

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CLAUDE ROGER

**Étude des  $\Gamma$ -structures de codimension  
1 sur la sphère  $S^2$**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 23, n° 4 (1973), p. 213-227

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1973\\_\\_23\\_4\\_213\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_4_213_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ÉTUDE DES $\Gamma$ -STRUCTURES DE CODIMENSION 1 SUR LA SPHÈRE $S^2$

par Claude ROGER

Dans ce travail nous démontrons que  $\pi_2(B\Gamma_1^r) = 0$  pour  $r = 0$  ou  $\infty$  c'est-à-dire que toutes les  $\Gamma$ -structures de classe  $C^0$  ou  $C^\infty$  sur  $S^2$  se prolongent au disque  $D^3$  ce qui est un cas particulier d'un résultat annoncé par Mather <sup>(1)</sup> dans [4].

Nous allons tout d'abord démontrer que toute  $\Gamma$ -structure sur  $S^2$  est concordante <sup>(2)</sup> à une  $\Gamma$  structure de type particulier appelée « suspension ».

**PROPOSITION 1.** — *Toute  $\Gamma$ -structure de codimension 1 et de classe  $C^r$   $r \geq 2$  sur une variété  $V^n$  est concordante à une  $\Gamma$ -structure définie par des fonctions de Morse.*

*Démonstration.* — D'après Haefliger [1] la notion de  $\Gamma$ -structure est équivalente à celle de microfibré feuilleté.

Soit  $F$  la  $\Gamma$ -structure considérée sur  $V^n$ , il existe  $\begin{matrix} E^{n+1} \\ \downarrow p \\ V^n \end{matrix} \xrightarrow{i}$

un microfibré, muni d'un feuilletage transverse aux fibres,  $\tilde{F}$  tel que si  $i$  est la section de ce microfibré, la  $\Gamma$ -structure  $F$  est induite de  $\tilde{F}$  par l'application  $i: .F = i_*(\tilde{F})$ .

Soient  $(U_j, f_j)$  les cartes du feuilletage  $\tilde{F}$ , on peut supposer que ce sont des ouverts de cartes de la variété  $E^{n+1}$  donc que  $U_j \subset \mathbf{R}^{n+1}$   $f_j: U_j \rightarrow \mathbf{R}$  est une submersion donc une fonction sans point critique  $\forall x \in U_j, d_x f_j \neq 0$ .

Comme  $F = i_*(\tilde{F})$ , la  $\Gamma$ -structure  $F$  est donnée par les

<sup>(1)</sup> Les démonstrations des propositions 2 et 3 sont d'ailleurs largement inspirées des travaux de Mather.

<sup>(2)</sup> Il est rappelé que deux  $\Gamma$ -structures  $F_0$  et  $F_1$  sur une variété  $M$  sont concordantes s'il existe une  $\Gamma$ -structure  $\hat{F}$  sur  $M \times I$  induisant  $F_i$  sur  $M \times \{i\}$   $i = 0, 1$ .

cartes  $(U_{j\cap} i(V^n), f_{j|U_{j\cap} i(V^n)})$  et le problème est donc de considérer les points critiques de  $f_j$  restreint à une hypersurface de  $\mathbf{R}^{n+1}$  (il suffit de regarder les choses localement) génériquement  $f_j$  n'a que des points critiques non dégénérés. On peut donc approcher l'application  $i$  par une application  $i'$  telle que  $f_j$  restreint à  $U_{j\cap} i'(V^n)$  n'ait que des points critiques non dégénérés.  $i'$  peut être choisie arbitrairement proche de  $i$ , on peut donc le supposer homotopes.

Donc si  $F' = i'_*(\tilde{F})$ ,  $F'$  et  $F$  sont des  $\Gamma$ -structures concordantes et  $F'$  est définie par des fonctions de Morse.

Dans le cas où  $r = 0$ , on peut utiliser un argument de « fonctions de Morse topologiques ».

Soit  $\gamma$  une  $\Gamma$ -structure de codimension 1 sur  $S^2$ , nous pouvons supposer que  $\gamma$  est définie par  $f = S^2 \rightarrow [0, 1]$  fonction de Morse. Comme  $\chi(S^2) = 2$ , nous pouvons affirmer :

Cardinal (points critiques d'indice 2 ou 0)

— Cardinal (points critiques d'indice 1) = 2.

Géométriquement les points critiques d'indice 0 ou 2 correspondent à des singularités de type « centre » et les points d'indice 1 à des singularités de type « col » parmi les feuilles de la  $\Gamma$ -structure  $\gamma$ .

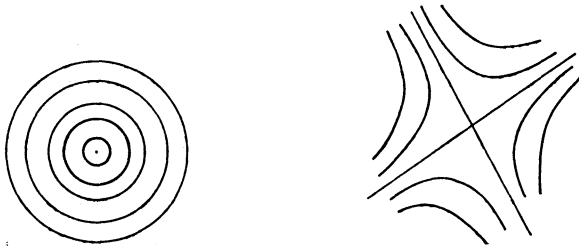


FIG. 1.

**PROPOSITION 2.** —  $\gamma$  est concordante à une  $\Gamma$ -structure ne contenant que deux centres.

*Démonstration.* — Il s'agit de supprimer les cols sans changer la classe de concordance de  $\gamma$ .

Soient  $p$  un centre et  $q$  un col. Soit  $\alpha$  un arc paramétré différentiable entre  $p$  et  $q$ . On peut supposer  $\alpha$  générique par rapport à la  $\Gamma$ -structure  $\gamma$  :  $\alpha$  ne rencontre pas d'autres singularités,  $\alpha$  est presque partout transverse aux feuilles de

la  $\Gamma$ -structure et  $\alpha$  admet un nombre fini de points de contact d'ordre 2.

(Il est clair qu'il suffit de bouger un peu  $\alpha$  pour supprimer tous les points de contact d'ordre supérieur.)

*Premier cas.* —  $\alpha$  est partout transverse à  $\gamma$ .

Soit  $D$  un voisinage tubulaire de  $\alpha$ ; la modification ci-dessous ne change rien en dehors de  $D$  et ne change pas la classe de concordance de  $\gamma$ .

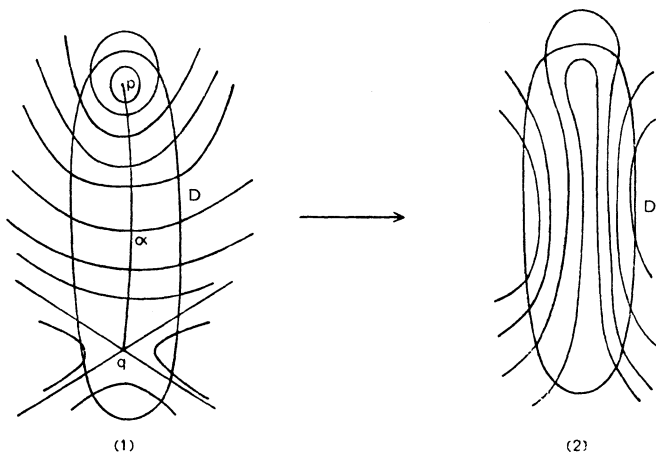


FIG. 2.

Les  $\Gamma$ -structures (1) et (2) définies sur  $D$  sont concordantes relativement au bord, ainsi que le prouve le schéma suivant :

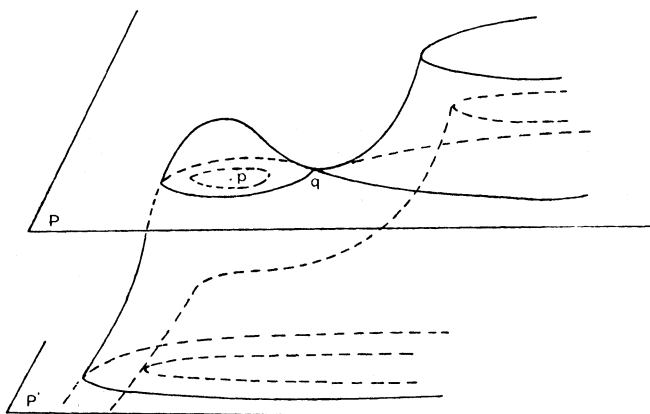


FIG. 3.

les surfaces induisent les  $\Gamma$ -structures (1) et (2) sur les plans  $P$  et  $P'$ . Ceci décrit bien une concordance entre (1) et (2).

Dans ce cas, nous avons bien supprimé un col et un centre sans changer la classe de concordance.

*Second cas.* —  $\alpha$  possède des points de contacts d'ordre 2 avec  $\gamma$ . Nous allons trouver un arc différentiable joignant deux centres dans une  $\Gamma$ -structure concordante à  $\gamma$ , avec un point de contact de moins que  $\alpha$ . En itérant ce processus, nous nous ramènerons au premier cas, ce qui démontrera bien la proposition 2.

Soit  $a$  le premier point de contact de  $\alpha$  avec  $\gamma$  en partant de  $p$

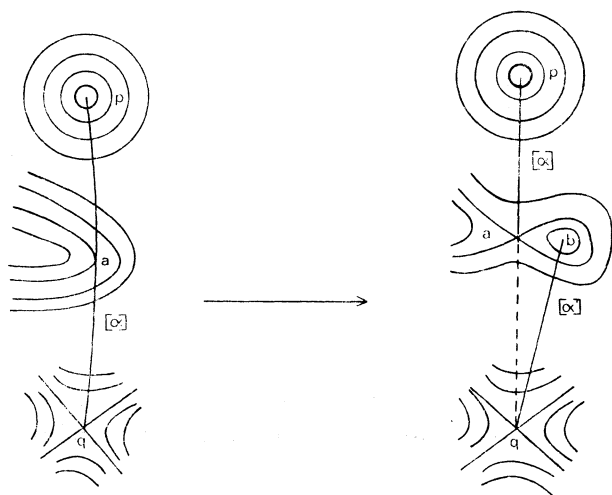


FIG. 4.

Par le procédé inverse de celui défini ci-dessus, on peut faire apparaître dans un petit voisinage de  $a$  un nouveau centre en  $b$  et un nouveau col en  $a$  (Ceci ne change pas la classe de concordance d'après l'argument ci-dessus.)

Soit  $\alpha'$  un arc différentiable entre  $b$  et  $q$ . Si  $b$  est suffisamment proche de  $a$ ,  $\alpha'$  n'aura pas plus de points de contacts avec  $\gamma$  entre  $b$  et  $q$  que  $\alpha$  entre  $a$  et  $q$ .

D'autre part l'arc  $\alpha$  entre  $p$  et  $a$  est partout transverse à  $\gamma$  car, par hypothèse,  $a$  est le premier point de contact. Le procédé décrit dans le premier cas permet de supprimer,

grâce à  $\alpha$ , les singularités  $a$  et  $p$  ce qui achève la démonstration de la proposition 2.

Maintenant nous allons définir les  $\Gamma$ -structures sur  $S^2$  appelées « suspensions » et démontrer que toute  $\Gamma$ -structure est concordante à une suspension.

Soit  $G_1^r$  le groupe des isomorphismes à support compact de classe  $C^r$  de  $\mathbf{R}$  pour  $r = 0 \dots \infty$ .

*Remarque.* — Cette construction ne marche pas en analytique. Mais Haefliger a montré dans [2] que  $\pi_2(BS\Gamma_1^\omega) = 0$ ; donc le même résultat reste vrai.

Soit  $I \times I$  feuilleté trivialement par les  $\{x\} \times I$  où  $x \in I$  alors  $\frac{I \times I}{(0, x) \sim (1, f(x))} = S^1 \times I$  est une variété munie d'un feuilletage de codimension 1; les deux composantes connexes du bord sont des feuilles.

Si on contracte  $S^1 \times \{0\}$  et  $S^1 \times \{1\}$  en deux points  $a$  et  $b$  on obtient une  $\Gamma$ -structure  $\alpha(f)$  sur  $S^2$  de classe  $C^r$  avec  $a$  et  $b$  comme seuls points singuliers; les feuilles sont soit des cercles centrés en  $a$  ou  $b$ , (ce qui correspond à  $x = f(x)$ ), soit des droites spiralant entre des cercles (ce qui correspond à  $x \neq f(x)$ ).  $f \in G_1^r$  est l'holonomie de la  $\Gamma$ -structure  $\alpha(f)$ ; une telle  $\Gamma$ -structure sera appelée suspension.

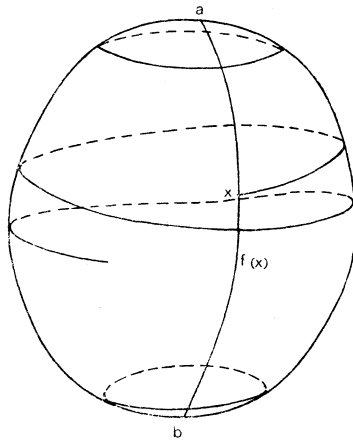


FIG. 5.

**PROPOSITION 3.** — *Toute  $\Gamma$ -structure sur  $S^2$  est concordante à une suspension.*

*Démonstration.* — Soit  $\gamma$  une  $\Gamma$ -structure quelconque sur  $S^2$ ; d'après les propositions 1 et 2, on peut supposer que  $\gamma$  est donnée par une fonction de Morse n'ayant que deux centres. Il est clair que  $\gamma$  sera une suspension s'il existe un arc différentiable joignant les deux centres et partout transverse à  $\gamma$  (on pourra alors, par le processus inverse de celui décrit ci-dessus, trouver  $f \in G_1^r$  tel que  $\alpha(f) = \gamma$ ).

Pour trouver un arc transverse joignant les deux centres sans changer la classe de concordance de  $\gamma$ , on peut utiliser le procédé défini dans la démonstration du second cas de la proposition 2 (ici  $q$  sera un centre au lieu d'être un col, ce qui ne change absolument rien) de proche en proche on supprimera tous les points de contact.

Nous sommes maintenant en mesure d'annoncer et de démontrer le

**THÉORÈME.** —  $r = 0$  ou  $\infty$  toute  $\Gamma$ -structure de classe  $C^r$  sur la sphère  $S^2$  se prolonge en une  $\Gamma$ -structure du disque  $D^2$ . (autrement dit  $\pi_2(B\Gamma_1^0) = \pi_2(B\Gamma_1^\infty) = 0$ ).

*Démonstration.* — D'après la proposition 3 il suffit d'établir ceci pour les  $\Gamma$ -structures du type « suspension ».

**LEMME.** — Une suspension est cobordante à un feuilletage du tore transverse à une fibration sur  $S^1$ .

Soit  $C$  et  $C'$  des courbes fermées de la suspension  $\gamma$  centrées respectivement en  $a$  et en  $b$ .

Soit  $S^2 \times I$  feuilletée par  $\gamma \times I$ .

Soit  $D^2 \times I$  feuilleté trivialement par  $D^2 \times \{\theta\}$   $\theta \in I$   
 $W = S^2 \times I \cup D^2 \times I$

$C \times \{0\}$  étant identifié à  $\partial D^2 \times 0$

$C' \times \{0\}$  étant identifié à  $\partial D^2 \times 1$ .

$W$  est une variété de dimension 3 telle que

$$\partial W = S^2 \times \{1\} \cup T^2 \quad (\text{union disjointe})$$

$$T^2 = (S^2 \times \{0\} - \text{Int } D - \text{Int } D') \cup \partial D^2 \times I$$

si  $\partial D = C$   $D$  et  $D'$  étant des disques centrés en  $a$  et  $b$

$$\partial D' = C'$$

$W$  est munie d'une  $\Gamma$ -structure induisant  $\gamma$  sur  $S^2 \times \{1\}$  et sur  $T^2$  une  $\Gamma$ -structure transverse à la fibration donnée

par la projection sur le premier facteur (ceci est vrai parce que  $\gamma$  est du type suspension) (voir la figure suivante).

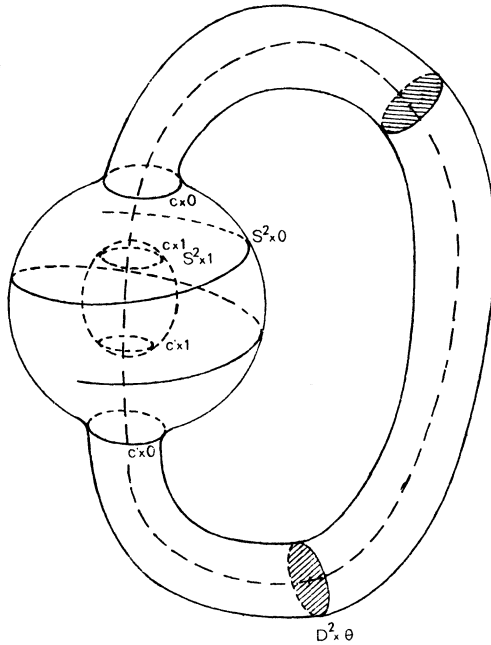


FIG. 6.

Au voisinage de  $C \times 0$  et  $C \times 1$  (respectivement de  $C' \times 0$  et de  $C' \times 1$ ), le feuilletage de  $W$  a l'allure suivante :

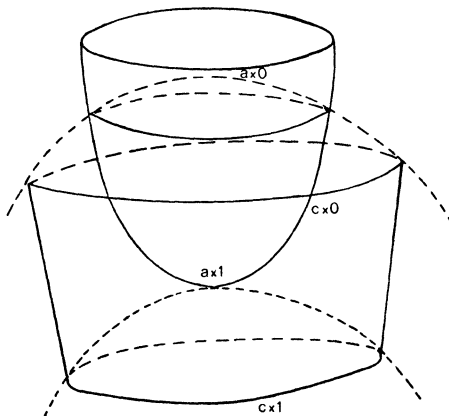


FIG. 7. — Les feuilles sont en traits pleins et les surfaces  $S^2 \times 0$  et  $S^2 \times 1$  sont en pointillés fins.



. Dans le cas où  $r = 0$  ce feuilletage de  $T^2$  se prolonge en un feuilletage du tore solide grâce au procédé défini par Rosenberg et Thurston dans [7] proposition 1.

. Dans le cas où  $r = \infty$  ce feuilletage est défini par un difféomorphisme  $f$  de  $S^1$ , de classe  $C^\infty$ , qui est son holonomie (cf. définition de la suspension sur  $S^2$ ).

Mais d'après Herman [3] ou Moser [6]  $H_1(\text{Diff}^\infty(S^1)) = 0$  (il s'agit ici de l'homologie de groupe discret, c'est-à-dire de l'homologie de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane  $K(\text{Diff}^\infty(S^1), 1)$ )

Donc  $\frac{\text{Diff}^\infty(S^1)}{[\text{Diff}^\infty(S^1), \text{Diff}^\infty(S^1)]} = 0$  tout difféomorphisme de classe  $C^\infty$  du cercle  $S^1$  s'écrit comme un produit de commutateurs; si le feuilletage est donné par  $f$  on peut donc écrire

$$f = [\alpha_1, \alpha_2] \dots [\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}] \quad \text{où les } \alpha_i \in \text{Diff}^\infty(S^1)$$

Un procédé dû à John Mather (non publié) permet de montrer qu'un feuilletage de  $T^2$  donné par un difféomorphisme qui est un produit de commutateurs est cobordant à 0.

Nous donnons ici une esquisse de la démonstration dans le cas où  $f = [\alpha_1, \alpha_2]$  (voir aussi [7] où un procédé analogue est décrit).

Soit  $\Sigma = T^2 - (\text{disque ouvert})$  la surface à bord de genre 1. Soient  $a$  et  $b$  des cercles plongés représentant des générateurs de  $\pi_1(\Sigma)$

$$\partial\Sigma \simeq S^1 \quad \text{dans } \pi_1(\Sigma) \quad \text{on a } [\partial\Sigma] = [[a], [b]]$$

Dans  $\Sigma \times S^1$  soient  $T_1 = a \times S^1$  et  $T_2 = b \times S^1$ . On

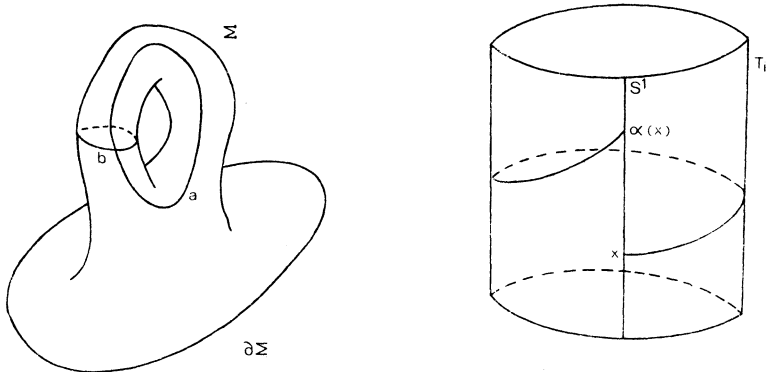


FIG. 8.

peut feuilletter  $T_1$  et  $T_2$  par la suspension de  $\alpha_1$  et de  $\alpha_2$  : feuilletage transverse aux fibres.

Soit  $\tau$  un voisinage tubulaire trivial de  $T_1 \cup T_2$ . Sur  $\tau$  on a le feuilletage produit par  $[0, 1]$

$$\Sigma \times S^1 - \tau(T_1 \cup T_2) = [\Sigma - \tau(a \cup b)] \times S^1 = \partial\Sigma \times I \times S^1.$$

Le bord de  $\tau$  est un tore  $T^2$  : on peut vérifier que son feuilletage est donné par la suspension de  $[\alpha_1, \alpha_2]$  (\*).

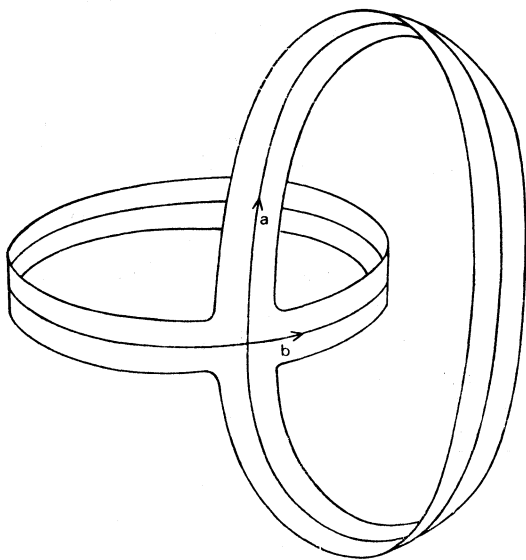


FIG. 9.

(Dans le cas général où  $f = [\alpha_1, \alpha_2] \dots [\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}]$  le même procédé marche en remplaçant  $\Sigma$  par la surface à bord de genre  $n$ ). Ceci démontre que toute  $\Gamma$ -structure de classe  $C^\infty$  sur  $S^2$  se prolonge en un feuilletage d'une variété  $V^3$  telle que  $\partial V^3 = S^2$ .

Ceci est vrai en particulier pour les  $\Gamma$ -structures à fibré normal trivial. Si  $F\Gamma_1^\infty$  est la fibre de l'application  $B\Gamma_1^\infty \rightarrow BO_1$   $F\Gamma_1^\infty$  classe ces  $\Gamma$ -structures.

Nous venons donc de montrer  $H_2(F\Gamma_1^\infty) = H_2(B\Gamma_1^\infty) = 0$ .

(\*) Sur cette figure on voit bien que  $[\partial\Sigma] = [\partial\tau(a \cup b)] = [[a], [b]]$  dans  $\pi_1(\Sigma)$ , ceci parce que  $[\partial\Sigma] = [[a], [b]]$  dans  $\pi_1(\Sigma)$ .

Comme  $\pi_1(F\Gamma_1^\infty) = 0$  le théorème de Hurewicz nous donne

$$\pi_2(F\Gamma_1^\infty) = H_2(F\Gamma_1^\infty) = 0$$

comme

$$\pi_2(BO_1) = \pi_3(BO_1) = 0, \quad \pi_2(B\Gamma_1^\infty) = \pi_2(F\Gamma_1^\infty) = 0$$

et le théorème est bien démontré.

*Remarques :*

1) Par une construction tout à fait analogue on pourrait définir un homomorphisme surjectif

$$H_1(G_1^r) \rightarrow \pi_2(B\Gamma_1^r) \rightarrow 0$$

pour  $r = 0$  Mather [5] a montré que  $H_1(G_1^0) = 0$ .

Pour  $r = \infty$  Mather a montré dans [4] que

$$H_1(G_1^\infty) = H_1(\text{Diff}_1^\infty(S^1)) = 0.$$

Nous retrouvons bien le résultat du théorème.

Dans le cas  $r \neq 0, \infty$  il ne peut que  $\pi_2(B\Gamma_1^r) \neq 0$ . Cependant il résulte de [4] que l'inclusion  $G_1^r \rightarrow G_1^{r-4}$  induit la flèche nulle en homologie.  $H_1(G_1^r) \rightarrow H_1(G_1^{r-4})$  est nulle (c'est le théorème d'Arnol'd et Moser). Donc  $\pi_2(B\Gamma_1^r) \rightarrow \pi_2(B\Gamma_1^{r-4})$  est, elle aussi, la flèche nulle; s'il existe  $r$  tel que  $\pi_2(B\Gamma_1^r) \neq 0$  alors  $B\Gamma_1^{r+4} \rightarrow B\Gamma_1^r$  induite par l'inclusion ne serait pas une équivalence d'homotopie, ce qui donnerait une réponse négative au problème posé par Haefliger dans [2].

Il semble donc raisonnable de conjecturer que  $\pi_2(B\Gamma_1^r) = 0$  quel que soit  $r \geq 2$ .

2) Les méthodes ci-dessus peuvent être utilisées pour les  $\Gamma$ -structures sur une surface quelconque de genre  $g \geq 1$ .

Si  $Mg$  est la surface de genre  $g$ , pour toute  $\Gamma$ -structure sur  $Mg$  définie par des fonctions de Morse, on a le résultat suivant:  $\text{Card}(\text{centres}) - \text{Card}(\text{cols}) = \chi(Mg) = 2 - 2g$ .

Les propositions 1 et 2 impliquent donc que toute  $\Gamma$ -structure sur  $Mg$  est concordante à une  $\Gamma$ -structure ayant exactement  $2(g - 1)$  cols et aucun centre.

— En particulier si  $g = 1$ : toute  $\Gamma$ -structure sur le tore  $T^2$  est concordante à un feuilletage sous singularités.

Thurston a démontré que tout feuilletage de classe  $C^\infty$  du tore était cobordant à zéro (c'est-à-dire qu'il se prolonge

en un feuilletage d'une variété  $V^3$  telle que  $\partial V^3 = T^2$ ): sa méthode consiste d'abord à rendre le feuilletage transverse aux fibres de la projection, en supprimant successivement les composantes de Reeb, puis à faire comme ci-dessus.

Donc toute  $\Gamma$ -structure de classe C sur  $T^2$  est cobordante à zéro (il n'y a pas de problème pour recoller entre eux ces feuilletages sans perte de différentiabilité car tous les germes de feuilletage au voisinage de  $T^2$  coïncident).

*Appendice 1.* — Dans ce qui précède nous avons utilisé un résultat sur l'homologie de  $\text{Diff}(S^1)$  pour démontrer un théorème géométrique. Nous allons voir qu'inversement, des résultats géométriques sur les feuilletages permettent d'obtenir des résultats sur la cohomologie de  $\text{Diff}(S^1)$ .

Si l'espace total d'une fibration admet un feuilletage transverse aux fibres, son groupe de structure admet une réduction à un sous groupe discret de  $\text{Diff}(F)$ , si  $F$  est la fibre.

Si on note  $B_G$  un  $K(\text{Diff}(S^1), 1)$  un tel espace classifie tous les fibrés en cercles muni d'un feuilletage transverse aux fibres

$$\begin{array}{c} E_G \\ \downarrow \\ B_G \end{array}$$

$E_G$  est un espace fibré en cercles au-dessus de  $B_G$  muni d'un feuilletage (transverse aux fibres) universel.

Dans [7] Rosenberg et Thurston construisent des feuilletages transverses aux fibres sur  $V^3 = T_1(M^2) \rightarrow M^2$  (où  $M^2$  est une surface compacte et  $T_1(M^2)$  l'ensemble des vecteurs tangents de norme 1 pour une certaine métrique) avec des invariants de Godbillon-Vey (cf. [7]) non nuls dans  $H^3(V^3; \mathbf{R})$ .

Mais d'après ce qui précède, ces feuilletages sont induits de  $E_G$  par une application classifiante de  $M^2 \rightarrow B_G$  qui définit  $H^3(E_G; \mathbf{R}) \rightarrow H^3(V^3; \mathbf{R})$  en cohomologie; l'invariant de Godbillon-Vey étant fonctoriel, ceci permet d'affirmer que  $H^3(E_G; \mathbf{R})$  est non nul.

Regardons la suite spectrale de la fibration  $E_G \rightarrow B_G$ ,

$$\begin{array}{l} E_2^{s,t} = H^t(B_G; H^s(S^1, \mathbf{R})) \\ E_2^{s,t} = 0 \quad t \neq 0, 1 \end{array}$$

$t = 0$  ou

$$1 E_2^{s,t} = H^s(B_G; \mathbf{R}) = H^s(\text{Diff}(S^1); \mathbf{R})$$

$$E_\infty^{s,t} \text{ détermine } H^{s+t}(E_G; \mathbf{R})$$

$$0 \rightarrow E_2^{s,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{s+2,0} \rightarrow 0.$$

donc

$$E_3^{2,1} = \text{Ker} [H^2(\text{Diff}(S^1); \mathbf{R}) \rightarrow H^4(\text{Diff}(S^1); \mathbf{R})]$$

$$E_3^{3,0} = \frac{H^3(\text{Diff}(S^1); \mathbf{R})}{\text{Im} (H^1(\text{Diff}(S^1); \mathbf{R}) \rightarrow H^3(\text{Diff}(S^1); \mathbf{R}))}$$

d'après [3]

$$H^1(\text{Diff}(S^1); \mathbf{R}) = 0$$

d'où

$$E_3^{3,0} = H^3(\text{Diff}(S^1); \mathbf{R})$$

Si on regarde les différentielles  $d_i$  pour  $i \geq 3$ , on voit que  $E_\infty^{3,0} = E_3^{3,0}$  et  $E_\infty^{2,1} = E_3^{2,1}$ .

Donc  $H^3(E_G; \mathbf{R})$  est déterminé par  $E_3^{3,0}$  et  $E_3^{2,1}$ .

Comme  $H^3(E_G; \mathbf{R}) \neq 0$  on a le résultat suivant :

$H^3(\text{Diff}(S^1); \mathbf{R})$  et  $H^2(\text{Diff}(S^1); \mathbf{R})$  ne sont pas simultanément nuls.

[Gelf'and et Fuks ont obtenu directement des résultats beaucoup plus complets sur la cohomologie continue de  $\text{Diff}(S^1)$ .]

*Appendice 2.* — Nous nous intéressons ici au problème suivant : soit  $M_g$  une variété de dimension 2, orientable, munie d'une  $\Gamma_1^\infty$ -structure. On veut montrer que cette  $\Gamma_1^\infty$ -structure s'étend à une variété de dimension 3,  $V^3$ , telle que  $\partial V^3 = M_g$ .

Si la  $\Gamma_1^\infty$ -structure est transversalement orientée, comme  $\pi_2(F\Gamma_1^\infty) = \pi_1(F\Gamma_1^\infty) = 0$ , la réponse provient alors de la théorie des obstructions appliquées à la flèche classifiante

$$\begin{array}{ccc} M_g & \longrightarrow & F\Gamma_1^\infty \\ \cup & \nearrow & \\ V^3 & & \end{array}$$

Dans le cas général nous allons raisonner par récurrence sur le genre de la surface. Supposons donc le problème résolu pour les surfaces de genre  $\leq g - 1$ .

Soit  $\Gamma$  une  $\Gamma_1^\infty$ -structure sur une surface de genre  $g$ . ( $g \geq 2$ ). Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux courbes fermées en position générale par rapport à  $\Gamma$  et représentant des générateurs de  $\pi_1(Mg)$ . On veut faire une chirurgie feuilletée sur  $\alpha$  ou  $\beta$  (il s'agit de prolonger  $\Gamma$  à l'anse que l'on rajoutera).

$\Gamma$  induit sur  $\alpha$  et  $\beta$  des  $\Gamma_1^\infty$ -structures  $\gamma_\alpha$  et  $\gamma_\beta$ . Pour que l'on puisse faire la chirurgie feuilletée sur  $\alpha$  et  $\beta$ , il faut et il suffit que  $\gamma_\alpha$  ou  $\gamma_\beta$  représente la classe nulle dans  $\pi_1(B\Gamma_1^\infty) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .

Si  $\gamma_\alpha \neq 0$  et  $\gamma_\beta \neq 0$  on considère la courbe fermée.  $\alpha \# (+\beta)$  alors sa  $\Gamma_1^\infty$ -structure induite,  $\gamma_{\alpha\#\beta}$  sera nulle dans  $\pi_1(B\Gamma_1^\infty)$ .

On peut donc toujours faire une chirurgie feuilletée de manière à diminuer le genre de la surface d'une unité.

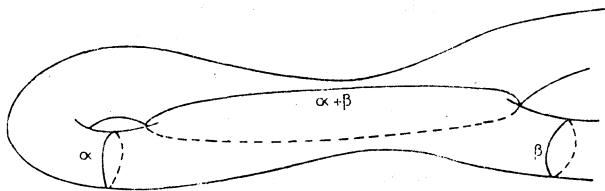


FIG. 10.

Pour fixer les idées, supposons la chirurgie faite sur  $\alpha$ .

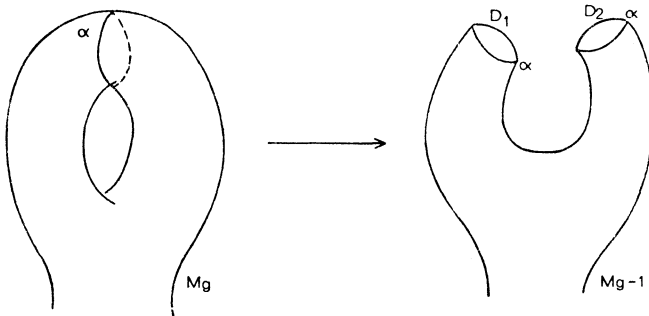


FIG. 11.

$$M_{g-1} = M_g - (\text{voir tub. de } \alpha) \cup D_1 \cup D_2$$

$\gamma_\alpha$  se prolonge en une  $\Gamma_1^\infty$ -structure sur  $D^2$  soit  $\tilde{\gamma}_\alpha : D^2 \rightarrow B\Gamma_1^\infty$ .

On a ainsi sur  $Mg_{-1}$  une  $\Gamma_1^\infty$ -structure  $\tilde{\Gamma}$  définie à partir de  $\Gamma$  et de  $\tilde{\gamma}_\alpha$ .

Par hypothèse de récurrence, il existe  $W$  variété de dimension 3, munie d'une  $\Gamma_1^\infty$ -structure  $\Gamma'$  telle que la restriction au bord soit  $\tilde{\Gamma}$

$$\begin{array}{ccc} W^3 & \xrightarrow{\Gamma'} & B\Gamma_1^\infty \\ \cup & \nearrow & \uparrow \\ & & \tilde{\Gamma} \\ Mg_{-1} & & \end{array}$$

Considérons la variété  $V^3 = \frac{W^3}{(D_1 = D_2)}$  elle vérifie  $\partial V^3 = Mg$ . Comme  $\tilde{\Gamma}|_{D_1} = \tilde{\Gamma}|_{D_2} = \tilde{\gamma}_\alpha$  on peut donc définir une application continue  $\Gamma'' : V^3 \rightarrow B\Gamma_1^\infty$  ( $\Gamma'$  passe au quotient) et  $\Gamma''|_{\partial V^3 = Mg} = \Gamma$ . La récurrence est donc bien démontrée.

— Pour commencer la récurrence : si  $g = 1$  on sait qu'une  $\Gamma_1^\infty$ -structure sur  $T^2$  est concordante à un feuilletage sans singularités. William Thurston a démontré (en utilisant  $H_1(\text{Diff } S^1) = 0$ ) que ces feuilletages étaient cobordants à zéro.

— On peut aussi commencer à  $g = 0$ . Comme  $\pi_2(B\Gamma_1^\infty) = 0$ , on sait prolonger une  $\Gamma_1^\infty$ -structure sur  $S^2$ . Pour passer du tore à la sphère, le même argument de chirurgie feuilletée (sur les deux générateurs de  $\pi_1(T^2)$ ) marche.

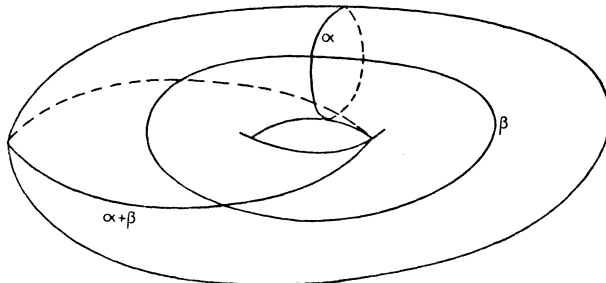


FIG. 12.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HAEFLIGER, Feuilletage sur les variétés ouvertes, *Topology* 9 (1970).
- [2] HAEFLIGER, *Homotopy and Integrability, Manifolds* Amsterdam, 1970, Springer 197.

- [3] HERMAN, *C.R.A.S.*, 1971.
- [4] MATHER, On Haefliger's Classifying Space I, Bulletin AMS, 1971.
- [5] MATHER, The Vanishing of the Homology of Certain Groups of Homomorphisms.
- [6] MOSER, A Rapidly Convergent Iteration Method and non Linear Differential Equations II, *Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa*, Vol. XX, pp. 499-535 (1966).
- [7] ROSENBERG et THURSTON, Some Remarks on Foliations [Preprint].

Manuscrit reçu le 17 octobre 1972.  
accepté par G. Reeb

Claude ROGER,  
E.N.S.J.F.  
48, Boulevard Jourdan  
Paris (XIV<sup>e</sup>).

---