ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

NESSIM SIBONY

Approximation de fonctions à valeurs dans un Fréchet par des fonctions holomorphes

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 4 (1974), p. 167-179
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_4_167_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24, 4 (1974), 167-179.

APPROXIMATION DE FONCTIONS A VALEURS DANS UN FRÉCHET, PAR DES FONCTIONS HOLOMORPHES

par Nessim SIBONY

1. Introduction et notations.

K étant un compact de $\mathbf{C}^n$ et E un espace de Fréchet, notons $\mathscr{C}(K, E)$ l'espace des fonctions continues sur K à valeurs dans E, muni de la famille de semi-normes

$$p_K(f) = \sup_{z \in K} p(f(z))$$

où p est une semi-norme continue sur E. Nous noterons H(K, E) l'adhérence dans $\mathscr{C}(K, E)$ des fonctions holomorphes dans un voisinage de K, à valeurs dans E; et A(K, E) les fonctions de $\mathscr{C}(K, E)$ qui sont holomorphes à l'intérieur de K[1]. Lorsque $E = \mathbf{C}$ nous noterons ces espaces $\mathscr{C}(K)$, H(K), A(K). Enfin U étant un ouvert de $\mathbf{C}^n$, $\mathscr{C}^\infty(U, E)$ désignera l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à valeurs dans E, muni de la topologie d'espace de Fréchet et $\mathscr{C}_c^\infty(U, E)$ l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact.

Dans [6] Henkin a démontré que lorsque K est l'adhérence d'un domaine strictement pseudoconvexe dans $\mathbf{C}^n$, A(K) = H(K); Petrosjan [9] a fait le même travail lorsque K est l'adhérence d'un polyèdre régulier.

(1) Lorsque K n'est pas l'adhérence de son intérieur A(K, E) désigne le sous-espace de $\mathscr{C}(K, E)$ constitué par les fonctions dont les restrictions à toute section K_z de K, $z \in \mathbf{C}^{n-1}$, est holomorphe dans l'intérieur de K_z relativement à $(\mathbf{C}^n)_z$.

Dans [10] Weinstock a étudié le même problème lorsque K est un produit de domaines strictement pseudoconvexes et de compacts de $\mathbf{C}$. La méthode utilisée dépend de la solution $\bar{\partial} u = \varphi$ avec des estimations L^∞, dans des ouverts d'un certain type, il obtient alors un théorème de localisation pour H(K).

Dans cet article nous remarquons que les théorèmes de Henkin et Petrosjan se généralisent lorsque les fonctions sont à valeurs dans un Fréchet, i.e. on a $A(K, E) = H(K, E)$ avec les mêmes conditions sur K. Ceci nous permet de montrer que $A(K, E) = H(K, E)$ si $K = \prod_{j=1}^{r} K_j$ où chaque K_j est soit l'adhérence d'un domaine strictement pseudoconvexe, soit l'adhérence d'un polyèdre régulier, soit un compact du plan tel que $A(K_j) = H(K_j)$. Nous répondrons au théorème 10 à une question posée par Weinstock [10] : si une fonction $f \in \mathscr{C}^1(U)$, où U est un voisinage d'un compact

$$K = \prod_{j=1}^{r} K_j \subset \mathbf{C}^n,$$

chaque K_j étant soit l'adhérence d'un ouvert strictement pseudoconvexe, soit un compact de $\mathbf{C}$, est telle que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \equiv 0$ sur K pour $1 \leqslant j \leqslant r$, est-ce que $f \in H(K)$? La réponse est affirmative même avec des hypothèses moins restrictives.

Au théorème 12, nous obtenons un théorème de localisation pour H(K) du même type que dans [10].

2.

Proposition 1. — *Soit* K *un compact de* $\mathbf{C}^n$ *et* E *un espace de Fréchet, on a* $H(K, E) = H(K) \hat{\otimes}_\varepsilon E$.

Pour démontrer cette proposition nous utiliserons le théorème suivant dû à A. M. Gleason [4].

Théorème 2. — *Soit* G *un ouvert d'une variété analytique complexe* M, *tel que* $\overline{G}$ *soit compact. Il existe une mesure de*

Radon positive sur le bord ∂G, *et une fonction* μ *mesurable* Q *définie sur* $G \times \partial G$ *telle que*

a) $(\forall b \in \partial G)\ m \to Q(m, b)$ *est analytique.*

b) $(\forall m \in G)\ b \to Q(m, b)$ *est* μ *intégrable.*

c) $m \to \int_{\partial G} |Q(m, b)|\, d\mu(b)$ *est continue.*

d) *Pour toute* $f \in A(\overline{G})$ *et* $m \in G$,

$$f(m) = \int_{\partial G} Q(m, b) f(b)\, d\mu(b).$$

Démonstration de la proposition 1. — Il suffit d'approcher toute fonction holomorphe dans un voisinage U de K et à valeurs dans E, par des fonctions de la forme $\sum_{i=1}^{k} f_i \otimes b_i$, où $f_i \in H(K)$ et $b_i \in E$. On peut supposer que $f \in \mathscr{C}(\overline{U}, E)$ et par suite d'après le théorème 2 on a

$$(\Lambda f)(z) = \int_{\partial U} Q(z, \zeta) \Lambda(f(\zeta))\, d\mu(\zeta) \tag{1}$$

où $\Lambda \in E'$, $z \in U$. Or E étant un espace de Fréchet, l'intégrale vectorielle $\int Q(z, \zeta) f(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ existe et elle est égale à $f(z)$ d'après (1). Soit p une semi-norme continue sur E; f étant continue sur ∂U, il existe une partition de ∂U en ensembles $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ deux à deux disjoints tels que

$$p(f(\zeta) - f(\zeta')) \leqslant \varepsilon$$

si ζ et ζ' appartiennent à V_i. Dans chaque V_i choisissons un point ζ_i, on a alors, d'après (1),

$$\begin{aligned} p\Big(f(z) - \sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i) \int_{V_i} Q(z, \zeta)\, d\mu(\zeta)\Big) &= p\Big(\sum_{i=1}^{k} \int_{V_i} (f(\zeta) - f(\zeta_i)) Q(z, \zeta)\, d\mu(\zeta)\Big) \\ \leqslant \sum_{i=1}^{k} \int_{V_i} p(f(\zeta) - f(\zeta_i)) |Q(z, \zeta)|\, d\mu(\zeta) &\leqslant \varepsilon \int_{\partial V} |Q(z, \zeta)|\, d\mu(\zeta) \leqslant \varepsilon M \end{aligned}$$

où M est la borne supérieure de la dernière intégrale lorsque z

parcourt $\overline{G} \subset U$; M est finie (théorème 2c); de plus on vérifie que $\int_{V_i} Q(z, \zeta)\, d\mu(\zeta)$ est holomorphe au voisinage de K.

Corollaire 3. — *Soient* K_1 *et* K_2 *deux compacts,*

$$K_1 \subset \mathbf{C}^{n_1}, \qquad K_2 \subset \mathbf{C}^{n_2}$$

et E *un espace de Fréchet. On a alors :*

$$H(K_1 \times K_2, E) = H(K_1, H(K_2, E)) = H(K_1) \widehat{\underset{\varepsilon}{\otimes}} H(K_2, E).$$

Démonstration. — Il est clair qu'on a les inclusions

$$H(K_1) \widehat{\underset{\varepsilon}{\otimes}} H(K_2, E) \subset H(K_1 \times K_2, E) \subset H(K_1, H(K_2, E)).$$

Or ce dernier espace est égal, d'après la proposition 1, à

$$H(K_1) \widehat{\underset{\varepsilon}{\otimes}} H(K_2, E).$$

Remarque. — Étant donné un compact $K \subset \mathbf{C}^n$, on dit qu'il est holomorphiquement convexe si l'application de K dans spectre H(K), qui à x fait correspondre l'homomorphisme ε_x, est surjective; le corollaire 3 permet alors d'affirmer que le produit de deux compacts holomorphiquement convexes l'est aussi.

Proposition 4. — *Soit* D *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, *strictement pseudoconvexe, à frontière de classe* $\mathscr{C}^3$, *et soit* E *un espace de Fréchet; on a*

$$A(\overline{D}, E) = H(\overline{D}, E) = A(\overline{D}) \widehat{\underset{\varepsilon}{\otimes}} E.$$

Ce théorème a été démontré lorsque $E = \mathbf{C}$ par Henkin [6], Grauert-Lieb [5], Kerzman [7]. C'est du théorème suivant, dû à Henkin [6], que nous déduirons la proposition 4.

Théorème 5 [6]. — *Il existe un domaine d'holomorphie* $\Omega \supset \overline{D}$, *des fonctions* $K(z, \zeta)$ *et* $\varphi(z, \zeta)$ *définies pour* $z \in \Omega$ *et* $\zeta \in \partial D$ *telles que :*

a) $K(z, \zeta)$ *et* $\varphi(z, \zeta)$ *sont holomorphes pour* $z \in \Omega$ *et continues en* $\zeta \in \partial D$.

b) *Pour tout* $\zeta \in \partial D$ *la fonction* $\varphi(z, \zeta)$ *s'annule sur* $\overline{D}$ *seulement au point* $z = \zeta$.

c) *Pour toute* $f \in A(\overline{D})$ *et pour tout* $z \in D$ *on a*

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) \frac{K(z, \zeta)}{\varphi^n(z, \zeta)} d\sigma(\zeta),$$

où $d\sigma$ *est la mesure de surface sur* ∂D.

d) *Soit* g *une fonction lipschitzienne dans* $\mathbf{C}^n$, *et* $f \in A(\overline{D})$, *alors la fonction*

$$f_g(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) g(\zeta) \frac{K(z, \zeta)}{\varphi^n(z, \zeta)} d\sigma(\zeta)$$

qui est définie pour $z \in D$, *se prolonge en une fonction de* $A(\overline{D})$.

Démonstration de la proposition 4. — Pour $z \in D$ considérons la mesure sur ∂D définie par $K(z, \zeta)\varphi^{-n}(z, \zeta)\, d\sigma(\zeta)$; si $f \in A(\overline{D}, E)$, pour tout $\Lambda \in E'$ on a $\Lambda f \in A(\overline{D})$ et

$$(\Lambda f)(z) = \int_{\partial D} (\Lambda f)(\zeta) \frac{K(z, \zeta)}{\varphi^n(z, \zeta)} d\sigma(\zeta).$$

Par suite en considérant l'intégrale vectorielle

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) \frac{K(z, \zeta)}{\varphi^n(z, \zeta)} d\sigma(\zeta), \tag{2}$$

on voit de même que pour g lipschitzienne dans $\mathbf{C}^n$ et $f \in A(\overline{D}, E)$, la fonction

$$f_g(z) = \int f(\zeta) g(\zeta) \frac{K(z, \zeta)}{\varphi^n(z, \zeta)} d\sigma(\zeta) = f(z) g(z) + \int f(\zeta)[g(\zeta) - g(z)] \frac{K(z, \zeta)}{\varphi^n(z, \zeta)} d\sigma(\zeta)$$

se prolonge en une fonction de $A(\overline{D}, E)$. Pour montrer la continuité dans $\overline{D}$ de f_g il suffit d'appliquer la démonstration de Henkin aux fonctions $\Lambda(f_g) = (\Lambda f)_g$ où $\Lambda \in E'$ et $\Lambda \leqslant p$ (p semi-norme continue sur E) et on voit que les majorations sont uniformes pour la famille $\Lambda(f_g)$; il suffit de remarquer alors que $p(f_g(z)) = \sup\limits_{\Lambda \leqslant p} |\Lambda f_g(z)|$.

Soit $(g_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une partition de l'unité dans $\mathbf{C}^n$ vérifiant les conditions suivantes :

a') Chaque g_i est lipschitzienne et son support S_i est de diamètre inférieur à $\delta > 0$.

b') La famille des supports $(S_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est localement finie.

Puisque ∂D est compact, on peut supposer que $\sum_{i=1}^{p} g_i(\zeta) = 1$ dans un voisinage de ∂D, et chaque S_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, rencontre ∂D. D'après 2) on a

$$f(z) = \sum_{i=1}^{p} \int (fg_i)(\zeta) \frac{K(z, \zeta)}{\varphi^n(z, \zeta)} d\sigma(\zeta) = \sum_{i=1}^{p} f_i(z),$$

si on a posé $f_i = f_{g_i}$.

Les propriétés *a*) et *b*) du noyau $K.\varphi^{-n}$ impliquent que f_i est holomorphe dans $\Omega \setminus S_i$. D'après *a'*), S_i est contenu dans une boule de centre $\zeta_i \in \partial D$ et de rayon δ. Soit n_i la normale extérieure à ∂D en ζ_i; pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $f_i(z - \varepsilon n_i)$ est holomorphe au voisinage de $\overline{D}$ et converge uniformément vers f_i quand ε tend vers zéro. Donc on peut approcher f dans $A(\overline{D}, E)$ par $\sum_{i=1}^{p} f_i(z - \varepsilon n_i)$ et chacune des fonctions de cette somme est holomorphe au voisinage de $\overline{D}$.

Le cas du polyèdre régulier se traite de la même manière; rappelons d'abord quelques définitions.

On dit qu'un domaine P, borné dans $\mathbf{C}^n$, est un polyèdre analytique s'il existe des fonctions $(\chi_\alpha)_{1\leqslant\alpha\leqslant N}$ analytiques dans un ouvert $U \supset \overline{P}$ telles que

$$P = \{z \in U : |\chi_\alpha(z)| < 1, \alpha = 1, \ldots, N\}.$$

P est un polyèdre de Weil si $N \geqslant n$ et si l'intersection de k hypersurfaces arbitraires définies par

$$|\chi_{\alpha_i}(z)| = 1, i = 1, \ldots, k, 1 \leqslant k \leqslant n,$$

a une dimension inférieure à $2n - k$.

Notons $\sigma_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = \{z : z \in \overline{P}, |\chi_{\alpha_i}(z)| = 1, i = 1, 2, \ldots, n\}$. On dit que le polyèdre P est régulier si pour tout $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

le jacobien de la matrice $\frac{\partial(\chi_{\alpha_1}, \ldots, \chi_{\alpha_n})}{\partial(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}$ est non nul sur $\sigma_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$.

Dans [8], Petrosjan a démontré que $A(\overline{P}) = H(\overline{P})$ si P est un polyèdre de Weil régulier. Sa démonstration permet en fait de montrer que $A(\overline{D}, E) = H(\overline{P}, E)$, si E est un espace de Fréchet. En effet, il démontre une formule intégrale pour les fonctions de $A(\overline{P})$, formule qui est vraie pour les fonctions de $A(\overline{P}, E)$, et les estimations fines qui interviennent dans la suite dépendent seulement du polyèdre.

De même dans [9] Vitushkin a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que, K étant un compact de $\mathbf{C}$, on ait $H(K) = A(K)$; dans [3] Gamelin et Garnett ont remarqué que les mêmes conditions sur K assuraient en fait que $A(K, E) = H(K, E)$ où E est un espace de Fréchet. Par suite, si K est un compact de $\mathbf{C}$ tel que $A(K) = H(K)$, on a $A(K, E) = H(K, E)$. Pour plus de commodité, nous introduisons la définition suivante.

Définition 6. — *Un compact* $K \subset \mathbf{C}^n$ *est dit admissible dans les trois cas suivants :*

a) Si $n = 1$ *et* $A(K) = H(K)$.

b) Si $K = \overline{D}$ *où* D *est un domaine strictement pseudo-convexe à frontière de classe* $\mathscr{C}^3$.

c) Si $K = \overline{P}$ *où* P *est un polyèdre de Weil régulier.*

Le théorème 7 résume la discussion qui précède.

Théorème 7. — *Si* K *est un compact admissible et* E *un espace de Fréchet, alors* $A(K, E) = H(K, E)$.

Corollaire 8. — *Soit* $K = \prod_{i=1}^{r} K_i$, *un produit de compacts admissibles et* E *un espace de Fréchet, alors*

$$A(K, E) = H(K, E) = \widehat{\bigotimes_{1 \leqslant i \leqslant r}} H(K_i) \mathbin{\widehat{\otimes}_\varepsilon} E.$$

Démonstration. — Nous allons raisonner par récurrence sur l'entier r. Pour $r = 1$, ce sont les théorèmes 1 et 7. Supposons l'assertion démontrée pour un produit de r

compacts admissibles, et soit $K = \prod_{i=1}^{r+1} K_i$ où chaque K_i est admissible. On a

$$A\left(\prod_{i=1}^{r+1} K_i, E\right) = A\left(\prod_{i=1}^{r} K_i, A(K_{r+1}, E)\right)$$
$$= H\left(\prod_{i=1}^{r} K_i, A(K_{r+1}, E)\right)$$

par l'hypothèse de récurrence appliquée à $\prod_{i=1}^{r} K_i$ et à l'espace de Fréchet $A(K_{r+1}, E)$ qui est égal à $H(K_{r+1}, E)$ puisque K_{r+1} est admissible. Donc

$$A\left(\prod_{i=1}^{r+1} K_i, E\right) = H\left(\prod_{i=1}^{r} K_i, H(K_{r+1}, E)\right) = H\left(\prod_{i=1}^{r+1} K_i, E\right)$$

d'après le corollaire 3. La seconde égalité résulte de la proposition 1.

Nous aurons besoin d'une version vectorielle d'un théorème bien connu lorsque les fonctions sont à valeurs scalaires.

PROPOSITION 9. — *Soit* K *un compact de* $\mathbf{C}$, f *une fonction de* $\mathscr{C}^1(U, E)$ *où* U *est un voisinage de* K *et* E *un espace de Fréchet; si* $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ *sur* K, *la restriction de* f *à* K *appartient à* $H(K, E)$.

Démonstration. — On peut supposer que f est à support compact, on a alors

$$f(\zeta) = (2i\pi)^{-1} \iint \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} (z - \zeta)^{-1} \, dz \wedge d\bar{z}$$

pour tout z, puisque cette relation est vraie pour tout (Λf) si $\Lambda \in E'$, en tenant compte de la relation $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} (\Lambda f) = \Lambda\left(\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)$.

Posons $K_n = \left\{ z/d(z, K) \leqslant \dfrac{1}{n} \right\}$ et soit φ_n une fonction $\mathscr{C}^\infty$ nulle sur K_n et égale à 1 hors de K_{n-1}. Si K' est le support de f, $\varphi_n \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ converge vers $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ dans l'espace $\mathscr{C}(K', E)$ puisque $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ est identiquement nulle sur K.

Posons

$$f_n(\zeta) = (2i\pi)^{-1} \iint \varphi_n(z) \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} (z - \zeta)^{-1} \, dz \wedge d\bar{z}.$$

On voit que f_n est holomorphe à l'intérieur de K_n; montrons que f_n converge vers f dans $\mathscr{C}(K, E)$. Soit p une semi-norme continue sur E; alors

$$\begin{aligned} p(f_n(\zeta) - f(\zeta)) &= p\Big[(2i\pi)^{-1} \iint (\varphi_n(z) - 1) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (z - \zeta)^{-1} \, dz \wedge d\bar{z}\Big] \\ &\leqslant (2i\pi)^{-1} \iint |\varphi_n - 1| p\Big(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\Big) |(z - \zeta)|^{-1} \, dx \, dy \end{aligned}$$

est arbitrairement petit pour n assez grand, grâce à la construction des φ_n et à l'hypothèse $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ sur K.

THÉORÈME 10. — *Soient* $K = \prod_{i=1}^{r} K_i$ *un produit de compacts admissibles et* $X = \prod_{j=1}^{s} X_j$ *un produit de compacts de* $\mathbf{C}$. *Soit* f *une fonction de* $\mathscr{C}^1(U, E)$, *où* U *est un voisinage de* $X \times K$, *telle que* $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \equiv 0$ *sur* $X \times K$; *alors*

$$f \in H(X \times K, E).$$

Lorsque $E = \mathbf{C}$ et qu'on suppose $f \in \mathscr{C}^{k+s+1}(U)$, ce théorème est démontré dans [10] par une méthode entièrement différente.

Démonstration. — Notons $A^1(X, E)$ l'espace des fonctions g de classe $\mathscr{C}^1$ sur X à valeurs dans E, telles que $\dfrac{\partial g}{\partial z_j} \equiv 0$ sur X pour $j = 1, \ldots, s$; soit $\bar{A}^1(X, E)$ l'adhérence dans $\mathscr{C}(X, E)$ de $A^1(X, E)$.

Il est clair que

$$f \in A(K, A^1(X, E)) \subset A(K, \bar{A}^1(X, E)) = H(K, \bar{A}^1(X, E))$$

d'après le corollaire 8, puisque K est un produit de compacts admissibles et $\bar{A}^1(X, E)$ un espace de Fréchet. Il nous suffit de montrer que $A^1(X, E) \subset H(X, E)$.

Pour cela, nous raisonnons par récurrence sur s. Pour

$s = 1$ c'est la proposition 9. Supposons l'inclusion démontrée pour s et soit $X = \prod_{j=1}^{s+1} X_j$; or

$$A^1(X, E) = A^1\left(\prod_{j=1}^{s} X_j, A^1(X_{s+1}, E)\right)$$

car pour deux ouverts V et V' on a

$$\mathscr{C}^1(V \times V', E) \simeq \mathscr{C}^1(V, \mathscr{C}^1, E)).$$

Par suite

$$A^1(X, E) \subset A^1\left(\prod_{j=1}^{s} X_j, \overline{A}^1(X_{s+1}, E)\right) \subset H\left(\prod_{j=1}^{s} X_j, H(X_{s+1}, E)\right)$$

en appliquant l'hypothèse de récurrence et le fait que

$$A^1(X_{s+1}, E) \subset H(X_{s+1}, E).$$

Le corollaire 3 permet de conclure puisque

$$H\left(\prod_{j=1}^{s} X_j, H(X_{s+1}, E)\right) = H\left(\prod_{j=1}^{s+1} X_j, E\right).$$

Remarquons qu'on a utilisé seulement le fait que

$$f \in A(K \times X, E)$$

et que pour tout $z \in K$, $f(z, \ ) \in A^1(X, E)$.

Lorsque X_0 est un compact de $\mathbf{C}$ et $f \in \mathscr{C}(X_0)$, Bishop a montré que $f \in H(X_0)$ si tout point de X_0 a un voisinage V tel que $f_{|\overline{V} \cap X_0} \in H(\overline{V} \cap X_0)$ [1]. Nous allons démontrer une version un peu plus générale de ce théorème que nous utiliserons pour étudier les algèbres $H(K \times X)$.

Théorème 11. — *Soient* $X = \prod_{j=1}^{s} X_j$ *un produit de compacts de* $\mathbf{C}$, B *un espace de Banach, et* f *une fonction de* $\mathscr{C}(X, B)$; *si pour tout* $x \in X$ *il existe un voisinage* U_x *de* x *tel que* $f_{|\overline{U}_x \cap X} \in H(\overline{U}_x \cap X, B)$ *alors* $f \in H(X, B)$.

Démonstration. — Supposons $s = 1$, et considérons B comme un sous-espace fermé de $\mathscr{C}(Y)$ où Y est un espace compact : $f \in \mathscr{C}(X, B) \hookrightarrow \mathscr{C}(X \times Y)$. Soit L une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}(X \times Y)$ orthogonale à $H(X, B)$; on peut la représenter par une mesure μ sur $X \times Y$.

Pour $g \in \mathscr{C}_c(\mathbf{C}, B)$, posons

$$\tilde{L}(g) = \int d\lambda(z) \int_{X\times Y} g(z, y)(z - \zeta)^{-1}\, d\mu(\zeta, y),$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{C}$; ceci a un sens car étant donné un domaine borné D de $\mathbf{C}$ on a

$$\begin{aligned}\int_D d\lambda(z) \int_{X\times Y} |g(z, y)|\, |(z - \zeta)^{-1}| d|\mu|(\zeta, y) \\ &\leqslant \|g\| \int_{X\times Y} d|\mu|(\zeta, y) \int_D |(z - \zeta)^{-1}|\, d\mu(\zeta, y) \\ &\leqslant \|g\|\, \|\mu\| 2 . \sqrt{\pi\lambda(D)}\ [1].\end{aligned}$$

$\tilde{L}$ est donc une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}_c(\mathbf{C}, B)$ à support dans X, car si $z \notin X$, $g(z, y)(z - \zeta)^{-1} \in H(X, B)$, donc $\int g(z, y)(z - \zeta)^{-1}\, d\mu(\zeta, y) = 0$ et par suite $\tilde{L}(g) = 0$ si g est à support hors de X.

Pour $\psi \in \mathscr{C}_c^\infty(C, B)$ on a

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\bar{z}}, \psi\right\rangle = -\left\langle\tilde{L}, \frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}\right\rangle \\ &= -\int d\lambda(z) \int_{X\times Y} \frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}(z, y)(z - \zeta)^{-1}\, d\mu(\zeta, y) \\ &= -\int_{X\times Y} d\mu(\zeta, y) \int \frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}(z, y)(z - \zeta)^{-1}\, d\lambda(z) \\ &= \pi . \int \psi(\zeta, y)\, d\mu(\zeta, y) = \pi L(\psi).\end{aligned}$$

Soit $(U_i)_{i\leqslant n}$ un recouvrement ouvert de X, tel que $f|_{\overline{U}_i\cap X} \in H(\overline{U}_i \cap X, B)$ pour tout i et $(\varphi_i)_{i\leqslant n}$ une partition de l'unité $\mathscr{C}^\infty$ assujettie au recouvrement $(U_i)_{i\leqslant n}$. On vérifie que $\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}(\varphi_i\tilde{L})$ est une forme linéaire orthogonale à $H(X, B)$ à support dans $\overline{U}_i \cap X$.

Or $\pi L = \dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}\tilde{L} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}(\varphi_i\tilde{L})$ donc $L(f) = 0$, puisque $f|_{\overline{U}_i\cap X} \in H(\overline{U}_i \cap X, B)$. On a prolongé f en une fonction de $\mathscr{C}_c(\mathbf{C}, B)$ ce qui est possible d'après le théorème de Dugundji [2], et on a également utilisé le fait que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\varphi_i L)$ est une distribution d'ordre zéro.

A présent on raisonne par récurrence; supposons le théorème démontré pour un produit de s compacts de $\mathbf{C}$, et soit $X = \prod_{j=1}^{s+1} X_j$. Il est clair que $f \in \mathscr{C}\left(\prod_{j=1}^{s} X_j,\ H(X_{s+1}, B)\right)$ puisque pour $x_1, \ldots, x_s$ fixés, $f(x_1, \ldots, x_s, .)$ restreinte à un voisinage de U_z de z, appartient à $H(\overline{U}_z \cap X_{s+1}, B)$ donc $f(x_1, \ldots, x_s, .) \in H(X_{s+1}, B)$. On peut appliquer à présent l'hypothèse de récurrence en prenant pour espace de Banach l'espace $H(X_{s+1}, B)$: on voit que

$$f \in H\left(\prod_{j=1}^{s} X_j,\ H(X_{s+1}, B)\right) \simeq H\left(\prod_{j=1}^{s+1} X_j, B\right)$$

d'après le corollaire 3.

Corollaire 12. — *Soient* $K = \prod_{i=1}^{k} K_i$ *un produit de compacts admissibles,* $X = \prod_{j=1}^{s} X_j$ *un produit de compacts de* $\mathbf{C}$, *et* f *une fonction de* $A(K \times X, B)$ *telle que pour tout* $(z, \zeta) \in K \times X$, *il existe un voisinage* U_ζ *de* ζ *dans* $\mathbf{C}^s$ *tel que* $f(z, \ )_{|\overline{U}_\zeta \cap X}$ *appartient à* $H(\overline{U}_\zeta \cap X, B)$; *alors*

$$f \in H(K \times X, B).$$

Démonstration. — En appliquant le théorème 11 aux fonctions $f(z, \ )$, on voit que $f \in A(K, H(X, B)) = H(K, H(X, B))$ d'après le corollaire 8, et ce dernier espace est isomorphe à $H(K \times X, B)$ d'après le corollaire 3.

Dans [10] Weinstock a obtenu un résultat semblable lorsque $B = \mathbf{C}$ et K un produit de domaines strictement pseudo-convexes. La méthode utilisée ici est différente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Browder, Introduction to Function Algebras. W. A. Benjamin, Inc. New York, 1969.

[2] J. Dugundji, An extension of Tietze's theorem, *Pacific J. Math.*, 1 (1951), 353-367.

[3] T. W. GAMELIN and J. GARNETT, Constructive techniques in rational approximation, *T.A.M.S.*
[4] A. M. GLEASON, The abstract theorem of Cauchy-Weil, *Pacific J. Math.*, 12 (1962), 511-525.
[5] H. GRAUERT et I. LIEB, Das Ramirezsche Integral... « Complex Analysis 1969 ». *Rice Univ. Studies*, 56, n° 2 (1970), 29-50.
[6] G. HENKIN, Integral representation of holomorphic function in strongly pseudoconvex domains and certain applications, *Mat. Sbornik*, 78 (120) (1969), 611-632.
[7] N. KERZMAN, Hölder and L^p estimates for solutions of $\bar{\partial} u = f$ in strongly pseudoconvex domains, *Comm. Pure Appl. Math.*, 24 (1971), 301-379.
[8] A. I. PETROSJAN, Unif. approximation of functions by polynomials on Weil polyhedra, *Isv. Akad. Nauk SSSR*, Ser. Mat. 34 (1970), 1241-1261.
[9] A. G. VITUSHKIN, Analytic capacity of sets and problems in approximation theory, *Uspehi Mat. Nauk*, 22 (1967), 141-199.
[10] B. WEINSTOCK, Approximation by holomorphic functions on certain product sets in C^n, *Pacific J. Math.*, 43 (1972), 811-822.

Manuscrit reçu le 19 novembre 1973,
accepté par B. Malgrange.

Nessim SIBONY,
Mathématiques, bât. 425
Université de Paris XI
91405 Orsay.