ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LÉONCE FOURÈS

Le problème des translations isothermes ou construction d'une fonction analytique admettant dans un domaine donné une fonction d'automorphie donnée

Annales de l'institut Fourier, tome 3 (1951), p. 265-275

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1951__3__265_0>

LE PROBLÈME DES TRANSLATIONS ISOTHERMES ou construction d'une fonction analytique admettant dans un domaine donné une fonction d'automorphie donnée,

par **Léonce FOURÈS** (Princeton).

---

§ 1. — Deux théorèmes préliminaires.

Nous admettrons sans démonstration ([1]) les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. — *Soit une suite de fonctions* $z_{n+1}=f_n(z_n)$ *vérifiant les conditions suivantes :*

a) $f_n(z_n)$ *est holomorphe univalente dans* $C_n(|z_n|<r_n)$ *avec* $f_n(0)=0$ $f'_n(0)=1$.

b) L'image de C_n *par* f_n *est un domaine* $C_{n,1}\subset C_{n+1}$.

Dans ces conditions

1. *Les cercles* C_n *de rayons croissant ont une limite* $C:|\zeta|<R\leqslant+\infty$.

2. $f_{n+h}(z_{n+h})$ *considéré comme fonction* $\varphi_{n,h+1}(z_n)$, *représente* C_n *sur un domaine* $C_{n,h+1}\subset C_{n+h,1}\subset C_{n+1}$:

Pour tout n fixe les $\varphi_{n,h}$ *ont une limite* $\Phi_n(z_n)$.

3. *Pour tout* $m>n$ $\Phi_m\circ\varphi_{n,m-n}(z_n)=\Phi_n(z_n)$.

4. *Tout cercle* $C'\subset C$ *est couvert par l'image* $C_{n,\infty}$, *de* C_n *par* Φ_n *pour n assez grand.*

5. *Si un arc de la circonférence de* C_n *est représenté par tout* $\varphi_{n,h}$ *suivant un arc de la circonférence* C_{n+h}, *la fonction* Φ_n *représente l'intérieur de cet arc analytiquement sur un arc de la circonférence de* C, *qui est alors de rayon fini.*

Soient deux cercles C_1 et C_2 des plans des variables z_1 et z_2. Soit

([1]) L. Fourès : Sur la théorie des surfaces de Riemann : Ann. Ec. Norm. Sup. 68, 1951, pp. 3-13.

$C'_i \subset C_i (i = 1, 2)$ un domaine simplement connexe de frontière Γ'_i. Γ_i désignant la circonférence de C_i, nous noterons $\gamma_i = \Gamma_i \cap \Gamma'_i$, $\gamma'_i = \Gamma'_i - \gamma_i$. Nous supposerons que γ_i comprend plus d'un point mais ne couvre pas toute la circonférence Γ_i.

Soit donnée une correspondance conforme biunivoque entre C'_1 et C'_2 ; $z_j = \psi_{ji}(z_i)$, $[\psi_{ij} = \psi_{ij}^{-1}]$ satisfaisant aux conditions frontières suivantes (²) :

Conditions CF. — 1° Si $z \in \gamma'_i$, $S^{C'_i}_{\psi_{ji}}(z_i) \cap C_j = \emptyset$ qui entraîne $S^{C'_j}_{\psi_{ij}}(z_j) \cap C_i = \emptyset$ où $z_j \in \gamma'_j$.

2° Il existe sur γ_i deux points α_i et β_i accessibles dans C'_i ; les chemins d'accessibilité séparant les éléments frontière de C'_i en deux plages, l'une de ces plages $\hat\gamma_i$ satisfaisant aux conditions :

$$a) \quad \hat\gamma \cap C_i = \emptyset ; \qquad b) \quad S^{\hat\gamma_i}_{\psi_{ji}}(\alpha) \cap C_j = \emptyset, \qquad S^{\hat\gamma_i}_{\psi_{ji}}(\beta) \cap C_j = \emptyset ;$$
$$c) \quad S^{C'_i}_{\psi_{ji}}(\hat\gamma_i) \supset \gamma'_j .$$

Théorème 2 (³). — *Avec les notations précédentes et sous les conditions* CF, *il est possible de construire un cercle* C *contenant une image conforme biunivoque* C_1^* *de* C_1, C_2^* *de* C_2 *de sorte que* $C_1^* \cap C_2^*$ *soit une image conforme biunivoque de* C'_1 et de C'_2, *deux points de* C'_i *et* C'_j *associés par* ψ *ayant même image dans* $C_1^* \cap C_2^*$.

Nous écrirons $C = C_1 \overset{C'_1}{\sqcup} C_2$ ou $C_1 \overset{\psi}{\sqcup} C_2$ (*raccordement* de C_1 et C_2 suivant C'_1 ou par ψ). Si la correspondance entre C'_1 et C'_2 est maxima, c'est-à-dire si nous exigeons que $z_1 \in C_1$ et $z_2 \in C_2$ aient dans C des images distinctes dès que $z_1 \notin C'_1$, on peut affirmer, dans le cas où les frontières de C'_1 et C'_2 sont des arcs de Jordan partout accessibles, que si la condition CF 1° n'est pas réalisée $C_1 \overset{C'_1}{\sqcup} C_2$ ne peut pas exister.

(²) En nous écartant légèrement des notations classiques, et en désignant par z_0 un point de la frontière C d'un domaine D : $S^D_f(z_0)$ est l'ensemble des valeurs α telles qu'il existe une suite de points $\{z_\nu\}$, $z_\nu \in D$, ($z_\nu \to z_0$ quand $\nu \to \infty$) avec $\lim_{\nu \to \infty} f(z_\nu) = \alpha$; $S^C_f(z_0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ où $M_n = \overline{\bigcup_{0<|\xi - z_0|<1/n} S^D_f(\xi)}$ où $\xi \in C$.

On doit remarquer que dans l'expression des conditions CF, C_i et C_j ne jouent pas des rôles symétriques, le choix des indices i et j se fait à l'avance et les conditions CF peuvent être remplies pour un mode d'attribution des indices et non pour l'autre.

(³) Dans le mémoire cité (AEN) ce théorème est démontré sous des conditions moins larges : les frontières de C'_1 et C'_2 étaient des courbes de Jordan. Les hypothèses indiquées ici sont les plus larges possibles compatibles avec la démonstration donnée antérieurement. Il est à remarquer que les conditions CF sont exigées seulement dans un sens, qui n'a d'ailleurs pas d'influence sur le résultat.

§ 2. — Représentations du domaine quotient.

Soient inclus dans un cercle C deux domaines simplement connexes D et D′, $D \cap D' \neq \emptyset$, ayant chacun plus d'un point frontière sur la circonférence de C. Soit Δ le complémentaire dans C de $D \cup D'$ (On peut avoir $\mathring{\Delta} = \emptyset$). Supposons D représenté sur D′ conformément et biunivoquement par ψ satisfaisant (pour une attribution convenable des indices i et j, aux domaines D et D′) aux conditions CF.

Nous nous proposons de *construire une fonction holomorphe dans* C, *qu'elle représente sur un domaine doublement connexe, deux points de* C *ayant même image si et seulement si ils se correspondent par* ψ. Le problème posé est celui d'une représentation conforme biunivoque du domaine C^* quotient de C par la relation d'équivalence ψ.

Désignons par $\{C_\nu\}$ une suite de disques identiques à C ; E désignant un élément géométrique de C, l'élément correspondant dans C_ν est noté E_ν.

D'_1 et D_2 se trouvent en correspondance conforme biunivoque (comme aussi D_1 et D'_1, D_2 et D'_2, D_1 et D'_2), et cette correspondance satisfait aux conditions d'application du théorème 2. Il est donc possible de réaliser le raccordement $\mathcal{C}^2 = C_1 \lfloor\underline{\,D_2\,}\rfloor C_2$ normalisé au centre de C_1 (⁴). $\mathcal{C}^2$ est séparé en cinq régions :

$$D_1^2,\ \delta_1^2,\ d_{12}^2,\ \delta_2^2,\ D_2'^2 ;$$

chacune de ces régions n'a d'élément frontière commun qu'avec celles qui lui sont adjacentes, dans l'ordre où elles sont écrites. Les régions D_1^2 et D_3^1 sont en correspondance conforme biunivoque d'où la possibilité de construire $\mathcal{C}^3 = \mathcal{C}^2 \lfloor\underline{\,D'_3\,}\rfloor C_3$ séparé en sept régions :

$$D_3^3,\ \delta_3^3,\ d_{31}^3,\ \delta_1^3,\ d_{12}^3\ \delta_2^2,\ D_2'^3.$$

D'une manière générale, en opérant alternativement le raccordement d'un nouveau disque suivant D_{2k} et D'_{2k+1}, et en normalisant toujours au centre de $\mathcal{C}^{n-1}$, on obtiendra $\mathcal{C}^n = \mathcal{C}^{n-1} \lfloor\underline{\,D_n^*\,}\rfloor C_n$ (où D_n^*

(⁴) Le centre de C_1 a pour image le centre de $\mathcal{C}^2$, la dérivée de la représentation y étant égale à l'unité.

représente D_n si n est pair, D'_n si n est impair). $\mathcal{C}^n$ est séparé en $2n+1$ régions :

$$D^n_{n-1},\ \delta^n_{n-1},\ \ldots,\ \delta^n_5,\ d^n_{53},\ \delta^n_3,\ d^n_{31},\ \delta^n_1,\ d^n_{12},\ \delta^n_2,\ d^n_{24},\ \delta^n_4,\ \ldots,\ \delta^n_n,\ D'^n_n$$

pour n pair

$$D^n_n,\ \delta^n_n,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \delta^n_{n-1},\ D'^n_{n-1}$$

pour n impair.

Soit $\alpha_{\mu,n}$ un arc de la circonférence de $\mathcal{C}^n$ qui n'est pas frontière d'une des régions extrêmes : $\alpha_{\mu,n}$ est représenté analytiquement ($\alpha_{\mu,n}$ ouvert) sur un arc de la circonférence de tout $\mathcal{C}^m (m > n)$.

Ont été définies par les opérations de raccordement :

a) des fonctions $\varphi_{n,h}$ définies sur $\mathcal{C}^n$ qu'elles représentent conformément et biunivoquement sur une portion de $\mathcal{C}^{n+h}$.

b) des fonctions $f^n_j(z)$ définies sur C qu'elles représentent sur $\delta^{*n}_j = d^n_{ij} \cup \delta^n_j \cup d^n_{jk}$, avec les correspondances partielles $D \to d^n_{ij}$, $\Delta \to \delta^n_j$, $D' \to d^n_{jk}$.

On peut encore conclure d'après le théorème 1.

1° Les cercles $\mathcal{C}^n$ ont une limite $\mathcal{C}$: cercle de centre O et de rayon R, d'un plan ζ.

2° Pour tout n fixe les $\varphi_{n,h}$ ont une limite Φ_n.

3° $f_j(z) = \Phi \circ f^n_j$ est indépendante de n : $\Phi_n \circ f^n_j = \Phi_m \circ \varphi_{n,m-n} \circ f^n_j$.

4° Tout cercle $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ est couvert par l'image de $\mathcal{C}^n$ par Φ_n pour $n > N$ ($\mathcal{C}^{n,\infty} \supset \mathcal{C}'$ pour $n > N$).

5° Tout $\alpha_{\mu,n}$ est représenté analytiquement sur un arc de la circonférence de $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ se trouve séparé en une infinité de domaines adjacents, chacun d'eux n'ayant des éléments frontière en commun qu'avec les deux domaines qui l'encadrent lorsqu'on les écrit dans l'ordre :

$$\ldots,\ \delta_5,\ d_{53},\ \delta_3,\ d_{31},\ \delta_1,\ d_{12},\ \delta_2,\ d_{24},\ \delta_4,\ \ldots,$$

ou $\ldots,\ d_{ij},\ \delta_j,\ d_{jk},\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ d_{mn},\ \delta_n,\ d_{no},\ \ldots,$

$\delta^*_j = d_{ij} \cup \delta_j \cup d_{jk}$ est l'image de C par f_j

Si $z \in D$, $f_j(z) = f_i \circ \psi(z) \in d_{ij}$ donc si $\zeta \in d_{ij}$ $f_j^{-1}(\zeta) = \psi^{-1} \circ f_i^{-1}(\zeta)$ et $f_i^{-1} = \psi \circ f_j^{-1}$.

Si $z \in D'$ $\psi^{-1}(z) \in D$ donc $f_k \circ \psi^{-1}(z) = f_j(z) \in d_{jk}$.

Disons que ζ et $\zeta' \in \mathcal{C}$ sont équivalents s'il existe f_j et f_n tels que $f_j^{-1}(\zeta) = f_n^{-1}(\zeta')$ (Si $z \in D$, $z' \in D'$ avec $z' = \psi(z)$, $\zeta = f_j(z)$ et $\zeta' = f_n(z')$

sont équivalents puisque $\zeta \in d_{ij}$ et que l'on a alors

$$f_i^{-1}(\zeta) = \psi \circ f_j^{-1}(\zeta) = f_n^{-1}(\zeta')).$$

Posons $\zeta' = L(\zeta) = f_n \circ f_j^{-1}(\zeta)$ définie dans δ_j^*. Par $L(\zeta)$, δ_j^* est représenté conformément et biunivoquement sur δ_n^*; si $\zeta \in d_{ij}$, $f_j^{-1}(\zeta) = \psi^{-1} \circ f_i^{-1}(\zeta) \in D$, $f_n \circ f_j^{-1} = f_m \circ \psi \circ f_j^{-1}(\zeta) = f_m \circ f_i^{-1}(\zeta)$. $f_m \circ f_i^{-1}(\zeta)$ est définie sur δ_i^* et $L(\zeta)$ se trouve définie par prolongement dans $\delta_i^* \cup \delta_j^*$ qu'elle représente conformément et biunivoquement sur $\delta_m^* \cup \delta_n^*$. D'après le théorème de monodromie $L(\zeta)$ prolongeable dans $\mathcal{C}$ entier y est uniforme, et il en est de même pour $\zeta = L^{-1}(\zeta')$: $L(\zeta)$ conservant le cercle $\mathcal{C}$ est homographique. $L(\zeta)$ associe dans $\mathcal{C}$ des points appartenant toujours à des régions (des types δ_i et d_{jk}) différentes non contigues ([5]), et ne peut avoir de points doubles dans $\mathcal{C}$, donc elle n'est pas elliptique.

Posons $\mathfrak{d}_j = d_{ij} \cup \delta_j$. Il y a dans $\mathfrak{d}_l$ un et un seul point ζ' équivalent à $\zeta \in \mathfrak{d}_j$, quel que soit ζ. Considérons $\mathfrak{d}_i$ et $\mathfrak{d}_j$ contigus et la transformation L_1 qui associe les points équivalents de $\mathfrak{d}_i$ et $\mathfrak{d}_j$; L_1 prolongée dans $\mathcal{C}$ entier associe toujours les points équivalents de deux domaines $\mathfrak{d}_p$ et $\mathfrak{d}_q$ contigus (dans le même sens) ; donc toute transformation $L(\zeta)$ est une puissance d'itération positive ou négative de L_1.

L_1 possède deux points doubles sur la circonférence de $\mathcal{C}$, suivant lesquels s'accumulent les points équivalents d'un point quelconque. Ces points sont en général distincts : ils ne peuvent être confondus que si, sur la circonférence de C, les frontières de D et D' ont un point commun, qui se correspond à lui-même par le « prolongement de ψ à la frontière ».

Premier cas. L_1 a deux points doubles distincts : une transformation homographique $t = H(\zeta)$ peut leur associer o et ∞, en transformant l'intérieur de $\mathcal{C}$ en le demi-plan $\mathfrak{J}(t) > 0$. $H \circ L_1 \circ H^{-1} = k't$ (k' réel). Par la transformation $\theta(t) = \log t$ sur $\mathfrak{J}(t) > 0$ on obtient une bande $0 < \mathfrak{J}(\theta) < \pi$ et $\theta \circ H \circ L_1 \circ H^{-1} \circ \theta^{-1} = \theta + \log k' = \theta + k$.

Deuxième cas. L_1 a deux points doubles confondus : une transformation homographique $\theta = H(\zeta)$ leur associe le point à l'infini en transformant $\mathcal{C}$ en le demi-plan $\mathfrak{J}(\theta) > 0$. $H \circ L_1 \circ H^{-1} = \theta + k$.

([5]) Ce mode de démonstration n'est pas valable si d_{ij} et d_{jk} ont des éléments frontières communs : L qui associe les points équivalents de d_{ij} et d_{jk} contigus est la transformation L_1 dont il est question plus loin ; le fait que toute L est une puissance d'itération de L_1 ne fait pas intervenir d'hypothèse sur les points doubles de L_1. Or L n'a pas de point double ($L \neq L_1$) donc L_1 non plus, à l'intérieur de C.

Troisième cas. $\mathcal{C}$ est le plan entier ; L_1 est une translation puisque le point à l'infini est le seul point double ; par une rotation $\theta = H(\zeta)$ on peut amener cette translation à la forme $H \circ L_1 \circ H^{-1} = \theta + k$ (réel).

A. Isolons dans le plan θ une image d'un seul domaine δ_i^*. Dans cette image conforme biunivoque de C, les images de deux points de D et D′ associé par ψ se déduisent l'une de l'autre par la translation $\theta \to \theta + k$.

B. Effectuons sur le plan θ la transformation $w = e^{\frac{2i\pi}{k}\theta}$. Si $z \in D$ et $z' \in D'$ sont dans C, liés par $z' = \psi(z)$ ils ont même image dans le plan w. La fonction $w(z)$ répond au problème posé au début du paragraphe. Le domaine couvert par les valeurs w est soit une couronne circulaire (premier cas), soit l'intérieur du cercle unité privé de l'origine (deuxième cas), soit le plan entier privé du point à l'infini et de l'origine (troisième cas).

Hypothèses 3 et 4. — Soient sur une surface de Riemann $\mathcal{R}$ deux domaines simplement connexe Δ_1 et $\Delta_2 (\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset)$, représentés conformément et biunivoquement l'un sur l'autre par $\psi_{12}(z_2)$ ou $\psi_{21}(z_1) = \psi_{12}^{-1}$. Supposons que l'on puisse former un domaine $\Gamma \subset \mathcal{R}$, simplement connexe tel que $\Delta_1 \subset \Gamma$, $\Delta_2 \subset \Gamma$, et tel que par Φ (représentation conforme biunivoque de Γ sur un cercle C), la transposée de ψ_{12}, $\Phi \circ \psi_{12} \circ \Phi^{-1}$ soit une représentation ψ satisfaisant aux conditions CF [6].

THÉORÈME 3. — *Il existe une représentation conforme biunivoque g de Γ sur un domaine G du plan w, telle que $g \circ \psi_{ij} \circ g^{-1} = w + k$ (Théorème des translations isothermes).*

Fonctions d'automorphie. — Soit $\mathcal{R}$ la surface de Riemann d'une fonction analytique $w = f(z)$; une fonction d'automorphie de f, $z' = \varphi(z)$ satisfait à $f \circ \varphi = f$. $\varphi = f^1 \circ f$ est donc une fonction analytique définie sur un domaine $\Delta \subseteq \mathcal{R}$, et prenant ses valeurs dans $\mathcal{R}$.

A condition de restreindre suffisamment son domaine de définition toute fonction analytique peut être uniforme univalente: nous pouvons donc nous donner une fonction d'automorphie par une représentation conforme biunivoque ψ_{12} entre deux domaines Δ_1 et Δ_2 tous deux $\subset \mathcal{R}$.

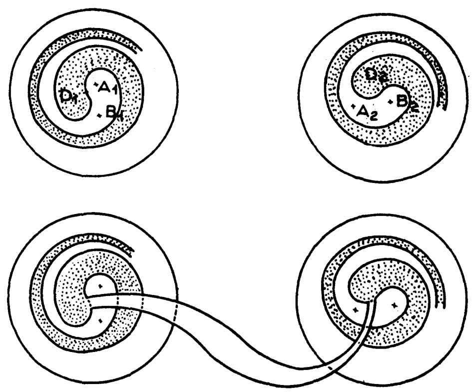
[6] C'est toujours le cas lorsqu'il existe sur la frontière de Δ_i un continu formé de points accessibles à la fois dans l'intérieur de Δ_i et dans la composante connexe de l'extérieur (sur $\mathcal{R}$) qui contient Δ_j ($i = 1, 2$; $j = 2, 1$).

THÉORÈME 4. — *Sous les hypothèses 4, concernant Δ_1, Δ_2, ψ_{12}, $\mathfrak{R}$, il existe une fonction analytique uniforme sur Γ et admettant dans Δ_1, ψ_{21} pour fonction d'automorphie.*

Remarque 1. — $\mathfrak{R}$ sera souvent le plan complexe ; ψ étant arbitraire, en restreignant au besoin son domaine de définition on peut affirmer qu'il existe toujours une fonction holomorphe dans une portion simplement connexe du plan admettant ψ pour fonction d'automorphie : la fonction trouvée peut être prolongeable au dela du domaine où nous venons de la définir, mais nous ne donnons aucune précision sur ce qui se passe dans le domaine ainsi étendu.

Remarque 2. — Il est des cas où la fonction d'automorphie est donnée simplement par une relation entre les projections des points des domaines Δ_2 et Δ_1 sur un plan complexe ou une autre surface de Riemann R. $\mathfrak{R}$ n'étant pas imposée à l'avance nous pourrons dans certains cas profiter de la liberté de ce choix pour réaliser les conditions CF sur un domaine Γ.

Exemple : soit une relation conforme biunivoque entre les deux domaines spiralés D_1 et D_2. Nous ne pouvons pas construire Γ dans le plan où D_1 et D_2 nous sont donnés. Mais si nous introduisons la surface de Riemann fermée, recouvrement d'ordre 2 du plan, ramifiée en $A_1B_1A_2B_2$, on peut construire Γ sur cette surface, les domaines D_1 et D_2 étant aussi définis sur elle.



Dans le théorème des translations isothermes on aura toujours la liberté de remplacer $\mathfrak{R}$ par une surface $\mathfrak{R}^*$, recouvrement de $\mathfrak{R}$ relativement ramifié ou non, si cette opération peut permettre comme dans l'exemple précédent la construction de Γ.

§ 3. — Généralisation.

Le théorème 4 permet de démontrer le suivant dit théorème de représentation conforme des surfaces de Riemann quasi simples (7).

Théorème 5. — *Une surface de Riemann (variété analytique complexe à deux dimensions) de genre zéro (ou quasi-simple) est représentable conformément et biunivoquement sur un domaine plan.*

Ce théorème nous permet de généraliser les théorèmes 3 et 4, et si nous l'admettons à priori, la méthode que nous allons suivre nous permettrait d'en déduire les théorèmes 3 et 4.

Soient sur une surface de Riemann $\mathcal{R}$ de la variable ζ, une suite finie ou infinie de domaines $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_p, \ldots$ représentés conformément et biunivoquement l'un sur l'autre par des fonctions ψ_{ij}; $\Delta_i = \psi_{ij}(\Delta_j)$; $\psi_{ij}^{-1} = \psi_{ji}$; $\Delta_p \cap \Delta_q = \emptyset (p \neq q)$. Soient sur $\mathcal{R}$, $\mathcal{V}(\zeta)$ un voisinage de ζ, l'uniformisante locale étant notée $\mathcal{U}(\mathcal{V})$ ou $\mathcal{U}(\zeta)$. Nous supposerons que les frontières Γ_i des Δ_i sont formées d'arcs continus dont tous les points sont accessibles par l'intérieur et par l'extérieur (supposé connexe) (8) sur $\mathcal{R}$. Ainsi la correspondance ψ_{ij}^* réalisée par prolongement de ψ_{ij} aux frontières, est ponctuelle bicontinue et biunivoque; séparons sur la frontière de chaque Δ_i deux suites d'arcs ordonnés circulairement de la manière suivante (9)

$$\begin{array}{l} \ldots \quad \Lambda^i_{p,p-1}, \quad \Lambda^i_{p-1,p-2}, \quad \ldots, \quad \Lambda^i_{3,2}, \quad \Lambda^i_{2,1}, \quad \Lambda^i_{1,0}, \\ \qquad\qquad\qquad \Lambda^i_{0,1}, \quad \Lambda^i_{1,2}, \quad \Lambda^i_{2,3}, \quad \ldots, \quad \Lambda^i_{p-2,p-1}, \quad \Lambda^i_{p-1,p}, \quad \ldots \end{array}$$

avec $\psi_{ij}^*(\Lambda^j_{m,n}) = \Lambda^i_{m,n}$ et $\overline{\Lambda}^i_{m,n} \cap \overline{\Lambda}^i_{m',n'} = \emptyset$ si $m \neq m'$ ou $n \neq n'$.

Joignons sur $\mathcal{R}$, $\Lambda^i_{i,i-1}$ à $\Lambda^{i-1}_{i-1,i}$ par une bande $\mathcal{B}_i$ ne se recouvrant pas, limitée par des arcs de Jordan de sorte que

$$\mathcal{B}_i \cap \Delta_m = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$$
$$i = 1, 2, \ldots, p \ldots \qquad m = 0, 1 \ldots q \ldots$$

(7) Le mode de démonstration sera publié ultérieurement. Voir aussi W. H. Gottshalk : Conformal mapping of abstract Riemann surfaces. University of Pennsylvania, 1950 (méthode des fonctions harmoniques).

(8) Ces restrictions ne sont pas nécessaires ; nous les faisons pour simplifier le texte de la démonstration valable sous des conditions aux frontières beaucoup plus générales : On peut supposer par exemple qu'il existe sur chaque Γ_p un arc de Jordan γ_p accessible par l'intérieur (supposé connexe), nous devrons ajouter seulement quelques restrictions concernant la succession des images des γ_p sur la circonférence d'une image circulaire commune de tous les Δ_p, sur laquelle les points de Δ_i et Δ_j associés par ψ_{ij} aient même image.

Soit $\mathcal{D}_i = \Delta_i \cup \Lambda^i_{i,\,i-1} \cup \mathcal{B}_i \cup \Lambda^{i-1}_{i-1,\,i}\,(i = 1, 2 \ldots p \ldots)$, $\mathcal{D}_0 = \Delta_0$ et $\mathcal{C} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{D}_i$.

$\mathcal{C}$ est simplement connexe; les relations ψ_{ij} établissent entre parties de $\mathcal{C}$ des relations d'équivalence. Soit $\mathcal{C}^*$ le domaine quotient : nous allons montrer que $\mathcal{C}^*$ est une variété analytique complexe : Représentons $\mathcal{C}^*$ topologiquement par $t = \mathcal{T}(\zeta)$ sur un domaine C de connexion égale au nombre de domaines donnés Δ_i. $\mathcal{T}(\zeta)$ doit être univalente dans $\bigcup \mathcal{B}_k$ (l'ordre de succession des $\Lambda^i_{m,\,n}$ le permet, même sous les hypothèses de la remarque ([9])) et doit vérifier $\mathcal{T}(\zeta_i) = \mathcal{T}(\zeta_j)$, lorsque $\zeta_j = \psi_{ji}(\zeta_i)$, $(\zeta_i \in \Delta_i)$. Soient $B_i = \mathcal{T}(\mathcal{B}_i)$, $D = \mathcal{T}(\Delta_i)$ (nous prendrons comme domaine D un cercle), $L_{m,\,n} = \mathcal{T}(\Lambda^i_{m,\,n})$. Sous les conditions de régularité que nous avons imposées aux frontières nous pouvons pour construire $\mathcal{T}$, réaliser d'abord la représentation de tous les Δ_i sur un même cercle : cette représentation prolongée aux frontières est ponctuelle, bicontinue, biunivoque, et vérifie $\mathcal{T}_i(\zeta_i) = \mathcal{T}_j \circ \psi^*_{ij}(\zeta_i)$, $(\zeta_i \in \overline{\Delta}_i)$, ([10]). On peut ensuite réaliser la représentation de chaque $\mathcal{B}_i$ séparément ([11]).

Structure analytique de C. Pour vérifier que $\mathcal{C}^*$ est une variété analytique complexe, nous allons faire de $\mathcal{T}$ une représentation conforme, en dotant C d'une structure analytique complexe, compatible avec la topologie du plan qu'il possède déjà. Soit dans C, la famille des voisinages d'un point z_0 formée des cercles $v(z_0, \rho)(|z - z_0| < \rho)$ tels que $v(z_0, \rho) \subset C$ et vérifiant les conditions suivantes

1° $z_0 \in B_i$. Choisissons $\rho < \rho_0 =$ distance de z_0 à la frontière de B_i.

([9]) Pour la démonstration du théorème 6 cette condition peut être remplacée par la suivante moins restrictive ; il ne doit pas y avoir de disposition du type :

$$\ldots,\ \Lambda^i_{p,x},\ \ldots,\ \Lambda^i_{m,y},\ \ldots, \Lambda^i_{p,x},\ \ldots,\ \Lambda^i_{m,y},\ \ldots$$

([10]) $\mathcal{T}_i$ et $\mathcal{T}_j$ désignent les restrictions de $\mathcal{T}$ aux domaines Δ_i et Δ_j, distincts si on considère $\mathcal{T}$ appliquée à C et non à C^*.

([11]) Sous des hypothèses moins restrictives lorsque ψ^*_{ij} n'est pas ponctuelle, on pourra pour réaliser $\mathcal{T}$ faire un découpage de chaque Δ ; en secteurs par des arcs de Jordan intérieurs ; chaque secteur étant contigu à un arc $\Lambda^i_{m,n}$ est un seul (un arc est ici un ensemble d'éléments frontières ayant pour image par représentation conforme sur un cercle, un arc de la circonférence). Nous adjoignons alors à chaque $\mathcal{B}_i$ les deux secteurs de Δ_i et Δ_{i+1} qui lui sont contigus : on peut alors réaliser les représentations topologiques de chaque bande « étendue » de manière à satisfaire aux conditions de continuité qui permettent de raccorder les extrémités de ces bandes en une image continue des Δ_i.

Associons à $v(z_0, \rho)$ l'uniformisante locale $K \circ \mathfrak{U} \circ \mathcal{C}^{-1}[v(z_0, \rho)]$ où K est une représentation conforme entre domaines plans.

2° $z_0 \in L_{m,n}$. z_0 est image d'un seul $\zeta_0 \in \mathcal{C}$ $\zeta_0 \in \Lambda_{m,n}^m$ (où l'on a $n = m + \varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$). On prendra $\rho < \rho_0$ de sorte que

$$v(z_0, \rho_0) \subset (D \cup L_{m,n} \cup B_{m'}) \quad \text{où} \quad m' = \max(m, n) = m + \frac{1}{2}(1 + \varepsilon).$$

$\mathcal{C}^{-1}[v(z_0, \rho]$ est uniforme et l'on a $\mathcal{C}^{-1}[v(z_0, \rho)] \subset (\Delta_m \cup \mathcal{B}_{m'} \cup \Lambda_{m,n})$. L'uniformisante locale est $K \circ \mathfrak{U} \circ \mathcal{C}^{-1}[v(z_0, \rho)]$ uniforme.

3° $z_0 \in D$. $\mathcal{C}^{-1}(v)$ et multiforme (les branches en sont $\mathcal{C}_j^{-1}(v)$). Par définition de la correspondance conforme réalisée par ψ_{ij} entre domaines de $\mathfrak{R}$ on a $\mathfrak{U}(\delta) = k \circ \mathfrak{U} \circ \psi(\delta)$ où k est une représentation conforme entre domaines plans. Prenons alors comme uniformisante locale de $v(z_0, \rho)$, (où $\rho < \rho'_0 =$ distance de z_0 à la frontière de D) : $K \circ \mathfrak{U} \circ \mathcal{C}^{-1}[v(z_0, \rho)]$, le facteur K permet d'identifier toutes les uniformisantes locales quelle que soit la branche $\mathcal{C}_i^{-1}$ utilisée.

Pour vérifier que l'on a bien défini sur C une structure de surface de Riemann, on doit vérifier que les images de $v_1 \cap v_2$ par les uniformisantes locales de v_1 et de v_2 sont en correspondance conforme. C'est évident toutes les fois que $\mathcal{C}^{-1}$ est uniforme puisque $\mathcal{C}^{-1}(v_1) \cap \mathcal{C}^{-1}(v_2)$ est alors $\neq \emptyset$ si $v_1 \cap v_2 \neq \emptyset$ et les uniformisantes locales de $\mathfrak{V}_1 = \mathcal{C}^{-1}(v_1)$, et $\mathfrak{V}_2 = \mathcal{C}^{-1}(v_2)$ représentent bien $\mathcal{C}^{-1}(v_1) \cap \mathcal{C}^{-1}(v_2)$ sur des domaines en correspondance conforme biunivoque. Si $\mathcal{C}^{-1}(v_1)$ est multiforme ($v_1 \subset D$) on a vu que l'on pouvait prendre pour l'uniformisante locale, n'importe quelle branche de $\mathcal{C}^{-1}$, en particulier nous pouvons en prendre une, telle que $\mathcal{C}^{-1}(v_1) \cap \mathcal{C}^{-1}(v_2) \neq \emptyset$ si $v_1 \cap v_2 \neq \emptyset$ et on est dans le cas précédent. $\mathcal{C}^*$ est donc bien une variété analytique complexe à laquelle on peut appliquer le théorème 5.

THÉORÈME 6. — *Soient sur une surface de Riemann $\mathfrak{R}$, une suite de domaines simplement connexes, Δ_0, Δ_1, ... Δ_p... limités par des arcs de Jordan, et représentés conformément et biunivoquement l'un sur l'autre par des fonctions ψ_{ij}.*

Il est alors possible de construire sur $\mathfrak{R}$ un domaine Γ simplement connexe tel que $\Delta_p \subset \Gamma$, et une fonction f holomorphe dans Γ telle que $f(\zeta) = f(\zeta')$ si et seulement si $\zeta \in \Delta_p . \zeta' \in \Delta_q$ (p et q quelconques) avec $\zeta' = \psi_{qp}(\zeta)$.

En d'autres termes *il existe une fonction f définie dans un domaine Γ et admettant dans un domaine donné $\Delta_{i_0} \subset \Gamma$ toutes les fonctions ψ_{ij_0} pour fonctions d'automorphie.*

D'après la relation d'ordre imposée aux $\Lambda^i_{m,n}$ on a pu imposer à C la condition topologique suivante : il existe dans le plan de C un point ω tel que si ζ parcourt un arc joignant deux points $\zeta_i \in \Delta_i$ $\zeta_{i+1} \in \Delta_{i+1}$, $\zeta_{i+1} = \psi_{i+1,i}(\zeta_i)$, son image $z = \mathcal{T}(\zeta)$ parcourt une courbe fermée de sorte que $\arg^+(z - \omega)$ croisse de 2π.

Par une représentation conforme de C (muni de la structure analytique dont nous l'avons doté) nous conserverons cette propriété d'existence de ω, en appliquant C sur une couronne circulaire fendue suivant des arcs de cercle : le centre de la couronne sera ce point ω que nous prenons pour origine du nouveau plan ω. La transformation $t = \log \omega$ fournira une représentation conforme biunivoque de Γ pour laquelle les images des Δ_p se déduisent les unes des autres par des translations $2in\pi$, ces translations associant des points de Γ associés par ψ_{ij}.

Théorème 7. — *Sous les hypothèses du théorème 6 il est possible de trouver une fonction g holomorphe dans* Γ, *univalente telle que* $g(\zeta_q) = g(\zeta_p) + 2i(q-p)\pi$ *si* $\zeta_p \in \Delta_p$ $\zeta_q \in \Delta_q$ $\zeta_q = \psi_{qp}(\zeta)$.

On peut faire ici les mêmes remarques que celles que nous avons déjà faites à la fin du § 2 sur la liberté que nous avons de choisir $\mathcal{R}$.

(Parvenu aux Annales le 5 novembre 1951.)