CLAUDE LAMOUREUX

Feuilletages des variétés compactes et non compactes

Annales de l'institut Fourier, tome 26, nº 2 (1976), p. 221-271

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_2_221_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 2 (1976), 221-271.

FEUILLETAGES DES VARIÉTÉS COMPACTES ET NON COMPACTES

par Claude LAMOUREUX

1. Nous considérons ici des feuilletages de codimension 1 définis sur des variétés X connexes non nécessairement compactes; la classe de différentiabilité transverse de ces feuilletages $\mathcal{F}$ est relativement basse, il sont « tangents » au bord éventuel de X, et, pour fixer les idées, ils sont transversalement orientables.

2. Pour étudier les propriétés qualitatives des feuilles de $\mathcal{F}$ dont l'adhérence contient un ensemble compact saturé non vide, on utilise d'habitude de façon systématique les résultats de Reeb et de Sacksteder : ils concernent les feuilletages transversalement C^2 des variétés compactes; les propriétés des ensembles minimaux (compacts) de $\mathcal{F}$ sont réduites à celles de groupes ou de pseudogroupes de type fini de difféomorphismes locaux de R. C'est la méthode que nous avons suivie par exemple en [26].

Nous supposons connus en détail ces résultats, cf. [39, 42, 48, 26], et plus généralement, l'ensemble des résultats actuellement connus dans le cas compact.

Pour étudier les autres feuilles de $\mathcal{F}$, il nous faut procéder de façon complètement différente, cf. [21] et les exemples de [26].

3. Notre méthode d'étude est alors la suivante :

α) nous considérons tout d'abord le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ induit par $\mathcal{F}$ sur le revêtement universel $\tilde{p} : \tilde{X} \to X$ de X; nous étudions le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ en détail, notamment par la méthode du disque en position générale, due à Haefliger, et nous en déduisons des propriétés du feuilletage $\mathcal{F}$ par l'intermédiaire de la projection $\tilde{p}$;

β) nous considérons ensuite le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ comme un feuilletage invariant sous l'action de $\pi_1(X)$ sur $\tilde{X}$, qui est bien définie moyennant le choix de points-bases convenables dans X et dans $\tilde{X}$. Le groupe fondamental de X apparaît alors comme un groupe de transformations de l'espace $\tilde{X}/\tilde{\mathcal{F}}$ des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$; la différentiabilité transverse de $\mathcal{F}$, et, surtout, la structure algébrique de $\pi_1(X)$ jouent désormais un rôle essentiel.

4. Nous pouvons maintenant présenter très schématiquement nos travaux de la façon globale suivante : puisque le quotient de $\pi_1(X, x_0)$ par son sous-groupe des commutateurs est $H_1(X; Z)$, les deux cas extrêmes pouvant se présenter sont clairement les suivants :

β′) $H_1(X; Z)$ est réduit à zéro,
β″) $\pi_1(X, x_0)$ est abélien.

La partie I du présent travail énonce et démontre les théorèmes A et B qui décrivent respectivement la structure du saturé de certaines familles simplement bordantes et de certaines familles bordantes. Nous appelons ici famille bordante, une collection finie de lacets $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$ de X dont les classes d'homologie $\{\lambda_i\}$ dans $H_1(X, Z)$ vérifient une relation irréductible $\sum_{i=1}^{n} n_i\{\lambda_i\} = 0$, avec $n_i \neq 0$ pour tout i. Dans le cas d'une famille simplement bordante, c'est une relation d'homotopie libre qui est vérifiée par les classes d'homotopie libre des lacets λ_i.

Les théorèmes A et B nous permettent entre autres choses de résoudre, dans les situations α) et β′) les problèmes que nous nous étions posés. Nous obtenons ainsi des théorèmes de caractérisation des feuilles fermées en termes de feuilles non captées, mais aussi et surtout des théorèmes de captage (*) des feuilles exceptionnelles, des théorèmes de

(*) Au sens de [19,25].

dénombrabilité ou de finitude de certaines familles d'ensembles fermés saturés (non nécessairement minimaux), et l'existence de feuilles fermées dans l'enveloppe de la réunion des ensembles de ces familles.

5. La partie I permet également de réduire l'obtention des propriétés géométriques désirées à des questions purement algébriques, compte tenu du fait que nos deux travaux [27] et [25] ont traité respectivement le cas $\beta'')$: lorsque le groupe fondamental de X est suffisamment gros (annoncé dans [20]), puis suffisamment petit (annoncé dans [20]).

Nous revenons sur cet aspect algébrique en III-*d*.

6. Dans les parties II et III, les résultats de I sont ensuite considérés comme des points de départ permettant de traiter, à l'aide d'arguments supplémentaires, d'autres questions.

Pour des raisons de commodité, nous avons regroupé en II les propriétés en relation relativement étroite avec le groupe de Poincaré de la variété feuilletée X, et en III, celles qui sont plus nettement en relation naturelle avec le groupe $H_1(X; Z)$ ou avec le groupe $H_1(X; Q)$.

C'est ici le lieu de signaler quelques-unes des différences essentielles qui surgissent immédiatement, par exemple entre les transversales fermées homotopes à zéro et les transversales fermées homologues à zéro sans itérées homotopes à zéro :

i) la présence de telles transversales fermées homologues à zéro n'interdit nullement au feuilletage $\mathcal{F}$ d'être transversalement analytique, cf. les travaux de Haefliger;

ii) elle n'entraîne pas non plus l'existence de cycles évanouissants, cf. le travail de Novikov;

iii) enfin elle n'entraîne même pas, dans le cas particulier où la variété X est de dimension trois, orientable, compacte, et sans bord, l'existence d'une feuille compacte ou d'une composante de Reeb, cf. III-*b* ci-dessous et l'absence de feuilles compactes dans le feuilletage de Sacksteder.

7. En II-*a* nous obtenons une conséquence directe de l'existence d'un ensemble fermé saturé minimal non réduit à une feuille fermée, qui est mise en évidence sur les exemples connus.

En II-*b* nous obtenons des propriétés des feuilletages sans holonomie, antérieures aux considérations analogues de Moussu, cf. [17, 34], dont quelques conséquences sont indiquées ci-dessous au § 8.

En II-*c* nous étendons les propriétés brièvement indiquées ci-dessus au § 4 pour les variétés simplement connexes, aux feuilletages vérifiant la condition FSB′ énoncée en II-*c*. Un des intérêts de cette condition très faible est de regrouper dans une même classe des feuilletages fort différents dont souvent aucune propriété n'était connue. Nous dirons simplement ici que ces feuilletages, qui peuvent être rencontrés sur des variétés très diverses, ont des propriétés tout à fait similaires à celles des feuilletages de classe C^2 des variétés compactes que nous avons démontrées en [21].

En II-*d* nous obtenons des propriétés des feuilletages presque sans holonomie dans lesquels il existe une feuille F, fermée ou non, telle que l'injection i de F dans X induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux. Sans restreindre en fait la généralité, il suffit de considérer une feuille F fermée dans un « feuilletage de Reeb généralisé », c'est-à-dire dans un feuilletage $\mathcal{R}$, presque sans holonomie et sans feuilles intérieures fermées, défini sur une variété de la forme $M^n \times I$. Le feuilletage $\mathcal{R}$ n'est pas nécessairement transverse au facteur I, et la variété M^n n'est pas nécessairement compacte. Nous ne disposons donc plus des propriétés des sous-groupes de Diff (I; 0,1) ni des théorèmes rappelés plus haut pour les variétés compactes. Toutefois, la majeure partie des propriétés connues pour ces feuilletages dans le cas C^2 transverse compact [42], puis dans le cas C^2 compact non transverse [34], peuvent être démontrées de façon nouvelle pour des feuilletages transversalement de classe C^1 seulement; la méthode suivie fournit également la non-existence de feuilles exceptionnelles dans le cas transversalement C^2, tout en montrant que la présence de feuilles exceptionnelles, dans le cas C^1, n'était en fait nullement gênante.

8. D'autres résultats ont pu être obtenus par la combinaison des deux parties du Corollaire 2 de II-*b* cité au § 7 et de la méthode présentée ci-dessus au § 3. Nous avons dégagé en [17] la situation suivante : $\mathcal{F}$ est un feuilletage d'une variété X dans lequel il existe une transversale fermée τ pointée par x_0, rencontrant toutes les feuilles de $\mathcal{F}$, et admettant un relèvement $\tilde{\tau}$, pointé par y_0 dans le revêtement universel $\tilde{X}$ de X, rencontrant toutes les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$.

Si le feuilletage $\mathcal{F}$ est sans holonomie [17], il en est de même de $\tilde{\mathcal{F}}$, et l'espace des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ est donc homéomorphe à $R \simeq \tilde{\tau}$. On voit donc apparaître un quotient G_{x_0, y_0} de $\pi_1(X, x_0)$ comme un groupe de difféomorphismes non pas de R mais de S^1, puisque $\tilde{\tau}$ provient de τ. Ce groupe est sans point fixe non trivial, indépendant de x_0 et de y_0 d'après II-*b*; il est abélien sans torsion d'après [1]. En particulier toute transversale fermée à $\mathcal{F}$ rencontre toutes les feuilles de $\mathcal{F}$; il en résulte la structure suivante pour le feuilletage $\mathcal{F}$: si $\mathcal{F}$ possède une feuille fermée, toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont fermées; si $\mathcal{F}$ possède une feuille localement dense, toutes les feuilles sont partout denses; enfin, si $\mathcal{F}$ possède une feuille non fermée et non partout dense, $\mathcal{F}$ possède un ensemble minimal exceptionnel unique, dont le complémentaire est composé de feuilles propres. De plus, l'absence de feuilles exceptionnelles est garantie lorsque $\mathcal{F}$ est de classe C^2 [17].

Ce théorème de structure a eu les conséquences suivantes :

i) il nous a suggéré plusieurs méthodes nouvelles utilisées ailleurs;

ii) sa rédaction très détaillée a été très utile à Hector dans la mesure où une telle variété est un ouvert incompressible; elle lui a en effet donné à la fois l'énoncé et la démonstration du théorème de structure des ouverts incompressibles [15];

iii) il a « suggéré » de façon directe un second travail, cf. [6]. Remarquons à ce propos que de très nombreuses autres propriétés peuvent être obtenues, à titre d'exercice et en suivant notre méthode, dans le cas où $\tilde{X}/\tilde{\mathcal{F}}$ est homéomorphe à $R = \tilde{\tau}$: il suffit de traduire les propriétés bien connues des orbites du groupe G_{x_0, y_0} en termes de propriétés sur $\mathcal{F}$;

iv) il nous a été utile dans la démonstration du théorème de structure des feuilletages sans holonomie des variétés de groupe fondamental Z [28], bien que l'espace des feuilles de $\tilde{X}$ ne soit généralement pas homéomorphe à R.

9. En III-*a* nous démontrons le Corollaire 7 suivant : un ensemble fermé saturé minimal exceptionnel contient une feuille-ressort si, (et seulement si), l'une de ses feuilles est coupée par une transversale fermée homologue à zéro. Ce corollaire est nouveau même dans le cas compact où la présence de transversales fermées homologues à zéro sans itérées homotopes à zéro avait été remarquée.

En III-*b* nous montrons que ce Corollaire permet alors par une vérification directe de redémontrer de façon nouvelle et géométrique, l'existence d'une feuille-ressort dans tous les ensembles minimaux exceptionnels connus. Nous remarquons également que nous n'utilisons pas l'hypothèse de compacité qui est indispensable pour l'application du théorème de Sacksteder [48] concernant les ensembles minimaux exceptionnels compacts.

En III-*c* nous obtenons rapidement des résultats similaires à ceux de II-*c* pour les feuilletages vérifiant la condition homologique souvent rencontrée F.B.

10. De nombreux résultats et prolongements ne peuvent être décrits dans cette introduction, par manque de place. Nous ne mentionnons que rapidement quelques points concernant ces résultats :

i) la plupart s'avèrent être nouveaux et fort utiles même lorsque la variété feuilletée étudiée est compacte;

ii) leur portée est beaucoup plus générale qu'il peut sembler à première vue. D'une part ils constituent certains volets supplémentaires de la théorie décrite ci-dessus au § 3; d'autre part il se trouve que l'étude d'une feuille donnée et de son adhérence nécessite seulement la considération du sécant d'homotopie ou du sécant d'homologie de cette feuille; ces deux semi-groupes sont respectivement des sous-semi-groupes du groupe de Poincaré et du premier groupe de Betti de la variété X, cf. [19].

iii) l'utilisation de ces semi-groupes s'avère fructueuse comme nous le montrons à diverses reprises, cf. II-*c* et la Proposition 1, par exemple;

iv) à titre d'exemple nous donnons en III-*c* quelques théorèmes concernant des feuilletages ayant des feuilles dont le sécant d'homotopie ne se trouve dans aucun des deux cas extrêmes β') et β'') présentés au § 4;

v) le paragraphe III-*d* présente brièvement quelques théorèmes de captage obtenus par des méthodes complètement différentes, ainsi que d'autres directions de recherche;

vi) pour décrire la réduction algébrique annoncée plus haut, nous utilisons directement nos résultats, les notions de sécant d'homotopie et d'homologie, ainsi que le contenu de III-*d*. Il nous a fallu pour toutes ces raisons placer cette description à la fin du travail.

11. Nous terminons cette introduction par le plan relativement détaillé suivant :

I. Structure du saturé d'une famille bordante ou simplement bordante.

a) Définition des familles bordantes et simplement bordantes.

b) Énoncé des Théorèmes A et B.

c) Début de la démonstration des Théorèmes A et B.

d) Fin de la démonstration du Théorème A.

e) Fin de la démonstration du Théorème B.

f) Sur les possibilités de généralisation des Théorèmes A et B.

II. Exemples de propriétés liées au groupe de Poincaré.

a) Ensembles minimaux et feuilles-ressorts.

b) Deux propriétés des feuilletages sans holonomie.

c) Propriété des feuilletages vérifiant la Condition H.L. ou la Condition F.S.B. Exemples.

d) Étude des feuilletages de Reeb généralisés.

III. Exemples de propriétés liées au premier groupe de Betti.

a) Caractérisation des ensembles fermés saturés minimaux exceptionnels contenant une feuille-ressort.

b) Application au problème de l'existence de feuilles-ressorts dans les ensembles minimaux exceptionnels.

c) Propriétés des feuilletages vérifiant la Condition H.C. ou F.B.

d) Généralisation des résultats précédents.

Conclusion.

Bibliographie.

CHAPITRE PREMIER

STRUCTURE DU SATURÉ D'UNE FAMILLE BORDANTE OU SIMPLEMENT BORDANTE

Le contenu du chapitre I, ainsi que son plan, ont été présentés dans l'Introduction.

I-*a*. Définition des familles bordantes et simplement bordantes.

L'étude des feuilletages de codimension un nous a amené à dégager la notion de famille bordante. Comme on le verra plus loin, la géométrie d'un feuilletage dépend fortement des différents types de familles bordantes qu'il admet; cette dépendance n'est d'ailleurs pas à sens unique, que le feuilletage soit avec holonomie ou sans holonomie.

Définition 1. — *Une famille* $\mathcal{E}$ *de lacets* $(l_i)_{i=1,\ldots,N}$ *d'un espace topologique* X *constitue une famille bordante (respectivement simplement bordante) dans* X *s'il existe une variété topologique* M^2 *et une application continue* φ *de* M^2 *dans* X *vérifiant les trois conditions suivantes :*

i) *la variété topologique* M^2 *est une variété compacte, connexe, orientable, de dimension* 2 *(respectivement, qui est de plus une sous-variété de la sphère* S^2*)*;

ii) *le bord de* M^2 *se compose d'exactement* N *cercles* S^1_i;

iii) *pour chaque valeur de* i, *la restriction de* φ *à* S^1_i *peut être considérée comme un itéré d'un paramétrage de* $l_i(S^1)$.

La notion de famille simplement bordante intervient de façon très naturelle dans l'étude de nombreuses propriétés. En effet, une transversale fermée τ à un feuilletage $\mathcal{F}$

d'une variété X constitue à elle seule une famille simplement bordante dans X (on a alors $M^2 = D^2$) si et seulement si sa classe d'homotopie est un élément de torsion de $\pi_1(X, x_0)$, si x_0 est un point quelconque de τ. De même deux lacets de X constituent une famille simplement bordante dans X si, et seulement si, ils admettent deux itérés librement homotopes (on a alors $M^2 = S^1 \times I$).

Considérons enfin une famille bordante constituée d'un lacet unique τ. Un itéré d'un paramètrage de ce lacet apparaît alors comme le bord d'un 2-cycle orienté de X construit à l'aide de l'application φ de M^2 dans X. Il en résulte que la classe d'homologie de τ est un élément de torsion de $H_1(X; Z)$. Réciproquement un lacet représentant un élément de torsion de $H_1(X; Z)$ constitue évidemment une famille bordante dans X, cf. par exemple le théorème 4, p. 173 de [51].

Les remarques précédentes sont à l'origine de la Définition 1, donnée à Oberwolfach, le 28 mai 1971 [19]. Elles motivent en grande partie les conditions i) et ii). Notons en passant que la condition de connexité faite sur la variété M^2 n'est nullement restrictive : si M^2 n'était pas connexe, la famille $\mathcal{E}$ apparaîtrait simplement comme une « somme » finie de sous-familles bordantes, cette fois, au sens de la Définition 1.

Le rôle de la condition iii) de la Définition 1 est le suivant. D'une part, il aurait été trop strict d'exiger que la restriction de φ à S^1_i fût librement homotope à l_i, ou, ce qui revient au même, que l'on ait $\varphi|_{S^1_i} = l_i$, car un lacet représentant une classe non nulle de 2-torsion de $\pi_1(X, x_0)$ n'aurait pas pu être considéré comme constituant une famille simplement bordante. D'autre part le saturé d'un lacet itéré λ^n, $n \neq 0$, d'une variété feuilletée est un ensemble qui ne dépend ni de n, ni du paramètre de λ choisi : la condition iii) de la Définition 1 est donc tout à fait adaptée à nos besoins.

La notion de famille bordante ou simplement bordante sera particulièrement commode dans la démonstration des propriétés d'holonomie des feuilletages des variétés compactes ou non compactes. Il semble qu'il serait toutefois intéressant d'étudier, cette fois d'un point de vue algébrique, la structure induite, par la relation N-aire de famille simplement bordante et par la « somme » à laquelle il a été déjà fait allusion ci-dessus, sur la famille des sous-groupes cycliques du groupe d'homotopie libre d'un espace topologique X.

I-*b*. Énoncé des Théorèmes A et B.

Le Théorème A nous a été suggéré par nos résultats antérieurs concernant le saturé d'une transversale fermée homotope à zéro [16]; il a été énoncé dans toute sa généralité en [19].

Théorème A. — *Soit p transversales fermées* $\tau_1, \ldots, \tau_p$ *à un feuilletage* $\mathcal{F}$ *de codimension un, transversalement orientable et transversalement de classe* C^1 *d'une variété* X *non nécessairement compacte. Soit* Δ *la réunion des feuilles du feuilletage* $\mathcal{F}$ *qui rencontrent une et une seule des transversales fermées* $\tau_1, \ldots, \tau_p$. *Soit* $\mathcal{E}$ *une famille de lacets de* X *composée d'un certain nombre m de lacets de* X *contenus dans des feuilles de* $\mathcal{F}$ *et des transversales* $\tau_1, \ldots, \tau_p$. *Si* $\mathcal{E}$ *constitue une famille simplement bordante dans* X, *alors:*

i) *aucune feuille de* Δ *n'est fermée;*

ii) *toute feuille de* Δ *est une feuille captée au sens de* [19, 25];

iii) *tout ensemble fermé saturé non vide contenu dans* Δ *contient une feuille-ressort;*

iv) *tout ensemble fermé saturé minimal rencontrant* Δ *contient une feuille-ressort;*

v) *toute famille d'ensembles fermés saturés de* $\mathcal{F}$, *non vides, rencontrant* Δ, *et deux à deux disjoints, est finie;*

vi) *la famille des ensembles fermés saturés minimaux de* $\mathcal{F}$ *rencontrant* Δ *est finie;*

vii) *si l'ensemble saturé* Δ *est* X, *alors*

a) *le feuilletage* $\mathcal{F}$ *ne possède aucune feuille fermée,*

b) *il contient une feuille-ressort et il admet un nombre au plus fini non nul d'ensembles fermés saturés minimaux.*

Quelques remarques sur le théorème A seront faites en I-*f*; les conclusions du Théorème A constitueront le point de départ de II.

Le théorème B a été annoncé en [19]; il nous a été suggéré par l'étude des feuilletages des sphères d'homologie de dimension 3.

THÉORÈME B. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension un, transversalement orientable, transversalement de classe* C^2 *cette fois, d'une variété* X *non nécessairement compacte. Les notations* $\tau_1, \ldots, \tau_p$, Δ, $\mathcal{E}$ *sont celles du Théorème* A. *Si* $\mathcal{E}$ *constitue une famille bordante dans* X, *alors*

i) *aucune feuille de* Δ *n'est fermée*;

ii) *toute feuille propre ou exceptionnelle de* Δ *est une feuille captée*;

iii) *tout ensemble fermé saturé minimal exceptionnel rencontrant* Δ *contient une feuille-ressort.*

Dans la plupart des cas, les conclusions iii), v), vi) et vii) du Théorème A sont également vérifiées sous les seules hypothèses du Théorème B, cela bien qu'une famille bordante ne soit généralement pas simplement bordante. Nous utilisons alors, comme pour démontrer les conclusions ii) et iii) du Théorème B, le fait que le feuilletage étudié au Théorème B est transversalement de classe C^2.

Remarque O. — Une version plus forte des Théorèmes A et B est en fait obtenue en I-*f* grâce à la considération de l'ensemble Δ_M.

I-*c*. Début de la démonstration des théorèmes A et B.

Nous étudions dans ce paragraphe certaines propriétés résultant de l'existence de la famille bordante ou simplement bordante $\mathcal{E}$ intervenue dans l'énoncé des Théorèmes A et B. Nous supposons pour l'instant que le feuilletage $\mathcal{F}$ étudié est transversalement orientable, transversalement de classe C^2.

La famille $\mathcal{E}$ se compose de p transversales fermées $\tau_1, \ldots, \tau_p$ à $\mathcal{F}$ et de m lacets $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ contenus dans des feuilles du feuilletage $\mathcal{F}$.

Puisque $\mathcal{E}$ est bordante dans X, il existe une variété

M^2 compacte et une application continue φ de M^2 dans X vérifiant les conditions i), ii), iii) de la définition 1 de I.a, avec $N = p + m$. D'après des remarques faites en I-a sur cette condition iii), nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité et sans modifier l'ensemble saturé Δ, que la restriction de φ à S^1_i définit la transversale fermée φ_i à $\mathcal{F}$, pour $i = 1, \ldots, p$ et que la restriction de φ à S^1_{p+j} définit le lacet λ_j d'une feuille de $\mathcal{F}$ pour $j = 1, \ldots, m$.

La variété X n'est pas nécessairement de classe C^2, mais M^2 est une variété différentiable et nous pouvons alors approcher φ par une nouvelle application φ' telle que toutes les applications $pr_1 \circ h_\alpha^{-1} \circ \varphi'$ soient, lorsque définies, de classe C^2, où $pr_1 \circ h_\alpha^{-1}$ désigne l'application distinguée du feuilletage $\mathcal{F}$ à valeurs dans R définie sur l'ouvert distingué (U_α, h_α) de $\mathcal{F}$.

Pour mettre φ' en position générale par rapport à $\mathcal{F}$ nous utiliserons le lemme suivant, cf. [10] :

LEMME 1. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension un transversalement de classe C^2 d'un espace X. Soit f une application continue d'une variété M^s, de classe C^2 et de dimension $s \geqslant 1$, dans X telle que la composée $pr_1 \circ h_\alpha^{-1} \circ f$, soit, lorsqu'elle est définie, une application de classe C^2 de M^s dans R pour toute carte (U_α, h_α) de $\mathcal{F}$. Alors sur tout compact K donné de M^s, f peut être approchée, d'aussi près que l'on veut dans l'espace $C^0_K(M^s, X)$ des fonctions continues de M^s dans X, muni de la topologie habituelle, par une application continue g telle que $pr_1 \circ h_\alpha^{-1} \circ g$, lorsqu'elle est définie, ait sur K tous ses points critiques du type quadratique non dégénéré.*

Lorsque X, $\mathcal{F}$ et f sont C^2, la fonction g peut être de plus choisie C^2 et arbitrairement proche de f au sens de l'écart sur K des fonctions et de leurs dérivées partielles premières et secondes; g peut être alors une immersion, resp. un plongement, s'il en est de même pour f.

Lorsque f vérifie déjà, sur un voisinage compact d'un compact C, les propriétés vérifiées par l'application g ci-dessus, la fonction g peut être choisie telle que l'on ait de plus $f_{|C} = g_{|C}$.

Démonstration. — On procède comme en [33], Th. 8.7, p. 178, lorsque le feuilletage $\mathcal{F}$ est défini par une seule carte, et comme en [10] p. 316 dans le cas général, en vérifiant point par point que la structure « tangente » aux feuilles du feuilletage n'intervient pas.

Remarque 1. — *a*) Grâce aux résultats de [53, 54] sur les singularités des applications de R^s dans R^q, le lemme 1 peut être étendu aux feuilletages de codimension q supérieure à 1.

b) Grâce à la notion de point critique T.N.D., c'est-à-dire, topologiquement non dégénéré, cf. [33, 3, 9 et 14], le lemme 1 peut être étendu, lorsque $s = \dim M^s \leqslant 3$, aux feuilletages $\mathcal{F}$ de codimension 1 qui sont seulement de classe C^1 (voire C^0). Nous utiliserons cette extension en I*d*) de façon cruciale : c'est en effet par le seul intermédiaire du Lemme 1 que la différentiabilité transverse du feuilletage $\mathcal{F}$ intervient dans la démonstration du Théorème A.

L'application du Lemme 1, avec $M^s = M^2$ et $f = \varphi'$, fournit une application g que nous notons encore φ par abus de langage. Les propriétés de cette application φ et des applications $\mathrm{pr}_1 \circ h_\alpha^{-1} \circ \varphi$ se traduisent ainsi :

Soit Σ l'ensemble des points x de M^2 en lesquels une application $\mathrm{pr}_1 \circ h_\alpha^{-1} \circ \varphi$ est définie et présente un point critique. Alors le bord ∂M^2 de M^2 admet un voisinage tubulaire T dans M^2 ne rencontrant pas Σ. Sur $M^2 - \Sigma$ les applications $\mathrm{pr}_1 \circ h_\alpha^{-1} \circ \varphi$ définissent une structure de feuilletage, au sens habituel, de codimension un, transversalement de classe C^2 et transversalement orientable, puisqu'il en est de même de $\mathcal{F}$. Ce feuilletage induit par φ et $\mathcal{F}$ sur $M^2 - \Sigma$ est noté $\mathcal{D}(\varphi, \mathcal{F}; M^2 - \Sigma)$.

Les points de Σ peuvent être considérés comme des singularités du feuilletage $\mathcal{D}(\varphi, \mathcal{F}; M^2 - \Sigma)$ pour la variété M^2, cf. Chap. 2, A, 2), Déf. 1 pour le cadre et la terminologie précis choisis pour toutes ces questions de singularités en [22]. Vu l'expression des applications $\mathrm{pr}_1 \circ h_\alpha^{-1} \circ \varphi$ au voisinage d'un point s de Σ, la singularité s est un col ou un centre, au sens habituel. Les singularités de $\mathcal{D}(\varphi, \mathcal{F}; M^2 - \Sigma)$ sont donc isolées; puisque $M^2 - \mathring{T}$ est compact, alors Σ est un ensemble fini.

Le comportement de $\mathscr{D}(\varphi, \mathscr{F}; M^2 - \Sigma)$ sur T doit être précisé. On vérifie aisément les deux assertions suivantes de [22] : chaque $(S_i^1)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de ∂M^2 est une transversale fermée de $\mathscr{D}(\varphi, \mathscr{F}; M^2 - \Sigma)$; chaque $(S_{p+j}^1)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ est une feuille compacte de $\mathscr{D}(\varphi, \mathscr{F}; M^2 - \Sigma)$.

Pour démontrer les Théorèmes A et B nous allons étudier l'adhérence de chaque feuille F de Δ seulement à partir de l'intersection de F avec l'une des transversales fermées de $\mathscr{E}$. Nous ne prendrons jamais en considération les feuilles S_{p+j}^1 du bord de M^2 pour $j \geqslant 1$. Nous pouvons donc supposer, sans restreindre la généralité, que toutes les composantes du bord de M^2 sont des transversales fermées du feuilletage que nous venons d'introduire. Pour se ramener directement à ce cas on peut par exemple prolonger (abstraitement) le feuilletage $\mathscr{D}(\varphi, \mathscr{F}; M^2 - \Sigma)$ de la façon suivante : le long de chaque composante $(S_{p+j}^1)_{1 \leqslant j \leqslant m}$, nous recollons à l'aide de l'application identité un exemplaire d'un disque D_{p+j}^2 muni du feuilletage, tangent au bord, par des cercles concentriques; ces m recollements ayant été faits, nous nous trouvons donc, à un changement près de variété M^2, dans une situation identique à celle dans laquelle nous nous serions trouvé si la famille $\mathscr{E}$ n'avait contenu que des transversales fermées.

Puisque le feuilletage $\mathscr{F}$ est transversalement orientable, le feuilletage $\mathscr{D}(\varphi, \mathscr{F}; M^2 - \Sigma)$ est transversalement orientable. Choisissons une orientation transverse de

$$\mathscr{D}(\varphi, \mathscr{F}; M^2 - \Sigma),$$

puis une orientation de la variété orientable M^2. Il en résulte, d'une part, une orientation des transversales fermées de $\mathscr{D}(\varphi, \mathscr{F}; M^2 - \Sigma)$, donc de chaque $(S_i^1)_{1 \leqslant i \leqslant p}$, d'autre part une orientation globale $\mathscr{O}$ des feuilles de $\mathscr{D}(\varphi, \mathscr{F}; M^2 - \Sigma)$. On peut alors dire, grâce à $\mathscr{O}$, qu'une feuille f de

$$\mathscr{D}(\varphi, \mathscr{F}; M^2 - \Sigma)$$

sort de M^2 le long d'une composante donnée de ∂M^2, ou qu'elle entre dans M^2. On vérifie que, le long d'une transversale donnée S_i^1, toutes les feuilles sont du même type, c'est-à-dire ou toutes entrantes, ou toutes sortantes. Nous pouvons supposer que les feuilles de $\mathscr{D}(\varphi, \mathscr{F}; M^2 - \Sigma)$ sont toutes entrantes le long de S_1^1; nous notons désormais $\mathscr{D}(M^2 - \Sigma)$ le feuilletage $\mathscr{D}(\varphi, \mathscr{F}; M^2 - \Sigma)$ ainsi orienté.

Soit ∂M^+, resp. ∂M^- la réunion des composantes de ∂M^2 le long desquelles les feuilles de $\mathscr{D}(M^2 - \Sigma)$ sont toutes entrantes, resp. toutes sortantes.

D'après ce qui précède, toute feuille de $\mathscr{D}(\varphi, \mathscr{F}; M^2 - \Sigma)$ rencontre ∂M^2 en au plus deux points : l'un dans ∂M^+, l'autre dans ∂M^-. En particulier une feuille f de

$$\mathscr{D}(\varphi, \mathscr{F}; M^2 - \Sigma)$$

rencontrant ∂M^2 est une feuille propre, et son ensemble-limite dans M^2 est un compact non vide si ses extrémités ne sont pas toutes deux dans ∂M^2.

Il n'est pas vrai, en général, que toute feuille de $\mathscr{D}(M^2 - \Sigma)$ rencontrant exactement l'un des deux ensembles ∂M^+ et ∂M^- soit une feuille captée, au sens de [19], puisque l'ensemble-limite d'une telle feuille peut fort bien être réduit à un col. Pourtant nous voulons démontrer que toute feuille de Δ est captée.

Pour ce faire, nous sommes amenés à définir sur M^2 une structure de feuilletage avec singularités, notée $\mathscr{D}$, dont les « feuilles au sens généralisé », ou encore « $\mathscr{D}$-feuilles », sont définies comme étant les classes d'une relation d'équivalence qui n'est pas ouverte, en général :

DÉFINITION 2. — *Deux points x et y de M^2 appartiennent à une même $\mathscr{D}$-feuille si, et seulement si, il existe une suite finie de points $x_0, \ldots, x_N$ de M^2 tels que $x_0 = x$, $x_N = y$, et, pour tout i vérifiant $0 \leqslant i \leqslant N - 1$, l'une au moins des deux propriétés suivantes soit vérifiée :*

— *x_i et x_{i+1} appartiennent à une même feuille de*

$$\mathscr{D}(M^2 - \Sigma);$$

— *il existe une carte $(U_{\alpha_i}, h_{\alpha_i})$ de $\mathscr{F}$ pour laquelle $pr_1 \circ h_{\alpha_i}^{-1} \circ \varphi$ est définie en x_i et en x_{i+1} et l'on a*

$$pr_1 \circ h_{\alpha_i}^{-1} \circ \varphi(x_i) = pr_1 \circ h_{\alpha_i}^{-1} \circ \varphi(x_{i+1}) = 0.$$

On vérifie, cf. Lemmes 8 à 11 de [22], les propriétés suivantes :

α) une $\mathscr{D}$-feuille peut être une feuille de $\mathscr{D}(M^2 - \Sigma)$ au sens habituel, un centre, ou encore la réunion finie d'un certain nombre de cols $(c_i)_{i=1,\dots,k}$ et de feuilles de $\mathscr{D}(M^2 - \Sigma)$ dont l'un des bouts au moins définit un ensemble-limite dans M^2 réduit à l'un des cols $c_1, \dots, c_k$;

β) une $\mathscr{D}$-feuille contenant k cols contient au plus $3k + 1$ feuilles différentes de $\mathscr{D}(M^2 - \Sigma)$;

γ) l'ensemble-limite dans M^2 d'une $\mathscr{D}$-feuille est une réunion de certaines parties de $\mathscr{D}$-feuilles, mais ce n'est pas, en général, une réunion de $\mathscr{D}$-feuilles;

δ) l'image par φ d'une $\mathscr{D}$-feuille donnée f est entièrement contenue dans une seule feuille F de $\mathscr{F}$, mais $\varphi^{-1}(F)$ contient en général plusieurs $\mathscr{D}$-feuilles.

Nous appelons « feuille de type infini » de $\mathscr{D}(M^2 - \Sigma)$ une feuille dont une semi-caractéristique au moins admet un ensemble-limite dans M^2 non réduit à un point de Σ.

Nous avons alors le :

Lemme 2. — *Toute $\mathscr{D}$-feuille f, rencontrant* ∂M^+ *mais ne rencontrant pas* ∂M^- (*ou rencontrant* ∂M^- *mais ne rencontrant pas* ∂M^+), *contient une « feuille de type infini » non fermée dans* M^2.

Démonstration. — A un changement d'orientation près, nous pouvons supposer que f rencontre ∂M^+ sans rencontrer ∂M^-. La feuille f contient un nombre fini k de cols, notés $c_1, \dots, c_k$ lorsque k n'est pas nul. Un argument bien connu de [10] nous permettrait de nous ramener au cas où k est inférieur ou égal à 1 pour toute $\mathscr{D}$-feuille. Dans f il n'y a aucune feuille de $\mathscr{D}(M^2 - \Sigma)$ rencontrant ∂M^- et il y a p feuilles de $\mathscr{D}(M^2 - \Sigma)$ rencontrant ∂M^+, avec $p \geqslant 1$. Si $k \geqslant 1$, chacune de ces p feuilles doit aboutir à l'un des cols $c_1, \dots, c_k$. S'il n'y avait dans f aucune feuille de type infini, les q autres feuilles de $\mathscr{D}(M^2 - \Sigma)$ composant f devraient avoir chacune de leurs semi-caractéristiques soit issue d'un col de f, soit aboutissant à un col de f.

Considérons les $(p + q)$ feuilles de $\mathscr{D}(M^2 - \Sigma)$ composant f. Le décompte des bouts de $f - \bigcup_{i=1}^{k} c_i$ si $k \geqslant 1$, et de f si k égale 0, mènerait alors au système suivant qui n'admet évidemment aucune solution : $p + q = 2k$, $q = 2k$, avec $p \geqslant 1, q \geqslant 0, \infty > k \geqslant 0$ et $3k + 1 \geqslant p+q$.

Si $k = 0$, la feuille f est une feuille de type infini; si elle était fermée dans M^2, elle serait compacte, contrairement au fait qu'elle rencontre l'une des transversales S_i^1 de ∂M^2 en exactement un point. Si $k > 0$, au moins l'une des feuilles de $\mathcal{D}(M^2 - \Sigma)$ contenues dans f admet une semi-caractéristique positive qui est de type infini; puisqu'elle appartient à f, elle est nécessairement issue d'un col de f et elle ne peut être fermée dans M^2. Le lemme 2 est donc démontré.

Pour les $\mathcal{D}$-feuilles vérifiant les hypothèses du Lemme 2, nous obtiendrons en I-*d* et en I-*e* des théorèmes de captage de façons fort différentes selon que M^2 pourra être plongée dans S^2 ou pas.

Nous aurons alors besoin du :

LEMME 3. — *La feuille de $\mathcal{F}$ contenant l'image par φ d'une $\mathcal{D}$-feuille f captée par une $\mathcal{D}$-feuille g est une feuille captée par la feuille de $\mathcal{F}$ qui contient $\varphi(g)$.*

Démonstration. — Soit S un lacet de g par lequel f est captée. Par définition, S admet dans M^2 un semi-voisinage tubulaire $T^{\pm}$ sur lequel les $\mathcal{D}$-feuilles induisent un feuilletage admettant un polycycle-limite P et des spirales s'enroulant asymptotiquement sur P. Si $T^{\pm}$ est choisi suffisamment petit, il n'y a pas de singularités dans ce feuilletage autres que celles de P, et il n'y a pas de feuille compacte autre que P. De plus la restriction de φ à $T^{\pm}$ est transverse à $\mathcal{F}$ et les cols de P n'interviennent pas.

Considérons maintenant $T^{\pm}$ comme l'image d'une immersion i de $S^1 \times [0, 1[$ dans M^2, vérifiant les conditions intervenant dans la définition d'une feuille captée; les mêmes conditions sont alors vérifiées, d'après ce qui précède, par l'application composée $\varphi \circ i$ et la feuille de $\mathcal{F}$ contenant $\varphi(f)$ est captée par la feuille de $\mathcal{F}$ contenant $\varphi(g)$. Cela démontre le Lemme 3.

Remarquons en passant qu'il résulte des Lemmes 2 et 3 la propriété suivante (qui peut être démontrée plus simplement de façon directe) : soit F une feuille de $\mathcal{F}$, qui contient l'image par φ d'une $\mathcal{D}$-feuille rencontrant exactement l'un des ensembles ∂M^+, ∂M^-; alors F n'est pas une feuille fermée de $\mathcal{F}$, cf. Th. A i) et Th. B i).

En particulier, une feuille F de Δ ne saurait être fermée : d'après le Lemme 3, $\varphi^{-1}(F)$ contient une $\mathcal{D}$-feuille f rencontrant l'un exactement des deux ensembles ∂M^+ et ∂M^-, où f n'est pas fermée, d'après le lemme 2.

I-*d*. Fin de la démonstration du théorème A.

Nous conservons les hypothèses et les notations introduites en I-*c*, mais la variété M^2 admet maintenant la propriété de pouvoir être plongée dans S^2 puisque la famille $\mathcal{E}$ de l'énoncé du Théorème A est simplement bordante.

Cette propriété est utilisée uniquement par l'intermédiaire du lemme suivant :

LEMME 4. — *Soit* F *une feuille non compacte d'un feuilletage topologique* $\mathcal{F}$ *orientable de codimension un d'un ouvert* $\mathcal{U}$ *de la sphère* S^2. *Soit* l *une semi-caractéristique non compacte de* F *n'aboutissant pas à une singularité de* $\mathcal{F}$. *Supposons que les singularités de* $\mathcal{F}$ *dans* S^2 *sont, soit des centres, soit des cols, soit encore telles que toute semi-caractéristique, admettant une singularité* s *dans son adhérence, ait un ensemble-limite réduit à* s *lorsque* s *n'est ni un centre ni un col. Alors la frontière de* l *dans* $\overline{\mathcal{U}}$ *est un lacet de* $\overline{\mathcal{U}}$ *composé d'un nombre fini de feuilles de* $\mathcal{F}$ *et des singularités auxquelles leurs semi-caractéristiques aboutissent. Ce lacet se comporte vis à vis de* l *de la même façon qu'une feuille compacte de* $\mathcal{F}$ *vis-à-vis d'une feuille à laquelle elle est adhérente.*

Démonstration. — Le Lemme 4 est une généralisation de la théorie classique de Poincaré-Bendixson à des feuilletages topologiques des ouverts de S^2 dont les points singuliers présentent quelque singularité. C'est en fait un cas particulier du Théorème 2 de II.A dans [22], où nous avons développé les points suivants : soit $\mathcal{F}$ un feuilletage orientable d'un ouvert $\mathcal{U}$ de S^2. Toute feuille non fermée dans $\mathcal{U}$ est coupée par une transversale fermée sans points doubles contenue dans $\mathcal{U}$. D'après le théorème de Jordan, toute telle transversale fermée rencontre chaque feuille de $\mathcal{U}$ en au plus un point. Cela démontre que les feuilles de $\mathcal{F}$ sont propres, mais aussi ont une enveloppe composée de feuilles fermées dans $\mathcal{U}$ coupées par aucune transversale fermée, cf. [20, 25] pour une propriété similaire dans des feuilletages généraux. Appelons singularité tout point de la frontière de $\mathcal{U}$ dans S^2. Nous disons qu'une singularité s est convenable pour une semi-caractéristique l si s admet un voisinage $\mathcal{V}$ dans S^2 tel que $\mathcal{V} \cap l$ soit contenu dans un nombre fini de secteurs hyperboliques de $\mathcal{V}$ de sommets s. Nous disons que s compactifie l si l'enveloppe de l, dans $\overline{\mathcal{U}}$ cette fois, se réduit à s. On a alors le Théorème 2 cité plus haut : l'enveloppe dans $\overline{\mathcal{U}}$ d'une semi-caractéristique l non compacte et non compactifiée pour laquelle chaque singularité de $\mathcal{F}$ est convenable, est un lacet de $\overline{\mathcal{U}}$ composé d'un nombre fini de feuilles de $\mathcal{F}$ et des singularités de $\overline{\mathcal{U}}$ qui les compactifient. Ce lacet est en fait un polycycle par lequel l est captée. Il en résulte alors le Lemme 4.

Remarque 3. — Les hypothèses faites sur les singularités du feuilletage $\mathcal{F}$ dans l'énoncé du Lemme 4 sont génériquement vérifiées lorsque $\mathcal{F}$ est la trace, sur l'intérieur $\mathcal{U}$ d'une sous-variété à bord M^2, d'un feuilletage (avec singularités) défini sur M^2 et transverse au bord ∂M^2. En revanche, l'hypothèse d'orientabilité transverse n'est pas automatiquement vérifiée et s'avère indispensable puisqu'il existe des feuilletages avec singularités de S^2 ayant des feuilles denses.

La conjonction des Lemmes 2 et 4 fournit alors le :

1er Résultat intermédiaire. — *Sous les hypothèses rappelées au début de* I.*d*, *toute $\mathcal{D}$-feuille rencontrant un seul des deux ensembles* ∂M^+, ∂M^- *est une feuille captée.*

Conséquences. — La propriété δ) et le Lemme 3 de I-*c* permettent de traduire le 1er Résultat intermédiaire de la façon suivante : toute feuille de $\mathcal{F}$ qui est le saturé d'une $\mathcal{D}$-feuille rencontrant exactement l'un des deux ensembles ∂M^+ et ∂M^- est une feuille captée.

En particulier, toute feuille de Δ est une feuille captée, cf. Th. A, ii).

Considérons une feuille F captée par une feuille G. Si G est une feuille différente de la feuille F, $\overline{F}$ contient F strictement et la feuille F n'est pas fermée, cf. Th. A, i). Si de plus F est contenue dans un ensemble fermé saturé minimal $\overline{F}$, alors G appartient à $\overline{F}$. Puisque G est dense dans $\overline{F}$, la feuille G est captée par elle-même. Alors $\overline{F}$ contient la feuille-ressort G, cf. Th. A iv). Cela implique que $\overline{F}$ contient une feuille qui n'est pas propre; en particulier $\overline{F} = \overline{G}$ n'est pas réduit à une feuille fermée.

Les assertions i), ii), iv) vii *a*) sont donc démontrées lorsque $\mathscr{F}$ est transversalement de classe C^2.

Pour démontrer les autres assertions du Théorème A, il faut faire une étude globale du feuilletage $\mathscr{D}(M^2 - \Sigma)$ et des $\mathscr{D}$-feuilles.

Notons $\mathscr{D}^+$ la réunion des $\mathscr{D}$-feuilles rencontrant ∂M^+ et ne rencontrant pas ∂M^-. Toute $\mathscr{D}$-feuille de $\mathscr{D}^+$ contient une « feuille de type infini » et chaque feuille de type infini f contenue dans une $\mathscr{D}$-feuille de $\mathscr{D}^+$ est alors captée par un polycycle-limite P que nous dirons associé à f.

Soit C^+ l'ensemble des polycycles-limites P qui sont associés à une feuille de type infini contenue dans une $\mathscr{D}$-feuille de $\mathscr{D}^+$. Nous avons alors le

2e Résultat intermédiaire. — *Avec les hypothèses et les notations qui précèdent, l'ensemble* C^+ *est fini.*

Démonstration. — Soit P un polycycle de C^+. Nous considérons P comme une réunion non vide de cercles; ces cercles ne rencontrent pas ∂M^2. Puisque M^2 est une sous-variété de S^2, P sépare M^2 en au moins deux composantes connexes. D'après un résultat de Poincaré, chacune de ces composantes connexes qui ne contient pas ∂M^2 admet en son intérieur un point de Σ. D'autre part, une telle composante ne contient aucun polycycle de C^+ dans son intérieur; en effet les singularités éventuelles de P sont des cols; puisque P est un polycycle de C^+, les feuilles de $\mathscr{D}(M^2 - \Sigma)$ contenus dans la $\mathscr{D}$-feuille de P seront toutes contenues dans les composantes connexes de $M^2 - P$ dont l'intérieur ne contient pas ∂M^2; en particulier la $\mathscr{D}$-feuille de P ne rencontre pas ∂M^2. Un polycycle-limite qui est dans une composante connexe de $M^2 - P$ ne contenant pas ∂M^2 n'appartient pas à C^+. Il en résulte que C^+ est fini puisque Σ est fini.

Conséquences. — Dans ce qui précède, on peut échanger les rôles de ∂M^+ et ∂M^- : il existe donc une famille finie $(F'_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ de $\mathscr{D}$-feuilles telle que toute $\mathscr{D}$-feuille rencontrant exactement l'un des ensembles ∂M^+ et ∂M^- soit captée par l'une au moins des feuilles de $\bigcup_{i=1}^{q} F'_j = M'$. Si Δ n'est pas vide, M' n'est pas vide.

D'après ce qui précède et le Lemme 3 de I.c, il existe une famille finie $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de feuilles de $\mathscr{F}$, non vide si Δ est non vide par exemple, telle que toute feuille de $\mathscr{F}$ contenant l'image par φ d'une $\mathscr{D}$-feuille rencontrant l'un exactement des deux ensembles ∂M^+ et ∂M^-, est une feuille captée par l'une au moins des feuilles de $M = \bigcup_{i=1}^{p} F_i$.

En particulier, toute feuille de Δ est captée par une feuille de M.

Soit E un ensemble fermé saturé non vide contenu dans Δ. Toute feuille G de E est captée par l'une des feuilles de M, soit $F_{i(G)}$ le choix d'une telle feuille. Puisque E est fermé, $E \cap M$ n'est donc pas vide; soit $G_1, \ldots, G_K$ les K feuilles de $E \cap M$. Puisque E est contenu dans Δ, chaque feuille G_k de $E \cap M$ est captée par la feuille $G_{j(k)} = F_{i(G_k)}$ de $E \cap M$. Il en résulte une application j de $\{1, \ldots, k\}$ dans lui-même. Puisque k est fini non nul, l'une des applications itérés j^n de j admet un point fixe α, soit $j^m(\alpha) = \alpha$.

Si une feuille F est captée par une feuille G, et si G est captée par une feuille H, alors F est captée par H. Une récurrence finie montre que, pour $n > 0$ quelconque et pour tout k, $1 \leqslant k \leqslant K$, la feuille G_k est captée par la feuille $G_{j^{n}(k)}$. La feuille G_α de E est donc captée par elle-même. Cela démontre le iii) du Théorème A.

Pour démontrer le v) du Théorème A, on remarque que la construction précédente permet d'associer à tout ensemble fermé saturé non vide M_i rencontrant Δ, l'ensemble fini non vide $M \cap M_i$. Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles deux à deux disjoints de ce type. Puisque les $M \cap M_i$ sont deux à deux disjoints et puisque M se compose d'un nombre fini p de feuilles de $\mathscr{F}$, l'ensemble I contient au plus p éléments. Il est donc fini.

L'affirmation vii) du Théorème A résulte alors de i), iii) et v) avec $\Delta = X$ et du fait que deux ensembles fermés saturés minimaux distincts sont disjoints.

Enfin pour démontrer le Théorème A lorsque le feuilletage $\mathscr{F}$ est seulement de classe C^1, il suffit d'appliquer le Lemme 1 après avoir lissé les applications $\mathrm{pr}_1 . h_\alpha^{-1} . f$: on obtient alors une application g telle que les applications $\mathrm{pr}_1 . h_\alpha^{-1} . g$ soient C^1-conjuguées (et non plus C^2-conjuguées) à des applications dont les points critiques sont du type quadratique non dégénéré. Les feuilletages $\mathscr{D}(\varphi, \mathscr{F}; M^2 - \Sigma)$ et $\mathscr{D}$ sont alors transversalement de classe C^1 seulement; ils ont des singularités qui sont encore topologiquement conjuguées à des cols ou à des centres. Puisque le reste de la démonstration n'utilise plus la différentiabilité des feuilletages étudiés, le Théorème A est complètement démontré.

I-*e*. Fin de la démonstration du théorème B.

Nous conservons les hypothèses et les notations introduites en I-*c*, puis en I-*d*; la variété M^2 n'est plus une sous-variété de S^2, mais le feuilletage $\mathscr{F}$ est transversalement de classe C^2.

Pour terminer la démonstration du Théorème B, il suffit de démontrer ii), car i) a été démontré à la fin de I-*c* et ii) entraîne iii) comme nous l'avons déjà remarqué, par exemple en I-*d*.

Si la conclusion du Lemme 4 était toujours vérifiée, ce qui est loin d'être le cas *a priori* lorsque $\mathscr{E}$ est une famille non simplement bordante, nous aurions le 1er Résultat intermédiaire, ainsi que toutes les autres assertions du Théorème A, à la modification près de la démonstration du 2e Résultat intermédiaire que l'on trouvera en I-*f*.

Pour obtenir le captage des feuilles nulle part denses de Δ, il nous faut procéder différemment. Nous démontrons au préalable deux lemmes :

LEMME 5. — *Soit* F *une feuille propre ou exceptionnelle de* $\mathcal{F}$; *soit* $\mathcal{D}(\varphi, \mathcal{F}; M^2 - \Sigma)$ *et* $\mathcal{D}$ *les feuilletages introduits en* I-*e et* I-*d à partir de la famille bordante* $\mathcal{E}$. *Alors il existe une nouvelle application continue* φ_F *de* M^2 *dans* X *vérifiant les propriétés suivantes* :

— φ_F *vérifie toutes les propriétés de* φ *indiquées en* I-*c et* I-*d*; (*soit* $\mathcal{D}(\varphi_F, \mathcal{F}; M^2 - \Sigma_F)$ *et* $\mathcal{D}_F$ *les feuilletages construits comme plus haut, mais cette fois à partir de* φ_F);

— φ_F *est arbitrairement voisine de* φ *et coïncide avec* φ *dans un voisinage de* ∂M^2.

— *l'image* $\varphi_F(\Sigma_F)$ *des singularités* Σ_F *de* $\mathcal{D}_F$ *ne rencontre pas l'adhérence de* F *dans* X.

Démonstration. — Nous avons vu que Σ est un ensemble fini de points de M^2 contenu dans un ouvert $\mathcal{O}$ de M^2 ne rencontrant pas ∂M^2. Au voisinage $\mathcal{O}_i$ d'un point singulier s_i de Σ nous allons déformer φ en une nouvelle application φ'_i vérifiant toujours les propriétés vérifiées par φ ; puisque $\overline{F}$ est un ensemble d'intérieur vide, nous pouvons, par une déformation arbitrairement petite, faire en sorte que l'image par φ'_i de la singularité s'_i, obtenue par déformation à partir de la singularité s_i ne soit pas contenue dans l'ensemble $\overline{F}$. En faisant un nombre fini de telles déformations arbitrairement petites sur une famille finie de tels voisinages $\mathcal{O}_i$ des points s_i de Σ, avec $\mathcal{O}_i \subset \mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \emptyset$ si $i \neq j$, nous obtenons une déformation φ_F de φ vérifiant les propriétés désirées.

LEMME 6. — *Soit* $\mathcal{B}$ *un feuilletage de codimention un, transversalement orientable et transversalement de classe* C^2 *d'un ouvert* $\mathcal{U}$ *d'une variété orientable* M^2 *de dimension* 2. *Soit* b *une semi-caractéristique d'une feuille* f *de* $\mathcal{B}$ *dont l'adhérence* $\overline{b}$ *dans* M^2 *soit compacte, contenue dans* $\mathcal{U}$, *et d'intérieur vide. Alors ou bien* f *est une feuille compacte de* $\mathcal{B}$, *ou bien la semi-caractéristique* b *s'enroule asymptotiquement sur un cycle-limite de* $\mathcal{B}$.

Démonstration. — Puisque $\bar{b}$ est un compact saturé de $\mathscr{B}$, $\bar{b}$ contient un ensemble minimal E de $\mathscr{B}$; E est alors un compact d'intérieur vide contenu dans $\mathscr{U}$. Si f n'était pas une feuille compacte et si la semi-caractéristique nulle part dense b n'était pas captée par un cycle-limite de $\mathscr{B}$, E serait un ensemble minimal exceptionnel de $\mathscr{B}$. Cela fournit la contradiction désirée. En effet, reprenons l'ensemble $\mathscr{U}$ défini par A. J. Schwartz en [50], ligne 10 à partir du bas de la page 154. Comme $\mathscr{U} = \{x \in \mathrm{I},\ t > 0,\ t_x \in \mathrm{I}\}$, c'est encore un ouvert si I est dans $\mathscr{U}$. La fonction t_x reste bien définie, mais elle est en général seulement continue. La fonction $f(v)$ reste définie, elle est de classe C^2 puisque $\mathscr{B}$ est transversalement de classe C^2, et bien que t_x ne soit pas de classe C^2. L'argument utilisé en [50] s'applique donc à E et fournit le résultat désiré.

Nous pouvons maintenant démontrer le ii) du Théorème B. Soit F une feuille nulle part dense de Δ.

Nous appliquons à la feuille F les développements de I-c, non plus dans les feuilletages $\mathscr{D}(\varphi, \mathscr{F}; M^2 - \Sigma)$ et $\mathscr{D}$, mais dans les feuilletages $\mathscr{D}(\varphi_F, \mathscr{F}; M^2 - \Sigma_F)$ et $\mathscr{D}_F$ fournis par l'application du Lemme 5.

Puisque la feuille F est nulle part dense et puisque $\varphi_F(\Sigma_F)$ ne rencontre pas $\overline{F}$, toute $\mathscr{D}_F$-feuille de $\varphi_F^{-1}(F)$ est simplement une feuille de $\mathscr{D}(\varphi_F, \mathscr{F}; M^2 - \Sigma_F)$ qui est nulle part dense dans M^2 et dont l'adhérence dans M^2 ne contient aucune singularité de Σ_F.

Puisque la feuille F rencontre Δ, $\varphi_F^{-1}(F)$ contient une feuille f rencontrant exactement l'un des ensembles ∂M^+ et ∂M^-; c'est une feuille de type infini non compacte et non compactifiable. D'après ce qui précède et puisqu'elle est nulle part dense, nous pouvons lui appliquer le lemme 6 : f est une feuille captée de $\mathscr{D}(\varphi_F, \mathscr{F}; M^2 - \Sigma_F)$.

D'après le Lemme 3, la feuille F est captée, ce qui démontre le Théorème B.

I-*f*. Sur les possibilités de généralisation des théorèmes A et B.

L'hypothèse d'orientabilité transverse de $\mathscr{F}$, ainsi que l'orientabilité des variétés M^2 intervenant dans la définition des familles bordantes et simplement bordantes est très faible, mais est essentielle, comme nous l'avons vu par exemple dans la Remarque 3 de I-*d*.

L'hypothèse de C^2-différentiabilité transverse de $\mathscr{F}$ est indispensable, en général, pour la validité du Théorème B : on connaît effectivement des ensembles minimaux exceptionnels en classe C^1, cf. l'exemple de Denjoy sur T^2 [2] et les exemples que l'on peut en déduire sur les autres variétés de dimension 2 [36].

En revanche, le Théorème A s'étend vraisemblablement aux feuilletages $\mathscr{F}$ transversalement orientables, compte tenu de la Remarque 1 de I-*c*.

Une autre généralisation des Théorèmes A et B consiste à y remplacer l'ensemble Δ précédemment défini, par l'ensemble Δ' saturé de $\varphi(\Delta_M)$, où Δ_M désigne la réunion des $\mathscr{D}$-feuilles qui rencontrent exactement l'un des deux ensembles ∂M^+ et ∂M^- définis lors de la démonstration des Théorèmes A et B. Il est clair que $\varphi(\Delta_M)$ contient Δ.

Dans la pratique, cette remarque est fort utile, comme on le voit sur l'exemple volontairement élémentaire suivant : soit $\mathfrak{A}$ un feuilletage orientable analytique sans singularités de T^2 admettant exactement un cycle-limite γ. Soit τ_1 et τ_2 deux transversales fermées plongées déterminant un cylindre ($M^2 = S^1 \times I$, $\varphi = \mathrm{Id}_{M^2}$) de T^2 contenant γ. Alors Δ est vide, mais Δ_M est dense dans M^2 ; de même $\Delta' = \varphi(\Delta_M)$ est dense dans T^2. Notons en passant que la considération du second cylindre déterminé sur T^2 par τ_1 et τ_2 ne fournit aucun résultat sur $\mathfrak{A}$, comme cela était prévisible.

Nous n'osons conjecturer pour le Lemme 6 une généralisation sous la forme suivante : soit $\mathscr{B}$ un feuilletage orientable tr. C^2 d'un ouvert $\mathscr{U}$ d'une variété compacte M^2 de dimension 2. Soit b une semi-caractéristique nulle part dense, non compacte, de type infini, pour laquelle toutes les singularités de $\mathscr{B}$ dans M^2 sont convenables, au sens introduit lors de la démonstration du Lemme 4. Si b n'est pas compactifiable, alors (?) b est captée.

Une telle propriété de captage est vérifiée lorsque M^2 peut être plongée dans S^2, cf. I-*d*, mais aussi lorsque les singularités s_i de l'adhérence de b dans M^2 vérifient la condition suivante : chaque s_i est un col et deux secteurs hyperboliques de s_i qui contiennent des points de b en leur intérieur ne sont pas adjacents.

Le 1er résultat intermédiaire peut alors être démontré sous les hypothèses du Théorème B et moyennant la « conjoncture précédente ».

On peut alors démontrer l'existence d'une famille finie C de feuilles de $\mathcal{F}$ telle que toute feuille de Δ est captée par une feuille de C. Mais la relation d'équivalence introduite dans la Définition 2 de I-*c* n'est pas ouverte et la variété M^2 n'est plus une sous-variété de S^2 ; il faut alors modifier le raisonnement fait en I-*d* comme suit :

Soit $\mathcal{U}$ la réunion des saturés des transversales $\tau_1, \ldots, \tau_p$ de la famille bordante $\mathcal{E}$. Alors $\mathcal{U}$-Δ est la réunion des feuilles de l'ouvert $\mathcal{U}$ rencontrant deux transversales différentes de $\mathcal{E}$. C'est un ouvert de $\mathcal{U}$ et Δ est fermé dans $\mathcal{U}$. Posons $\psi = \varphi_{|\partial M^2}$; alors $\mathcal{U}$ est le saturé de l'image de ψ et $\psi^{-1}(\Delta)$ est fermé dans ∂M^2.

D'après ce qui précède, toute feuille F de Δ est captée par au moins une feuille de $\mathcal{F}$, notée G_F. Donc toute feuille F de Δ admet un voisinage ouvert $\mathcal{O}_F$ dans $\mathcal{U}$, qui est saturé et composé de feuilles captées par G_F. Puisque ψ est continue et transverse au feuilletage $\mathcal{F}$, cf. I-*c* où nous avons éliminé les feuilles compactes de ∂M^2, les ensembles $\{\psi^{-1}(\mathcal{O}_F)\}_{F\in\Delta/\mathcal{F}}$ fournissent un recouvrement ouvert de $\psi^{-1}(\Delta)$ qui est un compact de ∂M^2. Il en résulte un recouvrement ouvert de Δ par une famille finie d'ouverts de la forme $(\mathcal{O}_{F_i})_{i=1,\ldots,m}$. Il est clair que l'ensemble $C = \bigcup_{i=1}^{m} G_{F_i}$ a les propriétés désirées.

Une autre généralisation du Théorème B est la suivante :

Complément au Théorème B. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement C^2 d'une variété compacte ou non compacte X dans laquelle il existe une transversale fermée τ homologue à zéro rencontrant toutes les feuilles de $\mathcal{F}$. Alors la famille $\mathcal{M}$ des ensembles fermés saturés minimaux de $\mathcal{F}$, qui est non vide, est une famille finie.*

Démonstration. — On vérifie que le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement orientable et que tout ensemble fermé saturé $\overline{F}$ de $\mathcal{F}$ contient un ensemble fermé saturé minimal E. D'après le i) du Théorème B, $\mathcal{F}$ ne possède aucune feuille fermée; si X n'est pas l'unique ensemble minimal de $\mathcal{F}$, tous les ensembles minimaux de $\mathcal{F}$ sont exceptionnels. D'après ce qui précède et le iii) du Théorème B, nous obtenons, sans utiliser la « conjecture » précédente, que toute feuille de $\mathcal{F}$ est captée par une feuille-ressort R_E d'un ensemble minimal exceptionnel E. Or chaque ensemble minimal exceptionnel E admet un voisinage ouvert saturé $\mathcal{U}_E$ composé de feuilles captées par R_E. Les ouverts $(\mathcal{U}_E \cap \tau)_{E \in \mathcal{M}}$ forment un recouvrement de τ; une extraction finie comme ci-dessus montre l'existence d'un nombre fini de feuilles ressorts $R_{E_1}, \ldots, R_{E_n}$ telles que chaque feuille de $\mathcal{F}$ est captée par au moins l'une des R_{E_i}. Il en résulte ensuite, comme en I-c, que $\mathcal{M}$ est une famille finie.

CHAPITRE II

EXEMPLES DE PROPRIÉTÉS LIÉES AU GROUPE DE POINCARÉ

II-*a*. Ensembles minimaux et feuilles-ressorts.

Rappelons que nous avons défini une feuille-ressort comme étant une feuille captée par elle-même.

Dans l'énoncé du Corollaire 1 suivant, annoncé en [18], nous appelons « feuille-ressort au sens faible (resp. au sens fort) de base homotope à zéro dans X » une feuille G telle qu'il existe une application i de $[0,1[\times S^1$ dans X vérifiant les conditions introduites dans la définition des feuilles F captées par une feuille G, cf. [19, 20], où F est égale à G et où la condition suivante est vérifiée : la restriction de i à $\{0\} \times S^1$ est un lacet (resp. plongé dans X) qui est librement homotope à zéro dans X. D'après [9], un feuilletage possédant une telle feuille ne peut pas être orientable et analytique.

Corollaire 1. — *Soit* E *un ensemble fermé saturé minimal non réduit à une feuille fermée d'un feuilletage* $\mathcal{F}$ *de codimension un transversalement de classe* C^1 *transversalement orientable d'une variété* X *compacte ou non, avec ou sans bord. Alors l'une au moins des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

i) E *contient au moins une « feuille-ressort de base homotope à zéro dans* X *au sens faible »*;

ii) *toute transversale fermée à* $\mathcal{F}$ *coupant* E *représente un élément d'ordre infini de* $\pi_1(X)$ *et* $E_{\tilde{X}} = \tilde{p}^{-1}(E)$, *où* $\tilde{p} : \tilde{X} \to X$ *désigne le revêtement universel* $\tilde{X}$ *de* X, *est une réunion de feuilles fermées dans* $\tilde{X}$.

Démonstration. — Puisque $\mathcal{F}$ est transversalement orientable et puisque E contient des feuilles non fermées, E est coupé par des transversales fermées. Si l'une de ces transversales fermées est homotope à zéro, ou admet un itéré homotope à zéro, elle forme à elle seule une famille simplement bordante $\mathcal{E}$ dans X, avec $M^2 = D^2$ et $p = 1 + q = 1$. L'ensemble Δ du théorème A est simplement le saturé de cette transversale fermée, et on vérifie que Δ contient E. D'après le Théorème A, nous avons alors la propriété i) du Corollaire 1. Si celle-ci n'est pas vérifiée, toute transversale fermée à $\mathcal{F}$ rencontrant E représente un élément d'ordre infini de $\pi_1(X)$; en particulier toute feuille de $E_{\tilde{X}}$ est fermée, sinon $E_{\tilde{X}}$ admettrait une feuille coupée par une transversale fermée, nécessairement homotope à zéro dans $\tilde{X}$; l'image de cette transversale par $\tilde{p}$ fournirait alors une transversale fermée à $\mathcal{F}$ homotope à zéro dans X, rencontrant E, ce que nous avons exclu. Le Corollaire 1 est donc démontré.

Remarque 4.

i) Réciproquement, soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement orientable et soit E un ensemble saturé de $\mathcal{F}$ contenant une feuille-ressort de base homotope à zéro dans X; alors E n'est pas réduit à une feuille fermée, il est coupé par une transversale fermée homotope à zéro dans X et $E_{\tilde{X}}$ n'est pas une réunion de feuilles fermées.

ii) Soit un feuilletage $\mathcal{F}$ d'une variété X admettant un ensemble fermé saturé minimal E non réduit à une feuille fermée : le Corollaire 1 permet d'affirmer que l'un des groupes fondamentaux $\pi_1(X)$, $(\pi_1(F))_{F \in E/\mathcal{F}}$ en présence, contient un élément d'ordre infini.

iii) Le Corollaire 1 est optimal, modulo son extension au cas C^0 et modulo l'obtention de feuilles-ressorts au sens fort de base homotope à zéro à l'aide d'arguments supplémentaires non triviaux uniquement si $\dim X$ est égale à trois. En effet, la considération du feuilletage produit de R^2 par les facteurs R montre qu'il ne peut s'étendre au cas où l'ensemble minimal E est réduit à une feuille fermée. D'autre part, la propriété i) se produit effectivement, et seule, dans l'ensemble minimal exceptionnel de Raymond [38] d'un feuilletage C^∞ de R^3. Enfin la propriété ii) se produit effectivement, et seule, dans l'exemple de classe C^1 de Denjoy sur T^2 [2], dans tout feuilletage linéaire de T^2 à feuilles partout denses, dans l'exemple C^∞ de Sacksteder [49] sur $S^1 \times M_2^2$.

II-*b*. Deux propriétés des feuilletages sans holonomie.

Il est clair qu'un feuilletage $\mathcal{F}$ transversalement orientable est sans holonomie si et seulement si $\mathcal{F}$ ne possède aucune feuille captée.

L'application du Théorème A à toute famille simplement bordante $\mathcal{E}$ dans un feuilletage $\mathcal{F}$ sans holonomie fournit donc la propriété suivante : l'ensemble Δ associé à $\mathcal{E}$ est vide.

Nous considérons seulement ici le cas particulier où la famille $\mathcal{E}$ vérifie $p + m \leqslant 2$.

Corollaire 2. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement orientable et transversalement de classe C^1 d'une variété X connexe. Nous notons par $Z(\lambda)$, resp.* 1, *le sous-groupe d'homotopie libre $\pi_1(X)$ de X engendré par la classe d'homotopie libre d'un lacet λ de X, resp. d'un lacet homotope à zéro dans X.*

Si $\mathcal{F}$ est sans holonomie, on a les deux propriétés suivantes :

1) *Si τ_1 et τ_2 sont deux transversales fermées à $\mathcal{F}$ telles que $Z(\tau_1) \cap Z(\tau_2)$ n'est pas réduit à l'élément* 1 *de $\pi_1(X)$, alors τ_1 et τ_2 ont même ensemble saturé ;*

2) *Si τ_1 est une transversale fermée à $\mathcal{F}$ et si λ est un lacet contenu dans une feuille de $\mathcal{F}$, alors*

$$Z(\tau_1) \cap Z(\lambda) = \{1\}.$$

Le Corollaire 2 généralise les propositions 1 et 2 de [17].

Il est utile dans l'étude des feuilletages sans holonomie, en particulier lorsqu'il existe une transversale rencontrant toutes les feuilles du revêtement universel de X, cf. [17].

Notons en passant que notre Note [17] a directement inspiré le travail [6].

Le Corollaire 2 sera aussi utilisé dans des travaux ultérieurs; il joue un rôle important, par exemple, dans [28] qui donne la structure des feuilletages sans holonomie des variétés de groupe fondamental Z.

Démonstration. — Si $Z(\tau_1) \cap Z(\tau_2)$ contient un élément différent de 1, il existe deux entiers non nuls m_1 et m_2 tels que $[\tau_1]^{m_1} = [\tau_2]^{m_2} \neq 1$. A un changement d'orientation près de l'une des transversales en présence, nous pouvons supposer que m_1 et m_2 sont de même signe et sont positifs. Cela revient à supposer que τ_1 et τ_2 admettent des itérés librement homotopes, donc que τ_1 et τ_2 forment dans X une famille simplement bordante. Nous appliquons le Théorème A, ce qui montre que la différence symétrique Δ des saturés de τ_1 et τ_2 est vide. Cela démontre i).

Si $Z(\tau_1) \cap Z(\lambda)$ contient un élément différent de 1, le raisonnement précédent montre que τ_1 et un lacet d'une feuille de $\mathcal{F}$ constituent dans X une famille simplement bordante. Nous appliquons le Théorème A avec $p = m = 1$, ce qui montre que le saturé Δ non vide de τ_1 est composé de feuilles captées. Cette contradiction démontre ii).

II-*c*. Propriétés des feuilletages vérifiant la condition H.L. ou la condition F.S.B. Exemples.

En vue d'introduire les conditions H.L. et F.S.B. nous énoncerons tout d'abord les deux propriétés suivantes qui résultent directement du Théorème A :

Corollaire 3. — i) *Pour qu'une feuille* F *d'un feuilletage transversalement orientable et transversalement de classe* C^1 *soit captée, il faut et il suffit qu'il existe une transversale fermée à* $\mathcal{F}$ *rencontrant* F *et librement homotope à un lacet contenu dans une feuille de* $\mathcal{F}$.

ii) *Soit* F *une feuille d'un feuilletage transversalement orientable et transversalement* C^1 *d'une variété* X *de groupe* *fondamental sans éléments d'ordre infini. Pour que* F *soit fermée, il faut et il suffit que* F *ne soit pas captée.*

Les conditions H.L., F.S.B. et F.S.B′. ont été introduites en relation avec les Propriétés i) et ii) du Corollaire 3 :

Condition H.L. [22]. — Tout lacet de X est librement homotope à un lacet d'une feuille du feuilletage $\mathcal{F}$ de X.

Condition F.S.B. [22]. — Tout lacet de X constitue d'au moins une façon une famille simplement bordante dans X avec un certain nombre de lacets de feuilles du feuilletage $\mathcal{F}$ de X.

Condition F.S.B′. — Pour toute feuille non fermée F de $\mathcal{F}$, il existe une transversale fermée τ_F à $\mathcal{F}$ coupant F et des lacets $\lambda_1(F), \ldots, \lambda_{n(F)}(F)$ de feuilles de $\mathcal{F}$ tels que $\tau, \lambda_1(F), \ldots, \lambda_{n(F)}(F)$ constituent une famille simplement bordante dans X.

Exemples. — i) Un feuilletage $\mathcal{F}$ vérifie la Condition H.L. si X est simplement connexe; il vérifie la Condition F.S.B. si $\pi_1(X)$ n'a aucun élément d'ordre infini.

ii) Un feuilletage $\mathcal{F}$ vérifie la Condition H.L. si X est une variété connexe de la forme $M^n \times I$, $M^n \times D^{p+2}$ (donc aussi de la forme $M^n \times R \times D^{q+2}$ et $M^n \times S^1 \times D^{r+2}$), où M^n est une variété sans bord, quelconque, $p \geqslant 0$, $q > 0$, $r > 0$. On sait que si p est strictement positif, l'existence du feuilletage $\mathcal{F}$ sur $M^n \times D^{p+2}$ implique que M^n n'est pas simultanément compacte et simplement connexe; on sait aussi que de très nombreuses variétés de ce type admettent un feuilletage ayant les propriétés requises.

Remarque 5. — Si un feuilletage $\mathcal{F}$ vérifie la Condition H.L., il vérifie la Condition F.S.B. S'il vérifie la Condition F.S.B., il vérifie la Condition F.S.B′. Les Conditions F.S.B. et F.S.B.′ sont particulièrement adaptées au cas où la variété X est à bord non connexe.

Nous pouvons maintenant énoncer le Corollaire 4 :

COROLLAIRE 4. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un feuilletage transversalement orientable transversalement* C^1 *d'une variété* X *connexe, avec ou sans bord, compacte ou non compacte.*

Si $\mathcal{G}$ *vérifie la Condition F.S.B'., alors*

i) *une feuille de* $\mathcal{G}$ *est fermée si et seulement si elle n'est pas captée;*

ii) *tout ensemble fermé saturé minimal de* $\mathcal{G}$ *non réduit à une feuille fermée contient une feuille-ressort;*

iii) *l'enveloppe* $\overline{\mathcal{R}} - \mathcal{R}$ *d'une réunion* $\mathcal{R}$ *d'ensembles fermés saturés* $(S_i)_{i\in I}$ *de* $\mathcal{G}$*, tels que* $\bigcap_{i\in J} S_i$ *est vide pour tout ensemble infini* J *contenu dans* I*, est une réunion de feuilles fermées;*

iv) *si la variété* X *est à base dénombrable, la famille* $\mathcal{M}_{ex}$ *des ensembles fermés saturés minimaux exceptionnels de* $\mathcal{G}$ *est au plus dénombrable;*

v) *si le feuilletage* $\mathcal{G}$ *vérifie de plus la Condition F.S.B., chaque transversale fermée de* $\mathcal{G}$ *ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles fermés saturés minimaux de* $\mathcal{G}$.

Démonstration. — Soit F une feuille non fermée de $\mathcal{G}$; la Condition F.S.B.' fournit une famille simplement bordante dans X ne contenant qu'une seule transversale fermée à $\mathcal{G}$. Puisque l'ensemble Δ correspondant est le saturé de cette transversale fermée, la feuille F est captée. Réciproquement, nous avons déjà vu qu'une feuille captée n'est pas fermée (par exemple lorsque nous avons démontré les conséquences du 1er Résultat intermédiaire, en I-*d*); cela démontre i).

Le ii) résulte alors de i) : un ensemble minimal E non réduit à une feuille fermée contient une feuille non fermée; d'autre part, un ensemble fermé saturé minimal contient une feuille-ressort si et seulement s'il contient une feuille captée.

Pour démontrer iii), nous considérons une feuille F de $\overline{\mathcal{R}} - \mathcal{R}$; d'après i), il suffit de démontrer que F n'est pas captée. Mais si F était une feuille captée par une feuille G, elle admettrait un voisinage ouvert saturé W dans X composé de feuilles toutes captées par G. Puisque F est dans l'adhérence de $\bigcup_{i\in I} S_i$ et puisque chaque ensemble S_i est fermé dans X, la feuille F est limite d'une réunion de feuilles $(F_i)_{i\in J}$, où J est un sous-ensemble infini dénombrable de I et où la feuille F_i est contenue dans $W \cap S_i$ pour tout i appartenant à J. Or chaque ensemble $(S_i)_{i\in J}$ est fermé et chaque feuille F_i, $i \in J$, est captée par G; il en résulte que la feuille G devrait appartenir à l'ensemble S_i pour tout i appartenant à l'ensemble infini J. Cela est impossible d'après l'hypothèse et démontre iii).

D'après ii), chaque ensemble minimal exceptionnel E de $\mathcal{G}$ possède une feuille-ressort R_E, donc un voisinage ouvert saturé $\mathcal{U}_E$ composé de feuilles captées par R_E. En particulier toute feuille de $\mathcal{U}_E$ contient E dans son adhérence et, puisque deux ensembles minimaux distincts sont disjoints, l'ouvert $\mathcal{U}_E$ ne contient pas d'ensemble minimal de $\mathcal{G}$ autre que E. Puisque la variété X est à base dénombrable, la famille $\mathcal{M}_{ex}$ des ensembles minimaux exceptionnels de $\mathcal{G}$ est au plus dénombrable, cela démontre iv).

Le v) résulte du Théorème A, vi), avec $p = 1$. Le Corollaire 4 est donc démontré.

Remarque 6. — Il se trouve donc qu'un feuilletage transversalement C^1 vérifiant la Condition F.S.B.′ a des propriétés fort semblables à celles d'un feuilletage transversalement C^2 d'une variété compacte, cf. notre travail [21].

Ainsi les affirmations i) et iii) du Corollaire 4 entraînent que la réunion de tous les ensembles fermés saturés minimaux du feuilletage $\mathcal{G}$ est un fermé de X, que l'adhérence d'une réunion de feuilles fermées est encore une réunion de feuilles fermées, même si $b_1(X, Q)$ n'est pas fini, cf. [8], et que l'on peut faire disparaître tous les ensembles exceptionnels à l'aide d'une infinité dénombrable de tourbillonnements à supports deux à deux disjoints. Si la variété X n'est pas compacte, le feuilletage $\mathcal{G}$ peut effectivement vérifier la Condition F.S.B.′ et admettre une infinité d'ensembles minimaux exceptionnels, cf. par exemple le feuilletage C^∞ de $T^2 \times R$ indiqué en [22 ou 26] qui vérifie même la Condition H.L.

Remarque 7. — En tenant compte de la Remarque 6 d'une part, des exemples et de la Remarque 5 d'autre part, nous obtenons donc dans de très nombreux cas une nouvelle démonstration, cette fois pour des feuilletages transversalement C^1

seulement, des résultats de [26] concernant le cas des variétés feuilletées compactes.

L'utilisation du sécant d'homotopie donne à une telle remarque une portée bien plus générale qu'il ne semble au premier abord; de même l'utilisation des résultats de [20, 25, 27] concernant le captage des feuilles exceptionnelles par exemple, permet d'étendre ces propriétés à des feuilletages, ne vérifiant plus la Condition F.S.B.', mais tels que $d(G, \mathcal{G})$ est inférieur ou égal à 1 pour toute feuille G de $\mathcal{G}$, où $d(G, \mathcal{G})$ est défini en [20]. Cela permet, en particulier, de traiter complètement le cas des variétés feuilletées en classe C^1 dont le groupe fondamental est fini ou est une extension finie de Z.

Simplement dans le but de fixer les idées, nous allons considérer brièvement le cas particulier constitué par l'énoncé suivant qui généralise certains aspects de théorèmes de Lima, Rosenberg, Sacksteder, Novikov, Avez, Rosenberg et Châtelet : une variété différentiable compacte connexe M^n de dimension $n \geqslant 2$, dont le groupe fondamental est fini ou est une extension finie de Z, n'admet aucune action localement libre de classe C^1 de R^{n-1}.

D'après un argument topologique de [32], cf. aussi [35], tout lacet non trivial d'une feuille d'une telle action est un lacet non trivial de la variété M^n. La classification topologique des variétés de dimension 2 résout la question pour $n = 2$; pour $n \geqslant 3$, notre affirmation résulte alors directement de la proposition générale suivante :

PROPOSITION 1. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement orienté et transversalement de classe C^1 d'une variété M^n différentiable compacte, connexe. Si chaque feuille F de $\mathcal{F}$ a un nombre $d(F, \mathcal{F})$ inférieur ou égal à un, alors l'une au moins des deux propriétés suivantes est vérifiée* :

i) *le feuilletage $\mathcal{F}$ admet une feuille compacte*;

ii) *le feuilletage $\mathcal{F}$ admet une feuille-ressort de base homotope à zéro dans M^n (au sens de* II-*a*).

Démonstration. — Supposons que $\mathcal{F}$ ne contient pas de feuilles compactes; en particulier M^n est sans bord. Chaque feuille F de $\mathcal{F}$ admet dans son adhérence dans M^n une feuille G non fermée. Nous pouvons appliquer la proposition fondamentale de [20]; chaque feuille F de $\mathcal{F}$ est donc coupée par une transversale fermée τ_F homotope à zéro. Puisque M^n est compacte, nous en déduisons un recouvrement ouvert fini de M^n par des saturés de transversales fermées homotopes à zéro dans M^n. Puisque M^n est connexe, ces ouverts saturés non vides ne sont pas deux à deux disjoints. On peut vérifier, cf. I-*c* Proposition 2 de [22] pour plus de détails qu'il existe alors dans M^n une transversale fermée à $\mathcal{F}$ homotope à zéro et rencontrant toutes les feuilles de $\mathcal{F}$. Le vii) du Théorème A fournit la feuille-ressort cherchée (on vérifie directement qu'elle est de base homotope à zéro dans M^n). La Proposition 1 est ainsi démontrée.

Remarque 8. — La Proposition 1 est optimale dans la mesure où ni i) ni ii) ne sont vérifiées sur le feuilletage de Denjoy du tore T^2 par exemple. De plus nous avons utilisé la compacité de la variété M^n de façon extrêmement faible; nous n'avons même pas utilisé l'existence d'ensembles minimaux dans $\mathcal{F}$, garantie par le lemme de Zorn. Notre démonstration C^1 de l'énoncé concernant les actions de R^{n-1} sur M^n s'écarte d'ailleurs de façon notable des démonstrations citées plus haut dans la mesure où l'absence de feuilles-ressorts et d'ensembles minimaux exceptionnels utilise, cf. l'exemple déjà donné de Denjoy, de façon cruciale la différentiabilité C^2 de l'action [49].

II-*d*. Étude des feuilletages de Reeb généralisés.

Les feuilletages de Reeb sont des feuilletages étudiés en [42]. Ce sont des feuilletages transverses de classe C^2 de variétés compactes de la forme $M^n \times I$; ils possèdent des propriétés intéressantes à de nombreux points de vue dont certaines ont été étendues à d'autres « feuilletages de Reeb » sur les variétés de dimension 3 par Rosenberg et Roussarie [44, 46] et à d'autres feuilletages de Reeb généralisés par Moussu [34].

Nous allons étendre ce type de propriété au cas non compact et non transverse, notamment certains aspects du Th. 2.3, p. 80 de [34]. Contrairement à ce qui se passe dans le cas compact ou dans le cas transverse, on ne sait pas *a priori* si les deux propriétés suivantes sont vérifiées : tout ensemble fermé saturé non vide contient un ensemble minimal; tout ensemble minimal exceptionnel contient une feuille-ressort.

Nous proposons la définition suivante :

DÉFINITION 3. — *Un feuilletage de Reeb est un feuilletage* $\mathcal{R}$ *de codimension un, transverse ou non, transversalement orientable d'une variété* $X = M^{n-1} \times I$, *connexe, où :*

1) *les seules feuilles fermées de* $\mathcal{R}$ *sont les feuilles* $M^{n-1} \times (0)$ *et* $M^{n-1} \times (1)$;

2) *les feuilles intérieures de* $\mathcal{R}$, *c'est-à-dire les feuilles de* $M^{n-1} \times]0, 1[$, *sont sans holonomie.*

Chacun des feuilletages $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_{|M^{n-1} \times [0, 1[}$ et

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_{|M^{n-1} \times]0, 1]}$$

vérifie la Condition H.L., cf. les Exemples ii) de II-*c*; les Conditions 1) et 2) de la Définition 3 permettent d'appliquer le Corollaire 4, et l'on a la Propriété 1. Toute feuille intérieure d'un feuilletage de Reeb $\mathcal{R}$ transversalement de classe C^1 est captée à la fois par $M^{n-1} \times (0)$ et $M^{n-1} \times (1)$.

D'après la Condition 2), un lacet donné de ∂X est soit d'holonomie triviale, soit d'holonomie monotone (une application du Théorème A avec $p + m \leqslant 2$ montrerait d'ailleurs qu'il n'y a pas lieu de préciser la composante de ∂M considérée).

D'après la Propriété 1, le groupe d'holonomie G de $M^{n-1} \times (0)$ contient Z (donc $\pi_1(X)$ est infini). Lorsque G est cyclique, toutes les feuilles de $\mathcal{R}$ sont propres et ont un nombre $d(F, \mathcal{R})$ inférieur ou égal à 1. Puisque ∂X n'est évidemment rencontré par aucune transversale fermée à $\mathcal{R}$, toutes les feuilles de $\mathring{X} = X - \partial X$ ont un nombre $d(F, \mathcal{R}')$ inférieur ou égal à 1, où $\mathcal{R}'$ désigne le feuilletage induit par $\mathcal{R}$ sur $\mathring{X}$. D'après [20], les feuilles de $\mathcal{R}'$ sont propres et ont une enveloppe composée de feuilles fermées dans $\mathring{X}$ coupées par aucune transversale fermée : d'après ce qui précède, toutes les feuilles de $\mathcal{R}'$ sont fermées, donc toutes les feuilles de $\mathcal{R}$ sont propres.

Lorsque G n'est pas cyclique, nous choisissons un point-base x_0 dans $M^{n-1} \times 0 \hookrightarrow X$. Soit R^+ un semi-intervalle transverse à $\mathcal{R}$ d'origine x_0. Puisque G est composé d'éléments opérant sur R^+ sans points fixes autres que x_0, la structure d'ordre de R^+ induit sur tout sous-groupe à deux générateurs de G une structure d'ordre archimédienne. Donc le groupe sans torsion G est aussi abélien [1, 5].

Si le rang de G est supérieur ou égal à 2, le feuilletage $\mathcal{R}$ possède nécessairement des feuilles non fermées dans $\mathring{X}$; elles ne sont pas nécessairement du type dense lorsque $\mathcal{R}$ est transversalement de classe C^1. Mais lorsque $\mathcal{R}$ est transversalement de classe C^2, le théorème bien connu de Denjoy [2, 52, 42, 50] ou une application directe de [27] montre, puisque G est abélien, que toute feuille de $\mathcal{R}$ suffisamment voisine de $M^{n-1} \times (0)$ est localement dense. De telles propriétés nous étaient connues avant les considérations analogues de [34], cf. [35, 17].

Puisque toute feuille intérieure de $\mathcal{R}$ contient $M^{n-1} \times (0)$ dans son adhérence et puisque $\mathring{X}$ est connexe, toute feuille de $\mathcal{R}'$ est partout dense dans $\mathring{X}$.

Nous avons donc démontré la Propriété 2. Dans un feuilletage de Reeb transversalement C^2, les feuilles intérieures sont i) ou toutes propres, ii) ou toutes partout denses. Le groupe fondamental de X admet un quotient abélien sans torsion de rang supérieur ou égal à un dans le cas i), resp. à deux dans le cas ii).

Revenons aux feuilletages de Reeb transversalement C^1. Si une feuille intérieure est simplement connexe, et puisque l'injection i de $M^{n-1} \times 0$ dans X induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux, tout lacet non trivial de $M^{n-1} \times (0)$ est d'holonomie infinie, et G est isomorphe à $\pi_1(M^{n-1})$. D'après le début de la démonstration de la Propriété 2, il en résulte le :

Corollaire 5. — *Soit $\mathcal{R}$ un feuilletage de Reeb transversalement de classe C^1 dont une feuille intérieure est simplement connexe; alors $\pi_1(X)$ est abélien sans torsion.*

En utilisant cette fois l'isomorphisme induit par i sur les groupes d'homotopie supérieur, nous avons aussi le

Corollaire 6. — *Soit $\mathcal{R}$ un feuilletage de Reeb transversalement de classe C^1 d'une variété connexe X dont une feuille* *soit de revêtement universel k-connexe; alors le revêtement universel de* X *est k-connexe.*

Les Corollaires 5 et 6 généralisent donc certains résultats de [42] et [33] à des feuilletages de Reeb non transverses de variétés non compactes transversalement C^1 (voire C^0 compte tenu de la Remarque 1 *b*) de 1 *c*)).

Dans un ordre d'idées différent, ils nous permettent aussi de démontrer en [22], Corollaire 6 du Chapitre V la

Proposition 2. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage transversalement orientable transversalement* C^1 *d'une variété connexe orientable* X *de la forme* $M^2 \times I$ *dont les feuilles intérieures sont toutes homéomorphes à* R^2. *Alors* X *est difféomorphe à* $R^2 \times I$, $S^1 \times R \times I$ *ou* $T^2 \times I$.

Lorsque $\mathcal{F}$ a une feuille non propre, la seule possibilité est que X est difféomorphe à $T^2 \times I$, d'après le début de la démonstration de la Propriété 2.

De même $T^2 \times I$ est la seule variété X de la forme $M^2 \times I$, *a priori* compacte ou non, à posséder un feuilletage orientable tel que : $\mathcal{F}|_{\mathring{X}}$ est transversalement C^1, sans holonomie, sans éléments évanouissants, les feuilles intérieures de $\mathcal{F}$ sont des cylindres dont l'un au moins n'est pas fermé.

Remarque 9. — i) Des caractérisations semblables peuvent être obtenues pour $R^2 \times I$, $R \times S^1 \times I$ et $S^2 \times I$.

ii) Des caractérisations de $T^p \times I$ peuvent être obtenues, lorsque p est différent de 4, à l'aide des Corollaires 5 et 6 et des résultats de Wall [55] sur la classification des $K(Z^p, 1)$.

iii) La plupart des résultats précédents s'étendent aux feuilletages $\mathcal{R}''$ vérifiant seulement la Condition ii) de la définition 3, par exemple, à la condition de prendre alors pour $\mathcal{R}$ la restriction de $\mathcal{R}''$ à l'ouvert, supposé non vide, réunion des feuilles non fermées de $\mathcal{R}''$.

iv) La classification par conjugaison topologique des feuilletages de Reeb de $S^1 \times R \times I$ par des feuilles R^2 par exemple est reliée à l'existence de certaines concordances des feuilletages de $S^1 \times I$ à singularités quadratiques dont les seuls polycycles-limites sont les bords de $S^1 \times I$; on trouve au moins deux classes.

v) Contrairement à ce qui se passe dans le cas compact, cf. [43], on peut construire une famille infinie de variétés $(X_i)_{i \in N}$ non compactes, de dimension 3, non deux à deux difféomorphes, dont toutes les feuilles intérieures sont des plans, et ce dans chacun des cas suivants :

α) ∂X_i est vide pour tout $i \in N$;

β) ∂X_i est une réunion de plans;

γ) ∂X_i est une réunion de cylindres;

δ) ∂X_i est une réunion de cylindres et de plans.

CHAPITRE III

EXEMPLES DE PROPRIÉTÉS LIÉES AU PREMIER GROUPE DE BETTI

Ce chapitre présente quelques résultats dont la démonstration utilise de façon plus ou moins directe certains points du théorème B.

III-*a*. Caractérisation des ensembles fermés saturés minimaux exceptionnels contenant une feuille-ressort.

Une feuille-ressort d'un feuilletage transversalement orientable est toujours coupée par une transversale fermée homologue à zéro.

Nous avons vu dans ce travail et dans [19] qu'une feuille propre, fermée ou non, n'est pas une feuille-ressort, et qu'un feuilletage dont toutes les feuilles sont partout denses est sans holonomie si, et seulement si, il est sans feuilles-ressorts. Les seules feuilles-ressorts d'adhérence minimale qui restent à considérer sont donc exceptionnelles : une réciproque à l'assertion de l'alinéa précédent est alors le :

Corollaire 7. — *Soit* E *un ensemble fermé saturé minimal exceptionnel d'un feuilletage transversalement de classe* C^2 *et transversalement orientable. Si une feuille de* E *est coupée par une transversale fermée* τ *homologue à zéro, alors* E *contient une feuille-ressort.*

Démonstration. — La transversale fermée τ rencontrant E constitue une famille bordante $\mathcal{E}$, avec $p = 1$ et $m = 0$, d'après nos remarques en I-*a*. L'ensemble Δ associé à $\mathcal{E}$ est le saturé de τ; il rencontre E et le ii) du théorème B fournit la feuille-ressort cherchée.

III-*b*. Application au problème de l'existence de feuilles-ressorts dans les ensembles minimaux exceptionnels.

L'un des buts de ce paragraphe est de démontrer géométriquement l'existence d'une feuille-ressort dans l'exemple de Sacksteder [49].

Compte tenu du corollaire 7, il suffit de démontrer pour cela la

PROPRIÉTÉ 3. — *Toute feuille du feuilletage $\mathcal{S}$ de Sacksteder est coupée par une transversale fermée homologue à zéro.*

Démonstration. — Nous conservons les notations de [49]. Soit γ_A, γ_B, γ_1 et γ_2 les générateurs de $\pi_1(M_2^2)$. Soit T l'homomorphisme $\gamma \to (T, \gamma)$ de $\pi_1(M_2^2)$ dans le groupe G de difféomorphismes de $S^1 = R/2Z$ engendré par f et g qui définit $\mathcal{S}$. Soit $x_0 = b \times 0$ un point de $M_2^2 \times S^1$ contenu dans l'ensemble minimal exceptionnel E de $\mathcal{S}$. Soit F la feuille de $\mathcal{S}$ contenant x_0. Le relevé, dans la feuille F, d'origine $b \times 0$, du lacet $\gamma_A . \gamma_B . \gamma_A^{-1} . \gamma_B^{-1}$ est un chemin c d'extrémité $b \times 4/3$. On vérifie alors, cf. [22, Chapitre VI] pour plus de détails, qu'en composant c avec l'un des deux arcs de $b \times S^1$ déterminés par $b \times 0$ et $b \times 4/3$, on obtient un lacet de $S^1 \times M_2^2$ dont la classe d'homotopie est celle du commutateur $\gamma_A . \gamma_B . \gamma_A^{-1} . \gamma_B^{-1}$. Or ce lacet est homotope, par construction, à une transversale fermée à $\mathcal{S}$ rencontrant la feuille F de E en x_0. Elle est homologue à zéro, et, puisque l'adhérence de toute feuille de $\mathcal{S}$ contient E, elle rencontre bien toute feuille de $\mathcal{S}$: la propriété 3 est donc démontrée.

Remarque 10. — i) Grâce à la propriété 3, le corollaire 7 nous a permis d'affirmer en [19] que tous les ensembles minimaux exceptionnels connus admettaient une feuille-ressort : on voit en effet que l'ensemble minimal exceptionnel de Raymond [38] vérifie la propriété 3, soit directement, soit simplement parce que $\pi_1(S^3) = H_1(S^3; Z) = 0$; cela permet d'appliquer indifféremennt le théorème A ou le théorème B pour y obtenir une feuille-ressort.

ii) Cette affirmation est toujours valable, car les quelques ensembles minimaux exceptionnels connus depuis [15], sont construits de façon tout à fait analogue à ceux de Sacksteder et de Raymond; l'équivalent de la proposition 3 pour ces exemples est alors aisément obtenu, comme ci-dessus, par une construction directe.

iii) Le corollaire 7 fournit aussi le captage de toutes les feuilles exceptionnelles d'adhérence non minimale qui sont connues, cf. [47]; il se trouve qu'il n'utilise ni la compacité de l'ensemble exceptionnel étudié, ni les propriétés des sous-groupes de type fini de $\mathrm{Diff}^{+}_{C^2}(S^1)$.

III-*c*. Propriétés des feuilletages vérifiant la Condition H.C. ou la Condition F.B.

Il est clair que la condition H.C. suivante est plus faible que la Condition H.L. introduite en II-*c* :

Condition H.C. — Toute feuille F non fermée du feuilletage transversalement orientable $\mathcal{F}$ d'une variété X est coupée par au moins une transversale fermée à $\mathcal{F}$ homologue à zéro dans X ou homologue dans X à un lacet d'une feuille de $\mathcal{F}$.

La condition H.C. est vérifiée lorsque la variété X a un premier groupe d'homologie (à supports compacts) à coefficients entiers sans éléments d'ordre infini.

La condition H.C. est vérifiée lorsqu'il existe une feuille G de $\mathcal{F}$ telle que l'application canonique de $H_1(G, Z)$ dans $H_1(X, Z)$ soit surjective; une telle hypothèse est notamment rencontrée, à d'autres fins, dans les énoncés de théorèmes [34], p. 73, 75, 78.

De même il est clair que la condition F.B. est plus faible que les conditions F.S.B.' et H.C. :

Condition F. B. — Toute feuille F non fermée de $\mathcal{F}$ est coupée par au moins une transversale fermée constituant, avec certains lacets de feuilles de $\mathcal{F}$, une famille bordante.

La condition F.B. est très générale; elle est vérifiée dès qu'il existe une réunion C finie de feuilles de $\mathcal{F}$ telle que l'application canonique de $H_1(C, Q)$ dans $H_1(X, Q)$ soit surjective : souvent il suffira de prendre $C = \partial X$.

Le théorème B et les méthodes utilisées en II-*c*) nous permettent alors de démontrer les résultats suivants, Cf. [22, chapitre VI] pour plus de détails :

Corollaire 8. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage transversalement orientable et transversalement* C^2 *vérifiant la condition F.B.; alors*

i) *l'enveloppe d'une réunion de feuilles fermées est une réunion de feuilles fermées;*

ii) *une feuille non captée de* $\mathcal{F}$ *est fermée ou est localement dense;*

iii) *tout ensemble fermé saturé minimal exceptionnel contient une feuille-ressort;*

iv) *l'enveloppe d'une réunion d'ensembles fermés saturés* $(M_i)_{i\in I}$, *tels que* $\bigcap_{i\in J} M_i$ *est vide pour tout sous-ensemble infini* J *de* I, *ne contient que des feuilles fermées ou localement denses.*

La démonstration des théorèmes A et B montre d'ailleurs aussi que la conclusion i) du corollaire 8 n'utilise pas la différentiabilité transverse de $\mathcal{F}$.

III-*d*. Généralisation des résultats précédents.

Nous indiquons maintenant brièvement quelques idées permettant de poursuivre l'étude qui précède.

α) La méthode suivie en I et II n'est pas la seule permettant d'étudier la présence d'holonomie dans un feuilletage dont la classe de différentiabilité transverse est peu élevée.

Nous pouvons par exemple démontrer le résultat suivant : soit $\mathcal{F}$ un feuilletage topologique orientable de codimension un d'une variété compacte, connexe, sans bord, et de dimension 3. Soit $\mathcal{N}$ un feuilletage transverse à $\mathcal{F}$ de dimension un. Soit $\mathcal{R}$ une réunion non vide de feuilles de $\mathcal{F}$ homéomorphes à R^2, où $\mathcal{R}$ peut se réduire à une seule feuille.

Alors toute feuille de $\overline{\mathscr{R}} - \mathscr{R}$ non homéomorphe à R^2 possède un lacet dont l'holonomie est infinie. Nous pouvons illustrer ce théorème par des exemples très variés; nous pouvons aussi le généraliser, en utilisant notre notion de « compact changeant de type », aux feuilles planes ou cylindriques, etc...

Il serait intéressant d'étudier de cette façon la structure des feuilletages sans holonomie, topologiques, des variétés de dimension 3 sans bord, puis d'étendre ces résultats aux dimensions supérieures.

β) La méthode suivie en II *c*) peut être étendue grâce au théorème B sous des hypothèses plus faibles. Rappelons la définition du sécant d'homologie HS(F, $\mathscr{F}$) d'une feuille F d'un feuilletage $\mathscr{F}$ transversalement orienté [19] : c'est le sous-semi-groupe de $H_1(X, Z)$ constitué par les classes d'homologie représentables dans la variété feuilletée X par une transversale fermée, orientée, rencontrant F.

Les développements algébriques de [20, 25] relatifs au sécant d'homotopie s'appliquent *a fortiori* au sécant d'homologie. Or HS(F, $\mathscr{F}$) engendre dans $H_1(X, Z)$ un sous-groupe abélien dont le rang, lorsqu'il est fini, est noté ici *dh* (F, $\mathscr{F}$). Compte tenu du lemme fondamental de [20] et du théorème B, nous avons la

Propriété 4. — *Soit* F *une feuille nulle part dense non captée d'un feuilletage* $\mathscr{F}$ *transversalement orientable et transversalement de classe* C^2. *Si* HS(F, $\mathscr{F}$) *est de type fini de rang* *dh*(F, $\mathscr{F}$) *inférieur ou égal à* 1, *alors* F *est propre et d'enveloppe composée de feuilles fermées coupées par aucune transversale fermée.*

Il résulte en particulier de la Propriété 4 que toute feuille exceptionnelle d'un feuilletage transversalement C^2 d'une variété de premier groupe de Betti de type fini et de premier nombre de Betti rationnel inférieur ou égal à un est une feuille captée.

γ) Nous avons vu en I-*f* une conjecture concernant les feuilletages C^2 avec singularités quadratiques des variétés compactes de dimension 2; cette conjecture peut être traduite en termes de points fixes non triviaux d'un élément d'un certain pseudogroupe d'applications multivoques de R dans R.

Une réponse positive à cette conjecture aurait entraîné une réponse positive aux deux conjectures suivantes :

Conjecture 1. — Le saturé d'une transversale fermée τ_0 homologue à zéro d'un feuilletage transversalement orientable et transversalement C^2 est une réunion de feuilles captées.

Conjecture 1 *faible*. — Un feuilletage transversalement orientable et transversalement de classe C^2 sans holonomie n'admet aucune transversale fermée τ_0 homologue à zéro.

Nous avons déjà indiqué plus haut nombre de raisons pour lesquelles ces deux conjectures nous semblent raisonnables. Nous pouvons les démontrer dans chacun des deux cas suivants : le saturé de τ_0 est contenu dans un saturé de groupe fondamental abélien; le saturé de τ_0 est relativement compact. Nous pouvons aussi les démontrer en faisant des hypothèses analogues sur le complémentaire du saturé de τ_0.

Une réponse positive à la conjecture 1 permet évidemment d'étendre la propriété 4 à une feuille F localement ou partout dense.

δ) L'utilisation conjointe du sécant d'homologie, de la propriété 4, et de notre théorème de structure de [28] nous fournit aussi la

Propriété 5. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage transversalement de classe* C^2 *transversalement orientable, sans holonomie, d'une variété de premier groupe d'homologie entière égal à* Z, *ou à* $Z \oplus G$ *avec* G *fini. Si* $\mathcal{F}$ *ne possède aucune feuille du type dense, ou bien si la conjecture* 1 *faible de* γ) *est vérifiée, alors la structure du feuilletage* $\mathcal{F}$ *est la même que celle décrite en* [28], *pour les feuilletages sans holonomie, transversalement* C^1 *et transversalement orientables, des variétés de groupe fondamental égal à* Z.

ε) Il serait intéressant, en liaison avec le contenu de III-*b*, de savoir si l'on peut construire un ensemble minimal exceptionnel compact E dans un feuilletage de classe C^2, pour lequel l'existence d'une transversale fermée homologue à zéro rencontrant E ne soit pas aussi *patente* que dans les exemples connus jusqu'ici. Rappelons en passant que l'ensemble minimal exceptionnel de classe C^1 de Denjoy n'est coupé par aucune transversale fermée homologue à zéro et ne contient aucune feuille-ressort.

De même il serait intéressant de savoir s'il existe un fibré en cercles, évidemment non compact, et évidemment trivial, admettant un feuilletage transverse de classe C^2 avec un ensemble minimal exceptionnel sans feuille-ressort.

ζ) Indiquons enfin quelques-uns des problèmes qui se posent en théorie des feuilletages des variétés non compactes à propos des feuilles exceptionnelles dont l'adhérence n'est pas nécessairement minimale, cf. [29] :

i) Peut-on construire un feuilletage $\mathscr{F}_i$ de classe C^2 possédant une feuille exceptionnelle non captée?

ii) Peut-on construire un feuilletage $\mathscr{F}_{ii}$ de classe C^2 sans holonomie possédant une feuille exceptionnelle?

iii) Les feuilletages $\mathscr{F}_i$ et $\mathscr{F}_{ii}$ précédents peuvent-ils être, de plus, transverses à une fibration en cercles? (Celle-ci doit être triviale d'après le théorème B).

η) Les propriétés de captage obtenues l'ont été sous l'hypothèse que les feuilles étudiées étaient coupées par une transversale fermée vérifiant une certaine propriété, Cf. les conditions F.S.B.' ou F.B.

Nous avons obtenu des propriétés de captage d'une autre façon lorsque l'adhérence des feuilles étudiées est compacte, ou contient un ensemble compact saturé non vide [21, 26].

Nous avons obtenu d'autres phénomènes de captage, par des méthodes à la fois géométriques et algébriques, sous certaines hypothèses, par exemple lorsque le sécant d'homotopie des feuilles étudiées est « petit » [20, 25] : Cf. l'extension de ces propriétés aux feuilles dont le sécant d'homologie est « petit », ci-dessus en δ).

Enfin nous avons aussi obtenu d'autres propriétés de captage pour des feuilles dont le sécant d'homotopie est, cette fois, « suffisamment gros », cf. Théorème 3 de [19], puis [27].

Ces résultats peuvent être à leur tour considérés comme des outils nouveaux permettant d'aller plus loin. Leur combinaison nous permet par exemple de démontrer des théorèmes du type suivant : soit $\mathscr{F}$ un feuilletage transversalement C^2 d'une variété de groupe fondamental abélien libre, avec ou sans présentation finie, ou abélien de type fini, dont toutes les feuilles sont simplement connexes; alors $\mathscr{F}$ n'a aucune feuille exceptionnelle. Cf. [30].

Conclusion.

Les méthodes suivies dans ce travail ou dans nos travaux mentionnés en III-d permettent l'étude d'une feuille donnée du feuilletage ou l'étude du saturé d'une transversale fermée donnée du feuilletage.

Elles semblent particulièrement bien adaptées : à l'étude de l'enveloppe d'une feuille donnée; à l'étude du captage des feuilles exceptionnelles; à l'étude de la structure des feuilletages sans holonomie.

Elles nous permettront de résoudre dans des travaux ultérieurs un certain nombre de questions naturelles et souvent rencontrées, dans la mesure où elles les ramènent à l'étude, purement algébrique, de la situation suivante :

Soit $i : F \hookrightarrow X$ l'injection d'une feuille F d'un feuilletage transversalement orienté $\mathscr{F}$ de la variété X. Nous avons le diagramme suivant, où h désigne l'homomorphisme de Hurewicz et où x_0 est un point de la feuille F :

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(F, x_0) & \xrightarrow{i_\#} & \pi_1(X, x_0) & \hookleftarrow & \Pi S(\mathscr{F}, x_0) \\
\downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h \\
H_1(F, Z) & \xrightarrow[i_*]{} & H_1(X, Z) & \hookleftarrow & HS(F, \mathscr{F})
\end{array}$$

Ce diagramme est commutatif; de plus, nous faisons opérer le groupe $\pi_1(F, x_0)$, resp. $H_1(F, Z)$, sur le semigroupe $\Pi S(\mathscr{F}, x_0)$, resp. $HS(F, \mathscr{F})$, en associant au couple (λ, τ) la classe de la transversale fermée à $\mathscr{F}$ en x_0 obtenue par le lissage et la mise en position transverse du composé d'un représentant dans F de λ et d'un représentant, transverse à $\mathscr{F}$, de τ.

La structure de l'adhérence de F dans X est alors décrite en majeure partie par cette situation algébrique. Par l'intermédiaire de son sécant d'homotopie $\Pi S(\mathscr{F}, x_0)$, un certain nombre de propriétés algébriques pourront être vérifiées par la feuille F. Parmi les propriétés riches en conséquences, nous ne signalerons que les notions de feuille F « à élément-unité », de feuille F « de type fini », de feuille « abélienne », ou « nilpotente », ou « transversalement à croissance exponentielle ».

Nous espérons revenir en détail dans un travail ultérieur sur les implications topologiques de cette situation algébrique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Cartan, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 63 (1939), 201.
[2] A. Denjoy, *Journal de Mathématiques*, IX, 11 (1932), 333.
[3] J. Eells et N. H. Kuiper, *Publications Mathématiques I.H.E.S.*, n° **14**, 1962, p. 181.
[4] C. Ehresmann et G. Reeb, *C.R.A.S.*, 218 (1944), 955.
[5] L. Fuchs, Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963.
[6] M. Garançon, *Annales de l'Institut Fourier*, 22, 4 (1972), 271.
[7] C. Godbillon, *Annales de l'Institut Fourier*, 17, 2 (1967), 219.
[8] A. Haefliger, Sur les feuilletages de variétés de dimension n par des feuilles fermées de dimension $(n-1)$, Colloque de Topologie, Strasbourg, 1955.
[9] A. Haefliger, *C.R.A.S.*, 242 (1956), 2908.
[10] A. Haefliger, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 32 (1958), 248.
[11] A. Haefliger, *Annali della Scuola Normole Superiore di Pisa*, ser. III, vol. XVI (1962), 367.
[12] A. Haefliger, Travaux de Novikov sur les feuilletages, Séminaire N. Bourbaki, exp. 339, février 1968.
[13] A. Haefliger, *Topology*, 9 (1970), 183.
[14] J. C. Hausmann, Manifolds. Amsterdam, 1970. Lecture Notes 197, p. 164.
[15] G. Hector, Thèse, 9 juin 1972.
[16] C. Lamoureux, *C.R.A.S.*, 270 (1970), 1659.
[17] C. Lamoureux, *C.R.A.S.*, 270 (1970), 1718.
[18] C. Lamoureux, Journées Trajectoriennes, Strasbourg, juin 1970, XII.
[19] C. Lamoureux, Foliations of codimension one of not necessarily compact spaces. Differentialtopologie : speziell Blätterungen, Oberwolfach, mai 1971.
[20] C. Lamoureux, *C.R.A.S.*, 272 (1972), 31.
[21] C. Lamoureux, Quelques conditions d'existence de feuilles compactes, Preprint, mars 1972.
[22] C. Lamoureux, Feuilletages de codimension un des variétés compactes et non compactes (Thèse), Preprint, avril 1972.
[23] C. Lamoureux, *C.R.A.S.*, 277, série A, (1973), 579.

[24] C. Lamoureux, *C.R.A.S.*, 277, série A, (1973), 1041.
[25] C. Lamoureux, *Annales de l'Institut Fourier*, 23, 4 (1974), 229.
[26] C. Lamoureux, *Annales de l'Institut Fourier*, 24, 4 (1974), 229.
[27] C. Lamoureux, *Annales de l'Institut Fourier*, 25, 2 (1975), 285.
[28] C. Lamoureux, *Topology*, 13 (1974), 219.
[29] C. Lamoureux, Closed leaves and « trapped leaves »; applications, Singularitäten und Blätterungen, Oberwolfach, septembre 1973.
[30] C. Lamoureux, Sur les feuilles simplement connexes d'adhérence éventuellement sans composante connexe compacte. A paraître.
[31] B. L. Lawson, *Bulletin of the American Mathematical Society*, (1974).
[32] E. Lima, *Annals of Mathematics*, 81 (1965), 70.
[33] M. Morse et S. S. Cairns, Critical point theory in global analysis and differential topology, Academic Press, 1969.
[34] R. Moussu, Thèse, 21-9-1971.
[35] S. P. Novikov, Troudy Vsesoyouzn. Topolog. Konfer., Tachkent, 1963.
[36] M. M. Peixoto, *Topology*, 1 (1962), 101.
[37] H. Poincaré, Œuvres complètes, tome 1. Paris, 1892.
[38] B. Raymond, A paraître.
[39] G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. Hermann, 1952.
[40] G. Reeb, *Annales de l'Institut Fourier*, 6 (1956), 89.
[41] G. Reeb, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 87 (1959), 445.
[42] G. Reeb, *Annales de l'Institut Fourier*, 11 (1961), 185.
[43] H. Rosenberg, *Topology*, 7 (1968), 131.
[44] H. Rosenberg et R. Roussarie, *Annals of Mathematics*, 91 (1970), 1.
[45] H. Rosenberg, R. Roussarie et A. Weil, *Annals of Mathematics*, 91 (1970), 449.
[46] R. Roussarie, Thèse, 28-11-1969.
[47] H. Rosenberg et R. Roussarie, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 45 (1970), 517.
[48] R. Sacksteder, *The American Journal of Mathematics*, 87 (1965), 79.
[49] R. Sacksteder, *Annales de l'Institut Fourier*, 14, 2 (1964), 221.
[50] A. J. Schwartz, *The American Journal of Mathematics*, 85 (1963), 453.
[51] Seifert et Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Teubner, Leipzig 1935.
[52] C. L. Siegel, *Annals of Mathematics*, 46 (1945), 423.
[53] R. Thom, *Annales de l'Institut Fourier*, 6 (1956), 43.
[54] R. Thom, *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 2, 1 (1956), 59.
[55] C. T. C. Wall, Surgery on compact manifolds. Academic Press, 1970.

Manuscrit reçu le 11 mars 1975
Proposé par G. Reeb.

Claude Lamoureux,
64, boulevard Arago
75013 Paris.