

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GEORGES GRAS

**Annulation du groupe des  $\ell$ -classes généralisées d'une extension abélienne réelle de degré premier à  $\ell$**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 29, n° 1 (1979), p. 15-32

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1979\\_\\_29\\_1\\_15\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_1_15_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**ANNULATION DU GROUPE  
DES  $\ell$ -CLASSES GÉNÉRALISÉES  
D'UNE EXTENSION ABÉLIENNE RÉELLE  
DE DEGRÉ PREMIER A  $\ell$**

par **Georges GRAS**

*Dédié à Monsieur Claude Chabauty.*

**INTRODUCTION**

Les résultats de R. Gillard ([3]) et de R. Greenberg ([7]) (démonstrés indépendamment par ces deux auteurs à partir des travaux de Coates et Lichtenbaum ([1]) et d'Iwasawa ([8])) donnent une démonstration partielle de la conjecture que nous avons formulée dans [4] (cf. aussi [5] ou [6]) pour le cas d'un corps abélien réel.

Compte tenu des hypothèses supplémentaires assez fortes qui sont nécessaires pour cette démonstration (monogénéité des groupes de classes notamment) on peut penser qu'elle résulte en fait d'une situation analogue à celle qui se produit dans le cas imaginaire, lorsqu'on impose la monogénéité : en effet, dans ce cas, le théorème de Stickelberger et l'interprétation arithmétique de Leopoldt des formules analytiques permettent de conclure facilement (cf. [4], Cor. I.4, p. 16).

Nous montrons ici qu'il en est bien ainsi dans le cas réel, grâce à l'utilisation des méthodes du "Spiegelungssatz non semi-simple" de B. Oriat et Ph. Satgé ([9]) qui semblent bien adaptées aux problèmes d'annulation des groupes de classes. La différence essentielle par rapport au cas imaginaire est que, ici dans le cas réel, le groupe des classes d'idéaux est remplacé par le groupe des classes généralisées qui correspond par le corps de classes au groupe de Galois  $\mathcal{A}$  de la  $\ell$ -extension abélienne maximale non ramifiée en dehors de  $\ell$ . On obtient alors (Th. II.1) le résultat cité dans le résumé, résultat qui permet de retrouver celui de [3] et [7]. Outre

l'intérêt théorique du Th. II.1, le Th. I.1 constitue une approche numérique précise du problème de l'annulation des  $\mathcal{A}^\varphi / \mathcal{A}^\varphi \varrho^{n+1}$  pour les "petites valeurs" de  $n$  puisqu'on est ramené au seul calcul d'éléments de Stickelberger.

Enfin, nous donnons une méthode très simple pour le calcul effectif de la valuation  $\varrho$ -adique des nombres  $L_\varrho(1, \psi')$ .

Dans les démonstrations, on peut toujours se ramener au cas d'une extension cyclique de  $\mathbf{Q}$  puisque tout caractère d'une extension abélienne quelconque est caractère d'un sous-corps cyclique de cette extension (cf. [4] ou [5]).

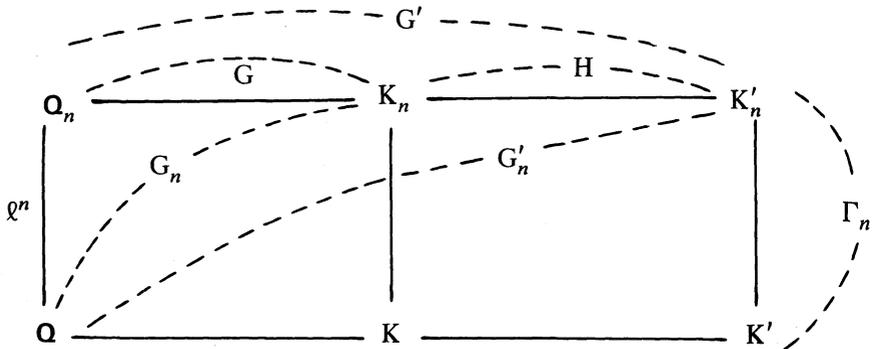
### CHAPITRE PREMIER

#### ANNULATION DE $\mathcal{A}^\varphi / \mathcal{A}^\varphi \varrho^{n+1}$

##### 1. Notations.

Soit  $\varrho$  un nombre premier impair fixé. Soit  $K$  une extension cyclique réelle de  $\mathbf{Q}$  ( $K \neq \mathbf{Q}$ ). On suppose que  $\text{Gal}(K/\mathbf{Q})$  est d'ordre  $g$  premier à  $\varrho$ . On note  $\psi$  le caractère rationnel qui correspond à  $K$  (D'après les définitions de [4], on a donc  $K = K_\psi$ ,  $\text{Gal}(K/\mathbf{Q}) = G_\psi$  et  $g = g_\psi$ ).

On note  $\mathbf{Q}_k$  l'unique sous-corps de degré  $\varrho^k$  sur  $\mathbf{Q}$  de la  $\mathbf{Z}_\varrho$ -extension cyclotomique de  $\mathbf{Q}$  et, pour tout corps  $L$ ,  $L_k$  le composé  $L \mathbf{Q}_k$  ( $k \geq 0$ ). Pour tout corps  $L$ , on note  $L'$  le composé  $L' = L \mathbf{Q}^{(\varrho)}$ . On considère le schéma suivant ( $n \geq 0$ ) :



avec les groupes de Galois suivants :

$$\Gamma_n = \text{Gal}(K'_n/K') \simeq \text{Gal}(K_n/K) \simeq \text{Gal}(\mathbf{O}_n/\mathbf{O}) ;$$

$$G'_n = \text{Gal}(K'_n/\mathbf{O}) , G_n = \text{Gal}(K_n/\mathbf{O})$$

$$G = \text{Gal}(K_n/\mathbf{O}_n) , H = \text{Gal}(K'_n/K_n) \text{ et } G' = \text{Gal}(K'_n/\mathbf{O}_n)$$

(on considère que les groupes  $G$ ,  $G'$  et  $H$  sont indépendants de  $n$ , à isomorphisme canonique près).

Le groupe  $\Gamma_n$  est engendré par un élément  $\sigma_n$  invariant  $K'$  et tel que  $\zeta^{\sigma_n} = \zeta^{1+\ell}$ , pour toute racine de l'unité  $\zeta$  d'ordre diviseur de  $\ell^{n+1}$ .

On fait choix d'un caractère  $\ell$ -adique irréductible  $\varphi$ ,  $\varphi \mid \psi$  ;  $\varphi$  est donc un caractère  $\ell$ -adique de  $K$  (au sens de [4], p. 6) que l'on considère aussi comme caractère de  $K'$ . On pose  $e_\varphi = \frac{1}{|G'|} \sum_{\tau \in G'} \varphi(\tau^{-1}) \tau$  ; c'est un élément de  $\mathbf{Z}_\ell[G']$  qui est l'idempotent associé à  $\varphi$ . On sait que la projection canonique  $G' \rightarrow G$  envoie  $e_\varphi$  sur l'idempotent  $\frac{1}{|G|} \sum_{\tau \in G} \varphi(\tau^{-1}) \tau$  ; par abus, nous noterons aussi par  $e_\varphi$  cet idempotent de  $\mathbf{Z}_\ell[G]$ . Nous aurons souvent à utiliser un résidu modulo  $\ell^{n+1}$  de  $e_\varphi$  appartenant à  $\mathbf{Z}[G']$  ou  $\mathbf{Z}[G]$  selon les cas ; nous notons  $e_\varphi^*$  un tel élément sans faire référence à  $n$  pour simplifier ; nous ne distinguons pas deux tels résidus, de telle sorte que  $e_\varphi^*$  désigne aussi, par abus, l'image canonique de  $e_\varphi$  dans  $(\mathbf{Z}/\ell^{n+1}\mathbf{Z})[G']$  (ou  $(\mathbf{Z}/\ell^{n+1}\mathbf{Z})[G]$ ).

## 2. Involution du miroir.

On considère l'algèbre  $A_n[G'_n]$  où  $A_n = \mathbf{Z}/\ell^{n+1}\mathbf{Z}$  ( $n \geq 0$ ). Dans cette algèbre, on considère l'involution dite du miroir (qui dépend de  $n$ ) :  $A_n[G'_n] \rightarrow A_n[G'_n]$  où  $x = \sum_{\tau \in G'_n} a_\tau \tau$  a pour image  $\bar{x} = \sum_{\tau \in G'_n} a_\tau \chi_n^*(\tau) \tau^{-1}$ , où  $\chi_n^*(\tau) \in A_n$  est ainsi défini : on pose  $\zeta^\tau = \zeta^{\chi_n^*(\tau)}$ , pour toute racine de l'unité  $\zeta$  telle que  $\zeta^{\ell^{n+1}} = 1$ .

A tout idéal  $J_n$  de  $A_n[G'_n]$ , on associe l'idéal  $\bar{J}_n = \{\bar{x}, x \in J_n\}$  ainsi que le sous-groupe de  $G'_n$ ,  $\text{Ker } J_n = \{\tau \in G'_n, \tau - 1 \in J_n\}$  (cf. [9], I).

*Remarque I.1.* — On peut définir une opération miroir sur  $Z_\ell[G']$  de la façon suivante : si  $x = \sum_{\tau \in G'} a_\tau \tau$ , alors  $\bar{x} = \sum_{\tau \in G'} a_\tau \theta(\tau) \tau^{-1}$ , où  $\theta$  est le caractère d'ordre  $\ell - 1$  de  $\mathbf{Q}^{(\ell)}$  bien connu ([4], p. 6).

Il est clair que la restriction de  $\chi_n^*$  à  $G'$  est la réduction modulo  $\ell^{n+1}$  de  $\theta$  ; on a donc le diagramme commutatif suivant qui relie les deux opérations miroir définies lorsque l'on se restreint à  $G'$  :

$$\begin{array}{ccc}
 Z_\ell[G'] & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & Z_\ell[G'] \\
 \text{mod } \ell^{n+1} \downarrow & \tau \text{ -----} \theta(\tau)\tau^{-1} & \downarrow \text{mod } \ell^{n+1} \\
 A_n[G'] & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & A_n[G'] \\
 & \tau \text{ -----} \chi_n^*(\tau)\tau^{-1} & 
 \end{array}$$

On considère l'idéal  $I_n$  de  $A_n[G'_n]$  :  $I_n = (\sigma_n - 1, s - 1, 1 - e_\varphi^*)$ , où  $s$  est un générateur du groupe cyclique  $H$ .

Commençons par déterminer  $\text{Ker } I_n, \bar{I}_n$  et  $\text{Ker } \bar{I}_n$ .

LEMME I.1. — On a  $\text{Ker } I_n = \Gamma_n \times H$ .

Une inclusion étant évidente, on considère la projection canonique  $A_n[G'_n] \rightarrow A_n[G]$  ; dans cette application,  $I_n$  a pour image l'idéal  $(1 - e_\varphi^*) A_n[G]$  ; soit alors  $\tau \in \text{Ker } I_n$ , on a  $\tau - 1 \in I_n$  et la projection  $\tau_0$  de  $\tau$  vérifie  $\tau_0 - 1 \in (1 - e_\varphi^*) A_n[G]$  soit  $\tau_0 e_\varphi \equiv e_\varphi \pmod{\ell^{n+1}}$  dans  $Z_\ell[G]$ . On utilise un isomorphisme  $Z_\ell[G] e_\varphi \cong Z_\ell^{(g)}$  qui donne (en choisissant  $\psi' | \varphi$ )  $\psi'(\tau_0) \equiv 1 \pmod{\ell^{n+1}}$  (car  $\psi'(e_\varphi) = 1$ ). Par hypothèse,  $\psi'$  est d'ordre  $g \neq 1$  premier à  $\ell$ , donc  $\psi'(\tau_0) \equiv 1 \pmod{\ell^{n+1}}$  implique  $\tau_0 = 1$  et le lemme en résulte.

On a  $\bar{I}_n = (\bar{\sigma}_n - 1, \bar{s} - 1, 1 - \bar{e}_\varphi^*)$ . Calculons  $\bar{e}_\varphi^*$  (cf. Rem. I.1) : on a  $e_\varphi = \frac{1}{|G'|} \sum_{\tau \in G'} \varphi(\tau^{-1}) \tau$  soit

$$\bar{e}_\varphi = \frac{1}{|G'|} \sum_{\tau \in G'} \varphi(\tau^{-1}) \theta(\tau) \tau^{-1} = \frac{1}{|G'|} \sum_{\tau \in G'} (\theta^{-1} \varphi)(\tau) \tau.$$

On introduit alors le caractère miroir  $\bar{\varphi}$  de  $\varphi$  (cf. [4], p. 18) et  $\bar{e}_\varphi = e_{\bar{\varphi}}$ ; il en résulte que  $\bar{e}_\varphi^*$  est la classe modulo  $\varrho^{n+1}$  de  $e_{\bar{\varphi}}$ , que nous notons  $e_{\bar{\varphi}}^*$  par analogie.

$$\begin{aligned} \text{On a donc } \bar{I}_n &= (\chi_n^*(\sigma_n) \sigma_n^{-1} - 1, \chi_n^*(s) s^{-1} - 1, 1 - e_{\bar{\varphi}}^*) \\ &= (\sigma_n - \chi_n^*(\sigma_n), s - \theta(s), 1 - e_{\bar{\varphi}}^*) \\ &= (\sigma_n - 1 - \varrho, s - \theta(s), 1 - e_{\bar{\varphi}}^*). \end{aligned}$$

LEMME I.2. — On a  $\text{Ker } \bar{I}_n \subset G'$ .

Soient  $\tau \in G'$  et  $\sigma_n^i \in \Gamma_n$  tels que  $\tau \sigma_n^i \in \text{Ker } \bar{I}_n$ ; comme l'ordre de  $\tau$  est premier à  $\varrho$ , on a  $\sigma_n^i \in \text{Ker } \bar{I}_n$  soit  $\sigma_n^{\varrho^k} \in \text{Ker } \bar{I}_n$ , en appelant  $\varrho^{n-k}$  l'ordre de  $\sigma_n^i$  dans  $\Gamma_n$ . On a  $\sigma_n^{\varrho^k} - 1 \in \bar{I}_n$  soit  $\sigma_n^{-\varrho^k} \chi_n^*(\sigma_n^{\varrho^k}) - 1 \in \bar{I}_n$  soit, en utilisant la projection canonique  $G'_n \longrightarrow G$ ,  $e_{\bar{\varphi}}^*((1 + \varrho)^{\varrho^k} - 1) = 0$  dans  $A_n[G]$  (en effet, l'image de  $\bar{I}_n$  par cette projection est  $(1 - e_{\bar{\varphi}}^*) A_n[G]$ ). On a donc  $(1 + \varrho)^{\varrho^k} - 1 \equiv 0 \pmod{\varrho^{n+1}}$  dans  $\mathbf{Z}_\varrho$ , d'où  $k \geq n$ , auquel cas  $\sigma_n^{\varrho^k} = 1$  et  $\sigma_n^i = 1$ .

LEMME I.3. — Soit  $\bar{K} \subset K'$  le corps dont le caractère associé est le caractère rationnel au-dessus de  $\bar{\varphi}$ ; alors le corps fixe par  $\text{Ker } \bar{I}_n$  est  $\bar{K}_n = \bar{K} \mathbf{O}_n$ .

Soit  $\tau \in G'$  tel que  $\tau$  invarie  $\bar{K}_n$  (on a donc  $\bar{\psi}'(\tau) = 1, \psi'|\varphi$ ); on a  $\theta \psi'^{-1}(\tau) = 1$  soit  $\psi'(\tau) = \theta(\tau)$ ; on en déduit que  $\tau e_\varphi = \theta(\tau) e_\varphi$  et que  $(\tau - \theta(\tau)) e_\varphi = 0$  soit  $(\tau - 1) e_{\bar{\varphi}} = 0$  (opération miroir) et  $\tau - 1 = (1 - e_{\bar{\varphi}})(\tau - 1)$ , d'où  $\tau - 1 = (1 - e_{\bar{\varphi}}^*)(\tau - 1)$  dans  $A_n[G'_n]$ , ce qui démontre l'inclusion  $\text{Gal}(K'_n/\bar{K}_n) \subset \text{Ker } \bar{I}_n$ .

Inversement, soit  $\tau \in G'_n$  tel que  $\tau - 1 \in \bar{I}_n$ ; d'après le lemme I.2, on a  $\tau \in G'$  et en relevant dans  $\mathbf{Z}_\varrho[G'_n]$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \tau - 1 &\equiv \omega_0(\sigma_n - 1) + \omega_1(s - \theta(s)) \\ &\quad + \omega_2(1 - e_{\bar{\varphi}}) \pmod{\varrho}, \quad \omega_0, \omega_1, \omega_2 \in \mathbf{Z}_\varrho[G'_n]. \end{aligned}$$

D'où, par  $\theta \psi'^{-1} = \bar{\psi}'$  (trivial sur  $\Gamma_n$ ):

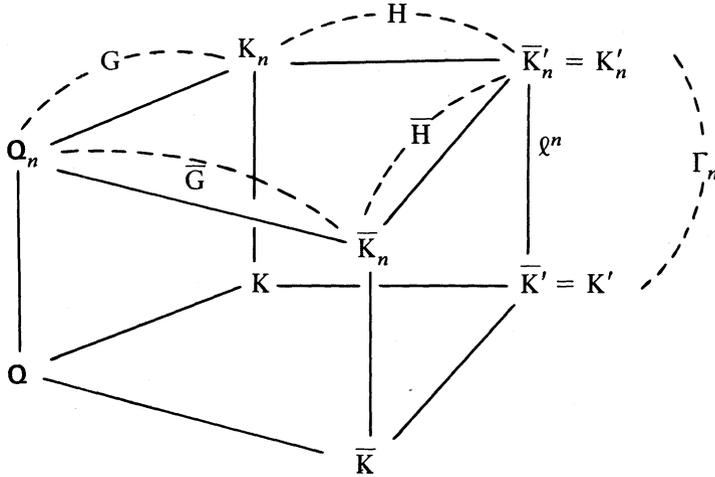
$$\bar{\psi}'(\tau) - 1 \equiv \bar{\psi}'(\omega_1)(\bar{\psi}'(s) - \theta(s)) + \bar{\psi}'(\omega_2)(1 - \bar{\psi}'(e_{\bar{\varphi}})) \pmod{\varrho};$$

or  $\bar{\psi}'(e_{\bar{\varphi}}) = 1$  et  $\bar{\psi}'(s) - \theta(s) = \theta(s)(\psi'^{-1}(s) - 1) = 0$

car  $s \in H$ ; d'où  $\bar{\psi}'(\tau) \equiv 1 \pmod{\varrho}$  et  $\tau$  est nécessairement dans

le noyau de  $\bar{\psi}'$ , ce qui termine la démonstration (notons que  $\bar{K}$  dépend de  $K$  mais aussi de  $\varphi|\psi$ ).

On obtient le schéma suivant :



On note par analogie  $\bar{H} = \text{Gal}(\bar{K}'_n/\bar{K}_n)$  (le fait que  $\bar{K}' = K'$  et  $\bar{K}'_n = K'_n$  est évident); on pose enfin  $\bar{G} = \text{Gal}(\bar{K}_n/\mathcal{O}_n)$  et  $\bar{G}_n = \text{Gal}(\bar{K}_n/\mathcal{O})$ ; on peut aussi poser  $\bar{G}' = G'$  et  $\bar{G}'_n = G'_n$ .

### 3. Corps de classes.

Soit  $M$  la  $\ell$ -extension abélienne maximale de  $K$  non ramifiée en dehors de  $\ell$ ;  $M$  contient le  $\ell$ -corps de classes de Hilbert de  $K$ . On pose  $\mathcal{A} = \text{Gal}(M/K)$ ;  $\mathcal{A}$  est un  $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module. On peut écrire  $\mathcal{A} = \prod_{\varphi} \mathcal{A}^{e_\varphi}$  ( $\varphi$  parcourant l'ensemble des caractères  $\ell$ -adiques de  $K$ ); on pose  $\mathcal{A}^\varphi = \mathcal{A}^{e_\varphi}$ . Le quotient  $\mathcal{A} / \mathcal{A}^{1-e_\varphi}$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{A}^\varphi$ ; on note alors  $M_\varphi$  le corps fixe par  $\mathcal{A}^{1-e_\varphi}$ ; on a donc  $\text{Gal}(M_\varphi/K) \simeq \mathcal{A}^\varphi$ .

D'après la théorie des  $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions d'un corps réel (abélien), on sait que pour  $\varphi \neq 1$ ,  $\mathcal{A}^\varphi$  est fini (ceci provient du fait que la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique de  $K$  (qui est la seule  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension de  $K$ , d'après l'exactitude de la conjecture de Leopoldt dans le cas abélien) est contenue dans la composante  $M_1$ ). On voit donc que  $\mathcal{A}^{1-e_1}$  est le sous  $\mathbb{Z}_\ell$ -module de torsion (fini) de  $\mathcal{A}$ .

On considère  $\mathcal{A}^{\varphi \varrho^{n+1}}$  et on appelle  $M_\varphi^{(n)}$  le sous-corps de  $M$  fixe par  $\mathcal{A}^{\varrho^{n+1}} \mathcal{A}^{1-e_\varphi}$ . On a  $\text{Gal}(M_\varphi^{(n)}/K) \simeq \mathcal{A}^\varphi / \mathcal{A}^{\varphi \varrho^{n+1}}$ .

Le corps de classes permet d'associer à  $\mathcal{A}^{1-e_1}$  un groupe de classes modulo un conducteur  $\mathfrak{f}$  bien défini ; c'est ce groupe (fini)  $\mathcal{H}_\mathfrak{f}$  qu nous appelons le groupe des  $\varrho$ -classes généralisées de  $K$ . Le groupe des  $\varrho$ -classes d'idéaux au sens habituel est alors un quotient de  $\mathcal{H}_\mathfrak{f}$ .

#### 4. Spiegelungssatz généralisé. (d'après [9]).

On se propose d'appliquer la première partie du "Spiegelungssatz non semi-simple" de [9] dans le cadre légèrement différent qui consiste à remplacer le groupe des  $\varrho$ -classes d'idéaux de  $K$  au sens habituel par le groupe des  $\varrho$ -classes généralisées  $\mathcal{H}_\mathfrak{f}$  de  $K$ .

On compose  $M_\varphi^{(n)}$  avec  $K'_n$  ( $M_\varphi^{(n)} K'_n / K'_n$  est non ramifiée en dehors de  $\varrho$ ).

LEMME I.4. — On a  $M_\varphi^{(n)} \cap K'_n = K$ .

Soit  $\tau \in \text{Gal}(M_\varphi^{(n)} \cap K'_n / K)$  ; on a en fait  $M_\varphi^{(n)} \cap K'_n = M_\varphi^{(n)} \cap K_n$ . Par définition,  $\mathcal{A}^\varphi / \mathcal{A}^{\varphi \varrho^{n+1}}$  est annulé par les  $e_\phi$ ,  $\phi \neq \varphi$ , en particulier par  $e_1$  (puisque'on a pris  $\varphi \neq 1$ ), donc  $\tau^{e_1} = 1$  ; mais par ailleurs  $\tau$  commute avec les éléments de  $G$ , on a donc  $\tau^{e_1} = \tau$ , d'où le résultat.

Le corps  $K'_n$  contient les racines de l'unité d'ordre  $\varrho^{n+1}$  ; puisque  $M_\varphi^{(n)}/K$  est d'exposant diviseur de  $\varrho^{n+1}$ , on introduit comme dans [9] le radical de  $M_\varphi^{(n)} K'_n : W_\varphi^{(n)} = \{w' \in K_n^*, \sqrt[\varrho^{n+1}]{w'} \in M_\varphi^{(n)} K'_n\}$ . On considère  $W_\varphi^{(n)} / K_n'^{* \varrho^{n+1}}$  et on a les isomorphismes (de groupes seulement pour le second) :

$$\text{Gal}(M_\varphi^{(n)}/K) \simeq \text{Gal}(M_\varphi^{(n)} K'_n / K'_n) \simeq W_\varphi^{(n)} / K_n'^{* \varrho^{n+1}}.$$

LEMME I.5. — L'idéal  $\bar{I}_n$  annule le  $A_n[\bar{G}_n]$ -module  $W_\varphi^{(n)} / K_n'^{* \varrho^{n+1}}$ . (même démonstration que dans [9], corol. 3.4 puisque  $I_n$  annule  $\text{Gal}(M_\varphi^{(n)}/K)$ ).

Remarque I.2. — Ceci conduit à définir  $W_\varphi^{(n)} = W_\varphi^{(n)} \cap \bar{K}_n^*$  ; on montre alors comme dans [9] (lemme 3.5) que l'on a l'isomorphisme :

$W_\varphi^{(n)}/\overline{K}_n^{*\varrho^{n+1}} \simeq W_\varphi'^{(n)}/K_n'^{*}\varrho^{n+1}$  et  $W_\varphi^{(n)}/\overline{K}_n^{*\varrho^{n+1}}$  est canoniquement un  $A_n[\overline{G}'_n]$ -module annihilé par l'idéal  $(\sigma_n - 1 - \varrho, s - \theta(s), 1 - e_\varphi^*)$  de  $A_n[\overline{G}'_n]$ .

LEMME I.6. — Soit  $w \in W_\varphi^{(n)}$ ; alors l'idéal  $(w)$  de  $\overline{K}_n$  engendré par  $w$  est de la forme  $\mathfrak{A}^{\varrho^{n+1}}\mathfrak{M}^{\varrho^n}$ , où  $\mathfrak{A}$  est un idéal de  $\overline{K}_n$  et  $\mathfrak{M}$  un idéal produit d'idéaux premiers au-dessus de  $\varrho$  dans  $\overline{K}_n$ .

Il résulte de la théorie de la ramification dans une extension de Kummer que, dans  $K_n$  on a  $(w) = \mathfrak{A}^{\varrho^{n+1}}\mathfrak{M}'$ ,  $\mathfrak{M}'$  produit d'idéaux premiers au-dessus de  $\varrho$  dans  $\overline{K}_n$ . D'après le lemme I.5 et la Remarque I.2,  $\overline{I}_n$  annule  $W_\varphi^{(n)}/\overline{K}_n^{*\varrho^{n+1}}$  et on peut écrire :  $w^{\sigma_n - 1 - \varrho} = \alpha^{\varrho^{n+1}}$ ,  $\alpha \in \overline{K}_n^*$ . Ceci donne

$$(\alpha)^{\varrho^{n+1}} = \mathfrak{A}^{(\sigma_n - 1 - \varrho)\varrho^{n+1}}\mathfrak{M}'^{\sigma_n - 1 - \varrho};$$

or  $\varrho$  étant totalement ramifié dans  $\overline{K}_n/\overline{K}$ , il en résulte que  $\mathfrak{M}'^{\sigma_n - 1} = (1)$  soit  $(\alpha)^{\varrho^{n+1}} = \mathfrak{A}^{(\sigma_n - 1 - \varrho)\varrho^{n+1}}\mathfrak{M}'^{-\varrho}$ , d'où le fait que  $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}^{\varrho^n}$ .

Remarque I.3. — Il résulte du lemme I.6 que  $(w) = \mathfrak{A}^{\varrho^{n+1}}(\mathfrak{M}_0)$ ,  $(\mathfrak{M}_0)$  désignant l'étendu à  $\overline{K}_n$  d'un idéal  $\mathfrak{M}_0$  de  $\overline{K}$  produit d'idéaux premiers au-dessus de  $\varrho$ .

### 5. Annulation de $\mathcal{A}^\varphi/\mathcal{A}^{\varrho^{n+1}}$ .

Soit  $S_{\overline{K}_n}$  l'élément de Stickelberger associé à  $\overline{K}_n$  et soit  $\mathfrak{A}_{\overline{K}_n}$  l'idéal de Stickelberger, à savoir  $S_{\overline{K}_n} \mathbf{Z}[\overline{G}_n] \cap \mathbf{Z}[\overline{G}_n]$ . D'après [5] (corol. II.2, p. 36),  $\mathfrak{A}_{\overline{K}_n} = S_{\overline{K}_n} \left( \left( \frac{\overline{K}_n}{a} \right) - a, \Lambda_{\overline{K}_n} \right)$  (idéal de  $\mathbf{Z}[\overline{G}_n]$ ) où le symbole d'Artin  $\left( \frac{\overline{K}_n}{a} \right)$  désigne un générateur de  $\overline{G}_n$  et  $\Lambda_{\overline{K}_n}$  un entier convenable (cf. [5], Déf. II.1, p. 35). Appelons encore  $\mathfrak{A}_{\overline{K}_n}$ , par abus, l'idéal  $S_{\overline{K}_n} \mathbf{Z}_\varrho[\overline{G}_n] \cap \mathbf{Z}_\varrho[\overline{G}_n] = S_{\overline{K}_n} \left( \left( \frac{\overline{K}_n}{a} \right) - a, \Lambda_{\overline{K}_n} \right)$  (idéal de  $\mathbf{Z}_\varrho[\overline{G}_n]$ ). Alors  $\mathfrak{A}_{\overline{K}_n}$  annule le  $\varrho$ -groupe des classes au sens habituel de  $\overline{K}_n$ ,  $\mathcal{H}_n$ .

Soit alors  $S_{\overline{K}'_n}$  l'élément de Stickelberger de  $\overline{K}'_n$ ; si  $N$  désigne la projection canonique  $\mathbf{Z}[\overline{G}'_n] \rightarrow \mathbf{Z}[\overline{G}_n]$ , on sait que  $NS_{\overline{K}'_n}$

s'exprime simplement en fonction de  $S_{\overline{K}_n}$  ([5], th. II.3, p. 42). De façon précise, on remarque que pour  $n \geq 1$ ,  $\overline{K}_n$  et  $\overline{K}'_n$  ont le même conducteur et dans ce cas,  $NS_{\overline{K}'_n} = S_{\overline{K}_n}$ .

Examinons maintenant l'idéal de Stickelberger de  $\overline{K}'_n$  dans  $\mathbf{Z}_\varrho[\overline{G}'_n]$ . D'après [5] (Prop. II.3), on a

$$\mathfrak{I}_{\overline{K}'_n} = S_{\overline{K}'_n} \left( \dots \left( \frac{\overline{K}'_n}{a'} \right) - a', \dots ; \Lambda_{\overline{K}'_n} \right)$$

(idéal de  $\mathbf{Z}_\varrho[\overline{G}'_n]$ ),  $\left( \frac{\overline{K}'_n}{a'} \right)$  parcourant  $\overline{G}'_n$ ,  $\Lambda_{\overline{K}'_n}$  étant un entier convenable.

LEMME I.7. — L'idéal  $e_{\overline{\varphi}} \left( \dots, \left( \frac{\overline{K}'_n}{a'} \right) - a', \dots ; \Lambda_{\overline{K}'_n} \right)$  de  $\mathbf{Z}_\varrho[\overline{G}'_n] e_{\overline{\varphi}}$  est l'idéal unité pour tout  $n \geq 0$ .

Soit  $a'$  choisi de telle sorte que l'on ait  $\left( \frac{K}{a'} \right) \neq 1$  (ceci est possible puisque  $K \neq \mathbf{Q}$ ); on peut toujours supposer que  $\left( \frac{\overline{K}'_n}{a'} \right) = \sigma_n \tau$ ,  $\tau \in G'$ , la restriction de  $\tau$  à  $K$  étant distincte de l'identité. Considérons l'homomorphisme de  $\mathbf{Z}_\varrho[\overline{G}'_n] = \mathbf{Z}_\varrho[G'] [\Gamma_n]$  dans  $\mathbf{Z}_\varrho^{(\overline{g})} [\Gamma_n]$  (où  $\overline{g} = [\overline{K} : \mathbf{Q}]$ ) défini par  $\tau' \in G' \rightarrow \overline{\psi}'(\tau')$ ; cet homomorphisme identifie  $\mathbf{Z}_\varrho[\overline{G}'_n] e_{\overline{\varphi}}$  et  $\mathbf{Z}_\varrho^{(\overline{g})} [\Gamma_n]$ .

L'image de  $e_{\overline{\varphi}}(\sigma_n \tau - a')$  par cet homomorphisme est égale à  $\sigma_n \overline{\psi}'(\tau) - a' = \xi \sigma_n - a'$ , en posant  $\xi = \overline{\psi}'(\tau)$ . Considérons le produit  $\prod_{k=1}^{\varrho^n} (\sigma_n - a' \xi^{-1} \zeta_1^k)$  avec  $\zeta_1$  racine de l'unité d'ordre  $\varrho^n$ ; ce produit est égal à  $\sigma_n^{\varrho^n} - a'^{\varrho^n} \xi^{-\varrho^n} = 1 - a'^{\varrho^n} \xi^{-\varrho^n}$ . On a  $a' \equiv \theta(a') = \theta(\tau) \pmod{\varrho}$  soit

$$\begin{aligned} 1 - a'^{\varrho^n} \xi^{-\varrho^n} &\equiv 1 - \theta(\tau)^{\varrho^n} \overline{\psi}'(\tau)^{-\varrho^n} \equiv 1 - (\theta(\tau) \overline{\psi}'^{-1}(\tau))^{\varrho^n} \\ &\equiv 1 - \theta \overline{\psi}'^{-1}(\tau)^{\varrho^n} \equiv 1 - \psi'(\tau)^{\varrho^n} \end{aligned}$$

mod  $\varrho$ ; cette quantité est non inversible dans  $\mathbf{Z}_\varrho^{(\overline{g})}$  si et seulement si  $\psi'(\tau)^{\varrho^n}$  est d'ordre puissance de  $\varrho$ , donc ici si et seulement si  $\psi'(\tau) = 1$ , ce qui est contraire au choix de  $\tau$ ; donc  $\sigma_n - a' \xi^{-1}$  est inversible dans  $\mathbf{Z}_\varrho^{(\overline{g})} [\Gamma_n]$ ,  $e_{\overline{\varphi}}(\sigma_n \tau - a')$  est inversible dans  $\mathbf{Z}_\varrho[\overline{G}'_n] e_{\overline{\varphi}}$ , d'où le lemme.

COROLLAIRE I.1. — L'idéal  $e_{\overline{\varphi}} \left( \left( \frac{\overline{K}'_n}{a'} \right) - a, \Lambda_{\overline{K}'_n} \right)$  de  $\mathbf{Z}_\varrho[\overline{G}'_n] e_{\overline{\varphi}}$  est aussi l'idéal unité pour tout  $n \geq 0$ .

En effet, on vérifie que

$$\begin{aligned} N\left(\dots, \left(\frac{\overline{K}'_n}{a'}\right) - a', \dots, \Lambda_{\overline{K}'_n}\right) &= \left(\dots, \left(\frac{\overline{K}_n}{a}\right) - a', \dots, \Lambda_{\overline{K}_n}\right) \\ &= \left(\left(\frac{\overline{K}_n}{a}\right) - a, \Lambda_{\overline{K}_n}\right) \subset \mathfrak{A}_{\overline{K}_n} \quad (\text{cf. [5], prop. II.5}). \end{aligned}$$

D'où le résultat. On a donc en résumé :

- (i)  $e_{\overline{\varphi}} S_{\overline{K}'_n}$  et  $e_{\overline{\varphi}} S_{\overline{K}_n}$  sont  $\ell$ -entiers pour tout  $n \geq 0$ ,
- (ii)  $e_{\overline{\varphi}} S_{\overline{K}_n} = N e_{\overline{\varphi}} S_{\overline{K}'_n}$ , pour tout  $n \geq 1$ .

DEFINITION I.1. — On pose  $\overline{S}'_n = e_{\overline{\varphi}} S_{\overline{K}'_n}$  et  $\overline{S}_n = e_{\overline{\varphi}} S_{\overline{K}_n}$  pour tout  $n \geq 0$ ; ce sont des éléments de  $\mathbf{Z}_{\ell}[\overline{G}'_n]$  et  $\mathbf{Z}_{\ell}[\overline{G}_n]$  respectivement (on peut donc dire que pour  $n \geq 1$ ,  $\overline{S}_n$  est la restriction de  $\overline{S}'_n$ ).

Considérons alors  $\overline{S}'_n$  pour  $n \geq 1$ ; par restriction à  $\overline{K}_n$ ,  $\overline{S}'_n$  opère comme  $\overline{S}_n$  et d'après ce que l'on vient de voir,  $\overline{S}'_n$  annule  $\mathcal{H}'_{\overline{\varphi}}$  (la composante en  $\overline{\varphi}$  du  $\ell$ -groupe des classes d'idéaux de  $\overline{K}_n$ ).

Soit alors  $w \in W_{\overline{\varphi}}^{(n)}$ ; d'après le lemme I.6 et la Remarque I.3,  $(w) = \mathfrak{A}^{\ell^{n+1}}(\mathfrak{M}_0)$  ( $\mathfrak{M}_0$  idéal de  $\overline{K}$ ). Distinguons alors deux cas selon que  $\ell$  est totalement décomposé ou non dans  $\overline{K}$ ; en terme de caractères de Dirichlet, ceci se traduit par  $\overline{\psi}'(\ell) = 1$  ou  $\overline{\psi}'(\ell) \neq 1$  (où  $\overline{\psi}' | \varphi$ ).

a)  $\overline{\psi}'(\ell) \neq 1$ . Dans ce cas, comme d'après le lemme I.5  $w^{1-e_{\overline{\varphi}}^*} \in \overline{K}_n^{*\ell^{n+1}}$ , on a  $(w) = (w)^{e_{\overline{\varphi}}^*} = (\mathfrak{M}_0)^{e_{\overline{\varphi}}^*}$  (aux puissances  $\ell^{n+1}$   $e^{\text{ièmes}}$  près d'idéaux); comme le corps de décomposition de  $\ell$  dans  $\overline{K}$  est distinct de  $\overline{K}$ , il en résulte que  $(\mathfrak{M}_0)^{e_{\overline{\varphi}}^*}$  est puissance  $\ell^{n+1}$   $e^{\text{ième}}$  d'idéal. On a donc  $(w) = \mathfrak{b}^{\ell^{n+1}}$  dans  $\overline{K}_n$  et  $(w)^{\overline{S}'_n} = \mathfrak{b}^{\overline{S}'_n \ell^{n+1}} = (\beta)^{\ell^{n+1}}$ ,  $\beta \in \overline{K}_n^*$ , puisque  $\mathfrak{b}^{\overline{S}'_n}$  est principal dans  $\overline{K}_n$ ; d'où  $w^{\overline{S}'_n} = \beta^{\ell^{n+1}} \epsilon$ ,  $\epsilon$  unité de  $\overline{K}_n$ ; on remarque que  $\epsilon \in W_{\overline{\varphi}}^{(n)}$ .

Soit  $E(\overline{K}_n)$  le groupe des unités de  $\overline{K}_n$  :

LEMME I.8. — On a  $E(\overline{K}_n) \cap W_{\overline{\varphi}}^{(n)} \subset E(\overline{K}_n)^{\ell^{n+1}}$ .

Soit  $\epsilon \in E(\overline{K}_n) \cap W_\varphi^{(n)}$  ; on applique à nouveau le lemme I.5 : on a en particulier  $\epsilon^{1-e_\varphi^*} \in E(\overline{K}_n)^{\varrho^{n+1}}$  soit  $\epsilon = \epsilon^{e_\varphi^*} \eta^{\varrho^{n+1}}$ ,  $\eta \in E(\overline{K}_n)$ . On sait que le corps  $\overline{K}_n$  est imaginaire ; soit alors  $\overline{K}_{n+}$  son sous-corps réel maximal ; on sait aussi que toute unité  $\epsilon$  de  $\overline{K}_n$  est de la forme  $\epsilon_0 \xi$ ,  $\epsilon_0 \in E(\overline{K}_{n+})$ ,  $\xi$  racine de l'unité. On voit que  $\epsilon_0^{e_\varphi^*} \in E(\overline{K}_n)^{\varrho^{n+1}}$  et qu'il en est de même pour  $\xi^{e_\varphi^*}$  car  $\overline{\varphi}$  n'est pas le caractère  $\theta(\varphi \neq 1)$ . Par conséquent, l'image de  $\overline{S}'_n$  dans  $A_n[\overline{G}'_n]$  annule  $W_\varphi^{(n)}/\overline{K}_n^{*\varrho^{n+1}}$  ( $n \geq 1$ ).

b)  $\overline{\psi}'(\varrho) = 1$ . Dans ce cas, on a  $(w)^{\overline{S}'_n} = \mathfrak{M}_0^{\overline{S}'_n \varrho^{n+1}} (\mathfrak{M}_0)^{\overline{S}'_n}$ . Etudions  $\mathfrak{M}_0^{\overline{S}'_n}$  pour  $n \geq 1$  : comme  $\mathfrak{M}_0$  est un idéal de  $\overline{K}$ ,  $\mathfrak{M}_0^{\overline{S}'_n} = \mathfrak{M}_0^{\overline{S}^{\overline{\varphi}}}$  en désignant par  $\overline{S}^{\overline{\varphi}}$  la projection canonique de  $\overline{S}'_n$  dans  $\mathbf{Z}_\varrho[\overline{G}]$ . Or d'après [5], Th. II.3,  $\overline{S}^{\overline{\varphi}} = 0$ , car sous l'hypothèse  $\overline{\psi}'(\varrho) = 1$ ,  $\overline{K}$  et  $\overline{K}'_n$  (si  $n \geq 1$ ) ont leurs conducteurs qui diffèrent par le facteur  $\varrho$ , et le terme  $1 - \left(\frac{\overline{K}}{\varrho}\right)^{-1}$  est nul ; d'où  $\mathfrak{M}_0^{\overline{S}'_n} = (1)$  et on est ramené au cas précédent. L'image de  $\overline{S}'_n$  dans  $A_n[\overline{G}'_n]$  annule encore  $W_\varphi^{(n)}/\overline{K}_n^{*\varrho^{n+1}}$  ( $n \geq 1$ ).

Remarques sur le cas particulier  $n = 0$  :

a) Si  $\overline{\psi}'(\varrho) \neq 1$ . On vérifie facilement que si  $\overline{\psi}'(\varrho) = 0$ , alors les résultats précédents sont valables pour  $n = 0$ .

Si  $\overline{\psi}'(\varrho) \neq 0$  ( $\varrho$  est non ramifié dans  $\overline{K}$ ), alors le Th. II.3 ([5], p. 42) montre que dans  $\mathbf{Z}_\varrho[\overline{G}]e_{\frac{\overline{K}}{\varrho}}$ , on a l'égalité

$$N \overline{S}'_0 = \left(1 - \left(\frac{\overline{K}}{\varrho}\right)^{-1}\right) \overline{S}'_0;$$

par hypothèse, on a  $\left(\frac{\overline{K}}{\varrho}\right) \neq 1$ , car  $\overline{\psi}'\left(\left(\frac{\overline{K}}{\varrho}\right)\right) \neq 1$  et il en résulte aisément que  $\left(1 - \left(\frac{\overline{K}}{\varrho}\right)^{-1}\right) e_{\frac{\overline{K}}{\varrho}}$  est inversible.

b) Si  $\overline{\psi}'(\varrho) = 1$ . Comme on l'a déjà vu,  $N \overline{S}'_0 = 0$  dans ce cas (mais évidemment  $\overline{S}'_0$  n'est pas trivial). On peut appeler ce cas, le cas spécial ( $n = 0$  et  $\overline{\psi}'(\varrho) = 1$ ) comme dans [4].

DEFINITION I.2. — Dans tous les cas, on désigne par  $S_n^\varphi$  la projection canonique dans  $A_n[G]$  de l'élément  $S_n^{\varphi}$  image de  $\overline{S}'_n$  (Déf. I.1) par l'opération miroir.

Compte tenu de ces définitions et par utilisation de la "Spiegelungsrelation" (comme dans [9], Prop. 3.3), on peut énoncer :

**THEOREME I.1.** — Soit  $K$  une extension abélienne réelle de  $\mathbf{Q}$  de degré premier à  $\ell$ . Soit  $\varphi$  un caractère  $\ell$ -adique irréductible de  $K$ ,  $\varphi \neq 1$ . Soit  $M$  la  $\ell$ -extension abélienne maximale de  $K$  non ramifiée en dehors de  $\ell$ , soit  $\mathcal{A} = \text{Gal}(M/K)$  et soit  $\mathcal{A}^\varphi$  la  $\varphi$ -composante de  $\mathcal{A}$ . Alors pour tout  $n \geq 0$ , l'élément  $S_n^\varphi$  de  $(\mathbf{Z}/\ell^{n+1}\mathbf{Z})[G]$  annule le module  $\mathcal{A}^\varphi/\mathcal{A}^{\varphi\ell^{n+1}}$  ( $G$  groupe de Galois de  $K/\mathbf{Q}$ ).

### Conclusion.

Pour  $n$  assez grand,  $S_n^\varphi$  annule  $\mathcal{A}^\varphi$ . Il se pose donc le problème de savoir si la suite des  $S_n^\varphi$  admet une "limite". Il suffit pour cela de relever arbitrairement  $S_n^\varphi$  dans  $\mathbf{Z}_\ell[G]$ , mod  $\ell^{n+1}$ , pour tout  $n$ , et de voir si la suite de ces relèvements a une limite  $\ell$ -adique. C'est ce que nous allons faire dans la deuxième partie.

*Remarque I.4.* — L'étude de  $N\overline{S}_n^{\varphi'}$  que nous avons détaillée dans ce § 5 n'est utile, d'un point de vue pratique, que pour justifier le fait que  $\overline{S}_n^{\varphi'}$  est, en un sens, le meilleur élément possible de  $\mathbf{Z}_\ell[G'_n]$  qui puisse annuler  $W_\varphi^{(n)}/\overline{K}_n^{*\ell^{n+1}}$ , pour tout  $n \geq 0$ .

## CHAPITRE II

ANNULATION DE  $\mathcal{A}^\varphi$ 

## 1. Caractères de Dirichlet.

Nous notons comme dans [4] (chap. II, § 1)  $\underline{\chi}'$  un caractère de Dirichlet de caractère sous-jacent  $\chi'$ . On suppose le module de  $\underline{\chi}'$  défini sans ambiguïté (en particulier le caractère  $\underline{\theta}$  est modulo  $\ell$  ainsi que ses puissances (y compris  $\underline{\theta}^\circ$ )).

Soit  $\psi' | \varphi$ ;  $\psi'$  est de conducteur divisible au plus par  $\ell$ . Nous utiliserons plus loin le caractère  $\underline{\psi}' \underline{\theta}^\circ$ : si le conducteur  $f_\psi$  de  $\psi'$  est divisible par  $\ell$  alors on a  $\underline{\psi}' \underline{\theta}^\circ = \underline{\psi}'$  (caractère mod  $f_\psi$ ); si  $\ell$  ne divise pas  $f_\psi$  alors  $\underline{\psi}' \underline{\theta}^\circ$  est un caractère modulo  $\ell f_\psi$ .

2. Etude de  $S_n^\varphi$  ( $n \geq 0$ ).

Nous allons étudier un relèvement dans  $\mathbf{Z}_\ell[G]$  de  $S_n^\varphi$  (que nous notons encore  $S_n^\varphi$ ).

On sait que  $\overline{K}_n$ , pour  $n \geq 0$ , a un conducteur  $f_n$  de la forme  $f\ell^{n+1}$ ,  $f$  premier à  $\ell$ . Pour  $n \geq 1$ , le conducteur de  $\overline{K}'_n$  est aussi égal à  $f\ell^{n+1}$ .

On considère  $S_{\overline{K}'_n} = \frac{1}{f_n} \sum_{\substack{b=1 \\ (b, f_n)=1}}^{f_n} \left(\frac{\overline{K}'_n}{b}\right)^{-1} b$ ; bien que

$\overline{S}'_n{}^\varphi = e_{\frac{1}{\varphi}} S_{\overline{K}'_n}$  soit  $\ell$ -entier (lemme I.7), il n'est pas possible de prendre directement le miroir de  $e_{\frac{1}{\varphi}} S_{\overline{K}'_n}$  à cause du "dénominateur"  $f_n$ .

Pour cela, on multiplie  $S_{\overline{K}'_n}$  par le facteur  $\left(\frac{\overline{K}'_n}{a}\right) - a$ ,  $a$  choisi de telle sorte que  $\left(\left(\frac{\overline{K}'_n}{a}\right) - a\right) e_{\frac{1}{\varphi}}$  soit inversible dans  $\mathbf{Z}_\ell[\overline{G}'_n] e_{\frac{1}{\varphi}}$ , ce qui est possible en ayant  $\left(\frac{K}{a}\right) \neq 1$  (cf. lemme I.7); ceci ne modifie pas les propriétés d'annulation de  $\overline{S}'_n{}^\varphi$  et  $S_n^\varphi$ : on a en dési-

gnant par  $\sum_{b=1}^{f_n^*}$  la sommation étendue aux  $b$ ,  $(b, f_n) = 1$ ,

$$\left(\left(\frac{\overline{K}'_n}{b}\right) - a\right) S_{\overline{K}'_n} = - \sum_{b=1}^{f_n^*} \lambda_b \left(\frac{\overline{K}'_n}{b}\right)^{-1}, \text{ où } \lambda_b = \frac{ab - [ab]_n}{f_n}, [ ]_n$$

désignant la fonction résidu mod  $f_n$  (cf. [5], lemme II.6).

On a donc  $\overline{S}'_n \overline{\varphi} \left(\left(\frac{\overline{K}'_n}{a}\right) - a\right) e_{\overline{\varphi}} = - e_{\overline{\varphi}} \sum_{b=1}^{f_n^*} \lambda_b \left(\frac{\overline{K}'_n}{b}\right)^{-1}$ , ce qui donne par l'opération miroir dans  $A_n[\overline{G}'_n]$  et la projection canonique dans  $A_n[G]$ :

$$S_n^\varphi \left(\left(\frac{K}{a}\right)^{-1} \chi_n^* \left(\left(\frac{\overline{K}'_n}{a}\right)\right) - a\right) e_\varphi^* = - e_\varphi^* \sum_{b=1}^{f_n^*} \lambda_b \chi_n^{*-1} \left(\left(\frac{\overline{K}'_n}{b}\right)\right) \left(\frac{K}{b}\right);$$

on a  $\chi_n^* \left(\left(\frac{\overline{K}'_n}{a}\right)\right) \equiv b \pmod{\ell^{n+1}}$ , on peut donc prendre comme représentant modulo  $\ell^{n+1}$  de  $\chi_n^{*-1} \left(\left(\frac{\overline{K}'_n}{b}\right)\right)$ , le nombre  $b^{\ell^n(\ell-1)-1}$  ( $A_n^*$  étant cyclique d'ordre  $\ell^n(\ell-1)$ ). On peut donc prendre un représentant de  $S_n^\varphi$  (noté encore  $S_n^\varphi$ ), vérifiant la congruence dans  $\mathbf{Z}_\ell[G]$ :

$$a \left(\left(\frac{K}{a}\right)^{-1} - 1\right) e_\varphi S_n^\varphi \equiv - e_\varphi \sum_{b=1}^{f_n^*} \lambda_b b^{\ell^n(\ell-1)-1} \left(\frac{K}{b}\right) \pmod{\ell^{n+1}}.$$

Cette congruence a lieu en fait dans  $\mathbf{Z}_\ell[G]e_\varphi$  et on peut remplacer  $\mathbf{Z}_\ell[G]e_\varphi$  par  $\mathbf{Z}_\ell^{(g)}$  comme d'habitude; on obtient dans  $\mathbf{Z}_\ell^{(g)}$  la congruence correspondant à la précédente :

$$a (\psi'^{-1}(a) - 1) \psi'(S_n^\varphi) \equiv - \sum_{b=1}^{f_n^*} \lambda_b b^{\ell^n(\ell-1)-1} \psi'(b) \pmod{\ell^{n+1}}.$$

Pour simplifier les notations, on pose  $N = \ell^n(\ell-1)$  ( $n \geq 1$ ).

On pose  $T_n^\varphi = e_\varphi \sum_{b=1}^{f_n^*} \left(\frac{K}{b}\right) b^N$ ,  $n \geq 1$ .

LEMME II.1. — On a la congruence dans  $\mathbf{Z}_\ell^{(g)}$  ( $n \geq 1$ ):

$$\frac{1 - \psi'(a)a^N}{a^N(1 - \psi'(a))} \frac{1}{N f_n} \psi'(T_n^\varphi) \equiv \psi'(S_n^\varphi) \pmod{\ell^{n+1}}.$$

$$\text{On a } (\psi'^{-1}(a) - 1) \frac{1}{f_n} \psi'(T_n^\varphi) = \frac{1}{f_n} \sum_{b=1}^{f_n^*} \psi'(b) b^N \psi'^{-1}(a) - \frac{1}{f_n} \sum_{b=1}^{f_n^*} \psi'(b) b^N.$$

Dans la première sommation, posons pour  $(b, f_n) = 1$ ,  $b = [ac]_n$ ,  $1 \leq c < f_n$  (ceci définit une bijection de  $\{u, 1 \leq u < f_n, (u, f_n) = 1\}$ ) et on obtient :

$$(\psi'^{-1}(a) - 1) \frac{1}{f_n} \psi'(T_n^\varphi) = \frac{1}{f_n} \sum_{c=1}^{f_n^*} \psi'(c) [ac]_n^N - \frac{1}{f_n} \sum_{b=1}^{f_n^*} \psi'(b) b^N ;$$

on a

$$[ac]_n = ac - \lambda_c f_n \text{ et } [ac]_n^N = (ac - \lambda_c f_n)^N = a^N c^N - N(ac)^{N-1} \lambda_c f_n + \frac{N(N-1)}{2} (ac)^{N-2} \lambda_c^2 f_n^2 + \Omega f_n^3, \Omega \varrho\text{-entier ;}$$

on a donc, puisque  $f_n = \varrho^{n+1} f$  et

$$N = \varrho^n (\varrho - 1), [ac]_n^N \equiv a^N c^N - N(ac)^{N-1} \lambda_c f_n \pmod{\varrho^{3n+2}}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} (\psi'^{-1}(a) - 1) \frac{1}{f_n} \psi'(T_n^\varphi) &\equiv \frac{1}{f_n} \sum_{c=1}^{f_n^*} \psi'(c) (a^N c^N - N(ac)^{N-1} \lambda_c f_n) \\ &\quad - \frac{1}{f_n} \sum_{b=1}^{f_n^*} \psi'(b) b^N \pmod{\varrho^{2n+1}} \\ &\equiv \frac{a^N}{f_n} \sum_{c=1}^{f_n^*} \psi'(c) c^N - N a^{N-1} \sum_{c=1}^{f_n^*} \psi'(c) c^{N-1} \lambda_c \\ &\quad - \frac{1}{f_n} \sum_{b=1}^{f_n^*} \psi'(b) b^N \pmod{\varrho^{2n+1}} \\ &\equiv (a^N - 1) \frac{1}{f_n} \psi'(T_n^\varphi) - N a^{N-1} \sum_{c=1}^{f_n^*} \psi'(c) c^{N-1} \lambda_c \pmod{\varrho^{2n+1}}. \end{aligned}$$

D'où (en utilisant la congruence obtenue pour  $\psi'(S_n^\varphi)$ ) :

$$\begin{aligned} (\psi'^{-1}(a) - 1) \frac{1}{f_n} \psi'(T_n^\varphi) &\equiv (a^N - 1) \frac{1}{f_n} \psi'(T_n^\varphi) \\ &\quad + N a^N (\psi'^{-1}(a) - 1) \psi'(S_n^\varphi) \pmod{\varrho^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Comme  $a^N (\psi'^{-1}(a) - 1)$  est inversible par choix de  $a$ , il vient  $\frac{1}{f_n} \psi'(T_n^\varphi) \frac{\psi'^{-1}(a) - a^N}{a^N (\psi'^{-1}(a) - 1)} \equiv N \psi'(S_n^\varphi) \pmod{\varrho^{2n+1}}$ , soit, toujours

$$\text{dans } \mathbf{Z}_\varrho^{(g)} : \frac{1}{N f_n} \psi'(T_n^\varphi) \frac{1 - \psi'(a) a^N}{a^N (1 - \psi'(a))} \equiv \psi'(S_n^\varphi) \pmod{\varrho^{n+1}}.$$

Grâce aux résultats de Fresnel ([2], § 2) on peut faire le lien avec les nombres de Bernoulli généralisés.

LEMME II.2. — On a la congruence dans  $\mathbf{Z}_\varrho^{(g)}$  :

$$\frac{B_N(\underline{\psi'} \theta^\circ)}{N} \equiv \frac{1}{N f_n} \psi'(T_n^\varphi) \pmod{\varrho^{n+1}} \quad (n \geq 1).$$

En effet, c'est la proposition 3 de [2] appliquée au caractère de Dirichlet  $\underline{\psi}' \underline{\theta}^\circ$ , compte tenu du fait que  $\sum_{u=1}^{f_n} \underline{\psi}' \underline{\theta}^\circ(u) u^N = \underline{\psi}'(\Gamma_n^\varphi)$ .

COROLLAIRE II.1. — On obtient la congruence dans  $\mathbf{Z}_\varrho^{(g)}$  :

$$\underline{\psi}'(S_n^\varphi) \equiv \frac{1 - \underline{\psi}'(a)a^N}{a^N(1 - \underline{\psi}'(a))} \frac{B_N(\underline{\psi}' \underline{\theta}^\circ)}{N} \pmod{\varrho^{n+1}} \quad (n \geq 1).$$

### 3. Annulation limite.

Il ne reste plus qu'à utiliser l'approximation  $\varrho$ -adique des fonctions  $L$   $\varrho$ -adiques "en  $s = 1$ " au moyen des nombres de Bernoulli généralisés telle qu'elle est explicitée par Fresnel dans [2] (§ 5, p. 329) : on a  $\left(1 - \frac{\underline{\psi}'(\varrho)}{\varrho}\right) L_\varrho(\underline{\psi}') = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{B_\varrho n_{(\varrho-1)}(\underline{\psi}' \underline{\theta}^\circ)}{\varrho^n(\varrho-1)}\right)$ , ce qui, compte tenu de l'égalité de Leopoldt-Fresnel

$$L_\varrho(1, \underline{\psi}') = \left(1 - \frac{\underline{\psi}'(\varrho)}{\varrho}\right) L_\varrho(\underline{\psi}')$$

permet d'écrire :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{B_\varrho n_{(\varrho-1)}(\underline{\psi}' \underline{\theta}^\circ)}{\varrho^n(\varrho-1)}\right) = L_\varrho(1, \underline{\psi}')$ .

On constate que la suite des  $\underline{\psi}'(S_n^\varphi)$  a une limite  $\varrho$ -adique égale à  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \underline{\psi}'(a)a^N}{a^N(1 - \underline{\psi}'(a))} \frac{B_N(\underline{\psi}' \underline{\theta}^\circ)}{N} = -L_\varrho(1, \underline{\psi}')$ .

D'après le Th. I.1,  $\mathcal{A}^\varphi$  est annulé par le représentant  $S_n^\varphi$  (pour  $n$  assez grand) donc est annulé par  $\underline{\psi}'(S_n^\varphi)$  en tant que  $\mathbf{Z}_\varrho^{(g)}$ -module ; par conséquent, on a prouvé <sup>(1)</sup> :

THEOREME II.1. — Soit  $K$  une extension abélienne réelle de  $\mathbf{Q}$  de degré premier à  $\varrho$ . Soit  $\varphi$  un caractère  $\varrho$ -adique irréductible de  $K$ ,  $\varphi \neq 1$ . Soit  $M$  la  $\varrho$ -extension abélienne maximale de  $K$  non ramifiée en dehors de  $\varrho$ , soit  $\mathcal{A} = \text{Gal}(M/K)$  et soit  $\mathcal{A}^\varphi$  la  $\varphi$ -composante de  $\mathcal{A}$  considérée comme  $\mathbf{Z}_\varrho^{(g)}$ -module. Alors l'élément  $L_\varrho(1, \underline{\psi}')$  (valeur en 1 de la fonction  $L$   $\varrho$ -adique associée à  $\underline{\psi}'|_\varphi$ ) de  $\mathbf{Z}_\varrho^{(g)}$  annule  $\mathcal{A}^\varphi$ .

<sup>(1)</sup> Des résultats analogues, sans l'hypothèse de "degré premier à  $\varrho$ ", viennent d'être obtenus par B. Oriat dans le cadre développé dans [5].

*Remarque II.1.* — Ce résultat est une approche de la conjecture (notée problème  $B^+$  dans [4], p. 62) sur l'annulation du groupe des classes d'idéaux dans le cas réel ainsi que de celle (notée problème  $A^+$ , dans [4], p. 62) sur l'égalité des invariants classes et analytiques.

Le Th. II.1 est valable sans hypothèse restrictive, mais il ne conduit pas à la démonstration de ces conjectures sans adjonction d'hypothèses supplémentaires. Si l'on fait des hypothèses du genre de celles de [3] et [7], on constate qu'elles entraînent essentiellement la monogénéité de  $\mathcal{A}$ , ce qui conduit, grâce au Th. II.1 ci-dessus à un résultat sur les ordres des  $\mathcal{A}^\varphi$  (compte tenu de la formule globale du nombre de classes généralisées); on peut alors conclure comme dans [3] que la conjecture est vraie dans ce cas.

Terminons par une propriété qui permet dans la pratique de trouver la valuation  $\mathfrak{L}$ -adique de  $L_{\mathfrak{L}}(1, \psi')$ :

PROPOSITION II.1. — *Posons, pour tout  $n \geq 0$ ,*

$$\psi'(S_n^\varphi) Z_{\mathfrak{L}}^{(g)} = \mathfrak{L}^{\mu_n^\varphi} Z_{\mathfrak{L}}^{(g)}$$

*et posons  $L_{\mathfrak{L}}(1, \psi') Z_{\mathfrak{L}}^{(g)} = \mathfrak{L}^{\mu^\varphi} Z_{\mathfrak{L}}^{(g)}$ . Soit  $n_0$  un entier tel que  $\mu_{n_0}^\varphi \leq n_0$ , alors  $\mu_n^\varphi = \mu_{n_0}^\varphi$  pour tout  $n \geq n_0$  et  $\mu^\varphi = \mu_{n_0}^\varphi$ .*

COROLLAIRE II.2. — *En pratique,  $\mu^\varphi$  est la valeur  $\mu_{n_0}^\varphi$  obtenue pour le plus petit entier  $n_0 \geq 0$  tel que  $\mu_{n_0}^\varphi \leq n_0$ .*

*Démonstration.* — Si  $\overline{S}_{n+1}^{\varphi} = \sum_{\tau \in \overline{G}_{n+1}} a_\tau \tau$  alors

$$S_{n+1}'^\varphi \equiv \sum_{\tau \in \overline{G}_{n+1}} a_\tau \chi_{n+1}^*(\tau) \tau^{-1} \pmod{\mathfrak{L}^{n+2}};$$

or  $\chi_{n+1}^*(\tau) \equiv \chi_n^*(\tau) \pmod{\mathfrak{L}^{n+1}}$  et  $\chi_n^*(\tau) = \chi_n^*(\tilde{\tau})$  ( $\tilde{\tau}$  image de  $\tau$  dans  $\overline{G}'_n$ ) d'où  $S_{n+1}'^\varphi \equiv \sum_{\tau \in \overline{G}'_{n+1}} a_\tau \chi_n^*(\tilde{\tau}) \tau^{-1} \pmod{\mathfrak{L}^{n+1}}$  et la projection  $S_{n+1}^\varphi$  de  $S_{n+1}'^\varphi$  dans  $Z_{\mathfrak{L}}[G]$  vérifie

$$S_{n+1}^\varphi \equiv \sum_{\tau \in \overline{G}'_{n+1}} a_\tau \chi_n^*(\tilde{\tau}) \tilde{\tau}'^{-1} \pmod{\mathfrak{L}^{n+1}} \quad (\tilde{\tau}' \text{ image de } \tilde{\tau} \text{ dans } G).$$

D'après le Th. II.3 de [5] (p. 42), la projection canonique de  $\overline{S}_{n+1}^{\varphi}$  dans  $Z_{\mathfrak{L}}[\overline{G}'_n]$  est égale à  $\overline{S}_n^{\varphi}$ .

On a :

$$\overline{S'_n}^\varphi = \sum_{\tau \in \overline{G}'_{n+1}} a_\tau \tilde{\tau} \text{ soit } S'_n{}^\varphi \equiv \sum_{\tau \in \overline{G}'_{n+1}} a_\tau \chi_n^*(\tilde{\tau}) \tilde{\tau}^{-1} \pmod{\ell^{n+1}} \text{ et}$$

$$S_n{}^\varphi \equiv \sum_{\tau \in \overline{G}'_{n+1}} a_\tau \chi_n^*(\tilde{\tau}) \tilde{\tau}^{-1} \pmod{\ell^{n+1}}, \text{ d'où le résultat puisque l'on}$$

a obtenu  $S_{n+1}{}^\varphi \equiv S_n{}^\varphi \pmod{\ell^{n+1}}$ .

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. COATES and S. LICHTENBAUM, On  $\ell$ -adic Zeta functions, *Ann. of Math.*, 98 (1973), 498-550.
- [2] J. FRESNEL, Nombres de Bernoulli et fonctions L  $p$ -adiques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble 17, 2 (1967), 281-333.
- [3] R. GILLARD, Sur le groupe des classes d'idéaux des extensions abéliennes réelles, à paraître dans le Sémin. Delange, Pisot, Poitou (exposé du 3 janvier 1977).
- [4] G. GRAS, Classes d'idéaux des corps abéliens et nombres de Bernoulli généralisés, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble 27, 1 (1977), 1-66.
- [5] G. GRAS, Application de la notion de  $\varphi$ -objet à l'étude du groupe des classes d'idéaux des extensions abéliennes, *Publ. math. Univ. de Besançon* (1975-76).
- [6] G. GRAS, Etude d'invariants relatifs aux groupes des classes des corps abéliens, *Soc. Math. France, Astérisque*, 41-42 (1977), 35-53.
- [7] R. GREENBERG, On  $p$ -adic L-functions and cyclotomic fields II, *Nagoya Math. Jour.*, 67 (1977).
- [8] K. IWASAWA, On  $\mathbf{Z}_\ell$ -extensions of algebraic number fields, *Ann. of Math.*, 98 (1973), 246-326.
- [9] B. ORIAT et Ph. SATGE, Un essai de généralisation du Spiegelungssatz, à paraître au *Journal de Crelle*.

Manuscrit reçu le 15 juin 1977.

Georges GRAS,  
Faculté des Sciences  
Mathématiques (E.R.A. 070654)  
25030 Besançon Cedex.