres complexes nuls sauf un nombre fini, on ait*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x} \right| \leq K \sup_{x \in I} \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x} \right|.$$

PROPOSITION. — ([1] prop. 1). *Si toute fonction moyenne-périodique à spectre dans  $\Lambda$  est bornée,  $\Lambda$  possède un compact associé.*

On a alors le théorème suivant :

THEOREME 1. — *L'ensemble  $D$  (défini plus haut) ne possède pas de compact associé.*

*Démonstration.* — Soit  $l$  un nombre positif vérifiant

$$2l < \inf_{i,j \in \mathbb{N}} |\lambda_i - \lambda_j|$$

et pour toute fonction  $f$  continue sur  $D + [-l, l]$ , soit  $\tilde{f}$  la fonction continue sur  $D \times [-l, l]$  définie par

$$\tilde{f}(x, y) = f(x + y).$$

Si  $D$  avait un compact associé, il existerait une constante  $C$  telle que pour toute partie  $D'$  de  $D$ , on ait ([4] th. I)

$$\|f\|_{B(D'+[-l,l])} \leq C \|\tilde{f}\|_{B(D' \times [-l,l])}.$$

Soit  $N$  tel que pour  $n \geq N$ , on ait  $|\lambda_n - n| < \frac{l}{3}$ . Prenons  $D' = \{\lambda_n\}_{n \geq N}$ . Pour tout  $\varepsilon$  positif inférieur à  $l$ , considérons la fonction  $f_\varepsilon$  définie sur  $D' + [-l, l]$  par :

$$\begin{cases} f_\varepsilon(x) = 1 - \frac{|x - \lambda_n|}{\varepsilon}, & \text{si } |x - \lambda_n| \leq \varepsilon; \\ f_\varepsilon(x) = 0, & \text{pour les autres valeurs de } x. \end{cases}$$

Il est clair que  $\tilde{f}_\varepsilon$  possède un prolongement à  $\mathbb{R}^2$  dont la norme dans  $B(\mathbb{R}^2)$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ ; par conséquent  $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_{B(D' \times [-l,l])}$  est majorée indépendamment de  $\varepsilon$  et donc aussi  $\|f\|_{B(D'+[-l,l])}$ . Si  $g$  est une fonction de  $B(\mathbb{R})$  valant 1 sur  $Z + \left[-\frac{l}{3}, \frac{l}{3}\right]$  et nulle hors de  $Z + \left[-\frac{2l}{3}, \frac{2l}{3}\right]$ , le produit de  $g$  avec des prolongements de  $f_\varepsilon$  en des fonctions de  $B(\mathbb{R})$  donne une famille de fonctions  $h_\varepsilon$  vérifiant :

$$\begin{cases} \|h_\varepsilon\|_{B(\mathbb{R})} \leq K \\ h_\varepsilon(\lambda_n) = 1 & \text{si } \lambda_n \in D' \\ h_\varepsilon(x) = 0 & \text{si } x \notin D' + [-\varepsilon, \varepsilon]. \end{cases}$$

Ces fonctions  $h_\varepsilon$  sont les transformées de Fourier de mesures de masse inférieure à  $K$  qui, considérées comme des mesures sur le compactifié de Bohr de  $\mathbb{R}$ , ont pour valeur d'adhérence faible, quand  $\varepsilon$  tend vers 0, une mesure  $\mu$  dont la transformée de Fourier est la fonction

caractéristique de  $D'$ . La mesure  $\mu$  est semi-idempotente et, d'après Kessler ([3]),  $D'$  doit être l'intersection avec  $[0, +\infty[$  d'un élément de l'anneau des classes du groupe  $\mathbf{R}$  discret.

On sait qu'un ensemble  $E$ , discret, de  $\mathbf{R}$  qui appartient à l'anneau des classes du groupe discret  $\mathbf{R}$  s'écrit  $\bigcup_{i=1}^n (\tau_i Z + \beta_i) \setminus F$  où les  $\tau_i$  et  $\beta_i$  sont réels et  $F$  un ensemble fini. On voit facilement que la démonstration ([5], p. 71) s'applique au cas où l'on sait seulement que  $E \cap [0, +\infty[$  est discret. Mais les hypothèses faites sur  $D$  interdisent à  $D'$  d'avoir cette forme, ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. — *Il existe des fonctions moyennes-périodiques non bornées de la forme :  $f \sim \sum_{n \geq 0} a_n \sin \lambda_n x$  et de la forme*

$$g \sim \sum_{n \geq 0} b_n \cos \lambda_n x.$$

Posons  $\Delta = D \cup (-D)$ . Le corollaire résulte en fait seulement de l'existence d'une fonction moyenne périodique non bornée à spectre dans  $\Delta$  et de ce que  $\delta = \inf_{\substack{\lambda \in \Delta \\ \lambda' \in \Delta}} |\lambda' - \lambda| > 0$ .

L'existence d'une telle fonction équivaut en effet à l'existence d'une suite de polynômes trigonométriques

$$P_\nu(x) = \sum_{\lambda \in \Delta} a_\lambda(\nu) e^{i\lambda x}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

vérifiant :

- a)  $\sup_{x \in \mathbf{R}} |P_\nu(x)| = 1$
- b)  $P_\nu(x) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$  uniformément sur tout compact.

Si on considère alors les polynômes trigonométriques

$$C_\nu(x) = P_\nu(x) + P_\nu(-x)$$

$$S_\nu(x) = P_\nu(x) - P_\nu(-x)$$

on voit qu'en se restreignant au besoin à une sous suite et en multipliant au besoin ces polynômes par des constantes, on a les propriétés a) et

b) soit pour les polynômes  $C_\nu$  soit pour les polynômes  $S_\nu$ . Supposons par exemple qu'on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} C_\nu(x) = \sum_{n \leq N_\nu} c_n(\nu) \cos \lambda_n x \\ \sup_{x \in \mathbf{R}} |C_\nu(x)| = 1 \\ C_\nu(x) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0 \text{ uniformément sur tout compact.} \end{array} \right.$$

On peut dès lors affirmer l'existence de fonctions moyennes-périodiques paires non bornées à spectre dans  $\Delta$ . Pour les fonctions impaires considérons

$$\begin{aligned} D_\nu(x, h) &= C_\nu(h+x) - C_\nu(h-x) \\ &= -2 \sum_{n \leq N_\nu} c_n(\nu) \sin \lambda_n h \sin \lambda_n x. \end{aligned}$$

Pour tout  $h$ ,  $D_\nu(x, h)$  converge aussi uniformément sur tout compact vers 0. De plus on peut trouver une valeur de  $h$ , une suite  $\{\nu_i\}$  et un nombre  $\eta > 0$  tels que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |D_{\nu_i}(x, h)| > \eta \quad \text{pour tout } i.$$

En effet, sinon on aurait pour tout  $T > 0$  et tout  $h \in [0, T]$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |D_\nu(x+h, h) + D_\nu(h-x, h)| \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0.$$

c'est-à-dire

$$4 \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \sum_{n \leq N_\nu} c_n(\nu) \sin^2 \lambda_n h \cos \lambda_n x \right| \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

cette suite restant d'ailleurs majorée par 4 pour toute valeur de  $h$ .  
Mais

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq N_\nu} c_n(\nu) \cos \lambda_n x &= \sum_{n \leq N_\nu} c_n(\nu) \cos 2\lambda_n h \cos \lambda_n x \\ &\quad + 2 \sum_{n \leq N_\nu} c_n(\nu) \sin^2 \lambda_n h \cos \lambda_n x \end{aligned}$$

d'où en intégrant par rapport à  $h$  sur  $[0, T]$  et en utilisant l'inégalité de Schwarz

$$T \left| \sum_{n \leq N_\nu} c_n(\nu) \cos \lambda_n x \right| \leq \left\{ \sum_{n \leq N_\nu} |c_n(\nu)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n \leq N_\nu} \frac{1}{\lambda_n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} + \int_0^T 2 \left| \sum_{n \leq N_\nu} c_n(\nu) \sin^2 \lambda_n h \cos \lambda_n x \right| dh.$$

La régularité de  $\Delta$  entraîne d'une part que les sommes  $\sum_{n \leq N_\nu} \frac{1}{\lambda_n^2}$  sont bornées et d'autre part, par l'inégalité d'Ingham ([2] p. 94).

$$\sum |c_n(\nu)|^2 \leq k \int_0^{\frac{2\pi}{\delta}} \left| \sum_{n \leq N_\nu} c_n(\nu) \cos \lambda_n x \right|^2 dx \leq k \frac{2\pi}{\delta}$$

Comme, pour toute valeur de  $T$  et de  $x$  l'intégrale du 2e membre tend vers 0 lorsque  $\nu$  tend vers l'infini et comme un choix convenable de  $x$  donne au 1er membre une valeur arbitrairement voisine de  $T$ , on obtient une contradiction dès que  $T$  est supérieur à

$$(2\pi \delta^{-1})^{\frac{1}{2}} \left( \sum \frac{1}{\lambda_n^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi donc nous avons aussi prouvé l'existence de fonctions moyennes-périodiques impaires à spectre dans  $\Delta$ .

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.P. KAHANE, Sur les fonctions moyennes-périodiques bornées, *Ann. Inst. Fourier*, VII, (1957) (p. 293-314).
- [2] J.P. KAHANE, Pseudo-périodicité et séries de Fourier lacunaires, *Ann. Ec. Norm.* 79 (1962).
- [3] I. KESSLER, Semi idempotent measures on abelian groups, *Bull. Am. Math. Soc.* 73 (1967) p. 258.

- [4] Y. MEYER, Isomorphisme entre certaines algèbres de restrictions.  
*Ann. Inst. Fourier* 18, 2 (1968), 73-86.
- [5] H.P. ROSENTHAL, Projections on to invariant subspaces of  $L^p(G)$ ,  
*Mémoires of the Am. Math. Soc.* (1966) (n° 63).

Manuscrit reçu le 26 décembre 1968

Y. MEYER et J.P. SCHREIBER  
Département de Mathématiques  
Faculté des Sciences  
91 – Orsay