

HERMANN ROST

**Markoff-Ketten bei sich füllenden Löchern
im Zustandsraum**

Annales de l'institut Fourier, tome 21, n° 1 (1971), p. 253-270

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_1_253_0

© Annales de l'institut Fourier, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MARKOFF-KETTEN BEI SICH FÜLLENDEN LÖCHERN IM ZUSTANDSRAUM

von Hermann ROST

Einleitung.

Sei im messbaren Raum (E, \mathfrak{B}) ein substochastischer Übergangskern P gegeben und seien μ, ν endliche Masse mit Definitionsbereich \mathfrak{B} . Man definiert nun, nach einer Idee von Chacon und Ornstein (Lemma 1 in [2]), die folgende Doppelfolge von Massen $(\mu_n, \nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$\mu_0 = (\mu - \nu)^+, \quad \nu_0 = (\mu - \nu)^-;$$

$$\mu_{n+1} = (\mu_n P - \nu_n)^+, \quad \nu_{n+1} = (\mu_n P - \nu_n)^-, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Die anschauliche Deutung dieses Schemas ist die eines Auffüllvorgangs: die Masse μ , die im Laufe der Zeit vom Operator P im Raum E herumgeschoben wird, ist bestrebt, die "Löcher", die nach ν verteilt sind, aufzufüllen. Zu jedem Zeitpunkt n wird der Anteil $\mu_{n-1} P \wedge \nu_{n-1}$ von $\mu_{n-1} P$ zum Auffüllen verbraucht, der Rest wird weitergeschoben und, wenn möglich, zum Füllen der übriggebliebenen Löcher ν_n verwendet.

Die hier gestellte Aufgabe ist es, zu untersuchen, ob

- 1) μ sich beim Auffüllvorgang verbraucht, d.h. $\lim_n \|\mu_n\| = 0$,
und ob $\lim_n \langle \mu_n, f \rangle = 0$ für eine weite Klasse von (nicht nur beschränkten) Funktionen f gilt;
- 2) ν ganz aufgefüllt wird, d.h. $\downarrow \lim_n \nu_n = 0$.

Beide Fragen werden der Einfachheit halber, und um die Nähe zum Chacon-Ornsteinschen Ergodensatz deutlich zu machen, in der

Sprache der submarkoffschen Operatoren in einem L^1 formuliert und beantwortet ; die Anwendung auf den Fall echter Markoff-Kerne und die Interpretation mit Hilfe einer Stoppzeit wird im dritten Teil der Arbeit gegeben.

Sei also jetzt (E, \mathfrak{F}, m) ein σ -finiten Massraum, T ein positiver Operator der Norm höchstens 1 in $L^1 = L^1(E, \mathfrak{F}, m)$, S sein adjungierter in L^∞ , der durch monotone Konvergenz allgemein auf positive Funktionen (modulo m) fortgesetzt sei. Es stellt sich heraus, dass die Lösung des Problems „potentialtheoretisch“ gegeben werden kann ; so lautet die Antwort auf die zweite Frage (Satz 2) : Wenn μ, ν positive Elemente in L^1 sind, dann gilt $\downarrow \lim_n \nu_n = 0$ genau dann, wenn $\langle \mu, f \rangle \geq \langle \nu, f \rangle$ für alle S -exzessiven f (d.h. alle f mit $0 \leq Sf \leq f$). Dies wiederum ist gleichbedeutend damit (Satz 3), dass gilt

$$\lim_n \frac{\nu + \nu T + \dots + \nu T^n}{\mu + \mu T + \dots + \mu T^n} \leq 1 \quad \text{in} \quad \left\{ \sup_n (\mu + \nu) T^n > 0 \right\}.$$

(Die Existenz des Grenzwerts ist bekanntlich der Inhalt des berühmten individuellen Ergodensatzes von Chacon-Ornstein [2]). Das erste Problem behandelt Satz 1 mit den Corollaren : Es gilt $\lim_n \|\mu_n\| = 0$ genau dann, wenn $\langle \mu, f \rangle \leq \langle \nu, f \rangle$ für alle $f \in L^\infty$ mit $0 \leq f \leq Sf$. Dieses Ergebnis lässt sich noch verfeinern, und zwar in einer Richtung, die ein Resultat des Verfassers (Satz 2 in [6]) verschärft : \mathfrak{F} sei ein Kegel von Funktionen f mit $0 \leq f \leq Sf$ (genauer : siehe unten, Bedingung (F)) ; $\nu' = \uparrow \lim_n \nu - \nu_n$. Dann ist gleichwertig

- (I) $\langle \mu, f \rangle \leq \langle \nu, f \rangle, f \in \mathfrak{F}$;
- (II) $\langle \nu', f \rangle = \uparrow \lim_n \langle \nu - \nu_n + \mu_n, f \rangle, f \in \mathfrak{F}$;
- (III) $\lim_n \langle \mu_n, f \rangle = 0$, wenn $\langle \nu', f \rangle < \infty, f \in \mathfrak{F}$.

Aussage (II) und (III) stellen hierin ein Analogon zur gleichmässigen Integrabilität eines geeigneten Submartingals dar (siehe Teil 3). Wir bemerken noch, dass es für Satz 1 unnötig ist vorauszusetzen, dass der Operator T in L^1 definiert ist und dort die Norm höchstens 1 hat ; es genügt stattdessen eine lineare Abbildung T von den positiven, σ -finiten m -totalstetigen Massen oder einem Teilverband davon, in sich zu betrachten mit

$$\uparrow \lim_n \mu_n T = \mu T, \quad \text{wenn} \quad \uparrow \lim_n \mu_n = \mu .$$

Um der Einheitlichkeit der Darstellung willen werden jedoch die Generalvoraussetzungen in der ganzen Arbeit unverändert beibehalten.

1. Das Auffüllschema.

Voraussetzungen und Bezeichnungen. Gegeben ist der σ -finite Massraum (E, \mathfrak{B}, m) und der Kegel L_+^1 der endlichen m -totalstetigen positiven Masse in (E, \mathfrak{B}) , versehen mit der üblichen Verbandsstruktur. Als Teilmengen von E sind im folgenden stets \mathfrak{B} -messbare Mengen modulo m zu verstehen; ebenso meinen wir mit „Funktionen“ die Äquivalenzklassen modulo m von \mathfrak{B} -messbaren Funktionen.

Es ist L^∞ der Raum der beschränkten Funktionen, das Integral von $f \in L^\infty$ in Bezug auf $\mu \in L_+^1$ wird als $\langle \mu, f \rangle$ geschrieben. Gegeben ist weiter die lineare Abbildung T von L_+^1 in sich mit

$$\langle \mu T, 1 \rangle \leq \langle \mu, 1 \rangle, \quad \mu \in L_+^1,$$

d.h. T ist Kontraktion im Sinn der L^1 -Norm. Der zu T adjungierte Operator in L^∞ wird mit S bezeichnet:

$$\langle \mu T, f \rangle = \langle \mu, Sf \rangle, \quad \mu \in L_+^1, f \in L^\infty.$$

Durch monotone Konvergenz wird S auf alle positiven Funktionen fortgesetzt, ebenso wie der Ausdruck $\langle \mu, f \rangle$ für $\mu \in L_+^1, f \geq 0$ stets definiert ist, evtl. als $+\infty$.

Die Elemente von L_+^1 werden als „Masse“, nicht als „Funktionen“ aufgefasst. Wenn wir von ihrer Eigenschaft, m -integrable Funktionen zu sein, Gebrauch machen, so nur, um „invariante“ Ausdrücke wie $\{\mu > 0\}$, μ/ν u.a. zu bilden.

DEFINITION 1. – Wenn $\mu, \nu \in L_+^1$, so wird als zugehöriges Auffüllschema eine Doppelfolge $(\mu_n, \nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von L_+^1 -Elementen verstanden, die erklärt ist durch

$$\begin{aligned} \mu_0 &= (\mu - \nu)^+, \quad \nu_0 = (\mu - \nu)^-; \\ \mu_{n+1} &= (\mu_n T - \nu_n)^+, \quad \nu_{n+1} = (\mu_n T - \nu_n)^-, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Es gelten nun die folgenden einfachen Aussagen über dieses Auffüllschema :

PROPOSITION 1. — a) Die Folge der Masse $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend, ebenso die Folge des L^1 -Normen $(\|\mu_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$b) \nu - \nu_n = \mu - \mu_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\mu_k \mathbb{T} - \mu_{k+1}), \quad n \geq 0.$$

Beweis von b). — Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \nu - \nu_0 &= \mu \wedge \nu = \mu - \mu_0, \\ \nu_k - \nu_{k+1} &= \mu_k \mathbb{T} \wedge \nu_k = \mu_k \mathbb{T} - \mu_{k+1}. \end{aligned}$$

Summation über k liefert die Behauptung.

Man definiert vermöge a) als ν_∞ den Grenzwert $\downarrow \lim_n \nu_n$.

PROPOSITION 2. — Seien $(\mu_n, \nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\mu'_n, \nu'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach Definition 1 aus (μ, ν) und (μ', ν') gebildet. Man hat dann :

- a) Aus $\mu' \geq \mu, \nu' \leq \nu$ folgt $\mu'_n \geq \mu_n, \nu'_n \leq \nu_n$ für $n \geq 0$;
 b) Wenn speziell $\mu' = \mu, \nu' = \nu - \nu_\infty$, gilt $\mu'_n = \mu_n, \nu_n - \nu'_n = \nu'_\infty = \nu_\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist also $\nu'_\infty = 0$.

Beweis (nur von b)) :

$$\begin{aligned} 1) \quad \mu \wedge \nu' &= \mu - \mu'_0 = \nu' - \nu'_0, \\ \mu \wedge \nu &= \mu - \mu_0 = \nu - \nu_0 \leq \nu - \nu_\infty = \nu' \end{aligned}$$

Man gewinnt aus der zweiten Zeile die Abschätzung

$$\mu \wedge \nu = \mu \wedge \mu \wedge \nu \leq \mu \wedge \nu' \leq \mu \wedge \nu$$

wegen $\nu' \leq \nu$. Somit hat man $\mu \wedge \nu = \mu \wedge \nu'$ und daraus

$$\mu'_0 = \mu_0, \nu_0 - \nu'_0 = \nu - \nu' = \nu_\infty.$$

2) Gelte die Behauptung für n ; man schliesst dann ebenso weiter :

$$\begin{aligned} \mu_n \mathbb{T} \wedge \nu'_n &= \mu'_n \mathbb{T} \wedge \nu'_n = \mu'_n \mathbb{T} - \mu'_{n+1} = \nu'_n - \nu'_{n+1}, \\ \mu_n \mathbb{T} \wedge \nu_n &= \mu_n \mathbb{T} - \mu_{n+1} = \nu_n - \nu_{n+1} \leq \nu_n - \nu_\infty = \nu'_n. \end{aligned}$$

Daraus folgt wieder $\mu_n T \wedge \nu_n = \mu_n T \wedge \nu'_n$

und daher

$$\mu'_{n+1} = \mu_{n+1}, \quad \nu_{n+1} - \nu'_{n+1} = \nu_n - \nu'_n = \nu_\infty.$$

(Die Interpretation von b) ist klar : wenn man $\nu - \nu_\infty$ als den „auffüllbaren Teil von ν “ ansieht, so wird dieser Anteil, für sich allein genommen, vollständig und ebenso schnell wie ν aufgefüllt).

Vor weiteren Aussagen über das Auffüllschema werden die hier grundlegenden Funktionenklassen eingeführt :

a) Es sei \mathfrak{C} der Kegel der S-exzessiven Funktionen ; dabei heisst f S-exzessiv (oder kurz exzessiv) wenn $0 \leq Sf \leq f$;

b) \mathfrak{F} sei ein (im folgenden festgewähltes) System von Funktionen, das den Forderungen (F) genügt :

(F.1) $0 \leq f \leq Sf < \infty, f \in \mathfrak{F}$, d.h. die $f \in \mathfrak{F}$ sind subharmonisch ;
 $f, g \in \mathfrak{F} \implies f + g \in \mathfrak{F}, \lambda \cdot f \in \mathfrak{F}$ für $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$.

(F.2) $0 \leq g \leq Sg, g \leq f$ für ein $f \in \mathfrak{F} \implies g \in \mathfrak{F}$;

(F.3) zu $f \in \mathfrak{F}$ gibt es ein $g \in \mathfrak{F}$, derart dass $g > 0$ ist in $\{f < Sf\}$.

PROPOSITION 3. – Seien $\mu, \nu \in L_+^1$ mit $\mu \wedge \nu = 0$. Wenn nun $\langle \mu, f \rangle \leq \langle \nu, f \rangle$ für alle $f \in \mathfrak{F}$, so gilt auch $\langle \mu T, f \rangle \leq \langle \nu, f \rangle$ für alle $f \in \mathfrak{F}$. (Entsprechend folgt aus $\langle \mu, g \rangle \geq \langle \nu, g \rangle$ für alle $g \in \mathfrak{C}$, dass $\langle \mu T, g \rangle \geq \langle \nu, g \rangle$ für alle $g \in \mathfrak{C}$).

Beweis (der ersten Aussage) :

Gegeben sei $f \in \mathfrak{F}$, wähle ein $g \in \mathfrak{F}$ nach (F.3) aus. Sei $A \subset E$ so gewählt, dass $\mu(A') = \nu(A) = 0$ (A' : Komplement von A).

Man setzt

$$\bar{f} := 1_A \cdot Sf + 1_{A'} \cdot f,$$

$$\bar{f}_k := 1_A \cdot (Sf \wedge (f + k \cdot g)) + 1_{A'} \cdot f, \quad k \in \mathbb{N}$$

(1_A : Indikator von A). Dann ist

$$S\bar{f} \geq Sf \geq \bar{f}_k, \quad \bar{f}_k \leq f + k \cdot g,$$

woraus $\bar{f}_k \in \mathfrak{F}$ nach (F.2) folgt. Somit gilt

$$\langle \mu, \bar{f}_k \rangle \leq \langle \nu, \bar{f}_k \rangle = \langle \nu, f \rangle,$$

da ν in $\{f = f_k\}$ konzentriert ist, und schliesslich – wegen $\bar{f} = \uparrow \lim_k \bar{f}_k$ – auch noch

$$\langle \nu, f \rangle \geq \langle \mu, \bar{f} \rangle = \langle \mu, Sf \rangle = \langle \mu T, f \rangle.$$

PROPOSITION 4. –

a) Wenn $\rho \in L_+^1$, so erfüllt die Funktionenklasse

$$\mathfrak{F}(\rho) := \{f \in \mathfrak{F} : \langle \rho, f \rangle < \infty\}$$

ebenfalls die Bedingung (F).

b) Wenn für $\mu, \nu \in L_+^1$ gilt $\langle \mu, f \rangle \leq \langle \nu, f \rangle$ für alle $f \in \mathfrak{F}$, so erfüllen die nach Definition 1 gebildeten Masse μ_n, ν_n für $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $\langle \mu_n, f \rangle \leq \langle \nu_n, f \rangle$ für alle $f \in \mathfrak{F}(\nu')$, wo

$$\nu' = \nu - \nu_\infty.$$

Beweis :

Zu a) : Zu zeigen ist nur (F.3). Wenn $0 \leq f \leq Sf$, so ist auch $h \leq Sh$ für jedes h mit $f \leq h \leq Sf$. Man wählt nun zu $f \in \mathfrak{F}$ mit $\langle \rho, f \rangle < \infty$ ein $g \in \mathfrak{F}$ nach (F.3) und setzt $h = f + g'$, wobei g' eine beliebige Funktion mit den Eigenschaften $0 \leq g' \leq (Sf - f) \wedge g$, $g' > 0$ in $\{Sf > f\}$, $\langle \rho, g' \rangle < \infty$ ist. Dann ist $h \in \mathfrak{F}(\rho)$ und erfüllt $h > 0$ in $\{Sf > f\}$.

Zu b) : Beweis durch vollständige Induktion.

Wenn $f \in \mathfrak{F}(\nu')$, so hat man

$$\langle \mu_0, f \rangle = \langle \mu - (\mu \wedge \nu), f \rangle \leq \langle \nu - (\mu \wedge \nu), f \rangle = \langle \nu_0, f \rangle,$$

da $\langle \mu \wedge \nu, f \rangle \leq \langle \nu - \nu_\infty, f \rangle < \infty$ vorausgesetzt war.

Wenn $\langle \mu_n, f \rangle \leq \langle \nu_n, f \rangle$ für alle $f \in \mathfrak{F}(\nu')$, so gilt wegen $\mu_n \wedge \nu_n = 0$ nach Proposition 3 auch

$$\langle \mu_n T, f \rangle \leq \langle \nu_n, f \rangle \text{ für alle } f \in \mathfrak{F}(\nu').$$

Damit ist für $f \in \mathfrak{F}(\nu')$

$$\begin{aligned} \langle \mu_{n+1}, f \rangle &= \langle \mu_n T - (\mu_n T \wedge \nu_n), f \rangle \leq \langle \nu_n - (\mu_n T \wedge \nu_n), f \rangle = \\ &= \langle \nu_{n+1}, f \rangle \end{aligned}$$

da wiederum das Mass $\mu_n T \wedge \nu_n \leq \nu - \nu_\infty$ ein endliches Integral über f ergibt.

2. Ordnungsbeziehungen und Auffüllbarkeit.

Es gilt nun Kriterien dafür zu finden, dass in einer Auffüllsequenz $(\mu_n, \nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Masse ν_n nach Null konvergieren bzw. dass $\lim \langle \mu_n, f \rangle = 0$ gilt für möglichst viele $f \in \mathfrak{F}$.

Beschäftigen wir uns zuerst mit der zweiten Fragestellung : Der einzuschlagende Weg ist durch Proposition 4 bereits vorgezeichnet. Wir wissen, dass mit $\langle \mu, f \rangle \leq \langle \nu, f \rangle$ für alle $f \in \mathfrak{F}$ auch gilt $\langle \mu_n, f \rangle \leq \langle \nu_n, f \rangle$, für alle $f \in \mathfrak{F}$ mit $\langle \nu - \nu_\infty, f \rangle < \infty$. Geht man jetzt von ν über zu einem Mass $\tilde{\nu} = \nu + \rho$, wobei ρ disjunkt zu sämtlichen μ_n ist, so bleiben im neuen Auffüllschema die Masse μ_n unverändert erhalten, ν_n geht über in $\nu_n + \rho$ (Schluss wie in Proposition 2b) und die obenstehende Abschätzung ist damit schwächer geworden. Das Ziel muss daher sein, $\langle \mu_n, f \rangle$ nur durch Integrale des Typs $\langle \nu_n - \nu_\infty, \cdot \rangle$ abzuschätzen, die invariant beim oben beschriebenen Übergang von ν zu $\nu + \rho$ sind. Dies wird erreicht, indem man f durch eine subharmonische Funktion f_A ersetzt, die im Träger von ν_∞ verschwindet. Die Grösse des dabei begangenen Fehlers ist Gegenstand von Lemma 2. Zur Vorbereitung dient Lemma 1, das als Satz vom optimalen Stoppen (vgl. [4], Kap. III) bezeichnet werden kann, sowie die nachstehende Definition des, „Auseinanderziehens“ von Massen, die von der Ordnung von Massen, wie sie z.B. in [1] betrachtet wird, etwas abweicht :

DEFINITION 2. – Seien $\mu, \nu \in L_+^1$; dann bedeutet $\mu \prec \nu$ soviel wie : es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und Funktionen d_0, \dots, d_n mit

$$0 \leq d_i \leq 1, \quad i = 0, \dots, n,$$

derart dass

$$\nu = \mu(1 - d_0) + (\mu d_0) T(1 - d_1) + \dots + (\dots((\mu d_0) T d_1) T \dots d_n) T.$$

BEMERKUNG. – Offenbar folgt aus $\mu \prec \nu$ stets

$$\begin{aligned} \langle \mu, f \rangle &\leq \langle \nu, f \rangle, \quad f \in \mathfrak{F} ; \\ \langle \mu, g \rangle &\geq \langle \nu, g \rangle, \quad g \in \mathfrak{G} . \end{aligned}$$

LEMMA 1. – Sei $f \geq 0$ gegeben mit $Sf < \infty$; es sei \bar{f} die grösste subharmonische Minorante von f . Dann gilt für $\mu \in L_+^1$ mit $\langle \mu, f \rangle < \infty$:

$$\langle \mu, \bar{f} \rangle \geq \inf_{\mu \prec \nu} \langle \nu, f \rangle$$

Beweis. — Man definiert rekursiv die Funktionen

$$f_0 := f, f_{n+1} := f \wedge Sf_n, n \geq 0.$$

Die Folge ist absteigend und es gilt wegen $Sf < \infty$ offenbar $\bar{f} = \downarrow \lim_n f_n$ und $\langle \mu, \bar{f} \rangle = \inf_n \langle \mu, f_n \rangle$.

Der Beweis der Behauptung ist erbracht, wenn wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein μ_n angeben können mit $\mu \prec \mu_n$ und $\langle \mu_n, f \rangle = \langle \mu, f_n \rangle$. Nun sei g_k der Indikator der Menge $\{f_k < f\}$, $g'_k = 1 - g_k$, $k = 0, 1, \dots$. Wir behaupten, dass f_n , $n \geq 1$, eine Darstellung besitzt

$$f_n = g'_n \cdot f + g_n \cdot S(g'_{n-1} f) + \dots + g_n \cdot S(g_{n-1} S(\dots g_1 \cdot Sf) \dots).$$

In der Tat : es gilt

$$f_1 = f \wedge Sf = g'_1 \cdot f + g_1 \cdot Sf,$$

und wenn die behauptete Darstellung für f_n richtig ist, so auch für f_{n+1} :

$$f_{n+1} = f \wedge Sf_n = g'_{n+1} \cdot f + g_{n+1} \cdot Sf_n = g'_{n+1} \cdot f + g_{n+1} \cdot [S(g'_n f) + \dots + S(g_n S(\dots g_1 Sf) \dots)].$$

Dualisieren dieser Formel zeigt, dass

$$\mu_n = \mu g'_n + (\mu g_n) T g'_{n-1} + \dots + (\dots (\mu g_n) T \dots g_1) T$$

das Verlangte leistet ; es gilt sowohl $\mu \prec \mu_n$ als auch

$$\langle \mu_n, f \rangle = \langle \mu, f_n \rangle.$$

Das entscheidende Lemma lautet nun

LEMMA 2. — Es sei $\mu \in L_+^1$ gegeben, sowie eine Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in L_+^1 mit

$$\mu_0 \leq \mu ; \mu_n T \geq \mu_{n+1}, n = 0, 1, 2, \dots ;$$

es sei $\nu' = \mu - \mu_0 + \sum_n (\mu_n T - \mu_{n+1})$ gesetzt.

Weiter sei $A \subset E$ und $f \in \mathfrak{F}$ gegeben, derart dass $\mu_n(A) = 0$ für alle $n \geq 0$ und $\langle \mu, f \cdot 1_{A'} \rangle < \infty$.

Es bezeichne f_A die grösste subharmonische Minorante von $f \cdot 1_{A'}$. Dann gilt

$$\langle \mu, f \rangle \leq \langle \mu, f_A \rangle + \langle \nu', f \rangle.$$

Beweis. – Man wählt eine Folge von Funktionen $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften $0 \leq h_i \leq 1$, $i \in \mathbb{N}$; $\mu h_0 = \mu_0$, $(\mu_i T) h_{i+1} = \mu_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$; $h_i \cdot 1_A = 0$, $i \in \mathbb{N}$.

Nach Lemma 1 gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ und Funktionen d_0, \dots, d_n , $0 \leq d_i \leq 1$ für $i \leq n$, derart dass

$$\langle \mu, f_A \rangle + \varepsilon \geq$$

$$\langle \mu(1 - d_0) + (\mu d_0) T(1 - d_1) + \dots + (\dots (\mu d_0) T \dots d_n) T, f \cdot 1_{A'} \rangle.$$

Daraus folgt durch Verkleinern der rechten Seite

$$\begin{aligned} \langle \mu, f_A \rangle + \varepsilon &\geq \langle \mu(1 - d_0) h_0 + (\mu d_0 h_0) T(1 - d_1) h_1 + \dots + \\ &+ (\dots (\mu d_0 h_0) T \dots d_n h_n) T h_{n+1}, f \cdot 1_{A'} \rangle = \langle \mu(1 - d_0) h_0 + \dots + \\ &+ (\dots (\mu d_0 h_0) T \dots d_n h_n) T h_{n+1}, f \rangle \end{aligned}$$

wegen $h_i \cdot 1_A = 0$. Dazu addiert man die Ungleichung

$$\begin{aligned} \langle \nu', f \rangle &= \langle \mu(1 - h_0) + (\mu h_0) T(1 - h_1) + \dots, f \rangle \geq \\ &\geq \langle \mu(1 - h_0) + (\mu d_0 h_0) T(1 - h_1) + \dots + \\ &+ (\dots (\mu d_0 h_0) T \dots d_n h_n) T(1 - h_{n+1}), f \rangle \end{aligned}$$

und erhält

$$\langle \mu, f_A \rangle + \langle \nu', f \rangle + \varepsilon \geq \langle \mu(1 - d_0 h_0) T(1 - d_1 h_1) + \dots + (\dots (\mu d_0 h_0) T \dots d_n h_n) T, f \rangle \geq \langle \mu, f \rangle,$$

weil der mittlere Ausdruck ein Integral $\langle \tilde{\mu}, f \rangle$ mit $\mu \prec \tilde{\mu}$ darstellt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist das Lemma bewiesen.

SATZ 1. – Seien $\mu, \nu \in L_+^1$ gegeben und sei $(\mu_n, \nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das dazugehörige Auffüllschema; sei $\nu' = \nu - \nu_\infty$. Dann sind gleichbedeutend die Aussagen

- (I) $\langle \mu, f \rangle \leq \langle \nu, f \rangle$ für alle $f \in \mathfrak{F}$;
- (II) $\langle \nu', f \rangle = \uparrow \lim_n \langle \nu - \nu_n + \mu_n, f \rangle$ für alle $f \in \mathfrak{F}$;
- (III) für alle $f \in \mathfrak{F}$ mit $\langle \nu', f \rangle < \infty$ gilt $\lim_n \langle \mu_n, f \rangle = 0$.

Beweis. – (I) \longrightarrow (III).

a) Sei $f \in \mathfrak{F}$ mit $\langle \nu', f \rangle < \infty$ gegeben. Man setzt $A = \{\nu_\infty > 0\}$ und definiert f_A wie in Lemma 2 als grösste subharmonische Funktion unter $f \cdot 1_{A'}$. Wegen Bedingung (F.2) ist $f_A \in \mathfrak{F}$; daher erhält man nach (I)

$$\langle \mu, f_A \rangle \leq \langle \nu, f_A \rangle = \langle \nu', f_A \rangle \leq \langle \nu', f \rangle < \infty .$$

Die Folge (μ_n) erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 2, da ja $\mu_n \wedge \nu_\infty \leq \mu_n \wedge \nu_n = 0$. Um das Lemma anwenden zu können, machen wir die zusätzliche Annahme $\langle \mu, f \cdot 1_{A'} \rangle < \infty$. Daraus ergibt sich die Abschätzung

$$\langle \mu, f \rangle \leq \langle \mu, f_A \rangle + \langle \nu', f \rangle \leq 2 \langle \nu', f \rangle < \infty .$$

Diese Ungleichung bleibt richtig auch im Fall $\langle \mu, f \cdot 1_{A'} \rangle = \infty$: Man ersetzt μ durch ein $\tilde{\mu} \leq \mu$ mit $\langle \tilde{\mu}, f \cdot 1_{A'} \rangle < \infty$; die Bedingung (I) bleibt gültig und in dem von $\tilde{\mu}, \nu$ gebildeten-Auffüllschema $(\tilde{\mu}_n, \tilde{\nu}_n)$ hat man

$$\nu - \tilde{\nu}_\infty \leq \nu - \nu_\infty = \nu' \quad (\text{Proposition 2a}),$$

somit

$$\langle \tilde{\mu}, f \rangle \leq 2 \langle \nu - \tilde{\nu}_\infty, f \rangle \leq 2 \langle \nu', f \rangle .$$

Da dies für alle $\tilde{\mu} \leq \mu$ mit endlichem Integral über $f \cdot 1_{A'}$ gilt und $f \cdot 1_{A'}$ endlichwertig ist, bleibt die gewünschte Abschätzung auch für μ erhalten. •

b) Nach Proposition 4b) trifft Voraussetzung (I) für jedes n auf das Paar μ_n, ν_n zu, sofern man \mathfrak{F} durch $\mathfrak{F}(\nu') = \{g \in \mathfrak{F} : \langle \nu', g \rangle < \infty\}$ ersetzt. Anwendung von Beweisteil a) liefert dann

$$\langle \mu_n, f \rangle \leq 2 \langle \nu_n - \nu_\infty, f \rangle \quad \text{für alle } f \in \mathfrak{F}(\nu') .$$

Da die rechte Seite nach 0 strebt bei $n \longrightarrow \infty$, ist (III) bewiesen.

$$(III) \longrightarrow (II) .$$

Dass die Folge $(\langle \mu_n + \nu - \nu_n, f \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ für subharmonisches f aufsteigend ist, folgt aus Proposition 1b):

$$\nu - \nu_n + \mu_n = \mu + \sum_{k=0}^{n-1} (\mu_k \tau - \mu_k) .$$

Ihr Limes ist mindestens gleich $\langle \nu - \nu_\infty, f \rangle$, somit ist die Behauptung

für ein $f \in \mathfrak{F}$ mit $\langle \nu', f \rangle = \infty$ bereits bewiesen. Für die restlichen f folgt die Behauptung sofort aus (III).

$$(II) \longrightarrow (I) .$$

Aus dem vorigen Beweisteil ist bekannt, dass

$$\langle \mu, f \rangle \leq \langle \mu_n + \nu - \nu_n, f \rangle$$

für alle $f \in \mathfrak{F}$ und $n \geq 0$; daher gilt unter Voraussetzung (II)

$$\langle \mu, f \rangle \leq \langle \nu', f \rangle \leq \langle \nu, f \rangle, \quad f \in \mathfrak{F} .$$

1. COROLLAR. – Wenn $\mu, \nu \in L_+^1$ mit $(\mu_n, \nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Auffüllschema gegeben sind, so ist

$$\langle \mu, f \rangle \leq \langle \nu, f \rangle \quad \text{für alle } f \in L^\infty \text{ mit } 0 \leq f \leq Sf$$

notwendig und hinreichend für

$$\lim_n \|\mu_n\| = 0 .$$

Beweis. – Die Klasse der $f \in L^\infty$ mit $0 \leq f \leq Sf$ erfüllt (F). Sei $e = \lim_n S^n(1)$ gesetzt ; dann ist

$$\lim_n \langle \mu_n, 1 - e \rangle \leq \lim_n \langle \mu T^n, 1 - e \rangle = \lim_n \langle \mu, S^n(1 - e) \rangle = 0 ,$$

und daher ist $\lim_n \langle \mu_n, 1 \rangle = 0$ gleichbedeutend mit $\lim_n \langle \mu_n, e \rangle = 0$ oder, da ein Vielfaches von e alle beschränkten subharmonischen Funktionen majorisiert, mit

$$\lim_n \langle \mu_n, f \rangle = 0 \quad \text{für alle } f \in L^\infty \text{ mit } 0 \leq f \leq Sf .$$

Die Behauptung folgt jetzt aus Satz 1.

2. COROLLAR. – Wenn $\mu, \nu \in L_+^1$ mit $\langle \mu, f \rangle \leq \langle \nu, f \rangle$ für alle $f \in \mathfrak{F}$ gegeben sind und wenn \mathfrak{F} die Funktion $e = \lim S^n(1)$ enthält, so gibt es in L_+^1 eine Zerlegung von $\nu : \nu = \nu' + \nu''$, wobei

$$\langle \mu, f \rangle \leq \langle \nu', f \rangle$$

für alle $f \in \mathfrak{F}$ und $\langle \mu, e \rangle = \langle \nu', e \rangle$ gilt.

Beweis. — Man wählt $\nu' = \nu - \nu_\infty$; aus $Se = e$ folgt

$$\langle \nu - \nu_n + \mu_n, e \rangle = \langle \mu + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k T - \mu_k, e \rangle = \langle \mu, e \rangle;$$

die linke Seite strebt wegen Satz 1 gegen $\langle \nu', e \rangle$, womit alles bewiesen ist.

Dieses Corollar wurde in [6] noch unter der schärferen Voraussetzung bewiesen, dass ein $f^* \in \mathfrak{F}$ existiert mit $f^* < Sf^*$ und dass alle $f \in \mathfrak{F}$ ν -integrabel sind. Unter der zweiten Bedingung allein ($\langle \nu, \cdot \rangle$ endlich in \mathfrak{F}) sollte es mit Hilfe eines Hahn-Banach-Argumentes ebenfalls möglich sein, aus ν einen minimalen Bestandteil ν' herauszulösen, der noch $\langle \nu', f \rangle \geq \langle \mu, f \rangle$ für alle $f \in \mathfrak{F}$ erfüllt. Der Vorteil des hier eingeschlagenen Verfahrens besteht darin, auf einem direkten, konstruktiven Weg die Zerlegung von ν zu erreichen, ohne viel mehr als die „monotone Struktur“ von L_+^1 und \mathfrak{f} zu benutzen, d.h. ohne durch weitreichende Integrabilitätsforderungen die betrachteten Masse-oder Funktionenkegel in topologische Vektorräume einzubetten.

Bei der Lösung des ersten Problems, Bedingungen für $\nu_\infty = 0$ zu finden, wird nun vollkommen analog verfahren: wir geben eine „gespiegelte“ Form von Lemma 2 an, die sich etwas einfacher beweisen lässt, und aus der dann unmittelbar der Satz folgt:

LEMMA 3. — Sei in L_+^1 die Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben mit

$$\mu_k T \geq \mu_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N};$$

sei $A \subset E$ mit der Eigenschaft $\mu_k(A) = 0, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_n \langle \mu_n, e_A \rangle = 0,$$

wo e_A das Gleichgewichtspotential von A bedeutet, d.h. die kleinste exzessive Majorante von $1_{A'}$.

Beweis. — Aus $\mu_{n+1} \leq \mu_n T$ und $\mu_n \cdot 1_{A'} = \mu_n$ folgt sofort

$$\mu_{n+1} \leq (\mu_n 1_{A'}) T \quad \text{oder} \quad \mu_n \leq \mu_0 T_{A'}^n, \quad \text{für } n \geq 0,$$

wenn $T_{A'}$ den Operator $\mu \longrightarrow (\mu 1_{A'}) T$ bezeichnet. Nach Definition von e_A gilt (vgl. [5] Ch. IX)

$$\langle \mu_n, e_A \rangle = \sum_{k \geq 0} \langle \mu_n T_{A'}^k, 1_A \rangle \leq \sum_{k \geq n} \langle \mu_0 T_{A'}^k, 1_A \rangle .$$

Dieser letzte Ausdruck strebt nach 0 bei $n \longrightarrow \infty$, da die Reihe

$$\sum_{k \geq 0} \langle \mu_0 T_{A'}^k \rangle = \langle \mu_0, e_A \rangle \text{ konvergiert.}$$

SATZ 2. – Wenn $\mu, \nu \in L_+^1$ mit Auffüllschema $(\mu_n, \nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben sind, so ist die Bedingung

$$\langle \mu, g \rangle \geq \langle \nu, g \rangle$$

für alle exzessiven g notwendig und hinreichend für $\nu_\infty = 0$.

a) Die Bedingung ist hinreichend für $\nu_\infty = 0$: wenn $\nu_\infty \neq 0$, so sei A eine Teilmenge von E mit $\nu_\infty(A) > 0$, $\mu_n(A) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wie in Lemma 3 sei e_A definiert ; nach Proposition 1b) ist

$$\nu - \nu_\infty = \mu - \mu_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k T - \mu_{k+1}) .$$

Aus $\mu_k(A) = 0$ und den elementaren Eigenschaften des Gleichgewichtspotentials ergibt sich $\langle \mu_k T, e_A \rangle = \langle \mu_k, e_A \rangle$ und daher

$$\langle \nu, e_A \rangle = \langle \nu_\infty, e_A \rangle + \langle \mu - \mu_0, e_A \rangle + \sum_{k=0}^{\infty} \langle \mu_k - \mu_{k+1}, e_A \rangle .$$

Nach Lemma 3 ist $\lim_n \langle \mu_n, e_A \rangle = 0$, und der Ausdruck vereinfacht sich zu

$$\langle \nu, e_A \rangle = \langle \nu_\infty, e_A \rangle + \langle \mu, e_A \rangle$$

was wegen $\nu_\infty(A) > 0$ echt grösser als $\langle \mu, e_A \rangle$ ist. Damit ist eine spezielle exzessive Funktion g mit $\langle \mu, g \rangle < \langle \nu, g \rangle$ aufgewiesen.

b) Umgekehrt, sei $\nu_\infty = 0$; man hat dann für exzessives g

$$\begin{aligned} \langle \nu, g \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mu - \mu_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\mu_k T - \mu_{k+1}), g \rangle \leq \\ &\leq \langle \mu, g \rangle + \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k, Sg - g \rangle \leq \langle \mu, g \rangle . \end{aligned}$$

Die Verbindung zum individuellen Ergodensatz, aus dessen Ideenkreis die Auffüllprozedur ja stammt, ist jetzt leicht herzustellen : es werde

zu $\mu, \nu \in L_+^1$ mit $D(\nu, \mu)$ der Ausdruck $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu + \dots + \nu T^n}{\mu + \dots + \mu T^n}$ bezeichnet. Der Eindeutigkeit halber wird $D(\nu, \mu) = 0$ in $\{\sup(\mu + \nu) T^n = 0\}$ und $D(\nu, \mu) = \infty$ in $\{\sup_n \mu T^n = 0, \sup_n \nu T^n > 0\}$ gesetzt. Dann gilt der folgende

SATZ 3. – Gegeben $\mu, \nu \in L_+^1$; dann ist

$D(\nu, \mu) \leq 1$ gleichbedeutend mit $\langle \nu, g \rangle \leq \langle \mu, g \rangle$ für alle exzessiven g .

Beweis. – Es bezeichne D bzw. C den dissipativen bzw. konservativen Teil von E . Dann ist equivalent (nach dem Satz über die „Identifikation des Limes“ [4])

$D(\nu, \mu) \leq 1$ in D mit

$\langle \sum_k \nu T^k, f \rangle \leq \langle \sum_k \mu T^k, f \rangle$ für alle $f \geq 0$, die in C verschwinden,

oder mit

(*) $\langle \nu, g \rangle \leq \langle \mu, g \rangle$ für alle g der Gestalt

$$g = \sum_k S^k f \quad \text{mit} \quad f \geq 0, \quad f \cdot 1_C = 0.$$

Es sei \mathfrak{A} die σ -Algebra der S -invarianten Teilmengen von C ; dann sind der Reihe nach äquivalent

$D(\nu, \mu) \leq 1$ in C

$$\sum_k \nu T_D^k \cdot 1_C \leq \sum_k \mu T_D^k \cdot 1_C \quad \text{in} \quad \mathfrak{A}$$

$\langle \nu, e_A \rangle \leq \langle \mu, e_A \rangle$ für alle $A \in \mathfrak{A}$,

(**) $\langle \nu, g \rangle \leq \langle \mu, g \rangle$ für alle beschränkten exzessiven g mit $Sg = g$ in D .

Die Summen der in (*) und (**) beschriebenen Funktionen und ihre monotonen Limiten sind aber gerade alle exzessiven Funktionen, womit der Satz bewiesen ist.

3. Anwendung auf Markoffsche Ketten.

Wir betrachten jetzt einen messbaren Raum (E, \mathfrak{B}) und darin einen substochastischen Übergangskern P , d.h. eine Familie $(P_x)_{x \in E}$ von Massen in (E, \mathfrak{B}) mit

$$0 \leq P_x(A) \leq 1, \quad x \in E, \quad A \in \mathfrak{B};$$

$$P \cdot (A) \text{ ist } \mathfrak{B}\text{-messbar für } A \in \mathfrak{B}.$$

Dann induziert (P_x) in der üblichen Weise einen positiven Operator B in den endlichen Massen und dual dazu in den \mathfrak{B} -messbaren (positiven) Funktionen :

$$\mu P(A) = \int \mu(dx) P_x(A); \quad Pf(x) = \int f(y) P_x(dy).$$

Sämtliche Begriffsbildungen und Beweisideen der Arbeit lassen sich vollkommen analog auf diese Situation übertragen, angefangen vom Auffüllschema, den Forderungen (F) bis zu den Sätzen 1 und 2. Das Lemma 1 ist dann so zu verstehen, dass die Existenz der „größten subharmonischen Minorante“ gerade durch die dort gebrachte Konstruktion gesichert ist (vgl. [5]).

Sei nun $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Markoff-Kette mit Werten in E zum Kern P und Startmass μ , definiert auf einem Massraum $(\Omega, \mathfrak{G}, Pr_\mu)$ mit $(\mathfrak{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als begleitender Familie von σ -Algebren. Man überlegt sich leicht, dass man das System $(\Omega, (\mathfrak{G}_n))$ so reich wählen kann, dass es zu einer Folge von Massen $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\mu_0 \leq \mu; \quad \mu_{n+1} \leq \mu_n P, \quad n \geq 0,$$

eine Stoppzeit $\tau \leq \infty$ gibt mit

$$\mu_n(A) = Pr_\mu(X_n \in A; \tau > n), \quad A \in \mathfrak{B}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann lassen sich die Sätze 1 und 2 folgendermassen aussprechen (der Beweis liegt auf der Hand) :

SATZ 1 a. – *Seien μ, ν endliche Masse in (E, \mathfrak{B}) und \mathfrak{F} eine Klasse von P -subharmonischen Funktionen, die die zu (F) analogen Bedingungen erfüllen möge. Dann ist äquivalent :*

$$(I) \quad \langle \mu, f \rangle \leq \langle \nu, f \rangle \quad \text{für alle } f \in \mathfrak{F};$$

(II) in einem geeigneten Massraum $(\Omega, \mathfrak{G}, Pr_\mu)$ gibt es eine Markoff-Kette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zum Kern P mit Startverteilung μ , sowie eine Stoppzeit $\tau \leq \infty$, derart dass X_τ in $\{\tau < \infty\}$ eine Verteilung ν' besitzt mit

$$\nu' \leq \nu \quad \text{und} \quad \langle \nu', f \rangle = \uparrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(X_{\tau \wedge n}) dPr_\mu,$$

(d.h. für alle $f \in \mathfrak{F}$ mit $\langle \nu', f \rangle < \infty$ ist das Submartingal $(f(X_{\tau \wedge n}))_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmässig integabel).

COROLLAR. — Wenn \mathfrak{F} die beschränkten subharmonischen Funktionen enthält, dann folgt aus Bedingung (I), dass die in (II) beschriebene Stoppzeit τPr_μ -fast sicher endlich ist.

SATZ 2a. — Seien μ, ν endliche Masse in (E, \mathfrak{B}) ; dann ist äquivalent

(I) $\langle \mu, g \rangle \geq \langle \nu, g \rangle$ für alle P -exzessiven g ;

(II) in einer geeigneten Markoff-Kette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zur Startverteilung μ gibt es eine Stoppzeit $\tau \leq \infty$, derart dass ν Verteilung von X_τ in $\{\tau < \infty\}$ ist.

Unter der Voraussetzung von Satz 2a gewinnt man aus [1] noch eine Aussage über das asymptotische Verhalten von

$$D(\nu, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu + \dots + \nu P^n}{\mu + \dots + \mu P^n}$$

längs der Pfade eines P -Prozesses mit Startmass μ . Es sei in üblicher Weise zum Zustandsraum E der Markoff-Kette ein Punkt ∂ adjungiert mit der Erweiterungsvorschrift für den Übergangskern:

$$P_x(\{\partial\}) = 1 - P_x(E).$$

Als Lebensdauer eines Prozesses wird dann

$$\zeta(\omega) = \inf \{n : X_n(\omega) = \partial\} (\leq \infty)$$

definiert. Wie oben sei e definiert durch

$$e(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(1_E)(x) = Pr_x(\zeta = \infty).$$

Damit lässt sich formulieren

SATZ 4. — Seien μ, ν endliche Masse in (E, \mathfrak{B}) mit

$$\langle \mu, g \rangle \geq \langle \nu, g \rangle$$

für alle exzessiven g , sei $D = D(\nu, \mu)$ gesetzt ; dann gilt

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} D(X_n(\omega))$ existiert \Pr_μ -fast sicher ;

b) $\langle \mu, e \rangle = \langle \nu, e \rangle$ ist gleichbedeutend

mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(X_n(\omega)) = 1 \quad \Pr_\mu = f.s. \quad \text{in } \{\xi = \infty\}.$$

Beweis. —

a) folgt sofort aus Th. 3 in [1].

b) Nach Th. 4 in [1] ist

$$\langle \nu, e \rangle = \int [\lim_n D(X_n)] d\Pr_\mu \leq \int [\lim_n 1_E(X_n)] d\Pr_\mu = \langle \mu, e \rangle.$$

Gleichheit zwischen den beiden äusseren Termen herrscht hier genau dann, wenn $\lim_n D(X_n) = 1$ in fast allen Pfaden mit unendlicher Lebensdauer. Damit ist der Satz bewiesen.

LITERATUR

- [1] M.A. AKCOGLU, R.W. SHARPE, Ergodic theory and boundaries, *Trans. Amer. Math. Soc.* 132 (1968), 447-460.
- [2] R.V. CHACON, D.S. ORNSTEIN, A general ergodic theorem, *III. Journal Math.* 4 (1960), 153-160.
- [3] E.B. DYNKIN, A.A. JUSCHKEWITSCH, Sätze und Aufgaben über Markoffsche Prozesse, Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1969.
- [4] P.A. MEYER, Théorie ergodique et potentiels, *Ann. Inst. Fourier* 15 (1965), 89-102.
- [5] P.A. MEYER, Probabilités et potentiel, Paris : Hermann 1966.

- [6] H. ROST, Darstellung einer Ordnung von Massen durch Stoppzeiten, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 15 (1970), 19-28.

Manuscrit reçu le 6 juin 1970

Dr. Hermann ROST
Math. Seminar der Universität
6 Frankfurt/Main
Robert-Mayer-Str. 10