ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

EMMANUEL P. SMYRNELIS

Axiomatique des fonctions biharmoniques. II

Annales de l'institut Fourier, tome 26, nº 3 (1976), p. 1-47

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_3_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 3 (1976), 1-47

AXIOMATIQUE DES FONCTIONS BIHARMONIQUES 2ème SECTION - PARTIES VII à XII (*)

par Emmanuel P. SMYRNELIS

TABLE DES MATIERES

(*) La première section a paru dans les Ann. Inst. Fourier, 25, 1 (1975), 35-97.

Pour les références se reportant aux deux sections, on utilisera un double numéro dont le premier indique la partie correspondante.

L'introduction de cette section a été incorporée dans celle de la première section.

PARTIE VII (*)

BALAYAGE DE MESURES

LEMME 7.1. – *Soient* $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2) \in \mathcal{P}_c$ *et un ensemble fermé* $E \subset \Omega$. *Alors :*

1) $$(P + Q)^E = P^E + Q^E.$$

2) $$\widehat{(P + Q)}^E = \hat{P}^E + \hat{Q}^E.$$

[Pour les notations, voir parties III et IV].

Démonstration. –

1) D'abord, $(P + Q)^E \leqslant P^E + Q^E$. Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, on prend $(u_1, u_2) \in_+ \mathcal{H}^*(\Omega)$ et tel que $u_j \geqslant p_j + q_j$ sur E, $j = 1, 2$, et l'on démontre que $u_j \geqslant P_j^E + Q_j^E$ dans CE.

Par définition (4.1.), sur E, $u_j \geqslant P_j^E + Q_j^E$, et, dans l'ouvert CE, on sait (5.7.) que (P_1^E, P_2^E), (Q_1^E, Q_2^E) sont biharmoniques. Ensuite, en appliquant 5.11., au couple $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans CE.

$$(u_1 - P_1^E - Q_1^E,\ u_2 - P_2^E - Q_2^E),$$

on conclut.

2) C'est une conséquence de 2') de la partie III.

Un raisonnement analogue au cas harmonique ([6c], p. 124, 122) nous permet d'établir les lemmes suivants 7.2. et 7.4 ; le corollaire 7.3. ci-dessous se démontre facilement en utilisant 7.1. et 7.2.

LEMME 7.2. – *Soient* $P = (p_1, p_2) \in \mathcal{P}_c$ *et* ω *un ensemble ouvert de* Ω. *Alors*

$$P^\omega = \sup_{K \subset \omega} P^K$$

pour tous les compacts $K \subset \omega$.

COROLLAIRE 7.3. – *Soient* $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2) \in \mathcal{P}_c$ *et* ω *un ouvert* $\subset \Omega$. *Alors*

(*) On se place dans un espace biharmonique fort.

$$(\mathrm{P} + \mathrm{Q})^{\omega} = \mathrm{P}^{\omega} + \mathrm{Q}^{\omega} .$$

LEMME 7.4. – *Soient* $\mathrm{P} = (p_1, p_2) \in \mathcal{P}_c$ *et* E *un ensemble quelconque de* Ω. *Alors*

$$\mathrm{P}^{\mathrm{E}} = \inf_{\substack{\omega \supset \mathrm{E} \\ \text{ouvert}}} \mathrm{P}^{\omega} .$$

COROLLAIRE 7.5. – *Si* $\mathrm{P} = (p_1, p_2)$, $\mathrm{Q} = (q_1, q_2) \in \mathcal{P}_c$ *et* E *un ensemble quelconque de* Ω, *alors*

1) $$(\mathrm{P} + \mathrm{Q})^{\mathrm{E}} = \mathrm{P}^{\mathrm{E}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{E}} .$$

2) $$\widehat{(\mathrm{P} + \mathrm{Q})}^{\mathrm{E}} = \hat{\mathrm{P}}^{\mathrm{E}} + \hat{\mathrm{Q}}^{\mathrm{E}} .$$

Démonstration. –

1) C'est une conséquence facile des 7.3 et 7.4.

2) Il résulte de la première partie et de 2') de la partie III.

PROPOSITION 7.6. – *Soit* $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ *un couple de fonctions finies continues* $\geqslant 0$ *à supports dans un compact* $\mathrm{K} \subset \Omega$. *Alors* $(\Phi_1^{\Omega}, \Phi_2^{\Omega})$ [*ou simplement* (Φ_1, Φ_2)] *est un* $\mathcal{H}$*-potentiel fini continu dans* Ω *et biharmonique dans* $\complement \mathrm{K}$.

Nous allons d'abord démontrer le :

LEMME 7.7. – *Soit* $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ *un couple de fonctions numériques* $\geqslant 0$ *semi-continues inférieurement dans* Ω.

Alors, on a

1) $(\Phi_1, \Phi_2) = (\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2)$.

2) *Supposons, de plus, que* (φ_1, φ_2) *a un majorant* $\mathcal{H}$*-surharmonique. Si* φ_1, φ_2 *sont finies continues en* $x \in \Omega$, *alors la* $\mathcal{H}$ *-balayée l'est aussi.*

Démonstration. – Vu les résultats de la partie IV, l'axiome III (b) et 5.5., 5.4., on applique un raisonnement analogue à celui de ([2c], lemme 2.5.6.) adapté à notre cadre.

Démonstration de la proposition 7.6. — Comme K est compact, il existe $(p_1, p_2) \in \mathcal{P}_c$ tel que $p_j(x) > 0$, $\forall x \in K$, $j = 1, 2$. Alors, pour $\lambda > 0$ convenable, on aura

$$\lambda p_1 \geqslant \varphi_1 , \lambda p_2 \geqslant \varphi_2 \quad \text{d'où} \quad (\Phi_1 , \Phi_2) \leqslant (\lambda p_1, \lambda p_2),$$

et, grâce à 7.7., (Φ_1 , Φ_2) est un $\mathcal{H}$-potentiel fini continu dans Ω. Mais $\Phi_j = \Phi_j^K$; par conséquent, (Φ_1 , Φ_2) est biharmonique dans CK (5.7.).

THEOREME 7.8. — *Tout* $(u_1 , u_2) \in_+ \mathcal{H}^*(\Omega)$ *est la limite d'une suite croissante* (p_1^n , p_2^n) *de* $\mathcal{H}$*-potentiels finis continus dans* Ω.

Démonstration. — Il existe une suite croissante $(\varphi_1^n, \varphi_2^n)$ de fonctions finies continues $\geqslant 0$ à supports dans un compact $K_n \subset \Omega$ avec

$$u_j = \lim_{n\to\infty} \varphi_j^n \qquad (j = 1,2).$$

Mais chaque couple $(\Phi_1^n, \Phi_2^n) = (p_1^n, p_2^n)$ est un $\mathcal{H}$-potentiel fini continu dans Ω (et biharmonique dans CK_n) (voir 7.6.) et la suite (p_1^n, p_2^n) est croissante.

Comme $\varphi_j^n \leqslant p_j^n \leqslant u_j$, $\forall n \in N$, $j = 1, 2$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} p_1^n = u_1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} p_2^n = u_2$.

LEMME 7.9. — *Soit une suite croissante* $(\varphi_1^n , \varphi_2^n) = \Phi^n$ *de couples de fonctions* s.c.i., $\geqslant 0$, *dans* Ω *avec enveloppe supérieure* $(\varphi_1 , \varphi_2) = \Phi$. *Alors*

$$(\hat\Phi_1 , \hat\Phi_2) = (\sup_n \hat\Phi_1^n , \sup_n \hat\Phi_2^n).$$

Démonstration. — D'après 7.7. (1),

$$(\Phi_1^n, \Phi_2^n) = (\hat\Phi_1^n, \hat\Phi_2^n) \in_+ \mathcal{H}^*(\Omega), \ (\Phi_1, \Phi_2) = (\hat\Phi_1 , \hat\Phi_2) \in_+ \mathcal{H}^*(\Omega).$$

Par conséquent, $(\sup_n \Phi_1^n, \sup_n \Phi_2^n) \in_+ \mathcal{H}^*(\Omega)$, et $\sup_n \Phi_j^n \geqslant \varphi_j$ $(j = 1,2)$, d'où $\sup_n \Phi_j^n \geqslant \Phi_j$. D'autre part, $\Phi_j \geqslant \sup_n \Phi_j^n$ car, pour tout $n \in N$, $(\varphi_1, \varphi_2) \geqslant (\varphi_1^n , \varphi_2^n)$.

PROPOSITION 7.10. — *Si* $V^n = (v_1^n, v_2^n)$ *est une suite croissante de couples* $\mathcal{H}$*-hyperharmoniques* $\geqslant (0,0)$ *dans* Ω *avec enveloppe supérieure* $(v_1, v_2) = V$ *et si* $U \in \mathcal{U}$, alors

$$\hat{V}_1^U = \sup_n \widehat{(V^n)}_1^U \quad , \quad \hat{V}_2^U = \sup_n \widehat{(V^n)}_2^U .$$

Démonstration. — On considère les fonctions,

$$\varphi_j^n = \begin{cases} v_j^n & \text{dans} \quad U \\ 0 & \text{dans} \quad CU \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \varphi_j = \begin{cases} v_j & \text{dans} \quad U \\ 0 & \text{dans} \quad CU \end{cases} \quad (j = 1, 2).$$

Comme U est ouvert, toutes ces fonctions sont s.c.i. $\geqslant 0$ dans Ω et $(\varphi_1^n, \varphi_2^n) \nearrow (\varphi_1, \varphi_2)$.

Mais $\Phi_j^n = (V^n)_j^U$, $\Phi_j = V_j^U$; d'où, d'après 7.9., le résultat.

THEOREME 7.11. — *Soit un couple* $(\mu_1, \mu_2) = M$ *de mesures* $\geqslant 0$ *à support compact. Alors, pour tout ensemble* $E \subset \Omega$, *il existe un couple de mesures* $\geqslant 0$, $(M_1^E, M_2^E) = M^E$ *tel que*

$$\int p_1 \, dM_1^E + \int p_2 \, dM_2^E = \int \hat{P}_1^E \, d\mu_1 + \int \hat{P}_2^E \, d\mu_2$$

pour tout $\mathcal{H}$*-potentiel* $P = (p_1, p_2) \in \mathcal{P}_c$.

Démonstration. — Soient $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ appartenant à $\mathcal{P}_c$ et dont la différence $(d_1, d_2) \in \mathcal{E}^k$.

A chaque tel couple (d_1, d_2) on associe le nombre

$$M^E(d_1, d_2) = \int (\hat{P}_1^E - \hat{Q}_1^E) \, d\mu_1 + \int (\hat{P}_2^E - \hat{Q}_2^E) \, d\mu_2 .$$

Grâce à l'additivité des balayées $\hat{P}^E$, $\hat{Q}^E$ (7.5.), M^E est une forme linéaire positive sur $\mathcal{D} = \mathcal{P}_c - \mathcal{P}_c$ qui a un prolongement unique sur $\mathcal{E}^k(\Omega)$ (5.20.) ; d'où un unique couple $(M_1^E, M_2^E) = M^E$ de mesures de Radon $\geqslant 0$ tel que

$$(\star) \int (p_1 - q_1) \, dM_1^E + \int (p_2 - q_2) \, dM_2^E =$$
$$\int (\hat{P}_1^E - \hat{Q}_1^E) \, d\mu_1 + \int (\hat{P}_2^E - \hat{Q}_2^E) \, d\mu_2 .$$

Considérons une base $\mathcal{A}$ d'ensembles $\mathcal{H}$-réguliers. L'ensemble

$$\mathcal{G}_P = \{(p_1, p_2)^{C\omega_1, \ldots, C\omega_n} \; ; \; n \in \mathrm{N}, \omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathcal{A}\}$$

est $\mathcal{H}$-saturé et $\inf \mathcal{G}_P = 0$ (5.6., 5.16).

Si $Q \in \mathcal{G}_P$, $P - Q \in \mathcal{D} \cap {}_+\mathcal{E}^k$; comme $\mathcal{G}_P$ est filtrant décroissant et $\inf \mathcal{G}_P = 0$, en passant à l'infimum dans les intégrales de ($\star$) quand Q parcourt $\mathcal{G}_P$, on aura la relation désirée.

On dit alors que le couple (M_1^E, M_2^E) est le balayé du couple (μ_1, μ_2). On le note aussi par $(\mu_1, \mu_2)^E$.

COROLLAIRE 7.12. – *Soient deux couples de mesures* $\geqslant 0$ *à support compact* $M = (\mu_1, \mu_2)$, $N = (\nu_1, \nu_2)$. *Alors :*

(1) $\quad (M + N)^E = M^E + N^E$.

(2) $\quad (\alpha M)^E = \alpha M^E \qquad (\alpha \in R_+)$.

(3) $\quad M \leqslant N \Rightarrow M^E \leqslant N^E \qquad$ (*ordre produit*) .

Démonstration. –

1) On applique à (μ_1, μ_2) et (ν_1, ν_2) la relation ($\star$) ; comme à chaque couple [ici $(\mu_1 + \nu_1, \mu_2 + \nu_2)$] on associe un unique couple balayé, on a le résultat.

2) Evident.

3) La relation ($\star$) appliquée à $(\nu_1 - \mu_1, \nu_2 - \mu_2)$ pour $P - Q \in \mathcal{D} \cap {}_+\mathcal{E}^k$ (5.20)
et le fait que $(p_1 - q_1, 0), (0, p_2 - q_2) \in \mathcal{D} \cap {}_+\mathcal{E}^k$ nous permettent de conclure.

THEOREME 7.13. – *Soient un couple de mesures* $\geqslant 0$, *à support compact,* $(\theta_1, \theta_2) = \Theta$ *et* $E \subset \Omega$. *On pose* $(\theta_1, 0) = M$, $(0, \theta_2) = N$. *Alors, on a :*

$$\Theta_1^E = M_1^E \quad , \quad \Theta_2^E = M_2^E + N_2^E ,$$

où M_1^E *est égale à la balayée de* θ_1 *dans l'espace harmonique* $(\Omega, \mathcal{H}_1)$ *et* N_2^E *est égale à la balayée de* θ_2 *dans l'espace* $(\Omega, \mathcal{H}_2)$.

Démonstration. – D'abord, $(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, 0) + (0, \theta_2)$ et, d'après 7.12. (1),

$$\Theta_1^{\mathrm{E}} = \mathrm{M}_1^{\mathrm{E}} + \mathrm{N}_1^{\mathrm{E}} \quad , \quad \Theta_2^{\mathrm{E}} = \mathrm{M}_2^{\mathrm{E}} + \mathrm{N}_2^{\mathrm{E}} \quad ;$$

d'autre part, pour tout $\mathrm{P} = (p_1, p_2) \in \mathcal{P}_c$ on a (voir 7.11) :

$$\int \hat{\mathrm{P}}_1^{\mathrm{E}}\, d\,\theta_1 = \int p_1\, d\,\mathrm{M}_1^{\mathrm{E}} + \int p_2\, d\,\mathrm{M}_2^{\mathrm{E}} \,,$$

donc pour $\mathrm{S} = (p_1, 0) \in \mathcal{P}_c$, (voir 5.13),

$$\int \hat{\mathrm{S}}_1^{\mathrm{E}}\, d\,\theta_1 = \int p_1\, d\,\mathrm{M}_1^{\mathrm{E}} \,.$$

Mais, 5.12 (1), $\quad p_1 \in \mathcal{P}^{\mathcal{H}_1}$ et $\hat{\mathrm{S}}_1^{\mathrm{E}} = {}^{\mathcal{H}_1}\hat{\mathrm{R}}_{p_1}^{\mathrm{E}}$.

De même, pour tout $\mathrm{P} = (p_1, p_2) \in \mathcal{P}_c$, on a, (voir 7.11),

$$\int \hat{\mathrm{P}}_2^{\mathrm{E}}\, d\,\theta_2 = \int p_1\, d\,\mathrm{N}_1^{\mathrm{E}} + \int p_2\, d\,\mathrm{N}_2^{\mathrm{E}} \;;$$

donc, pour $\mathrm{S} = (p_1, 0)$, en remarquant que $\hat{\mathrm{P}}_2^{\mathrm{E}} = {}^{\mathcal{H}_2}\hat{\mathrm{R}}_{p_2}^{\mathrm{E}}$ et que $\{(p_1 - q_1, 0)\}$ est dense dans $\{(f, 0) \in \mathcal{E}^k(\Omega)\}$, on a $\hat{\mathrm{S}}_2^{\mathrm{E}} = 0$ et $\int p_1\, d\,\mathrm{N}_1^{\mathrm{E}} = 0$; d'où $\mathrm{N}_1^{\mathrm{E}} = 0$.

Par conséquent, $\int \hat{\mathrm{P}}_2^{\mathrm{E}}\, d\,\theta_2 = \int p_2\, d\,\mathrm{N}_2^{\mathrm{E}}$.

Exemple 7.14. – Soit ω un ouvert $\mathcal{H}$-régulier,

$$x \in \omega\,, (\theta_1, \theta_2) = (\epsilon_x, \epsilon_x) \quad \text{et} \quad \mathrm{E} = \complement\omega\,.$$

Comme, (4.2), pour tout $\mathrm{P} = (p_1, p_2) \in \mathcal{P}_c$,

$$\hat{\mathrm{P}}_j^{\complement\omega} = \mathrm{H}_j^{\omega,\mathrm{P}} \quad \text{dans } \omega \text{, alors}$$

$$(\epsilon_x, 0)^{\complement\omega} = (\mu_x^\omega, \nu_x^\omega) \quad \text{et} \quad (0, \epsilon_x)^{\complement\omega} = (0, \lambda_x^\omega).$$

PROPOSITION 7.15. – *Soit* $\mathrm{M} = (\mu, \nu)$ *un couple de mesures* $\geqslant 0$ *à support compact et un ensemble* $\mathrm{E} \subset \Omega$. *Alors les mesures* $\mathrm{M}_1^{\mathrm{E}}, \mathrm{M}_2^{\mathrm{E}}$ *sont portées par* $[(\mathrm{T}\mu \cup \mathrm{T}\nu) \cap \mathring{\mathrm{E}}] \cup \partial\mathrm{E}$.

[*Rappelons que* T *désigne le support et que*

$$\mathrm{M}^{\mathrm{E}} = (\mu, \nu)^{\mathrm{E}} = (\mathrm{M}_1^{\mathrm{E}}, \mathrm{M}_2^{\mathrm{E}})].$$

Démonstration (inspirée de ([2c], 3.4.3.). – Soient

$$E_1 = T\mu \cap \mathring{E}\ ,\ E_2 = T\mu \setminus \mathring{E}\ ,\ F_1 = T\nu \cap \mathring{E}\ ,\ F_2 = T\nu \setminus \mathring{E}$$

et $$\mu_j = \chi_{E_j}\,\mu\ ,\ \nu_j = \chi_{F_j}\,\nu \quad (j = 1, 2).$$

On note par $\Theta = (\mu_1\ ,\nu_1)$, $N = (\mu_2\ ,\nu_2)$.

On aura alors $\mu = \mu_1 + \mu_2\ ,\ \nu = \nu_1 + \nu_2$;

d'où $(\mu\ ,\nu) = (\mu_1 + \mu_2\ ,\nu_1 + \nu_2) = (\mu_1\ ,\nu_1) + (\mu_2\ ,\nu_2)$

et, d'après 7.12 (1),

$$M^E = (\mu\ ,\nu)^E = (\mu_1\ ,\nu_1)^E + (\mu_2\ ,\nu_2)^E = \Theta^E + N^E =$$
$$= (\Theta_1^E, \Theta_2^E) + (N_1^E\ , N_2^E)\ .$$

Considérons d'abord le couple $(\mu_1\ ,\nu_1)$ porté par $\mathring{E}$. Comme $\mathring{E}$ est ouvert, alors sur $\mathring{E}$, on a : $\hat{P}_j^E = p_j$ $(j = 1, 2)$ et, grâce à (★) (7.11),

$$\int (p_1 - q_1)\, d\Theta_1^E + \int (p_2 - q_2)\, d\Theta_2^E = \int (p_1 - q_1)\, d\mu_1 +$$
$$+ \int (p_2 - q_2)\, d\nu_1 .$$

Par conséquent [en prenant

$$(p_1 - q_1\ , 0)\ ,\ (0\ , p_2 - q_2)]\ ,\ \Theta_1^E = \mu_1\ ,\ \Theta_2^E = \nu_1\ ,$$

et $(\mu_1\ ,\nu_1)^E$ est porté par $(T\mu \cup T\nu) \cap \mathring{E}$.

Prenons maintenant le couple $N = (\mu_2\ ,\nu_2)$. Nous allons montrer d'abord que $N_j^E\,(\complement\overline{E}) = 0$ $(j = 1, 2)$. En effet, soit $(f_1\ , f_2) \in_+ \mathcal{E}^k(\Omega)$ avec $Tf_j \subset \complement\overline{E}$. Alors pour tout tel couple, on aura

$$\int f_1\, d\,N_1^E + \int f_2\, d\,N_2^E = 0\ ;$$

pour le voir, il suffit de prendre, grâce au théorème d'approximation (5.20), $f_j = p_j - q_j$. Mais sur E, $p_j = q_j$, et $\hat{P}_j^E = \hat{Q}_j^E$ dans Ω ; d'où,

$$\int f_1\, d\,N_1^E + \int f_2\, d\,N_2^E = \int (\hat{P}_1^E - \hat{Q}_1^E)\, d\mu_2 + \int (\hat{P}_2^E - \hat{Q}_2^E)\, d\nu_2 = 0.$$

On démontrera ensuite que $N_j^E\,(\mathring{E}) = 0$ $(j = 1, 2)$. Il suffit de montrer que, pour tous les $P\ , Q \in \mathcal{R}_c$ tels que $T\,(p_j - q_j)$ sont compacts dans $\mathring{E}$, on aura $\hat{P}_1^E = \hat{Q}_1^E$ sur $T\mu_2$ et $\hat{P}_2^E = \hat{Q}_2^E$ sur $T\nu_2$, d'où

$$\int (p_1 - q_1)\, d\, N_1^E + \int (p_2 - q_2)\, d\, N_2^E = \int (\hat{P}_1^E - \hat{Q}_1^E)\, d\mu_2 +$$

$$+ \int (\hat{P}_2^E - \hat{Q}_2^E)\, d\nu_2 = 0 .$$

Soient les ensembles :

$$\mathfrak{F}_P = \{(u_1, u_2) \in {}_+\mathcal{H}^* (\Omega) : u_j = p_j \text{ sur } E, \ j = 1, 2\},$$

$$\mathfrak{F}_Q = \{(v_1, v_2) \in {}_+\mathcal{H}^* (\Omega) : v_j = q_j \text{ sur } E, \ j = 1, 2\},$$

$$A_j = \{x \in \Omega : p_j (x) \neq q_j (x)\}, \ j = 1, 2.$$

Les ensembles A_1, A_2 sont ouverts et relativement compacts et

$$\overline{A}_j = T (p_j - q_j) \subset \mathring{E}, \ T\mu_2 \subset C\mathring{E} \subset C\overline{A}_1, \ T\nu_2 \subset C\mathring{E} \subset C\overline{A}_2 .$$

Posons $A = A_1 \cup A_2$. On a donc : $T\mu_2$, $T\nu_2 \subset C\overline{A}$.

Sur $C\overline{A}$, on aura : $\hat{P}_j^E = \hat{Q}_j^E$ $(j = 1, 2)$. Pour le montrer, on considère un couple $(u_1, u_2) \in \mathfrak{F}_P$. Soit,

$$w_j (x) = \begin{cases} u_j (x), x \in CA \\ q_j (x), x \in A \end{cases} = \begin{cases} u_j (x), \ x \in CE \\ q_j (x), \ x \in E \end{cases}$$

On a alors $(w_1, w_2) \in \mathfrak{F}_Q$, car (w_1, w_2) est un couple $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans $\mathring{E}$ et $C\overline{A}$, donc aussi dans $\Omega = \mathring{E} \cup C\overline{A}$.

Par conséquent, $P_j^E (x) \geqslant Q_j^E (x)$, $\forall x \in CA$, $j = 1, 2$.

En interchangeant P et Q, on démontre l'inégalité dans l'autre sens ; d'où l'égalité de $\hat{P}_j^E$ et $\hat{Q}_j^E$ sur $C\overline{A}$.

PARTIE VIII

QUELQUES REMARQUES SUR LES MESURES ν_x^ω

On a vu dans 1.25 (2) que si ω est un ouvert $\mathcal{H}$-régulier, alors, pour tout x d'un ensemble dense $\delta_\omega \subset \omega$, $\mathrm{T}\nu_x^\omega \neq \phi$. Peut-on avoir plus ?

Remarque 8.1. – Le contre-exemple suivant (que Monsieur C. Constantinescu a eu l'obligeance de m'indiquer) montre qu'il y a des espaces biharmoniques dans lesquels on n'a pas toujours $\mathrm{T}\nu_x^\omega \neq \phi$, $\forall x \in \omega$:

Soit $\Omega = \mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 2)$; [pour simplifier on prend $n = 2$]. Dans tout $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$, on considère les couples de fonctions finies continues (h_1, h_2) lesquels vérifient de plus :

$$\left.\begin{array}{llll} \Delta h_1 & = -h_2 & \text{dans} & \mathrm{U}\setminus\mathbf{R} \ (\mathbf{R} = \{(x, y) \in \Omega : y = 0\}), \\ \Delta' h_1 & = 0 & \text{sur} & \mathbf{R} \quad (\Delta' \text{ étant le laplacien dans } \mathbf{R}), \\ \Delta h_2 & = 0 & \text{dans} & \mathrm{U}. \end{array}\right\} \quad (1)$$

On voit que tous nos axiomes (I, II, III, IV) sont vérifiés, mais pour chaque boule ouverte ω—ensemble $\mathcal{H}$-régulier—$\mathrm{T}\nu_x^\omega = \phi$ sur $\omega \cap \mathrm{R}$. En effet : Dans $\omega \setminus \mathbf{R}$, il n'y a pas de difficulté. Soit maintenant $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$ tel que $\mathrm{U} \cap \mathbf{R} \neq \phi$. Grâce à la continuité de h_2, nos couples sont compatibles. Considérons une boule ouverte ω coupant $\mathbf{R}$ et $(f_1, f_2) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$. On va montrer que ω est un ensemble $\mathcal{H}$-régulier.

On résout d'abord, le problème de Dirichlet,

$$\Delta h_2 = 0 \text{ dans } \omega \text{ et } \lim_{x \to y,\ x \in \omega} h_2(x) = f_2(y), \forall y \in \partial\omega.$$

Ensuite, on cherche une fonction h_1 telle que

$$\Delta h_1 = -\mathrm{H}_{f_2}^\omega \quad \text{dans} \quad \omega\setminus\mathbf{R}, \tag{2}$$

et

$$\Delta' h_1 = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R} \tag{3}$$

avec $$\lim_{x \to y, x \in \omega} h_1(x) = f_1(y) \quad , \forall y \in \partial\omega.$$

Pour cela, (3) nous donne $h_1 = \mathrm{H}_{f_1}^{\omega \cap \mathrm{R}}$ dans **R** ; puis, avec la valeur

frontière finie continue $\mathrm{F}_1 = \begin{cases} f_1 & \text{sur } \partial\omega \\ \mathrm{H}_{f_1}^{\omega \cap \mathrm{R}} & \text{sur } \mathbf{R} \end{cases}$

on résout (2) dans $\omega \setminus \mathbf{R}$. La positivité est aussi vérifiée.

Par conséquent, les axiomes I, II, sont vérifiés.

Pour la séparation, on prend des fonctions linéaires (affines) et la fonction 1.

En ce qui concerne l'axiome IV (de convergence), la partie b) est immédiate. Pour la partie a), on prend une suite $h_1^n \in \mathcal{H}_1(\mathrm{U})$, $h_1^n \uparrow h_1$, avec h_1 finie sur un ensemble dense de U. S'il y a au moins un point sur **R** où h_1 est finie, elle est finie dans U. Sinon, sur **R**, $h_1 = +\infty$ et, la fonction h_1 étant finie dans $\mathrm{U} \setminus \mathbf{R}$, on aura, si ω est une boule ouverte $\subset \bar{\omega} \subset \mathrm{U}$ coupant **R** et x_0 un point de $\omega \setminus \mathbf{R}$,

$$h_1(x_0) = \int h_1 \, d\mu_{x_0}^{\omega \setminus \mathrm{R}} = +\infty .$$

Contradiction ! Enfin, en considérant l'intégrale de Poisson (dans $\omega \cap$ {demi-plans}), on voit que la fonction h_1 est continue. Dans cet espace biharmonique, $\mathrm{T}\nu_x^\omega = \phi$, $\forall x \in \omega \cap \mathbf{R}$. On le voit facilement, en résolvant le système (1) avec $(f_1, f_2) = (0, 1) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$. –

Dans tout ce qui suit, ω sera toujours un ouvert $\mathcal{H}$-régulier.

PROPOSITION 8.2. – *Dans l'espace ω, l'ensemble*

$$\mathrm{A} = \{x \in \omega : \mathrm{T}\nu_x^\omega = \phi\}$$

est $\mathcal{H}_1$-absorbant(*) d'intérieur vide.

(*) Rappelons qu'un ensemble A est dit absorbant dans un espace harmonique Ω s'il est fermé et si, pour tout $x \in \mathrm{A}$ et tout voisinage régulier V de x, $\mathrm{T}\mu_x^{\mathrm{V}} \subset \mathrm{A}$.

Tout ensemble absorbant A est caractérisé par l'existence d'une fonction hyperharmonique $u \geqslant 0$ dans Ω telle que $\mathrm{A} = u^{-1}(0)$, (voir [2c], p. 30-31).

Démonstration. – Au couple $(0, f) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$ avec $f > 0$, on associe le couple

$$(h_1(x), h_2(x)) = \left(\int f d\nu_x^\omega, \int f d\lambda_x^\omega\right) \in {}_+\mathcal{H}(\omega).$$

Mais $h_1 \in {}_+\mathcal{H}_1^*(\omega)$ et $h_1 > 0$ dans δ_ω, $h_1 = 0$ sur $\omega \setminus \delta_\omega = \mathrm{A}$. Par conséquent, $\mathrm{A} = h_1^{-1}(\overset{\circ}{0})$ et il est $\mathcal{H}_1$-absorbant. De plus, $\overset{\circ}{\mathrm{A}} = \phi$. Sinon, pour un point $x \in \overset{\circ}{\mathrm{A}}$, il existe dans un voisinage $\mathcal{V}_x \subset \overset{\circ}{\mathrm{A}}$ un point y où $\mathrm{T}\nu_y^\omega \neq \phi$ car δ_ω est dense dans ω. D'où la contradiction cherchée.

COROLLAIRE 8.3. – *Si, dans ω, tous les ensembles $\mathcal{H}_1$-absorbants sont d'intérieur non vide, alors*

$$\mathrm{T}\nu_x^\omega \neq \phi \quad , \ \forall x \in \omega .$$

Démonstration. – Sinon, $\overset{\circ}{\mathrm{A}} = \overset{\circ}{\overbrace{\{x \in \omega : \mathrm{T}\nu_x^\omega = \phi\}}}$ serait non vide. Mais $\overset{\circ}{\mathrm{A}} = \phi$ (8.2). Contradiction !

THEOREME 8.4. – *Si* $1 \in \mathcal{H}_1^*(\Omega)$, *alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

[*En fait, cette hypothèse est utilisée chaque fois que* (1) ⇒(3) *intervient, c'est-à-dire pour montrer* : (1) ⇒ (3), (2) ⇒ (3), (4) ⇒ (3)].

1) *Pour tout ω ouvert $\mathcal{H}$-régulier et tout $x \in \omega$* , $\mathrm{T}\nu_x^\omega \neq \phi$.

2) *Pour tout* $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$ *et tout* $(h_1, h_2) \in {}_+\mathcal{H}(\mathrm{U})$, *si* $h_2 > 0$ *dans* U, *alors* $h_1 > 0$ *dans* U.

3) *Pour tout* $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$ *et tout* $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$, *s'il existe* $x_0 \in \mathrm{U}$ *où* $h_1(x_0)$ *est un maximum* $\geqslant 0$, *alors* $h_2(x_0) \geqslant 0$.

4) *Pour tout* $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$, *tout* $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$ *et tout* A *ensemble* $\mathcal{H}_1$*-absorbant* (*dans* U), *si* $h_1 = 0$ *sur* A, *alors* $h_2 = 0$ *sur* A.

Démonstration. – (1) ⇒ (2). Soit un point (quelconque) $x_0 \in \mathrm{U}$ et ω un ouvert $\mathcal{H}$-régulier $\subset \bar{\omega} \subset \mathrm{U}$, $x_0 \in \omega$. Mais

$$h_1(x_0) = \int h_1 \, d\mu_{x_0}^\omega + \int h_2 \, d\nu_{x_0}^\omega ,$$

$T\nu_{x_0}^{\omega} \neq \phi$ et $h_2 > 0$ dans U ; par conséquent, $h_1(x_0) > 0$.

(2) ⇒ (1). – Soit ω un ouvert $\mathcal{H}'$-régulier, $(0, f) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$, $f > 0$ et le couple associé

$$(h_1(x), h_2(x)) = \left(\int f d\nu_x^{\omega}, \int f d\lambda_x^{\omega}\right) \in {}_+\mathcal{H}(\omega).$$

Mais $h_2 > 0$ dans ω (1.25 (1)) ; d'où, grâce à (2), $h_1(x) > 0, \forall x \in \omega$, ou $\int f d\nu_x^{\omega} > 0$. Par conséquent, $T\nu_x^{\omega} \neq \phi$.

(3) ⇒ (2). – Soit $(h_1, h_2) \in {}_+\mathcal{H}$ (U) avec $h_2 > 0$ dans U et supposons qu'il existe $x_0 \in$ U où $h_1(x_0) = 0$. Donc le minimum de h_1 dans U est $h_1(x_0) = 0$ et, grâce à (3), $h_2(x_0) \leqslant 0$; d'où $h_2(x_0) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse que $h_2 > 0$ dans U.

(1) ⇒ (3). – Supposons que $h_1(x_0) \geqslant 0$. Comme c'est un maximum, il existe un voisinage de x_0 dans U où $h_1(x_0) \geqslant h_1(x)$. Supposons maintenant que $h_2(x_0) < 0$; cette inégalité reste valable dans un voisinage de x_0 dans U grâce à la continuité. Dans l'intersection de ces deux voisinages de x_0, on prend $\overline{\omega}$ avec ω voisinage $\mathcal{H}$-régulier de x_0. Alors, on aura,

$$h_1(x_0) - \int h_1 \, d\mu_{x_0}^{\omega} = \int h_2 \, d\nu_{x_0}^{\omega} < 0 \, ;$$

d'autre part, en utilisant les deux inégalités,

$$h_1(x_0) \geqslant h_1(x) \ , \ 1 \geqslant \int d\mu_{x_0}^{\omega} ,$$

on a :

$$h_1(x_0) \geqslant \int h_1 \, d\mu_{x_0}^{\omega} .$$

Contradiction !

(1) ⇒ (4). – Supposons qu'en $x_0 \in$ A, $h_2(x_0) \neq 0$, par exemple soit $h_2(x_0) > 0$; il existe donc un voisinage $\mathcal{V}_{x_0}$ dans U où $h_2 > 0$. On prend ω voisinage $\mathcal{H}$-régulier de x_0, $\overline{\omega} \subset \mathcal{V}_{x_0}$ et on a,

$$h_1(x_0) = \int h_1 \, d\mu_{x_0}^{\omega} + \int h_2 \, d\nu_{x_0}^{\omega} \, ;$$

comme $T\mu_{x_0}^{\omega} \subset$ A, alors $\int h_1 \, d\mu_{x_0}^{\omega} = 0$ et $\int h_2 \, d\nu_{x_0}^{\omega} = 0$.

Alors, $h_2 = 0$ sur $\mathrm{T}\nu_{x_0}^{\omega} \subset \partial\omega \subset \mathcal{V}_{x_0}$. Contradiction, car $h_2 > 0$ dans $\mathcal{V}_{x_0}$.

(4) $\Rightarrow$ (1). – Soit ω un ouvert $\mathcal{H}$-régulier et supposons que $\mathrm{T}\nu_x^{\omega} \neq \phi$, $\forall x \in \omega$, n'est pas vraie.

Mais l'ensemble $\{x \in \omega \ : \ \mathrm{T}\nu_x^{\omega} = \phi\} = \mathrm{A}$ est $\mathcal{H}_1$-absorbant $\neq \phi$ (8.2). Considérons un couple $(0, f) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$, $f > 0$; le couple associé $(h_1(x), h_2(x)) = \left(\int f d\nu_x^{\omega}, \int f d\lambda_x^{\omega}\right) \in \mathcal{H}(\omega)$ et $h_1 = 0$ sur A ; par contre, $h_2(x) > 0$, $\forall x \in \omega$ (1.25 (1)) ce qui contredit notre hypothèse.

Remarque 8.5. – Remarquons que, si l'on remplace l'hypothèse de la compatibilité des couples (partie I) par la condition 8.4. (1) (ou 8.4. (2)), on va dans le sens du renforcement.

Plus précisément, on peut montrer –sans supposer aucun de nos axiomes– que .

Si $\mathcal{H}$ est un préfaisceau sur Ω de sous-espaces vectoriels de couples finis continus et si $\mathrm{T}\nu_x^{\omega} \neq \phi$ pour tout ω ouvert $\mathcal{H}$-régulier et tout $x \in \omega$, alors, dans tout $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$, les couples de $\mathcal{H}(\mathrm{U})$ sont compatibles.

En effet, soit $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$ avec $h_1 = 0$ dans $\mathrm{U}' \in \mathcal{U}, \mathrm{U}' \subset \mathrm{U}$, et supposons qu'en un $x_0 \in \mathrm{U}'$, $h_2(x_0) > 0$ (ou $h_2(x_0) < 0$). Grâce à la continuité, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}_{x_0}$ dans U' où $h_2 > 0$. Mais $\mathrm{rest}_{\mathcal{V}_{x_0}}(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\mathcal{V}_{x_0})$ et, à cause de 8.4 (2) [notre hypothèse suffit pour montrer (1) $\Rightarrow$ (2) ; voir aussi 1.6.], on doit avoir $h_1 > 0$ dans $\mathcal{V}_{x_0}$. Contradiction !

LEMME 8.6. – *Supposons que l'une des conditions de 8.4. est vérifiée. Soit $f \geqslant 0$ et bornée sur $\partial\omega$ avec $\int^* f d\nu_{x_0}^{\omega} = 0$ en $x_0 \in \omega$, ω ouvert $\mathcal{H}$-régulier. Alors, on aura aussi $\int^* f d\lambda_{x_0}^{\omega} = 0$.*

Démonstration. – On considère un couple $(0, f) \in \mathcal{E}(\partial\omega)$; le couple $(h_1(x), h_2(x)) = \left(\int^* f d\nu_x^{\omega}, \int^* f d\lambda_x^{\omega}\right) \in {}_+\mathcal{H}(\omega)$ (1.33).

Supposons qu'en x_0, $h_2(x_0) > 0$; il existe donc un voisinage ouvert $\mathcal{V}_{x_0}$ dans ω où $h_2 > 0$. Mais $\mathrm{rest}_{\mathcal{V}_{x_0}}(h_1, h_2) \in {}_+\mathcal{H}(\mathcal{V}_{x_0})$ et $h_2 > 0$ dans $\mathcal{V}_{x_0}$; d'où (8.4. (2)) $h_1 > 0$ dans $\mathcal{V}_{x_0}$. Contradiction car, par hypothèse, $h_1(x_0) = 0$.

PROPOSITION 8.7. – *Supposons que l'une des conditions de 8.4. est vérifiée. Alors pour tout $x_0 \in \omega$, ω ouvert $\mathcal{H}$-régulier, la mesure $\lambda_{x_0}^{\omega}$ est absolument continue par rapport à la mesure $\nu_{x_0}^{\omega}$.*

Démonstration. – Soit un ensemble $E \subset \partial\omega$ avec $\nu_{x_0}^{\omega}(E) = 0$. On applique le lemme 8.6. pour $f = \chi_E$.

[Notons que, pour démontrer 8.5., 8.6., 8.7., on s'est basé sur la partie (2) de 8.4. Par conséquent, l'hypothèse $1 \in \mathcal{H}_1^*(\Omega)$ n'a pas été utilisée].

Remarque 8.8. – Dans 8.7., l'hypothèse $T\nu_x^{\omega} \neq \phi$, $\forall x \in \omega$, est indispensable. Sinon, pour $x_0 \in A = \{x \in \omega : T\nu_x^{\omega} = \phi\}$ on aura $\nu_{x_0}^{\omega}(\partial\omega) = 0$ tandis que $\lambda_{x_0}^{\omega}(\partial\omega) > 0$.

Remarque 8.9. – Grâce à 6.8., dans tout ce qui précède, on peut remplacer ω ouvert $\mathcal{H}$-régulier par $\omega \in \mathcal{U}_c$ [1.25. reste valable pour $\omega \in \mathcal{U}_c$](*). Alors, la condition (seul changement dans 8.4.) :

(1'). – pour tout $\omega \in \mathcal{U}_c$ et tout $x \in \omega$, $T\nu_x^{\omega} \neq \phi$
est équivalente à la condition (1) de 8.4.

En effet, (1') $\Rightarrow$ (1) ; d'autre part, (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1').

(*) Naturellement, on se place dans un espace biharmonique fort.

PARTIE IX(*)

ENSEMBLES $\mathcal{H}$-ABSORBANTS

DEFINITION 9.1. – *Un ensemble* $A \subset \Omega$ *est dit* $\mathcal{H}$ *-absorbant s'il est fermé et si, pour chaque* $x \in A$ *et tout* ω *voisinage* $\mathcal{H}$*-régulier de* x, *on a :*

$$T\lambda_x^\omega \subset A \quad , \quad T\mu_x^\omega \subset A \quad , \quad T\nu_x^\omega \subset A .$$

PROPOSITION 9.2. – *Soit un ensemble* $A \subset \Omega$. *Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) A *est* $\mathcal{H}$*-absorbant.*

ii) A *est fermé et pour tout* $x \in A$ *il existe un système fondamental* $\mathcal{B}(x)$ *de voisinages* $\mathcal{H}$*-réguliers de* x *avec*

$$T\lambda_x^\omega \subset A , T\mu_x^\omega \subset A , T\nu_x^\omega \subset A , \quad \forall \omega \in \mathcal{B}(x).$$

iii) *il existe un couple* $(u_1 , u_2) \in {}_+\mathcal{H}^* (\Omega)$ *tel que*

$$A = u_1^{-1} (0) = u_2^{-1} (0).$$

Démonstration. – (i) $\Rightarrow$ (ii) : Immédiat. –

(ii) $\Rightarrow$ (iii). – On pose $u_j (x) = \begin{cases} 0 , & x \in A \\ + \infty , & x \in \complement A \end{cases} \quad (j = 1, 2).$

Comme A est fermé, u_j est ($\geqslant 0$) semi-continue inférieurement. Pour $x \in \complement A$, on prend un système fondamental $\mathcal{B}(x)$ de voisinages $\mathcal{H}$-réguliers dans $\complement A$. Pour $x \in A$, $\mathcal{B}(x)$ est comme dans (ii). Alors le couple (u_1 , u_2) est $\mathcal{B}$-$\mathcal{H}$-hyperharmonique d'où, (1.17)., $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans Ω et $A = u_1^{-1} (0) = u_2^{-1} (0)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Soit ω un voisinage $\mathcal{H}$-régulier d'un $x \in A$.

(*) On se place dans un espace biharmonique fort.

Alors, $$0 \leqslant \int u_1 \, d\mu_x^\omega + \int u_2 \, d\nu_x^\omega \leqslant u_1(x) = 0$$

et $$0 \leqslant \int u_2 \, d\lambda_x^\omega \leqslant u_2(x) = 0 \quad ;$$

d'où

$$\mathrm{T}\lambda_x^\omega \subset u_2^{-1}(0) = \mathrm{A} \quad , \quad \mathrm{T}\mu_x^\omega \subset u_1^{-1}(0) = \mathrm{A} \quad , \quad \mathrm{T}\nu_x^\omega \subset u_2^{-1}(0) = \mathrm{A} \, .$$

Remarque 9.3. – Si A est un ensemble $\mathcal{H}$-absorbant, il est aussi $\mathcal{H}_1$-absorbant et $\mathcal{H}_2$-absorbant.

En effet : pour tout $x \in \mathrm{A}$ il existe un système fondamental $\mathcal{B}(x)$ comme dans (ii) de 9.2. ; d'où, (1.22.), $\mathcal{B}(x)$ est un système fondamental de voisinages $\mathcal{H}_j$-réguliers ($j = 1, 2$) avec $\mathrm{T}\lambda_x^\omega \subset \mathrm{A}$, $\mathrm{T}\mu_x^\omega \subset \mathrm{A}$, $\forall \, \omega \in \mathcal{B}(x)$. Par conséquent, ([2c], 1.4.1.), A est $\mathcal{H}_j$-absorbant ($j = 1, 2$).

LEMME 9.4. – *Soit* A *un fermé* $\subset \Omega$ *et* $\mathrm{V} = (v_1 , v_2) \in {}_+\mathcal{H}(\Omega)$ *où* v_1 *est un* $\mathcal{H}_1$*-potentiel et* $\mathrm{V}_2^{\mathbf{CA}} = v_2$ *sur* A. *Alors* $\mathrm{V}_1^{\mathbf{CA}} = v_1$ dans Ω.

Démonstration. – On sait que $\mathrm{V}_j^{\mathbf{CA}} = \hat{\mathrm{V}}_j^{\mathbf{CA}}$ ($j = 1, 2$) car **CA** est ouvert et que $(\hat{\mathrm{V}}_1^{\mathrm{CA}} , \hat{\mathrm{V}}_2^{\mathrm{CA}}) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega)$. Mais $\mathrm{V}_2^{\mathrm{CA}} = v_2$ sur CA ; alors, grâce à l'hypothèse, $\mathrm{V}_2^{\mathrm{CA}} = v_2$ dans Ω. Considérons le couple (s_1 , s_2) où $s_1 = v_1 - \hat{\mathrm{V}}_1^{\mathrm{CA}}$ ($\geqslant 0$), $s_2 = v_2 - \hat{\mathrm{V}}_2^{\mathrm{CA}}$.

Alors, $(s_1 , s_2) = (s_1 , 0) \in -\mathcal{H}^*(\Omega)$ et, comme $v_1 \geqslant s_1$, on a $s_1 \leqslant 0$ car v_1 est un $\mathcal{H}_1$-potentiel et s_1 est une fonction $\mathcal{H}_1$-hypoharmonique. D'où, $s_1 = 0$.

LEMME 9.5. – *Soient* $\omega \in \mathfrak{U}_c$, $\mathrm{E} \subset \partial\omega$ *et* A *un ensemble* $\mathcal{H}_1$*-absorbant dans (l'espace)* ω.

Si $\lambda_x^\omega(\mathrm{E}) = 0 , \forall x \in \mathrm{A}$, *alors* $\nu_x^\omega(\mathrm{E}) = 0 \;, \forall x \in \mathrm{A}$.

Pour $\mathrm{A} = \omega$ *on a, comme cas particulier, la première partie de 6.17.*

Démonstration. – On considère le couple $(0 , \chi_{\mathrm{E}})$ sur $\partial\omega$ auquel on associe

$$(v_1(x) , v_2(x)) = \left(\int^* \chi_{\mathrm{E}} \, d\nu_x^\omega \; , \; \int^* \chi_{\mathrm{E}} \, d\lambda_x^\omega \right) \in {}_+\mathcal{H}(\omega).$$

Comme $v_1 \in {}_{+}\mathcal{H}_1^*(\omega)$ et A est $\mathcal{H}_1$-absorbant, alors ${}^{\mathcal{H}_1}R_{v_1}^{\complement A}(x) = 0$, $\forall x \in A$. [En effet, la fonction $u_1 = \begin{cases} v_1 \text{ sur } \complement A \\ 0 \text{ sur } A \end{cases}$ est $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique majorant la réduite précédente]. Grâce à 7.11., 7.8., 7.10.,

$$\hat{V}_1^{\complement A}(x) = \int v_1 \, d\mu_x^{\complement A} + \int v_2 \, d\nu_x^{\complement A} .$$

Mais, ${}^{\mathcal{H}_1}R_{v_1}^{\complement A}(x) = \int v_1 \, d\mu_x^{\complement A}$ et $\nu_x^{\complement A}$ est portée par l'ensemble

$$(\{x\} \cap \complement A) \cup \partial A \qquad (7.15.).$$

Donc, pour tout $x \in A$, $\hat{V}_1^{\complement A}(x) = 0$ ($v_2 = 0$ sur A, par hypothèse).

D'autre part, $V_2^{\complement A} = v_2$ dans ω car $V_2^{\complement A} = v_2$ sur $\complement A$ et $0 \leqslant V_2^{\complement A} \leqslant v_2 = 0$ sur A.

Maintenant le lemme 9.4. peut être appliqué dans ω, v_1 étant un $\mathcal{H}_1$-potentiel dans ω (lemme 6.15.). Par conséquent, $\hat{V}_1^{\complement A} = v_1$ dans ω et $v_1 = 0$ sur A, c'est-à-dire $\nu_x^{\omega}(E) = 0, \forall x \in A$.

THEOREME 9.6. – *Soit un ensemble* $A \subset \Omega$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) A est $\mathcal{H}$-absorbant.

(ii) A est $\mathcal{H}_1$-absorbant et $\mathcal{H}_2$-absorbant.

Démonstration. – (i) ⇒ (ii) : Voir la remarque 9.3. – (ii) ⇒ (i) : Soit $x \in A$ et $\mathcal{B}(x)$ un système fondamental de voisinages $\mathcal{H}$-réguliers de x, donc, (1.22.), $\mathcal{H}_1$- et $\mathcal{H}_2$-réguliers. On prend $\omega \in \mathcal{B}(x)$; alors, on a par hypothèse :

$$\mu_y^{\omega}(\partial\omega \backslash A) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_y^{\omega}(\partial\omega \backslash A) = 0, \quad \forall y \in \omega \cap A.$$

Par conséquent, (lemme 9.5.), $\nu_y^{\omega}(\partial\omega \backslash A) = 0$ (car A est $\mathcal{H}_1$-absorbant et $\lambda_y^{\omega}(\partial\omega \backslash A) = 0, \forall y \in A \cap \omega$) et, (9.2.), A est aussi $\mathcal{H}$-absorbant.

Remarquons que, si $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, il y a identité entre les ensembles $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}$-absorbants. C'est le cas des opérateurs itérés.

EXEMPLES 9.7. – (1) *Si l'un au moins des opérateurs* L_1, L_2 *(voir remarque 1.3) est elliptique les seuls ensembles* $\mathcal{H}$*-absorbants sont :* ϕ, Ω.

(2) *Même situation si* L_1 *est parabolique et* L_2 *son adjoint.*

(3) *Si* $L_1 = L_2$ *est parabolique, alors les ensembles* $\mathcal{H}$*-absorbants sont :*

$$\mathcal{A}_\tau = \{x \in \mathbf{R}^m : x_m \leqslant \tau\} \quad (-\infty \leqslant \tau \leqslant +\infty) .$$

PROPOSITION 9.8. – *Soit un couple* $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}^*(\Omega)$ *et*

$$E_j = \{x \in \Omega : u_j(x) < +\infty\} \quad (j = 1, 2).$$

Si $E_1 = E_2$ *noté* A, *alors* $\bar{A}$ *est un ensemble* $\mathcal{H}$*-absorbant. Inversement, tout ensemble* $\mathcal{H}$*-absorbant est un tel ensemble* ($\bar{A}$).

Démonstration. – Soit $x \in \bar{A}$ et ω un voisinage $\mathcal{H}$-régulier de x. Pour tout $y \in A \cap \omega$, on a

$$+\infty > u_1(y) \geqslant \int u_1\, d\mu_y^\omega + \int u_2\, d\nu_y^\omega , \quad +\infty > u_2(y) \geqslant \int u_2\, d\lambda_y^\omega \cdot$$

Comme $\int u_1\, d\mu_y^\omega + \int u_2\, d\nu_y^\omega , \int u_2\, d\lambda_y^\omega$ sont finies sur $A \cap \omega$ et $u_1 = u_2 = +\infty$ sur $\mathbf{C}A$, alors les fonctions :

$$y \to \mu_y^\omega(\partial\omega \backslash A) \ , \ y \to \lambda_y^\omega(\partial\omega\backslash A) \ , \ y \to \nu_y^\omega(\partial\omega\backslash A)$$

s'annulent sur $A \cap \omega$. D'autre part, ces fonctions sont finies continues dans ω, car $\int^* \chi_{\partial\omega | A}\, d\mu_y^\omega$ est $\mathcal{H}_1$-harmonique dans ω et le couple $\left(\int^* \chi_{\partial\omega\backslash A}\, d\nu_y^\omega , \int^* \chi_{\partial\omega\backslash A}\, d\lambda_y^\omega\right) \in {}_+\mathcal{H}(\omega)$; d'où, par continuité, leur annulation sur $\bar{A} \cap \omega$.

Par conséquent, $\bar{A}$ est un ensemble $\mathcal{H}$-absorbant. Inversement, tout ensemble $\mathcal{H}$-absorbant F est de la forme $\bar{A}$. Pour cela, on considère le couple (u_1, u_2) avec

$$u_j = \begin{cases} 0, & \text{sur } F \\ +\infty, & \text{sur } \mathbf{C}F \end{cases} \qquad (j = 1, 2).$$

Alors $(u_1, u_2) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega)$ (démonstration de 9.2) et

$$F = u_1^{-1}(0) = u_2^{-1}(0).$$

THEOREME 9.9. – (Inégalités de Harnack). – *Soient μ, ν deux mesures $\geqslant 0$ sur Ω, F_1 le plus petit ensemble $\mathcal{H}_1$-absorbant $\supset T\mu$, F_2 le plus petit ensemble $\mathcal{H}_2$-absorbant $\supset T\nu$, $U \in \mathcal{U}$ avec $U \subset F_1 \cap F_2$ et K compact $\subset U$(*). Alors il existe des réels $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, tels que, pour tout $(u_1, u_2) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega)$, mais biharmonique dans U, on a :*

$$(1) \quad \sup_K u_1 \leqslant \alpha \left(\int u_1\, d\mu + \int u_2\, d\nu\right) ;$$

$$(2) \quad \sup_K u_2 \leqslant \beta \int u_2\, d\nu .$$

Démonstration. – Si $\int u_1\, d\mu + \int u_2\, d\nu = +\infty$, (1) est vraie. Si $\int u_1\, d\mu + \int u_2\, d\nu = 0$, on aura $\int u_1\, d\mu = 0$ et $\int u_2\, d\nu = 0$, d'où $T\mu \subset u_1^{-1}(0)$ et $T\nu \subset u_2^{-1}(0)$; de plus, $F_j \subset u_j^{-1}(0)$ car les ensembles $u_j^{-1}(0)$ sont $\mathcal{H}_j$-absorbants, $j = 1, 2$. Comme $K \subset F_j$ $(j = 1, 2)$, alors $\sup_K u_1 = 0$. Donc (1) est vérifiée.

On considère maintenant l'ensemble $\mathfrak{N}$ de tous les couples $(u_1, u_2) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega)$,
biharmoniques dans U, et tels que $0 < \int u_1\, d\mu + \int u_2\, d\nu < +\infty$. Supposons alors que (1) n'est pas vraie ; on pourrait former une suite $(u_1^n, u_2^n) \in \mathfrak{N}$ avec $\sup_K u_1^n > n^3 \left(\int u_1^n\, d\mu + \int u_2^n\, d\nu\right)$. Le couple

$$(v_1, v_2) = \left(\sum_n \frac{u_1^n}{n^2\left(\int u_1^n\, d\mu + \int u_2^n\, d\nu\right)},\right.$$
$$\left. \sum_n \frac{u_2^n}{n^2\left(\int u_1^n\, d\mu + \int u_2^n\, d\nu\right)} \right) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega)$$

(*) Pour démontrer seulement (1), il suffit de prendre $U \subset F_1$.

et $$\int v_1 \, d\mu < +\infty \quad , \quad \int v_2 \, d\nu < +\infty .$$

Alors $$A_1 = \overline{\{x \in \Omega : v_1(x) < +\infty\}} \supset T\mu$$

et $$A_2 = \overline{\{x \in \Omega : v_2(x) < +\infty\}} \supset T\nu .$$

Comme $v_1 \in {}_+\mathcal{H}_1^*(\Omega)$ et $v_2 \in {}_+\mathcal{H}_2^*(\Omega)$, les ensembles A_j sont $\mathcal{H}_j$-absorbants, $j = 1, 2$, ([2c], 1.4.2.) ; donc $A_1 \supset F_1 \supset U$ et $A_2 \supset F_2 \supset U$. Mais, dans U, on a une suite croissante de couples biharmoniques et v_1 est finie sur un ensemble dense de U ; par conséquent, (1.30), (v_1 , v_2) est biharmonique dans U et $\sup_K v_1$ est finie, ce qui contredit l'inégalité

$$\sup_K v_1 \geqslant \sup \frac{u_1^n}{n^2 \left(\int u_1^n \, d\mu + \int u_2^n \, d\nu \right)} > n \quad , \quad \forall n \in \mathrm{N}.$$

L'inégalité (2) est démontrée de façon analogue (voir aussi 1.4.4. [2c]).

Remarque 9.10. – Comme cas particulier, on a le théorème 2.13. En effet, dans un espace biharmonique elliptique connexe, le seul ensemble $\mathcal{H}_j$-absorbant non vide ($j = 1, 2$) est l'espace entier (pour nous, le domaine ω de 2.13). [voir théorème 2.6. et [2c], 1.5.2.] ; d'autre part, $\mu = \nu = \epsilon_{x_0}$.

COROLLAIRE 9.11. – *Supposons que l'une des conditions de 8.4. est vérifiée(*).*

Soient ω un ouvert $\mathcal{H}$-régulier (espace) et $x , y \in \omega$ tels que, si F_j est le plus petit ensemble $\mathcal{H}_j$-absorbant ($j = 1, 2$) contenant x, on ait : $y \in \mathring{F}_1 \cap \mathring{F}_2$.

Alors, les mesures λ_y^ω , μ_y^ω , ν_y^ω , sont respectivement absolument continues par rapport à λ_x^ω , μ_x^ω , ν_x^ω .

Démonstration. – Pour les mesures λ_y^ω , μ_y^ω , voir [2c], 1.4.6., car les espaces $(\Omega , \mathcal{H}_2)$, $(\Omega , \mathcal{H}_1)$ sont harmoniques (1.29).

(*) Cette hypothèse est utilisée seulement pour montrer les propriétés désirées des mesures ν_y^ω.

– Pour tout couple $(0, f) \in {}_{+}\mathcal{E}_c(\partial\omega)$, on a

$$(H_1^{\omega,f}, H_2^{\omega,f}) \in {}_{+}\mathcal{H}(\omega).$$

Grâce à 9.9. (1), on a :

$$H_1^{\omega,f}(y) \leqslant \alpha\,[H_1^{\omega,f}(x) + H_2^{\omega,f}(x)]$$

ou $$\int f d\nu_y^{\omega} \leqslant \alpha \int f d\sigma_x^{\omega} \quad \text{avec} \quad \sigma_x^{\omega} = \nu_x^{\omega} + \lambda_x^{\omega} \ ;$$

donc $$\nu_y^{\omega} \leqslant \alpha\,\sigma_x^{\omega}.$$

Mais, à cause de 8.7., σ_x^{ω} est absolument continue par rapport à ν_x^{ω}. Par conséquent, ν_y^{ω} est absolument continue par rapport à ν_x^{ω}.

Remarque 9.12. – Dans le cas elliptique, si ω est, de plus, connexe, comme ω est le seul ensemble $\mathcal{H}_j$-absorbant non vide $(j = 1, 2)$, on aura que, pour tous les $x, y \in \omega$, les mesures $\lambda_x^{\omega}, \mu_x^{\omega}, \nu_x^{\omega}$ sont respectivement équivalentes aux mesures $\lambda_y^{\omega}, \mu_y^{\omega}, \nu_y^{\omega}$.

PARTIE X

ESPACES BIHARMONIQUES ASSOCIES A DEUX ESPACES HARMONIQUES DONNES

α) Commençons par donner d'abord quelques rappels et résultats valables dans un espace harmonique fort [2c]. Soit P un potentiel dans Ω fini continu et strictement surharmonique. On définit les opérateurs de Dynkin (associés à P) par ([13] et [15]) :

$$L_P f(x) = \limsup_{\substack{\omega \searrow x \\ \omega \in \mathfrak{U}_c}} \frac{f(x) - \int f\, d\rho_x^\omega}{P(x) - \int P\, d\rho_x^\omega} \quad (*) ,$$

$$L'_P f(x) = \liminf_{\substack{\omega \searrow x \\ \omega \in \mathfrak{U}_c}} \frac{f(x) - \int f d\rho_x^\omega}{P(x) - \int P d\rho_x^\omega} \quad (*) ,$$

où $x \in \Omega$, f est une fonction numérique dans Ω telle que le numérateur ait toujours un sens et ρ_x^ω est la mesure harmonique. Il est évident que L est sous-linéaire, L' sur-linéaire et que $Lf(x) = L'f(x)$ implique l'existence de la limite. On voit aussi que $L_P f(x) = L_{p^\omega} f(x)$ (dans l'espace harmonique ω) où

$p^\omega(x) = P(x) - \int P d\rho_x^\omega$, $x \in \omega$, ω ouvert relativement compact.

[En effet, si $\omega' \in \mathfrak{U}_c$,

$$x \in \omega' \subset \overline{\omega'} \subset \omega ,$$

(*) Désormais, on supprimera l'indice P lorsque cela ne donne pas lieu à confusion.

$$p^{\omega}(x) - \int p^{\omega}\, d\rho_x^{\omega'} = \mathrm{P}(x) - \mathrm{H}_\mathrm{P}^{\omega}(x) - \int (\mathrm{P} - \mathrm{H}_\mathrm{P}^{\omega})\, d\rho_x^{\omega'} =$$

$$= \mathrm{P}(x) - \mathrm{H}_\mathrm{P}^{\omega}(x) - \int \mathrm{P}\, d\rho_x^{\omega'} + \int \mathrm{H}_\mathrm{P}^{\omega}\, d\rho_x^{\omega'} = \mathrm{P}(x) - \int \mathrm{P}\, d\rho_x^{\omega'}$$

car $\mathrm{H}_\mathrm{P}^{\omega}$ est harmonique dans ω (4.1.9. [2c])]. Si V est le noyau associé à P, on sait ([13], p. 20-21) que, pour toute $\varphi \in \mathrm{C}_b(\Omega)$ (finie continue et bornée dans Ω), on a :

$$\mathrm{LV}\varphi = \varphi \quad \text{et} \quad \mathrm{L'V}\varphi = \varphi \text{ dans } \Omega.$$

LEMME 10.1. – *Pour qu'une fonction $u > -\infty$ semi-continue inférieurement dans $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$ soit hyperharmonique, il faut et il suffit qu'en tout point $x \in \mathrm{U}$ où $u(x)$ est finie, on ait :*

$$\mathrm{L}u(x) \geqslant 0 \quad [\text{ou } \mathrm{L}'u(x) \geqslant 0].$$

Ce lemme a été établi dans le cadre de l'axiomatique de M. Brelot avec une esquisse de démonstration (voir lemme 2 [15]). Nous allons le démontrer dans notre cadre de façon détaillée.

Démonstration. – 1) Si u est hyperharmonique dans U, on voit immédiatement que $\mathrm{L}u(x) \geqslant 0$ en tout point $x \in \mathrm{U}$ où $u(x)$ est finie.

2) Inversement : il suffit de montrer que quel que soit ω ouvert régulier $\subset \bar{\omega} \subset \mathrm{U}$, on a : $u \geqslant \mathrm{H}_\varphi^{\omega}$ pour tout $\varphi \in \mathrm{C}(\partial\omega)$, $\varphi \leqslant u$. Pour cela, considérons la fonction (dans ω) : $v = u - \mathrm{H}_\varphi^{\omega} + \epsilon p^{\omega}$ (ϵ réel > 0) où $p^{\omega} = \mathrm{P} - \mathrm{H}_\mathrm{P}^{\omega} > 0$ [bornée dans ω et $\lim\limits_{\omega \ni y \to z} p^{\omega}(y) = 0$, $\forall z \in \partial\omega$].

Nous allons démontrer que $v \geqslant 0$ pour tout $\epsilon > 0$; d'où le résultat. Sinon, elle atteindrait son minimum < 0 en un point $x \in \omega$ où u est finie, car v, prolongée par semi-continuité inférieure sur $\partial\omega$, est $\geqslant 0$ là-dessus. En ce point, on aurait :

$$\mathrm{L}v = \mathrm{L}u + \mathrm{L}(-\mathrm{H}_\varphi^{\omega}) + \epsilon \mathrm{L}p^{\omega} = \mathrm{L}u + \epsilon > \mathrm{L}u \geqslant 0 \ ;$$

donc $\mathrm{L}v(x) > 0$ ce qui est incompatible avec un minimum relatif en x. En effet, soit ω_0 un voisinage de x appartenant à $\mathcal{U}_c$ et $\bar{\omega}_0 \subset \mathrm{U}$. On sait qu'il existe une fonction h harmonique > 0 dans ω_0. En passant à l'espace des fonctions h-harmoniques, on se ramène au cas où les constantes sont harmoniques(*). On aura donc, puisque $v(x)$ est un minimum relatif,

$$v(x) \leqslant v(y)$$

pour $y \in U'_x$, U'_x voisinage de x, $\overline{U}'_x \subset \omega_0$, et pour tout ω' ouvert relativement compact $(\ni x)$, $\overline{\omega}' \subset U'_x$,

$$v(x) \leqslant \int v \, d\rho_x^{\omega'}$$

car 1 est harmonique. D'où $Lv(x) \leqslant 0$. Contradiction !

COROLLAIRE 10.2. – *Soit* $U \in \mathfrak{U}$ *et* $h \in C(U)$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $Lh = 0$ *dans* U.

ii) h *est harmonique dans* U.

Démonstration. – Conséquence immédiate du lemme précédent.

Remarque 10.3. – Les résultats précédents, 10.1, 10.2, sont indépendants du potentiel P auquel L est associé.

β) Dans la partie I (1.29), on a vu qu'à un espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H})$ donné on associe deux espaces harmoniques $(\Omega, \mathcal{H}_1)$, $(\Omega, \mathcal{H}_2)$.

Inversement, en partant de deux espaces harmoniques donnés $(\Omega, \mathcal{L}_1)$, $(\Omega, \mathcal{L}_2)$, il est naturel de chercher des espaces biharmoniques $(\Omega, \mathcal{H})$ pour lesquels les faisceaux associés $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ coïncident respectivement avec les faisceaux $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$.

Pour arriver à construire de tels espaces, on va se servir de l'opérateur de Dynkin $L_1 = L_{P_1}$ associé à un potentiel P_1 (fixé) fini continu et strictement surharmonique dans l'espace harmonique $(\Omega, \mathcal{L}_1)$ qu'on doit, par conséquent, supposer fort.

Plus précisément, on peut énoncer le :

(*) En remarquant que $L_P u(x) = L_{P/h} \dfrac{u}{h}(x)$, on considère ensuite la fonction $\dfrac{v}{h}$ au lieu de v.

THEOREME 10.4. — *Soient* $(\Omega, \mathcal{L}_1)$, $(\Omega, \mathcal{L}_2)$ *deux espaces harmoniques, de H. Bauer, dont le premier est fort. On suppose, de plus, qu'il existe une base d'ouverts à la fois* $\mathcal{L}_1$*-réguliers et* $\mathcal{L}_2$*-réguliers.*

Alors, il existe un espace biharmonique (associé) $(\Omega, \mathcal{H})$ *pour lequel les faisceaux associés* $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ *coïncident respectivement avec* $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$.

La démonstration sera donnée en étapes par quelques résultats qu'on établira ci-dessous (sous les mêmes hypothèses) :

LEMME 10.5. — *Soient* ω *un ouvert* $\mathcal{L}_1$*-régulier,* $\varphi \in C_b(\omega)$ *et* V_1^ω *le noyau associé à* p_1^ω. *Alors, il existe une seule fonction finie continue* $u_1 = V_1^\omega \varphi$ *vérifiant :*

(1) $\quad L_1 u_1 = \varphi$ *dans* ω ,

(2) $\quad \lim\limits_{\omega \ni x \to y} u_1(x) = 0, \quad \forall y \in \partial\omega.$

Démonstration. — D'abord, on remarque que les solutions finies continues de (1) sont de la forme $u_1 = V_1^\omega \varphi + h_1$ avec h_1 fonction $\mathcal{L}_1$-harmonique dans ω.

[En effet, soit $v_1 \in C(\omega)$ vérifiant (1) et une $u_1 = V_1^\omega \varphi + h_1$. Alors $L_1(v_1 - u_1) = L_1 v_1 - L_1 u_1 = 0$ dans ω car

$$L_1(-V_1^\omega \varphi) = -L_1' V_1^\omega \varphi = -\varphi.$$

Donc $v_1 - u_1$ est $\mathcal{L}_1$-harmonique dans ω (10.2.).].

D'autre part, $|V_1^\omega \varphi| \leqslant V_1^\omega \|\varphi\| = \|\varphi\| p_1^\omega$. Comme (2) doit être satisfaite et que $\lim\limits_{\omega \ni x \to y \in \partial\omega} V_1^\omega \varphi(x) = 0$ sur $\partial\omega$,

alors $\lim\limits_{\omega \ni x \to y} h_1(x) = 0$, $\forall y \in \partial\omega$; d'où, $h_1 = 0$ dans ω. Par conséquent, la seule solution de (1) et (2) est :

$$u_1 = V_1^\omega \varphi \quad (u_1 \in C(\bar{\omega})).$$

COROLLAIRE 10.6. — *La (seule) solution finie continue de* (1) *et* (2′) : $\lim\limits_{\omega \ni x \to y \in \partial\omega} u_1(x) = f_1(y)$, $\forall y \in \partial\omega$, *où* $f_1 \in C(\partial\omega)$, *est* $$u_1 = H_{f_1}^{\omega} + V_1^{\omega}\varphi \ (*) .$$

Démonstration. – On se ramène au lemme précédent, en posant $u_1 = v_1 + H_{f_1}^{\omega}$. En effet,

$$L_1 v_1 = L_1 u_1 = \varphi \quad \text{dans} \quad \omega \text{ et } \lim_{\omega \ni x \to y} v_1(x) = 0, \ \forall y \in \partial\omega.$$

Par conséquent, $v_1 = V_1^{\omega}\varphi$ et $u_1 = H_{f_1}^{\omega} + V_1^{\omega}\varphi$ $(u_1 \in C(\bar{\omega}))$.

COROLLAIRE 10.7. – *Soit un couple* $(h_1, h_2) \in \mathcal{E}_c(U)$, $U \in \mathfrak{U}$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) h_2 *est une fonction* $\mathcal{L}_2$*-harmonique et* $L_1 h_1 = h_2$ *dans* U.

(ii) *pour tout* ω *ouvert* $\mathcal{L}_1$ *et* $\mathcal{L}_2$*-régulier* $\subset \bar{\omega} \subset U$ *et tout point* $x \in \omega$, *on a :*

$$h_1(x) = \int h_1 \, d\mu_x^{\omega} + \int h_2 \, d\nu_x^{\omega} \ , \ h_2(x) = \int h_2 \, d\lambda_x^{\omega}$$

où $\lambda_x^{\omega}, \mu_x^{\omega}, \nu_x^{\omega}$ *sont des mesures de Radon* $\geqslant 0$ *portées par* $\partial\omega$. $[\mu_x^{\omega}$, λ_x^{ω} *sont respectivement les mesures harmoniques dans* $(\Omega, \mathcal{L}_1)$, $(\Omega, \mathcal{L}_2)$ *et* ν_x^{ω} *est la forme linéaire* $\geqslant 0$ *sur* $C(\partial\omega) : f \to V_1^{\omega} H_f^{\omega}$].

On appelle ces couples-là biharmoniques dans U.

Démonstration. – (i) $\Rightarrow$ (ii). On a, d'abord,

$$h_2(x) = H_{h_2}^{\omega}(x) = \int h_2 \, d\lambda_x^{\omega} \Leftrightarrow h_2 \text{ est une fonction } \mathcal{L}_2\text{-harmonique.}$$

D'autre part, grâce à 10.6., on a

$$h_1(x) = H_{h_1}^{\omega}(x) + V_1^{\omega} H_{h_2}^{\omega}(x) = \int h_1 \, d\mu_x^{\omega} + \int h_2 \, d\nu_x^{\omega}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). – La première partie de la démonstration et le fait que $L_1 h_1 = L_1 V_1^{\omega} H_{h_2}^{\omega} = H_{h_2}^{\omega}$ nous permettent de conclure.

(*) Pour ne pas alourdir les notations, désormais nous mettrons toujours les données-frontière sous la forme f_1, f_2, $[(f_1, f_2)]$ respectivement pour le problème de Dirichlet dans le premier et second espace harmonique [pour le problème de Riquier dans les espaces biharmoniques].

Pour tout $U \in \mathcal{U}$, on note par $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des couples $(h_1, h_2) \in \mathcal{E}_c(U)$ du corollaire précédent.

LEMME 10.8. — *L'application* $U \to \mathcal{H}(U)$ *définit un faisceau sur* Ω *et* $\mathcal{H}(U)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{E}_c(U)$.

Démonstration. — La linéarité est une conséquence du corollaire 10.7.

La propriété de faisceau découle du caractère local de l'opérateur L_1.

LEMME 10.9. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) ω *est un ouvert* $\mathcal{L}_1$ *et* $\mathcal{L}_2$*-régulier.*

(ii) ω *est un ouvert* $\mathcal{H}$*-régulier.*

Démonstration. — (i) $\Rightarrow$ (ii). A cause de 10.6. (voir aussi 10.7.), pour $(f_1, f_2) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$, il existe un seul couple $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\omega)$ avec $\lim\limits_{\omega \ni x \to y \in \partial\omega} h_j(x) = f_j(y)$, $\forall y \in \partial\omega$ $(j = 1, 2)$. De plus, la double positivité (1.4. (ii)) est satisfaite. D'où le résultat.

(ii) $\Rightarrow$ (i). — En effet, à tout couple $(f, 0) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$ correspond un seul couple $(h_1, 0)$ vérifiant $L_1 h_1 = 0$ dans ω, donc h_1 y est $\mathcal{L}_1$-harmonique (10.2.), et $\lim\limits_{\omega \ni x \to y} h_1(x) = f(y)$, $\forall y \in \partial\omega$.

De même, à tout $(0, \varphi) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$ correspond un seul $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\omega)$ tel que $\lim\limits_{\omega \ni x \to y} h_1(x) = 0$, $\lim\limits_{\omega \ni x \to y} h_2(x) = \varphi(y)$, $\forall y \in \partial\omega$ (voir 10.6., 10.7).

COROLLAIRE 10.10. — *Les ouverts* $\mathcal{H}$*-réguliers forment une base pour la topologie de* Ω.

Démonstration. — C'est une conséquence du lemme précédent et du fait qu'il existe une base d'ouverts $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$-réguliers (voir hypothèse de 10.4.).

On définit maintenant comme dans la partie I, les fonctions $\mathcal{H}$-hyperharmoniques ainsi que les ensembles $\mathcal{H}_1^*(U)$, $\mathcal{H}_2^*(U)$, $\mathcal{H}_1(U)$,

$\mathcal{H}_2(U)$, $(U \in \mathcal{U})$. On remarque, de plus, que pour tout ω ouvert $\mathcal{H}$-régulier, μ_x^ω et λ_x^ω sont respectivement les mesures harmoniques dans $(\Omega, \mathcal{L}_1)$, $(\Omega, \mathcal{L}_2)$.

LEMME 10.11. — *Pour tout* $U \in \mathcal{U}$, $\mathcal{H}_j(U) = \mathcal{L}_j(U)$; *donc* $U \to \mathcal{H}_j(U)$ *définit un faisceau sur* Ω $(j = 1,2)$.

Démonstration. — En effet, pour tout $U \in \mathcal{U}$, on a, grâce à 10.9., 10.10. et au fait que les ouverts $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$-réguliers forment une base, que :

$$\mathcal{H}_j^*(U) = \{v_j : \text{fonction } \mathcal{L}_j\text{-hyperharmonique dans } U\} \quad (j = 1,2).$$

$[v_1 \in \mathcal{H}_1^*(U) \Leftrightarrow v_1(x) \geqslant \int v_1\, d\mu_x^\omega$, $\forall \omega$ ouvert $\mathcal{H}$-régulier $\subset \bar{\omega} \subset U$, $\forall x \in \omega$

$\Leftrightarrow v_1(x) \geqslant \int v_1\, d\mu_x^\omega$, $\forall \omega$ ouvert $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$-régulier $\subset \bar{\omega} \subset U$, $\forall x \in \omega$ (10.9.,10.10.)

$\Leftrightarrow v_1$ est une fonction $\mathcal{L}_1$-hyperharmonique dans U

(car les ouverts $\mathcal{L}_1$- et $\mathcal{L}_2$-réguliers forment une base).

De même, $v_2 \in \mathcal{H}_2^*(U) \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow v_2$ est une fonction $\mathcal{L}_2$-hyperharmonique dans U].

Par conséquent,(1.12.), $\mathcal{H}_j(U) = \mathcal{L}_j(U), j = 1, 2$.

LEMME 10.12. — *L'axiome III (de séparation) est vérifié.*

Démonstration. — Comme $\mathcal{H}_j^*(\Omega) = \{$fonctions $\mathcal{L}_j$-hyperharmoniques dans $\Omega\}$ (démonstration de 10.11.) et que $(\Omega, \mathcal{L}_1)$, $(\Omega, \mathcal{L}_2)$ sont des espaces harmoniques, alors III (a) est vérifiée. La partie III(b) est immédiate grâce à 10.11.

LEMME 10.13. — *L'axiome IV (de convergence) est vérifié.*

Démonstration. — C'est une conséquence de 10.11. et du fait que $(\Omega, \mathcal{L}_1)$, $(\Omega, \mathcal{L}_2)$ sont des espaces harmoniques.

En conclusion, $(\Omega, \mathcal{H})$ est un espace biharmonique pour lequel les faisceaux associés $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ coïncident respectivement avec $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$.

[Notre construction dépend du choix du potentiel P_1].

PROPOSITION 10.14. – *Si l'on suppose de plus que* $(\Omega, \mathcal{L}_2)$ *est un espace harmonique fort et que la constante* 1 *est une fonction* $\mathcal{L}_2$-*hyperharmonique dans* Ω, *alors* $(\Omega, \mathcal{H})$ *est un espace biharmonique fort.*

Démonstration. – Il suffit, en effet, de démontrer l'axiome III' (a) [les autres axiomes restant inchangés]. Soit le couple (q_1, q_2) où q_2 est un $\mathcal{L}_2$-potentiel fini continu dans Ω, $0 < q_2 \leqslant 1$ et $q_1 = V_1 1 = P_1$.

On montre, d'abord, que (q_1, q_2) est un couple $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans Ω (fini continu). En effet, on voit que $L_1 q_1 = L_1 V_1 1 = 1 \geqslant q_2$ et q_2 est une fonction $\mathcal{L}_2$-hyperharmonique.

Soit maintenant ω un ouvert $\mathcal{H}$-régulier. Pour tout couple $(f_1, f_2) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$, $f_j \leqslant q_j$ $(j = 1, 2)$, on considère dans ω le couple $(v_1, v_2) = (q_1 - u_1, q_2 - u_2)$ où $u_1 = H^\omega_{f_1} + V^\omega_1 H^\omega_{f_2}$, $u_2 = H^\omega_{f_2}$.

Alors $L_1 v_1 = L_1(q_1 - u_1) = L_1 q_1 - H^\omega_{f_2} \geqslant q_2 - H^\omega_{f_2}$ et, comme $q_2 \geqslant H^\omega_{f_2}$, on a $L_1 v_1 \geqslant 0$. Donc, grâce au lemme 10.1. et au principe du minimum dans $(\Omega, \mathcal{L}_1)$, on a : $v_1 = q_1 - u_1 \geqslant 0$. D'où (q_1, q_2) est un couple $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans Ω (1.9.).

Considérons ensuite un couple biharmonique (h_1, h_2) dans Ω (voir 10.7.) avec $h_1 \leqslant q_1$, $h_2 \leqslant q_2$. Comme q_2 est un $\mathcal{L}_2$-potentiel, alors $h_2 \leqslant 0$; donc $L_1 h_1 \leqslant 0$ et h_1 est une fonction $\mathcal{L}_1$-sousharmonique (10.1.). Aussi q_1 étant un $\mathcal{L}_1$-potentiel, alors $h_1 \leqslant 0$. Par conséquent, (q_1, q_2) est un $\mathcal{H}$-potentiel fini continu dans Ω avec $q_j(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$, $j = 1, 2$.

PARTIE XI

$\mathcal{H}$-OPERATEURS ET FONCTIONS HYPERHARMONIQUES D'ORDRE 2

Hypothèses de cette partie.

1) *Notre espace biharmonique* $(\Omega\ ,\ \mathcal{H})$ *est fort.*

2) *L'une des conditions de 8.4. est satisfaite (voir aussi 8.9).*

Introduisons les opérateurs, appelés $\mathcal{H}$*-opérateurs,*

$$\Gamma_1 f(x) = \limsup_{\substack{\omega \searrow x \\ \omega \in \mathcal{U}_c}} \frac{f(x) - \int f d\mu_x^\omega}{\int d\nu_x^\omega}\ ,\ \Gamma'_1 f(x) = \liminf_{\substack{\omega \searrow x \\ \omega \in \mathcal{U}_c}} \frac{f(x) - \int f d\mu_x^\omega}{\int d\nu_x^\omega}\ ,$$

où f est une fonction numérique définie dans Ω telle que le numérateur ait toujours un sens.

Soit maintenant un couple $(u_1\ , u_2) \in {}_+\mathcal{H}(\Omega)$ avec $u_2 > 0$; $u_1 \in {}_+\mathcal{S}_1\ (\Omega)$ et, en décomposant (selon F. Riesz), on a :

$$u_1 = P_1 + h_1\ ,\ (P_1\ , u_2) \in {}_+\mathcal{H}\ (\Omega)$$

et $$p_1^\omega\ (x) = P_1\ (x) - \int P_1\ d\mu_x^\omega = \int u_2\ d\nu_x^\omega > 0\ ,$$

donc P_1 est un $\mathcal{H}_1$-potentiel fini continu et strictement surharmonique dans Ω.

Nous allons montrer que, pour tout $x \in \Omega$, on a

$$L_{P_1} f(x) = \frac{1}{u_2\ (x)} \Gamma_1\ f(x)\quad ,\quad L'_{P_1} f(x) = \frac{1}{u_2\ (x)} \Gamma'_1\ f(x).$$

En effet, pour tout $\omega \in \mathcal{U}_c\ , \omega \ni x\ , P_1\ (x) - \int P_1\ d\mu_x^\omega = \int u_2\ d\nu_x^\omega$; grâce à la continuité de u_2, pour $\epsilon > 0\ , 0 < \epsilon < u_2\ (x)$, on a

$$\frac{f(x) - \int f d\mu_x^\omega}{(u_2(x) + \epsilon) \int d\nu_x^\omega} \leqslant \frac{f(x) - \int f d\mu_x^\omega}{\int u_2 \, d\nu_x^\omega} \leqslant \frac{f(x) - \int f d\mu_x^\omega}{(u_2(x) - \epsilon) \int d\nu_x^\omega}$$

avec ω ($\in \mathcal{U}_c$) voisinage de x "assez petit". D'où le résultat.

Dans le cas particulier où $u_2 = 1$, on aura :

$$\mathrm{L}_{\mathrm{P}_1} f(x) = \Gamma_1 f(x) \quad , \quad \mathrm{L}'_{\mathrm{P}_1} f(x) = \Gamma'_1 f(x).$$

LEMME 11.1. – *Si* $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$, $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$, *alors*

$$\Gamma_1 h_1(x) = \Gamma'_1 h_1(x) = h_2(x) \quad , \quad \forall x \in \mathrm{U}.$$

Par conséquent, pour tout $h_1 \in \mathcal{F}_1(\mathrm{U})$, *on aura :*

$$\Gamma_1 h_1(x) = \Gamma'_1 h_1(x) = \mathcal{N}_{\mathrm{U}} h_1(x) = h_2(x)$$

(voir p. 47-48, $1^{\text{ère}}$ section).

Démonstration. – Grâce à la continuité de h_2, on aura :

$$h_2(x) - \epsilon \leqslant h_2(y) \leqslant h_2(x) + \epsilon \qquad (\epsilon > 0)$$

dans un voisinage $\mathrm{U}'_x \subset \overline{\mathrm{U}'_x} \subset \mathrm{U}$; donc, pour tout ω ($\searrow x$) ouvert relativement compact $\subset \overline{\omega} \subset \mathrm{U}'_x$,

$$[h_2(x) - \epsilon] \int d\nu_x^\omega \leqslant \int h_2 \, d\nu_x^\omega \leqslant [h_2(x) + \epsilon] \int d\nu_x^\omega .$$

Comme $\int d\nu_x^\omega > 0$ (hypothèse 2), on a :

$$h_2(x) - \epsilon \leqslant \begin{matrix} \Gamma_1 h_1(x) \\ \Gamma'_1 h_1(x) \end{matrix} \leqslant h_2(x) + \epsilon,$$

et, $\epsilon > 0$ étant arbitraire, $\Gamma_1 h_1(x) = h_2(x)$ et $\Gamma'_1 h_1(x) = h_2(x)$.

Donc

$$\Gamma_1 h_1(x) = \Gamma'_1 h_1(x) = \lim_{\substack{\omega \searrow x, \omega \in \mathcal{U}_c \\ \overline{\omega} \subset \mathrm{U}}} \frac{\int h_2 \, d\nu_x^\omega}{\int d\nu_x^\omega} = h_2(x) = \mathcal{N}_{\mathrm{U}} h_1(x)$$

grâce à la définition de l'opérateur $\mathcal{N}_{\mathrm{U}}$.

Remarque 11.2. – Soit l'espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H})$. En partant des espaces harmoniques $(\Omega, \mathcal{H}_1)$, $(\Omega, \mathcal{H}_2)$, comment retrouver $(\Omega, \mathcal{H})$ par le procédé de la partie X ?

En fait, en supposant que $(u_1, 1) \in {}_+\mathcal{H}(\Omega)$ et comme μ_x^ω, λ_x^ω sont respectivement les mesures harmoniques dans $(\Omega, \mathcal{H}_1)$, $(\Omega, \mathcal{H}_2)$, il suffit de montrer que :

Pour tout ω ouvert $\mathcal{H}$-régulier, $\forall x \in \omega$, $\forall f_2 \in C(\partial\omega)$, on a :

$$V_1^\omega H_{f_2}^\omega(x) = \int f_2 \, d\nu_x^\omega .$$

En effet, considérons le couple $f = (0, f_2) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega)$; on lui associe un seul couple

$$(H_1^{\omega,f}(x), H_2^{\omega,f}(x)) = \left(\int f_2 \, d\nu_x^\omega , \int f_2 \, d\lambda_x^\omega\right) \in \mathcal{H}(\omega).$$

Comme $\Gamma_1 = L_1$, on a, grâce au lemme précédent,

$$L_1 H_1^{\omega,f} = H_2^{\omega,f} \quad \text{dans } \omega.$$

D'autre part, on a $L_1 V_1^\omega H_2^{\omega,f} = H_2^{\omega,f}$ dans ω (partie X).

Donc $$L_1 [V_1^\omega H_2^{\omega,f} - H_1^{\omega,f}] = 0.$$

Par conséquent, la fonction entre les crochets est $\mathcal{H}_1$-harmonique dans ω (10.2), de limite nulle sur $\partial\omega$. D'où, grâce au principe du minimum dans l'espace harmonique $(\Omega, \mathcal{H}_1)$,

$$V_1^\omega H_2^{\omega,f} - H_1^{\omega,f} = 0 \quad \text{dans } \omega.$$

On voit donc que, si l'on travaille dans notre espace biharmonique (du départ), il est bien naturel d'utiliser nos opérateurs (locaux) Γ_1, Γ_1' en évitant ainsi de faire des hypothèses globales restrictives.

THEOREME 11.3. – *Soit un couple* $(v_1, v_2) \in \mathcal{E}_i(U)$, $U \in \mathfrak{U}$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) (v_1, v_2) *est* $\mathcal{H}$*-hyperharmonique dans* U.

ii) v_2 *est* $\mathcal{H}_2$*-hyperharmonique (dans* U*) et* $\Gamma_1' v_1 \geqslant v_2$ *en tout point* $x \in U$ *où* $v_1(x)$ *est finie.*

iii) v_2 *est* $\mathcal{H}_2$*-hyperharmonique (dans* U*) et* $\Gamma_1 v_1 \geqslant v_2$ *en tout point* $x \in U$ *où* $v_1(x)$ *est finie.*

Démonstration. – (i) ⇒ (ii). – Comme

$$v_1(x) \geqslant \int v_1 \, d\mu_x^\omega + \int v_2 \, d\nu_x^\omega$$

et que $\nu_x^\omega \neq 0$, $\forall \omega \in \mathcal{U}_c$, $\bar{\omega} \subset U$, $\forall x \in \omega$ (6.8., 8.9.), alors, en $x \in U$ où $v_1(x)$ est finie, on a :

$$\frac{v_1(x) - \int v_1 \, d\mu_x^\omega}{\int d\nu_x^\omega} \geqslant \frac{\int v_2 \, d\nu_x^\omega}{\int d\nu_x^\omega} \; ;$$

mais, grâce à la semi-continuité inférieure de v_2, pour tout α réel tel que $v_2(x) > \alpha$, il existe un voisinage (de x) $U'_x \subset \bar{U}'_x \subset U$ où $v_2 > \alpha$. D'où $\dfrac{\int v_2 \, d\nu_x^\omega}{\int d\nu_x^\omega} > \alpha$ pour tout $\omega \in \mathcal{U}_c$, $\bar{\omega} \subset U'_x$ $(\omega \ni x)$,

et $\Gamma'_1 v_1(x) \geqslant \alpha$;

ceci étant vrai pour tout $\alpha < v_2(x)$, on a finalement $\Gamma'_1 v_1(x) \geqslant v_2(x)$.

(ii) ⇒ (iii). – Evident car $\Gamma_1 v_1(x) \geqslant \Gamma'_1 v_1(x)$.

(iii) ⇒ (i). – Soient ω un ouvert $\mathcal{H}$-régulier, $U_0 \in \mathcal{U}_c$, $U_0 \supset \bar{\omega}$, $\bar{U}_0 \subset U$. On sait (6.9.) qu'il existe dans U_0 un couple

$$(u_1, u_2) \in {}_+\mathcal{H}(U_0) \quad \text{avec } u_j > 0 \,, j = 1, 2.$$

Considérons le couple $(w_1, w_2) \in \mathcal{E}_i(\omega)$ où

$$w_1 = v_1 - H_1^{\omega,f} + \epsilon p_1^\omega \,, \; w_2 = v_2 - H_2^{\omega,f} \,, \; f = (f_1, f_2) \in \mathcal{E}_c(\partial\omega) \,,$$
$$f_j \leqslant v_j \,, \; j = 1, 2,$$

et $\quad p_1^\omega(x) = u_1(x) - \int u_1 \, d\mu_x^\omega = \int u_2 \, d\nu_x^\omega$, ϵ réel > 0.

Il suffit de montrer que $w_1 \geqslant 0$ pour tout $\epsilon > 0$; sinon, elle atteindrait un minimum négatif (et fini) en un point $z \in \omega$ où v_1 est finie et non sur $\partial\omega$ car w_1 prolongée par semi-continuité inférieure est $\geqslant 0$ sur $\partial\omega$.

En ce point-là, on aura, d'une part,

$$\Gamma_1 w_1 = \Gamma_1 (v_1 - H_1^{\omega,f} + \epsilon p_1^{\omega}) = \Gamma_1 v_1 - H_2^{\omega,f} + \epsilon u_2 >$$
$$\Gamma_1 v_1 - H_2^{\omega,f} \geqslant v_2 - H_2^{\omega,f} \geqslant 0$$

car $\Gamma_1 H_1^{\omega,f} = \Gamma_1' H_1^{\omega,f} = H_2^{\omega,f}$ (11.1.) dans l'espace ω,

$$\frac{1}{u_2(x)} \Gamma_1 p_1^{\omega}(x) = L_{p_1^{\omega}} p_1^{\omega}(x) = 1, \quad \forall x \in \omega \quad ; \qquad \text{d'autre part,}$$

$w_1(z)$ étant un minimum relatif, on a, pour tout $y \in$ (un voisinage) $\delta_z \subset \overline{\delta}_z \subset \omega$, $w_1(z) \leqslant w_1(y)$, et, puisque on peut se ramener au cas où les constantes sont $\mathcal{H}_1$-harmoniques, $w_1(z) \leqslant \int w_1 \, d\mu_z^{\omega'}$, $\forall \omega' = \omega_z' \in \mathfrak{U}_c$, $\overline{\omega}' \subset \delta_z$, contredisant le fait que $\Gamma_1 w_1(z) > 0$. [En effet, comme il existe $h_1 \in \mathcal{H}_1(U_0)$, $h_1 > 0$ (axiome III (b)), on peut raisonner sur les quotients des fonctions considérées par h_1. On considère la fonction $\dfrac{w_1}{h_1} = \dfrac{v_1}{h_1} - \dfrac{H_1^{\omega,f}}{h_1} + \dfrac{\epsilon p_1^{\omega}}{h_1}$. On veut que $\dfrac{w_1}{h_1} \geqslant 0$. Sinon, etc. comme ci-dessus. Mais,

$$\limsup_{\omega' \searrow z} \frac{\dfrac{w_1}{h_1}(z) - \displaystyle\int \frac{w_1}{h_1} \, d\mu_z'^{\omega'}}{\displaystyle\int d\nu_z^{\omega'}} = \limsup_{\omega' \searrow x} \frac{1}{h_1(z)} \left(\frac{w_1(z) - \displaystyle\int w_1 \, d\mu_z^{\omega'}}{\displaystyle\int d\nu_z^{\omega'}} \right)$$
$$= \frac{1}{h_1(z)} \Gamma_1 w_1(z) \leqslant 0$$

avec $\mu_z'^{\omega'} = \dfrac{1}{h_1(z)} (h_1 \, d\mu_z^{\omega'})$, $\int d\mu_z'^{\omega'} = 1$. Contradiction ! D'où, $\dfrac{w_1}{h_1} \geqslant 0$ et $w_1 \geqslant 0$].

COROLLAIRE 11.4. – *Soit* $(h_1, h_2) \in \mathcal{E}_c(U)$, $U \in \mathfrak{U}$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) (h_1, h_2) est biharmonique dans U.

(ii) h_2 est une fonction $\mathcal{H}_2$-harmonique et $\Gamma_1 h_1 = \Gamma_1' h_1 = h_2$ dans U.

Démonstration. – C'est une conséquence immédiate de 11.3.

Remarque 11.5. – (1) Dans le cas particulier des couples du type $(v_1, 0)$, les 11.3., 11.4. donnent des caractérisations respectives dans l'espace harmonique $(\Omega, \mathcal{H}_1)$.

(2) Par analogie avec le cas classique [14], une fonction v s.c.i. $> -\infty$ dans $U \in \mathcal{U}$ telle que $\Gamma_1 v$(*) est une fonction $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique dans U (11.3.) est dite *fonction hyperharmonique d'ordre 2* ; de même, une fonction $h \in C_+(U)$ telle que $\Gamma_1 h$ est une fonction $\mathcal{H}_2$-harmonique ≥ 0 dans U (11.4.) est dite *fonction biharmonique complètement surharmonique.*

Dans la remarque 11.5. (2), on a observé quelques liens entre la théorie axiomatique et la théorie classique [14]. Dans cette optique, on établira ci-dessous quelques résultats.

LEMME 11.6. – *Soient v_2 une fonction $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique ≥ 0 dans Ω et l'ensemble*

$$E_{v_2} = \{w_1 \mid w_1 \geq 0 \quad et \quad (w_1, v_2) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega)\}.$$

Alors la fonction $v_1 = \widehat{\inf E_{v_2}} \in E_{v_2}$ et c'est le plus petit élément de E_{v_2}.

Démonstration. – On remarque d'abord que $E_{v_2} \neq \emptyset$ car $(+\infty, v_2) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega)$. Ensuite, il est facile de voir que $v_1 \in E_{v_2}$ (partie III) et, par construction, v_1 est le plus petit élément de E_{v_2}.

Maintenant, on peut poser la :

DEFINITION 11.7. – *Etant donné v_2 une fonction $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique ≥ 0 dans Ω, on appelle fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 (associée à v_2 dans Ω) le plus petit $v_1 \geq 0$ tel que $(v_1, v_2) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega)$.*

Soit $U \in \mathcal{U}_c$. On sait (théorème 6.9) qu'il existe $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}(U)$ avec $u_j > 0$, $j = 1, 2$. Prenons $\omega \in \mathcal{U}_c$, $\bar{\omega} \subset U$. La fonction

$$p_1^\omega(x) = \int u_2 \, d\nu_x^\omega$$

(*) On fait la convention : $\infty - \infty = \infty$.

est un $\mathcal{H}_1$-potentiel dans ω (6.15) strictement surharmonique. Par rapport à ce potentiel on considère le noyau V_1^ω, $V_1^\omega 1 = p_1^\omega$, et l'opérateur de Dynkin associé L_1.

LEMME 11.8. – *Soit v_1 la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à une fonction $v_2 \in {}_+\mathcal{H}_2^*(\Omega)$. Alors pour tout ω ouvert $\mathcal{H}_1$-régulier et tout $x \in \omega$, on a :*

$$v_1(x) = \int v_1\, d\mu_x^\omega + V_1^\omega \frac{v_2}{u_2}(x)\,(*) \qquad (\oplus)$$

Démonstration. – Soit ω un ouvert $\mathcal{H}_1$-régulier. On montrera d'abord que le couple (w_1, w_2), où

$$w_1(x) = \begin{cases} \inf\left(\int v_1\, d\mu_x^\omega + V_1^\omega \dfrac{v_2}{u_2}(x), v_1(x)\right), & x \in \omega \\ v_1(x), & x \in \complement\omega \end{cases} \quad \text{et } w_2 = v_2 \text{ dans } \Omega,$$

est $\mathcal{H}$-hyperharmonique $\geqslant (0,0)$ dans Ω.

On sait qu'il existe une suite croissante (p_1^n, p_2^n) de $\mathcal{H}$-potentiels finis continus dans Ω telle que $\lim\limits_n p_j^n(x) = v_j(x), j = 1, 2$ (théorème 7.8.). En remplaçant dans le second membre de l'égalité $(\oplus)$ v_1, v_2 par p_1^n, p_2^n respectivement et en notant par r_1^n la nouvelle expression, on aura $r_1^n = h_1^n + q_1^n$ où h_1^n est une fonction $\mathcal{H}_1$-harmonique $\geqslant 0$ et q_1^n est un $\mathcal{H}_1$-potentiel fini continu (dans ω). Comme $\Gamma_1 v_1 \geqslant v_2$ et $\Gamma_1 r_1^n = p_2^n$, il s'ensuit que $\Gamma_1(v_1 - r_1^n) \geqslant v_2 - p_2^n \geqslant 0$ d'où $v_1 - r_1^n \in \mathcal{H}_1^*(\omega)$ (11.3.).

D'autre part, puisque

$$(v_1 - r_1^n) + q_1^n = v_1 - h_1^n \geqslant 0,$$

on a $v_1 \geqslant r_1^n$, $\forall\, n \in \mathrm{N}$, car q_1^n est un $\mathcal{H}_1$-potentiel ; cette inégalité étant conservée à la limite lorsque $n \to \infty$, on a

$$w_1(x) = \int v_1\, d\mu_x^\omega + V_1^\omega \frac{v_2}{u_2}(x), \qquad \forall x \in \omega.$$

(*) En fait, il s'agit des restrictions à ω de u_2, v_2.

On remarque que $(w_1, w_2)_{|\omega} \in {}_+\mathcal{H}^*(\omega)$; ensuite, comme

$$\lim_{\omega \ni x \to z} \inf w_1(x) \geqslant v_1(z), \qquad \forall z \in \partial\omega,$$

on a, grâce à la proposition 1.21., $(w_1, w_2) \in {}_+\mathcal{H}^*(\Omega)$. Par conséquent, $w_1 = v_1$ dans Ω. D'où le résultat. (On remarque que la conclusion du lemme précédent ne dépend pas du choix du couple (u_1, u_2).)

THEOREME 11.9. – *Soit v_1 comme dans le lemme 11.8. Si v_1 est $\mathcal{H}_1$-surharmonique et v_2 finie continue dans Ω, alors on aura :*

$$\Gamma_1 v_1 = v_2 \quad \textit{dans} \quad \Omega,$$

c'est-à-dire v_1 est une fonction hyperharmonique d'ordre 2.

Démonstration. – Soit un point $x \in \Omega$ et ω un voisinage $\mathcal{H}_1$-régulier de x ; comme $\int v_1 \, d\mu_x^\omega \in \mathcal{H}_1(\omega)$, alors grâce au lemme 11.8. on a : $\Gamma_1 v_1(x) = v_2(x)$.

(Grâce à l'égalité ($\oplus$) du lemme 11.8., on voit aussi que v_1 est finie continue dans Ω).

THEOREME 11.10. – *Soit v_1 une fonction finie continue $\geqslant 0$ dans Ω majorée par un $\mathcal{H}_1$-potentiel p_1 et v_2 une fonction finie $\geqslant 0$ dans Ω. Si $\Gamma_1 v_1 = v_2$ dans Ω, alors v_1 est la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v_2.*

Démonstration. – Comme $\Gamma_1 v_1 \geqslant \Gamma_1' v_1$, on a, (théorème 11.3.), $\Gamma_1 v_1 = \Gamma_1' v_1 = v_2$ dans Ω (d'où l'existence de la limite ; voir la définition des opérateurs Γ_1, Γ_1'). Considérons $w_1 \in E_{v_2}$. Grâce au théorème 11.3., en tout point $x \in \Omega$ où $w_1(x)$ est finie on aura

$$\Gamma_1(w_1 - v_1) = \Gamma_1 w_1 - \Gamma_1 v_1 \geqslant v_2 - v_2 = 0.$$

Alors, grâce à 11.5.(1), $w_1 - v_1 \in \mathcal{H}_1^*(\Omega)$. D'autre part, à cause de l'hypothèse, $w_1 - v_1 + p_1 \geqslant 0$. Par conséquent, (vu la définition d'un $\mathcal{H}_1$-potentiel), $w_1 - v_1 \geqslant 0$ ou $v_1 \leqslant w_1$ (et cela est vrai pour tout $w_1 \in E_{v_2}$). Enfin, la définition 11.7. nous permet de conclure.

PARTIE XII

APPLICATIONS DE LA THEORIE

Pour chaque $j = 1, 2$, L_j désignera un opérateur différentiel linéaire du second ordre elliptique(*) ou parabolique(**) (même son adjoint sous des conditions de régularité convenables) défini dans $\Omega = R^m$, $m \geqslant 2$. Supposons que les coefficients des L_1, L_2 sont respectivement de classe $C^{2,\lambda}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $C^{1,\lambda}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ avec aussi $c_j \leqslant 0$ $(j = 1,2)$.

DEFINITION 12.1. – *Le couple* $(h_1, h_2) \in \mathcal{E}(U)$, $U \in \mathcal{U}$, *est dit régulier (dans U) si* h_j *est régulière par rapport à* L_j $(j = 1,2)$ *c'est-à-dire suffisamment continûment dérivable permettant d'avoir*

$$L_j h_j \in C(U).$$

On note par $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des couples réguliers (h_1, h_2) qui sont solutions (classiques) de

$$L_1 h_1 = -h_2 \quad , \quad L_2 h_2 = 0 \quad \text{dans} \quad U \qquad (1)$$

[Les conditions de régularité imposées aux coefficients nous permettent en fait de considérer aussi l'équation $(L_2 L_1) h_1 = 0$.]

THEOREME 12.2. – $(\Omega, \mathcal{H})$ *est un espace biharmonique.*

Démonstration. – Procédons par étapes :

(*) $A_m := \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x) \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x) \dfrac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$ avec $a_{ij} = a_{ji}$ et $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j > 0$ dans Ω pour tout vecteur non nul $(\xi_1, \ldots, \xi_m) \in R^m$ et tout $x = (x_1, \ldots x_m) \in R^m$.

(**) $B_m := A_{m-1} - \dfrac{\partial}{\partial x_m}$, avec $a_{ij} = a_{ji}$ et $\sum_{i,j=1}^{m-1} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geqslant \eta > 0$ pour tout vecteur $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}) \in R^{m-1}$, $\|\xi\| = 1$, $\forall x \in \Omega$.

1) Axiome I. – $\mathcal{H} : U \to \mathcal{H}(U)$, constitue un faisceau de couples compatibles ; de plus, la linéarité des opérateurs L_1, L_2 nous assure que $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $C(U) \times C(U)$.

2) Axiome II. – On peut trouver une base d'ouverts $\mathcal{H}$-réguliers formée, par exemple, d'ensembles ω "très réguliers" ([5], p. 292)(*). Soit alors un tel ω. Grâce à ([9], p. 71, 72, 74, 87), on peut résoudre le problème de Riquier pour (1) avec $(f_1, f_2) \in C(\partial\omega) \times C(\partial\omega)$.

En effet,
$$L_2 h_2 = 0 \quad \text{dans } \omega ,$$
$$\lim_{\omega \ni x \to y} h_2(x) = f_2(y) \;, \forall y \in \partial\omega ,$$
nous donne
$$h_2(x) = H^{\omega}_{f_2}(x) = \int f_2 \, d\lambda^{\omega}_x \;, \quad \forall x \in \omega ;$$
et
$$L_1 h_1 = -h_2 = -H^{\omega}_{f_2} \quad \text{dans } \omega,$$
$$\lim_{\omega \ni x \to y} h_1(x) = f_1(y) \;, \quad \forall y \in \partial\omega ,$$
donne
$$h_1(x) = H^{\omega}_{f_1}(x) + G^{\omega}_1 H^{\omega}_{f_2}(x) = \int f_1 \, d\mu^{\omega}_x + \int f_2 \, d\nu^{\omega}_x ,$$
où G^{ω}_1 est l'opérateur de Green [c'est l'opérateur linéaire positif qui à tout $f \in C(\bar{\omega})$ fait correspondre la solution $u = G^{\omega}_1 f \in C(\bar{\omega})$ de $L_1 u = -f$ dans ω, $u = 0$ sur $\partial\omega$ ([5], p. 294)].

On a donc, $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\omega)$. De plus, si $f_2 \geqslant 0$ on a $h_2 \geqslant 0$ et si $(f_1, f_2) \geqslant (0, 0)$ alors $h_1 \geqslant 0$.

3) Axiome III. – (a). – En effet, comme $c_j \leqslant 0$, on a toujours la séparation forte au cas d'un opérateur parabolique ([10], p. 115) et aussi pour le cas elliptique ([12], p. 562, 437 ; [1], p. 102, 141) car les ouverts $\mathcal{H}$-réguliers sont L_j-réguliers ($j = 1, 2$) et

(*) c'est-à-dire, $\omega \in \mathcal{U}_c$ et tel que en tout point $x_1 \in \partial\omega$ il existe une sphère centrée en un point x_0, ne rencontrant $\bar{\omega}$ qu'au point x_1, et
$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x_1)(x_1^i - x_0^i)(x_1^j - x_0^j) > 0.$$

{fonctions L_j-hyperharmoniques dans Ω} $\subset \mathcal{H}_j^*(\Omega)$ $(j = 1, 2)$.

b) En remarquant que, pour tout ouvert relativement compact, il existe ω très régulier le contenant, on voit aussi que cette partie est vérifiée ([10]).

4) Axiome IV. – (a), (b). Comme L_j est un opérateur elliptique ou parabolique l'axiome de convergence dans les espaces harmoniques correspondants est vérifié ([12], th. 34.1. et [10], p. 114).

THEOREME 12.3. – *Pour tout couple* (v_1, v_2) *régulier dans* $U \in \mathcal{U}$, *on a (dans* U) :

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} L_1 v_1 \leqslant -v_2 \\ L_2 v_2 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{(ii)} \quad (v_1, v_2) \text{ est } \mathcal{H}\text{-surharmonique.}$$

Démonstration. – (i) $\Rightarrow$ (ii). En effet, pour tout ω ouvert très régulier, on a $v_1 = H_{v_1}^\omega + G_1^\omega(-L_1 v_1)$ et, grâce à $L_1 v_1 \leqslant -v_2$,

$$v_1 \geqslant H_{v_1}^\omega + G_1^\omega H_{v_2}^\omega \quad \text{car} \quad L_2 v_2 \leqslant 0 \Leftrightarrow v_2 \geqslant H_{v_2}^\omega$$

(voir, par exemple, prop. 34.1. [12]) ; comme les ensembles très réguliers forment une base $\mathcal{B}$, alors le couple (v_1, v_2) est $\mathcal{B}$-$\mathcal{H}$-surharmonique, d'où, (1.17), aussi $\mathcal{H}$-surharmonique.

(ii) $\Rightarrow$ (i). – Soit un point $x_0 \in U$ où $L_1 v_1(x_0) > -v_2(x_0)$ et soit $\epsilon > 0$ assez petit tel que $L_1 v_1(x_0) > -(v_2(x_0) - \epsilon)$. Grâce à la continuité, on a, dans un voisinage $\alpha = \alpha_{x_0} \subset \bar{\alpha}_{x_0} \subset U$, $L_1 v_1 > -(v_2 - \epsilon)$. D'autre part, $H_{v_2}^\omega(x_0) \to v_2(x_0)$ quand ω ouvert $\mathcal{H}$-régulier $\searrow x_0$, c'est-à-dire, étant donné $\epsilon > 0$ il existe un voisinage $\mathcal{H}$-régulier $\beta = \beta_{x_0} \subset \bar{\beta}_{x_0} \subset U$ tel que

$v_2(x_0) - \epsilon < H_{v_2}^\beta(x_0) < v_2(x_0) + \epsilon$;

donc, grâce à la continuité, il existe un voisinage $\mathcal{H}$-régulier (de x_0)

$$\omega' \subset \bar{\omega}' \subset \alpha \cap \beta \quad \text{où} \quad v_2 - \epsilon < H_{v_2}^\beta < v_2 + \epsilon.$$

Mais $H_{v_2}^\beta \leqslant H_{v_2}^{\omega'}$ dans ω' ([2c], p. 46) ; par conséquent, dans ω',

$v_2 - \epsilon < H^{\beta}_{v_2} \leqslant H^{\omega'}_{v_2}$. On a alors (dans ω') :

$$v_1 = H^{\omega'}_{v_1} + G^{\omega'}_1 (- L_1 v_1) < H^{\omega'}_{v_1} + G^{\omega'}_1 (v_2 - \epsilon) < H^{\omega'}_{v_1} + G^{\omega'}_1 H^{\omega'}_{v_2}.$$

Contradiction ! On aboutit aussi à une contradiction si, en un point $x_0 \in U$, on a $L_2 v_2 (x_0) > 0$.

Maintenant, on va donner des exemples d'espaces biharmoniques forts.

Pour cela, on étudie la validité de l'axiome III′ (a) [la partie (b) étant la même que dans l'axiome III].

1) Pour chaque $j = 1, 2$, L_j sera soit le laplacien Δ_m soit l'opérateur de la chaleur, c'est-à-dire $\Delta_{m-1} - \dfrac{\partial}{\partial x_m}$. [Compte tenu des 11.7., 11.10., on verra que la validité (globale) de l'axiome III′ (a) dépend de la dimension de l'espace].

i) L_j ($j = 1, 2$) est l'opérateur de la chaleur dans R^m ($m \geqslant 2$). Le couple $(u_1, u_2) = (e^{x_m}, e^{x_m})$ est strictement $\mathcal{H}$-surharmonique, continu (positif) car

$$L_1 u_1 = - u_2 < 0 \quad , \quad L_2 u_2 < 0.$$

Grâce à 5.17., l'axiome III′ (a) est vérifié.

ii) L_j ($j = 1, 2$) est le laplacien. Soit G le noyau newtonien dans R^m ($m > 2$) et $\varphi \in C^{\infty}_{+}(R^m)$ à support compact. La fonction $G\varphi$ est un potentiel "assez régulier" ($\in C^{\infty}_{+}$) et borné ([3], p. 31 ; [11], p. 184).

Pour que l'intégrale $G(G\varphi)$ soit convergente, on doit avoir $m - 2 + m - 2 > m$, c'est-à-dire $m > 4$.

Alors le couple $(p_1, p_2) = (Gp_2, G\varphi)$ est un $\mathcal{H}$-potentiel et l'axiome III′ (a) est vérifié.

iii) L_1 est le laplacien, L_2 l'opérateur de la chaleur (ou vice-versa).

Soit G_j les noyaux dans R^m ($m > 2$) relatifs à L_j ($j = 1, 2$) et $\varphi \in C^{\infty}_{+}(R^m)$ à support compact.

La fonction $G_j\varphi$ est un potentiel $\in C^{\infty}_{+}$ et borné ([3], p. 31).

On va démontrer que $G_1 * G_2 * \varphi$ est finie continue seulement si $m > 3$. Pour cela, il suffit de montrer que $N = G_1 * G_2 \in L^1_{\mathrm{loc}}$. [On voit qu'en prenant N_i finies continues convergeant vers N dans L^1_{loc}, on a $N_i * \varphi \to N * \varphi$ localement uniformément].

Maintenant, on note $\chi = \chi_{\{\|x\| \leqslant 1\}}$ et on considère

$$G_1 * G_2 = G_1 \chi * G_2 \chi + G_1 \chi * G_2 (1 - \chi) + G_1 (1 - \chi) * G_2 \chi + \\ + G_1 (1 - \chi) * G_2 (1 - \chi).$$

Ensuite, on examine le second membre :

Le premier terme $\in L^1$. Le second et le troisième sont finis continus. [En fait, on remarque que, si $f \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}$ et $g \in L^1$ avec supp g compact, alors $f * g$ est finie continue]. Par des calculs directs, on peut voir que le quatrième terme est localement borné (continu) pour $m > 3$; (pour $m = 3$, il est égal à $+ \infty$)(*). D'où le résultat.

On trouve donc pour $x \in R^m$ $(m > 3)$ un $\mathcal{H}$-potentiel (p_1, p_2) tel que $p_j(x) > 0$, $j = 1, 2$.

Passons à présent au cas des opérateurs elliptiques ou paraboliques généraux $(m \geqslant 2)$.

2) Supposons, d'abord, que, pour l'opérateur L_1, $c_1 \leqslant \alpha_1 < 0$ dans Ω, où α_1 est une constante, et pour L_2, s'il est elliptique, qu'il existe $x \in \Omega$ où $c_2(x) < 0$ ([12], p. 562) ; [s'il est parabolique, pour $u_2 = e^{x_m}$ on a $L_2 u_2 = (c_2 - 1) e^{x_m} < 0$]. Alors, on peut toujours trouver u_2, fonction strictement L_2-surharmonique, positive, continue et bornée ([2c], [12]).

Considérons maintenant une constante $v_1 > 0$.

On aura : $$- L_1 v_1 = - c_1 v_1 \geqslant - \alpha_1 v_1 = \beta_1 > 0$$

et, pour $k > 0$ convenable,

$$- L_1 v_1 > v_2 \quad \text{avec} \quad v_2 = k u_2 < \beta_1 .$$

Comme

$$v_1(x) > \int v_1 \, d\mu_x^{\omega} + \int v_2 \, d\nu_x^{\omega} \quad , \quad v_2(x) > \int v_2 \, d\lambda_x^{\omega} ,$$

(*)P. Sjögren m'a aidé à passer du cas $m > 5$ au cas $m > 3$.

alors l'axiome III′ (a) est vérifié grâce à 5.17.

3) Examinons le cas où $c_j \leqslant 0 \quad (j = 1, 2)$.

Dans un ouvert relativement compact U ($\neq \phi$), on voit que les fonctions de la forme $(u_1, u_2) = (-e^{\alpha x_1}, -e^{\beta x_1})$, pour $\alpha, \beta > 0$ assez grands, satisfont à : $-L_1 u_1 > u_2 \quad , \quad -L_2 u_2 > 0$, car $-e^{\beta x_1}$ est bornée sur $\overline{U}$.

$$[-m_1 < -e^{\alpha x_1} < -M_1 \quad , \quad -m_2 < -e^{\beta x_1} < -M_2 \ ,$$

sur $\overline{U}$, où $m_j, M_j > 0, j = 1, 2$].

Par conséquent, (u_1, u_2) est un couple $\mathcal{H}$-surharmonique dans U. Comme, de plus, la constante 1 est L_j-surharmonique et

$$v_1 = m_1 - e^{\alpha x_1} > 0, \quad v_2' = m_2 - e^{\beta x_1} > 0,$$

alors :
$$-L_1 v_1 > v_2 \quad , \quad -L_2 v_2 > 0,$$

où $v_2 = kv_2'$, $k > 0$ convenable,et $v_j > 0 \quad (j = 1, 2)$.

[En effet, $L_1 u_1(x) = -\alpha e^{\alpha x_1} (\alpha a_{11}(x) + b_1(x))$ et, pour $\xi \neq 0$, on a

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j > 0, \qquad \text{d'où} \qquad a_{11}(x) > 0\, , \quad \forall x \in \Omega.$$

Comme a_{11}, $b_1 \in C^{2,\lambda}_{loc}$, en prenant α assez grand, on a :

$$\alpha a_{11} + b_1 > \epsilon > 0$$

dans U. Par conséquent, $-L_1 u_1 > \delta > 0$ et, puisque $u_2 < 0$, $-L_1 u_1 > u_2$ dans U.

De même, avec β assez grand, on a :

$$-L_2 v_2' \geqslant -L_2 u_2 > 0 \quad \text{et} \quad -L_2 (kv_2') = -L_2 v_2 > 0.$$

Comme $-m_2 < u_2 < -M_2$, alors $0 < m_2 + u_2 = v_2' < m_2 - M_2$. v_2' étant bornée > 0, pour $k > 0$ convenable on a $v_2 = kv_2' \leqslant \delta$; d'où $-L_1 v_1 > v_2$].

Alors, grâce à 5.17., on voit que l'axiome III′ (a) est vérifié dans U.

4) Cas général : c_j est de signe quelconque $(j = 1, 2)$.

On peut se ramener au cas où dans un voisinage de $x \in \Omega$ on a $c_j \leqslant \theta < 0$ ([5], [12]); par conséquent, l'axiome III′ (a) est satisfait localement.

Errata

Ann. Inst. Fourier, 25, 1 (1975), 35-97.

p. 41, ligne 12 ; lire : . . . . et on établit des inégalités du type

p. 82, ligne 13 ; lire : aussi au lieu de : d'où

p. 82, ligne 14 ; lire : (1) . . . . ; ou $q_1(x) < p_1(x)$ et $q_1(y) < p_1(y)$

p. 83, ligne 12 ; lire : (3) . . . . ; ou $w_2(x) < p_2(x)$ et $w_2(z) < p_2(z)$

p. 91, ligne 12 ; lire : $x \in \omega$ au lieu de : $x \in \mathcal{U}_c$

p. 97 , ajouter :

[16] E.P. Smyrnelis, Axiomatique d'un problème de Dirichlet dans les espaces biharmoniques, C.R. Acad. Sc. Paris, 274, série A, 1972, p. 1897-1900.
(p. 1898, lignes 11, 23 ; supprimer respectivement : $\mathcal{H}_2$, $(\Omega, \mathcal{H}_2)$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. ANANDAM, Espaces harmoniques sans potentiel positif, *Ann. Inst. Fourier*, 22, 4 (1972), 97-160.

[2] H. BAUER, a) Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, *Math. Annalen*, 146 (1962), 1-59.

b) Weiterführung einer axiomatischen Potentialtheorie ohne Kern (Existenz von Potentialen), *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 1 (1963), 197-229.

c) Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, *Lecture notes* n° 22, Springer-Verlag, 1966.

[3] H. BAUER, Harmonic spaces and associated Markov processes, dans "Potential theory", p. 23-67, C.I.M.E., Ediz. Cremonese, Roma, (1970).

[4] N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU , A. CORNEA, Axiomatic theory of harmonic functions. Balayage, *Ann. Inst. Fourier*, 15, 2 (1965), 37-70.

[5] J.M. BONY, Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés, *Ann. Inst. Fourier*, 19,1 (1969), 277-304.

[6] M. BRELOT, (a) Une axiomatique générale du problème de Dirichlet dans les espaces localement compacts. *Séminaire de théorie du potentiel*, 1, 1957, n° 6. Paris. Institut Henri Poincaré.

b) Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact. *Séminaire de théorie du potentiel*, 2, 1958, n° 1. Paris, Institut Henri Poincaré.

c) Lectures on potential theory, Tata Institute, Bombay, 1960.

[7] M. BRELOT, Axiomatique des fonctions harmoniques, Les Presses de L'Université de Montréal, 1966.

[8] C. CONSTANTINESCU , A. CORNEA, Potential theory on harmonic spaces, Springer-Verlag, 1972.

[9] A. FRIEDMAN, Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, Inc., 1964.

[10] S. GUBER, On the potential theory of linear homogeneous parabolic partial differential equations of second order, Symposium on probability methods in analysis, *Lecture notes* n° 31, Springer-Verlag, (1967).

[11] L.L. HELMS, Introduction to potential theory, Wiley-Interscience, 1969.

[12] R.M. HERVÉ, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier,* 12 (1962), 415-571.

[13] G. MOKOBODZKI et D. SIBONY, Cônes de fonctions et théorie du potentiel, I. Les noyaux associés à un cône de fonctions. *Séminaire de théorie du potentiel,* 11, 1966-67, n° 8. Paris, Institut Henri Poincaré.

[14] M. NICOLESCO, Les fonctions polyharmoniques, Paris, Hermann, 1936.

[15] E.P. SMYRNELIS, Mesures normales et fonctions harmoniques, *Bull. Sci. Math.,* 2e série, 95 (1971), 197-207.

Manuscrit reçu le 8 juillet 1974
Proposé par M. Brelot.

Emmanuel P. SMYRNÉLIS,
Université Paris VI – Tour 46
4, Place Jussieu
75230 Paris – Cedex 05.