

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

SIGERU MIZOHATA  
**Systemes kowalewskiens**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 7 (1957), p. 283-292

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1957\\_\\_7\\_\\_283\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1957__7__283_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SYSTEMES KOWALEWSKIENS

par **Sigeru MIZOHATA.**

---

Les équations hyperboliques classiques jouissent d'une propriété caractéristique : les perturbations se propagent avec une vitesse finie. Or, dans le mémoire [2], M. SCHWARTZ a démontré que, dans le cas où les coefficients ne dépendent que de  $t$  et si le système kowalewskien est tel que le problème de Cauchy homogène soit uniformément bien posé dans  $(\overline{a, b})$  pour l'espace  $(\mathcal{G}')$ , le système jouit de cette propriété (p. 36, Théorème VI). Nous cherchons diverses extensions de ce théorème aux cas où les coefficients dépendent de  $x$  et de  $t$ . Plus précisément, nous nous posons le problème : étant donné un système kowalewskien, dans quelles conditions peut-on dire que le problème de Cauchy est bien posé dans  $(\mathcal{G}')$ ? Nous sommes obligés de nous borner aux cas où des coefficients sont analytiques en  $x$ .

1. Considérons un système matriciel d'ordre un :

$$(1, 1) \quad \frac{d}{dt} U = \sum_{k=1}^n A_k(x, t) \frac{\partial U}{\partial x_k} + B(x, t) U.$$

On suppose  $A_k$  et  $B$  analytiques en  $x$  et bornés, fonctions continues de  $t$  à valeurs dans  $\mathcal{F}(\mathcal{E}_x^o)$  :  $\mathcal{E}_x^o$  est l'espace des fonctions continues muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.  $\mathcal{E}_x^o$  est l'espace des mesures à support compact.  $\mathcal{F}(\mathcal{E}_x^o)$  est muni de la topologie image de Fourier de la topologie faible de  $\mathcal{E}_x^o$ .

Par transformation de Fourier (en  $x$ ), on obtient le système équivalent

$$(1, 2) \quad \frac{d}{dt} u = \sum_{k=1}^n \mu_k * 2i\pi y_k u + v * u.$$

PROPOSITION 1, 1. — *Le système (1, 1) admet au plus une solution tempérée pour des conditions initiales données.*

Une transformation de Fourier montre que cette proposition est un cas particulier de la

PROPOSITION 1, 2. — *Le système (1, 2) admet au plus une solution distribution à croissance exponentielle pour des conditions initiales données.*

*Démonstration.* — Supposons  $\mathfrak{U}(t_0) = 0$ , montrons  $\mathfrak{U}(t) \equiv 0$ . Soit l'intervalle  $t_1 \leq t_0 \leq t_2$ . Pour  $t$  dans cet intervalle, les mesures  $\mu_k, \nu$ , ont des supports dans  $|y| \leq \rho$ , et une masse  $\leq M$ . Supposons démontré que  $(\mathfrak{U} * \alpha)$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{D}$  de support dans la boule  $|y| \leq 1$ ,

$$(1, 3) \quad |(\mathfrak{U} * \alpha)(t, y)| \leq \frac{|t - t_0|^m}{m!} m_L(\alpha) \Lambda(|y|)$$

où  $\Lambda(r)$  est une fonction croissante, et  $m_L(\alpha)$  la borne supérieure des modules des dérivées d'ordre  $\leq L$  de  $\alpha$ .

Majorons le produit de convolution avec  $\alpha$  du second membre de (1, 2).

$$(1, 4) \quad |(\nu * \mathfrak{U} * \alpha)(t, y)| \leq M \sup_{|y-z| \leq \rho} |(\mathfrak{U} * \alpha)(t, z)| \\ \leq M \frac{|t - t_0|^m}{m!} m_L(\alpha) \Lambda(|y| + \rho).$$

Le produit  $\mu_k * 2i\pi y_k \mathfrak{U} * \alpha$  s'écrit

$$(1, 5) \quad \mu_k * 2i\pi y_k (\mathfrak{U} * \alpha) - \mu_k * \mathfrak{U} * 2i\pi y_k \alpha.$$

Le 1<sup>er</sup> terme de (1, 5) se majore par

$$(1, 6) \quad 2\pi M \sup_{|y-z| \leq \rho} |z_k (\mathfrak{U} * \alpha)(t, z)| \\ \leq 2\pi M \frac{|t - t_0|^m}{m!} m_L(\alpha) (|y| + \rho) \Lambda(|y| + \rho).$$

Le 2<sup>e</sup> terme de (1, 5) se majore par

$$(1, 7) \quad 2\pi M \sup_{|y-z| \leq \rho} |(\mathfrak{U} * y_k \alpha)(t, z)| \\ \leq 2\pi M \frac{|t - t_0|^m}{m!} m_L(y_k \alpha) \Lambda(|y| + \rho).$$

La formule de Leibniz pour les dérivées d'ordre  $\leq L$  de  $y_k \alpha$  donne

$$(1, 8) \quad m_L(y_k \alpha) \leq (|y| + L) m_L(\alpha).$$

D'où la majoration du 2<sup>e</sup> terme de (1, 5) :

$$(1, 9) \quad 2\pi M \frac{|t-t_0|^m}{m!} m_L(\alpha) (|y| + L) \Lambda(|y| + \rho).$$

On en déduit la majoration du 2<sup>e</sup> membre de (1, 2) :

$$(1, 10) \quad h \frac{|t-t_0|^m}{m!} m_L(\alpha) (|y| + \rho + L) \Lambda(|y| + \rho),$$

$$h = M \left( \frac{1}{\rho + L} + 2\pi n + 2\pi n \right).$$

Alors, comme  $\mathcal{U}(t_0) = 0$ , donc  $(\mathcal{U} * \alpha)(t_0, y) \equiv 0$ , et la majoration du 2<sup>e</sup> membre de (1, 2) donne une nouvelle majoration de  $(\mathcal{U} * \alpha)$  :

$$(1, 11) \quad \begin{cases} |(\mathcal{U} * \alpha)(t, y)| \leq \frac{|t-t_0|^{m+1}}{(m+1)!} h m_L(\alpha) (|y| + \lambda) \Lambda(|y| + \lambda), \\ \lambda = L + \rho, \quad t_1 \leq t \leq t_2. \end{cases}$$

Revenons maintenant à l'hypothèse initiale :  $\mathcal{U}$  est une distribution à croissance au plus exponentielle.

Elle s'écrit donc, pour un  $L$  convenable :

$$(1, 12) \quad \mathcal{U} = \sum_{|i| \leq L} D^i \mathcal{U}_i(t, y)$$

$\mathcal{U}_i(t, y)$  continue en  $t$  et  $y$ , admettant la majoration

$$(1, 13) \quad |\mathcal{U}_i(t, y)| \leq A e^{C|y|}, \quad \text{pour } t_1 \leq t \leq t_2.$$

La dérivée  $D'$  (par rapport aux variables  $y$ ) est à prendre au sens des distributions.

Alors si  $\alpha \in \mathcal{D}$  a son support dans  $|y| \leq 1$  :

$$(1, 14) \quad |(\mathcal{U} * \alpha)(t, y)| = \left| \sum_{|i| \leq L} D^i \alpha * \mathcal{U}_i \right|$$

$$\leq c_L m_L(\alpha) \sup_{|y-z| \leq 1} |\mathcal{U}_i(t, z)| \leq c_L A m_L(\alpha) e^{C(|y|+1)} \leq K m_L(\alpha) e^{C|y|},$$

où  $c_L$  est le nombre des dérivées d'ordre  $\leq L$ .

Donc  $(\mathcal{U} * \alpha)$  admet une majoration du type (1, 3) avec  $m = 0$ , et

$$(1, 15) \quad \Lambda(r) = Ke^{Cr}.$$

On en déduit, de proche en proche, des majorations pour les diverses valeurs de  $m$  :

$$(1, 16) \quad \begin{aligned} |(\mathcal{U} * \alpha)(t, y)| &\leq K \frac{|t - t_0|^m}{m!} h^m m_L(\alpha) \\ &\quad \times (|y| + \lambda)(|y| + 2\lambda) \dots (|y| + m\lambda) e^{C(|y| + m\lambda)} \\ &\leq K m_L(\alpha) \frac{h^m |t - t_0|^m}{m!} (|y| + m\lambda)^m e^{C(|y| + m\lambda)} \end{aligned}$$

pour  $t_1 \leq t \leq t_2$  :

La formule de Stirling donne la majoration suivante :

$$(1, 17) \quad \leq \frac{K m_L(\alpha)}{\sqrt{2\pi m}} \left[ \frac{h |t - t_0|}{m} e^{(|y| + m\lambda)} \right]^m e^{C(|y| + m\lambda)}.$$

Faisons tendre  $m$  vers  $+\infty$ . Pour  $y$  fixé quelconque, lorsque  $m$  est assez grand,  $|y| \leq m\lambda$  donc  $|y| + m\lambda \leq 2m\lambda$ , d'où

$$(1, 18) \quad \leq \frac{K m_L(\alpha)}{\sqrt{2\pi m}} [2h |t - t_0| e^{\lambda} e^{2C\lambda}]^m.$$

Cette quantité tend vers 0 pour  $m \rightarrow \infty$  si

$$(1, 19) \quad |t - t_0| \leq \varepsilon = \frac{1}{2he\lambda e^{2C}}.$$

On en déduit que  $(\mathcal{U} * \alpha)(t, y) \equiv 0$  pour  $|t - t_0| \leq \varepsilon$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ .

La quantité  $\varepsilon$  est indépendante de  $t_0$ , donc on peut refaire le raisonnement à partir de  $t_0 - \varepsilon$  et  $t_0 + \varepsilon$ , on voit ainsi que  $(\mathcal{U} * \alpha)(t, y) \equiv 0$  pour  $t_1 \leq t \leq t_2$ . C'est vrai quel que soit  $(t_1, t_2)$ , donc  $\mathcal{U} * \alpha \equiv 0$  pour tout  $t$ , et toute  $\alpha \in \mathcal{D}$ , donc  $\mathcal{U} = 0$   
c.q.f.d.

**PROPOSITION 1, 3.** — Si  $U$  est une solution tempérée de (1, 1), et si  $U(t_0)$  est dans  $\mathcal{E}'$ ,  $U$  est dans  $\mathcal{E}'$  pour tout  $t$ , et fonction différentiable de  $t$  à valeurs dans  $\mathcal{E}'$ .

**COROLLAIRE.** — Si le problème de Cauchy est bien posé dans  $\mathcal{S}'$ , il est bien posé dans  $\mathcal{E}'$ .

*Démonstration.* — Soit  $U(t_0) = U_0 \in \mathcal{E}'$ .  $\mathcal{U}_0$  est analytique entière de type exponentiel, ayant une majoration

$$(1, 20) \quad |\mathcal{U}_0(y)| \leq Ae^{C|y|}.$$

Résolvons (1, 2) par approximations successives. Posons  $\mathcal{V}_0(t, y) = \mathcal{U}_0(y)$ , et

$$(1, 21) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \mathcal{V}_j(t, y) = \sum_{k=1}^n \mu_k * 2i\pi y_k \mathcal{V}_{j-1} + \nu * \mathcal{V}_{j-1} \\ \mathcal{V}_j(t_0, y) = 0 \quad \text{pour } j \geq 1, \end{cases}$$

ce qui se résout par

$$(1, 22) \quad \mathcal{V}_j(t, y) = \int_{t_0}^t (\dots) d\tau.$$

Il est facile de majorer  $\mathcal{V}_j(t, y)$  pour  $t_1 \leq t \leq t_2$ ,  $y$  complexe.

La majoration de  $\mathcal{V}_j$  à partir de  $\mathcal{V}_{j-1}$  est en effet analogue à celle qui a été faite dans la proposition 2, mais plus simple, parce qu'ici il n'y a pas à régulariser.

Supposons démontrée la majoration

$$(1, 23) \quad |\mathcal{V}_{j-1}(t, y)| \leq \frac{|t-t_0|^{j-1}}{(j-1)!} \Lambda(|y|).$$

On a alors les majorations

$$(1, 24) \quad |(\nu * \mathcal{V}_{j-1})(t, y)| \leq M \sup_{|y-z| \leq \rho} |\mathcal{V}_{j-1}(t, z)| \\ \leq M \frac{|t-t_0|^{j-1}}{(j-1)!} \Lambda(|y| + \rho),$$

$$(1, 25) \quad |(\mu_k * 2i\pi y_k \mathcal{V}_{j-1})(t, y)| \leq 2\pi M \sup_{|y-z| \leq \rho} |z_k \mathcal{V}_{j-1}(t, z)| \\ \leq 2\pi M \frac{|t-t_0|^{j-1}}{(j-1)!} (|y| + \rho) \Lambda(|y| + \rho),$$

d'où la majoration du 2<sup>e</sup> membre de (1, 21) :

$$(1, 26) \quad \frac{|t-t_0|^{j-1}}{(j-1)!} k(|y| + \rho) \Lambda(|y| + \rho), \quad t_1 \leq t \leq t_2, \\ k = M \left( \frac{1}{\rho} + 2\pi n \right).$$

D'où la majoration de  $\mathcal{V}_j$ ,  $j \geq 1$  :

$$(1, 27) \quad |\mathcal{V}_j(t, y)| \leq \frac{|t-t_0|^j}{j!} k(|y| + \rho) \Lambda(|y| + \rho).$$

Partant alors de la majoration (1, 20) pour  $j=0$ , on en déduit, de proche en proche, les majorations :

$$(1, 28) \quad |\mathcal{V}_j(t, y)| \leq A \frac{|t-t_0|^j}{j!} k^j (|y| + \rho) \dots (|y| + j\rho) e^{C(|y|+j\rho)}$$

$$\leq A \frac{|t-t_0|^j}{j!} k^j (|y| + j\rho)^j e^{C(|y|+j\rho)}$$

$$\underset{j \rightarrow \infty}{\leq} \frac{A}{\sqrt{2\pi j}} \left[ \frac{|t-t_0| k e}{j} (|y| + j\rho) \right]^j e^{C(|y|+j\rho)}.$$

Montrons que la série  $\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{V}_j(t, y)$  converge uniformément sur tout compact en  $y$ , et majorons sa somme  $\mathcal{V}(t, y)$ .

Il y a d'abord un nombre fini de termes pour lesquels  $j\rho \leq |y|$  (fini et borné pour  $y$  borné). La somme des modules de ces termes est majorée par

$$(1, 29) \quad \sum_{j=0}^{j \leq \frac{|y|}{\rho}} \frac{A |t-t_0|^j}{j!} k^j (2|y|)^j e^{2C|y|}$$

$$\leq A \exp [k|t-t_0|2|y| + 2C|y|].$$

Considérons maintenant tous les termes pour lesquels  $j\rho \geq |y|$ . Dans ces termes, on peut majorer dans (1, 28) avec

$$(|y| + j\rho) \leq 2j\rho.$$

D'où la majoration de la somme des modules de ces termes :

$$(1, 30) \quad \sum_{j \geq \frac{|y|}{\rho}} \frac{A}{\sqrt{2\pi}} [ |t-t_0| k e 2\rho e^{2C\rho} ]^j$$

quantité majorée par  $\sum_{j=1}^{\infty}$  donc par  $\frac{A}{\sqrt{2\pi}}$ , si  $|t-t_0| k e 2\rho e^{2C\rho} \leq \frac{1}{2}$  ou encore par

$$(1, 31) \quad \frac{A}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{si} \quad |t-t_0| \leq \eta = \frac{1}{4ek\rho e^{2C\rho}}.$$

On en déduit bien que la série  $\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{V}_j(t, y)$  converge uniformément pour  $|y|$  borné et  $|t-t_0| < \eta$ , et qu'elle y représente une fonction  $\mathcal{V}(t, y)$  holomorphe entière en  $y$ , de type exponentiel  $\leq 2k\eta + 2C$  (d'après (29)). Comme  $\eta$  est indépendant de  $t_0$ ,

on peut recommencer à partir de  $t_0 - \eta$  et  $t_0 + \eta$ , on en déduit que  $\mathcal{V}(t, y)$  existe pour tout  $t$ , et qu'elle est analytique entière de type exponentiel en  $y$ . On voit immédiatement que  $\mathcal{V}$  est solution de (1, 2), avec la condition initiale  $\mathcal{V}(t_0, y) = \mathcal{U}_0(y)$ .

Par ailleurs, on suppose l'existence d'une autre solution  $\mathcal{U}(t)$  tempérée en  $y$ , avec  $\mathcal{U}(t_0) = \mathcal{U}_0(y)$ . Les 2 solutions  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  sont des distributions à croissance exponentielle pour  $y$  réel, donc elles sont confondues d'après la proposition 1, 2, ayant la même valeur initiale  $\mathcal{U}(y)$  pour  $t = t_0$ . Donc  $\mathcal{U}(t)$  est une fonction  $\mathcal{U}(t, y) = \mathcal{V}(t, y)$  analytique entière de type exponentiel, et  $U(t)$  est dans  $\mathcal{E}'_x$  pour tout  $t$ , fonction différentiable de  $t$  à valeurs dans  $\mathcal{E}'_x$ . c.q.f.d.

2. Indiquons une autre extension étroitement liée au théorème de Cauchy-Kowalewsky.

Supposons pour (1, 1) que les coefficients  $A_k(x, t), B(x, t)$  soient analytiques en  $x$  et bornés, fonctions continues de  $t$  à valeurs dans  $\alpha(D_\epsilon)$ ;  $\alpha(D_\epsilon)$  est l'espace des fonctions analytiques  $a(z)$  bornées définies sur  $D_\epsilon : (z = x + ix'; x \in \mathbb{R}^n, |x'| < \epsilon)$ . On le munit de la norme  $\|a(z)\| = \sup_{z \in D_\epsilon} |a(z)|$ .

LEMME 2, 1. — Désignons par  $M$  un nombre tel que

$$\|A_k(z, t)\| \leq M, \quad \|B(z, t)\| \leq M, \quad \text{pour } t_1 \leq t \leq t_2.$$

Alors il existe des nombres  $\tau, \eta (< \epsilon)$  et  $\beta$  tels que, étant donnée une condition initiale quelconque pour  $t = t_0 : U_0(x) \in \alpha(D_\epsilon)$ , alors (1, 1) admet une et une seule solution  $U(x, t)$  définie dans  $|t - t_0| < \tau, t_0 \leq t \leq t_1$ , continûment différentiable en  $t$  à valeurs dans  $\alpha(D_\eta)$ , et on a

$$(2, 1) \quad |U(x, t)| \leq \beta \cdot \sup_{|\zeta - x| \leq \epsilon} |U_0(\zeta)|, \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad |t - t_0| < \tau, \quad t_0 \leq t \leq t_1;$$

$\tau, \eta$  et  $\beta$  sont indépendants de  $t_0$ .

Démonstration. — On résout (1, 1) par approximations successives :

Posons  $U(x, t) = U_0(x, t) + U_1(x, t) + \dots + U_i(x, t) + \dots$   
avec  $U_0(x, t) = U_0(x),$

$$(2, 2) \quad \frac{d}{dt} U_i(x, t) = \sum_k A_k(x, t) \frac{\partial}{\partial x_k} U_{i-1}(x, t) + B(x, t) U_{i-1}(x, t),$$



$U_i(x, t_0) \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Par la méthode de série majorante, on constate facilement (2, 1).

En effet,

$$A_k(z, t) \ll \left( m_{ij}^{(k)} \frac{1}{\varepsilon' - \rho} \right), \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{n}, \quad \sum_j m_{ij}^{(k)} \leq M,$$

$$\rho = z_1 + z_2 + \dots + z_n,$$

$$U_0(z) = (u_i(z)), \quad u_i(z) \ll L \frac{1}{\varepsilon' - \rho} \quad (i = 1, \dots, N),$$

d'où

$$U_1(z, t) \ll |t - t_0| ML \left[ \frac{n}{(\varepsilon' - \rho)^3} + \frac{1}{(\varepsilon' - \rho)^2} \right]$$

$$\ll |t - t_0| LM(n + \varepsilon) \frac{1}{(\varepsilon' - \rho)^3},$$

$$U_2(z, t) \ll \frac{|t - t_0|^2}{2!} LM^2(n + \varepsilon) \left[ \frac{3n}{(\varepsilon' - \rho)^5} + \frac{1}{(\varepsilon' - \rho)^4} \right]$$

$$\ll \frac{|t - t_0|^2}{2!} LM^2(n + \varepsilon)(3n + \varepsilon) \frac{1}{(\varepsilon' - \rho)^5},$$

de proche en proche, on aura

$$U_p(z, t) \ll \frac{|t - t_0|^p}{p!} LM^p(n + \varepsilon)(3n + \varepsilon) \dots (2p - 1 \cdot n + \varepsilon) \frac{1}{(\varepsilon' - \rho)^{2p+1}},$$

$$p = 1, 2, \dots$$

La série majorante est convergente si

$$\frac{|t - t_0|}{(\varepsilon' - \rho)^2} < \sigma \frac{p + 1}{(2p + 1)n + \varepsilon} \cdot \frac{1}{M} \quad (p = 0, 1, \dots),$$

où  $\sigma < 1$ , à fortiori si  $< \sigma \frac{1}{2nM}$ . Alors, la série  $\sum_{p=0}^{\infty} U_p(z, t)$  se

majora par  $L \sum_{p=0}^{\infty} \sigma^p = L \frac{1}{1 - \sigma}$ , ce qui achève la démonstration autour  $z = 0$ . Dans cette démarche, on voit facilement la démonstration de l'unicité. c.q.f.d.

Alors, pour (1, 1) on a

**PROPOSITION 2, 1.** — *Si le problème de Cauchy est uniformément bien posé dans  $\mathcal{G}'$ , il l'est dans  $\mathcal{E}'$ .*

*Démonstration.* — Supposons d'abord  $U(x, t_0) \in (\mathcal{D})_x, t_1 \leq t_0 \leq t_2$ .  
Notons

$$(2, 3) \quad U_{\delta}(x) = U(x, t_0) \underset{(x)}{*} (2\pi\delta)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta}\right),$$

alors, lorsque  $\delta \rightarrow 0$ ,  $U_\delta(x) \rightarrow U(x, t_0)$  pour la topologie ( $\mathcal{S}'$ ).

En vertu du lemme 2, 1, il existe une et une seule solution holomorphe en  $z$   $U_\delta(z, t)$ ,  $|t - t_0| \leq \tau$ ,  $z \in D_\tau$ ;  $U_\delta(z, t_0) = U_\delta(z)$ , telle qu'on ait (2, 1).

Soit  $x \in S[U(x, t_0)]^{(1)} \equiv S(U_0)$ , alors dans (2, 3) en remplaçant  $x$  par  $x + ix'$ ,

$$\begin{aligned} (2, 4) \quad & |U_\delta(x + ix')| \\ & \leq \exp\left(+\frac{x'^2}{2\delta}\right) (2\pi\delta)^{-\frac{n}{2}} \int \dots \int_{S(U_0)} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{2\delta}\right] |U(\xi, t_0)| d\xi \\ & \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |U(\xi, t_0)| \exp\left(\frac{x'^2}{2\delta}\right) (2\pi\delta)^{-\frac{n}{2}} \int \dots \int_{S(U_0)} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{2\delta}\right] d\xi, \end{aligned}$$

et désignons distance  $[x, S(U_0)] = d_x$ , alors

$$\begin{aligned} \int \dots \int_{S(U_0)} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{2\delta}\right] d\xi & \leq \int \dots \int_{|\xi| \geq d_x} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\delta}\right) d\xi \\ & \leq k_n (2\pi\delta)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{d_x}{\sqrt{\delta}}\right)^{n-2} \exp\left(-\frac{d_x^2}{2\delta}\right)^{(2)} \end{aligned}$$

pour  $\delta \leq d_x^2$ .

(1)  $S(T)$  désigne le support de  $T$ .

(2)  $\int \dots \int_{|\xi| \geq d_x} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\delta}\right) d\xi$ , par le changement :

$$\xi = \sqrt{\delta} \xi', \quad = \sqrt[n]{\delta} \int \dots \int_{|\xi'| \geq \frac{d_x}{\sqrt{\delta}}} \exp\left(-\frac{\xi'^2}{2}\right) d\xi' \quad \text{d'où,} \quad = S_{n-1} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r^{n-1} dr,$$

où  $S_{n-1}$  est l'aire de la sphère unitaire dans  $\mathbb{R}^n$  ( $S_0 = 2$ ). Or, par l'intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_{n,t} & = \int_t^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r^{n-1} dr \\ & = (t^{n-2} + (n-2)t^{n-4} + (n-2)(n-4)t^{n-6} + \dots) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \\ & \quad + \begin{cases} 1.3 \dots (n-2) \int_t^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr & (n, \text{ impair}) \\ 0 & (n, \text{ pair}). \end{cases} \end{aligned}$$

Comme

$$\int_t^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr = \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) - \int_t^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \frac{dr}{r^2} \leq \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right),$$

on voit que  $I_{n,t} \leq k'_n t^{n-2} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$  pour  $t \geq 1$ . En faisant  $t = \frac{d_x}{\sqrt{\delta}}$ , on a l'inégalité écrite.

On a donc

$$(2, 5) \quad |U_\delta(x + ix')| \leq k_n \left( \frac{d_x}{\sqrt{\delta}} \right)^{n-2} \exp\left(-\frac{d_x^2 - x'^2}{2\delta}\right) \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |U(\xi, t_0)|.$$

Prenons  $x + ix'$  dans  $D_\varepsilon$ , alors, pour tout compact  $K_x$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\text{dist}(K_x, S(U_0)) > \varepsilon$ ,  $U_\delta(x + ix')$  converge uniformément vers 0 lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . Or, (2, 1) montre que  $U_\delta(x, t) \rightarrow 0$ , uniformément sur  $K_x$  et  $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ . Donc, comme le problème de Cauchy est uniformément bien posé dans  $(\mathcal{Y}')$ ,  $U_\delta(x, t) \rightarrow U(x, t)$  pour la topologie  $(\mathcal{Y}')$  pour  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0 + \tau$ , d'où  $U(x, t) \equiv 0$  sur  $K_x$ .

Donc, les supports de  $U(x, t)$  pour  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0 + \tau$  sont contenus dans le  $\varepsilon$ -voisinage du support de  $U(x, t_0)$ . Comme  $\varepsilon$  et  $\tau$  sont indépendants de  $t_0$  et de  $U(x, t_0)$ , nous pouvons refaire ce raisonnement à partir de  $t_0 - \tau$  et de  $t_0 + \tau$ . D'où la proposition pour  $U_x(t_0) \in (\mathcal{D})_x$ .

Le cas  $U(t_0) \in (\mathcal{E}')_x$  se traite en prenant une suite régularisante. c. q. f. d.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. LERAY, *Hyperbolic differential equations* (Cours de Princeton) 1954.
  - [2] L. SCHWARTZ, *Les équations d'évolution liées au produit de composition*, *Ann. Inst. Fourier* (1950), pp. 19-49.
-