ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANNE CUMENGE

Extension dans des classes de Hardy de fonctions holomorphes et estimations de type «mesures de Carleson» pour l'équation $\bar{\partial}$

Annales de l'institut Fourier, tome 33, n° 3 (1983), p. 59-97

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_3_59_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 3 (1983), 59-97

EXTENSION DANS DES CLASSES DE HARDY DE FONCTIONS HOLOMORPHES ET ESTIMATIONS DE TYPE « MESURES DE CARLESON » POUR L'ÉQUATION $\bar{\partial}$

par Anne CUMENGE

0. INTRODUCTION ET ENONCE DES RESULTATS NOTATIONS

Soit $D = \{z \in D' \,|\, r(z) < 0\} \subset\subset D' \subset \mathbf{C}^n$ un domaine strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$, borné à frontière C^2, V un sous-ensemble analytique de D. G.M. Henkin démontre dans [9] que toute fonction holomorphe bornée sur V s'étend en une fonction holomorphe bornée dans D, lorsque $V = V' \cap D$, où V' est une variété analytique complexe définie dans un voisinage de D et transverse à ∂D.

Il est alors naturel de s'intéresser à un problème analogue d'extension dans les espaces de Hardy $H^p(D)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$.

Nous dirons que V est un sous-ensemble analytique transverse de D, de codimension k, de classe C^2 jusqu'au bord, s'il existe des fonctions $u_1, \ldots, u_k$ holomorphes dans D, de classe C^2 dans un voisinage U de $\bar{D}$, telles que :

$$V = \{z \in D \,|\, u_1(z) = \cdots = u_k(z) = 0\},$$

les formes $\partial r(z)$, $\partial u_1(z), \ldots, \partial u_k(z)$ étant linéairement indépendantes pour tout z de $\partial D \cap V'$

$$\left(\text{où } \partial = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}\, dz_i,\ V' = \{z \in U \,|\, u_1(z) = \cdots = u_k(z) = 0\}\right).$$

Nous notons :

$$\mu_{k-1} = [d(z, \partial D \cap V')]^{k-1}\, \lambda_V, \tag{0.1}$$

où λ_V est la mesure d'intégration sur V.

Le résultat essentiel de l'article est le suivant :

THEOREME 0.1. – *Soient* D *un domaine borné strictement pseudo-convexe de* $\mathbf{C}^n$ *à frontière* C^2, V *un sous-ensemble analytique transverse de* D, *de codimension* $k\,(k \geqslant 1)$, *de classe* C^2 *jusqu'au bord. Une fonction* f *holomorphe sur* V (*soit* $f \in \mathcal{O}(V)$) *est la restriction à* V *d'une fonction* F *de* $H^p(D)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ *si et seulement si* f *appartient à* $L^p(\mu_{k-1})$.

Plus précisément, il existe un opérateur linéaire borné d'extension de $\mathcal{O}(V) \cap L^p(\mu_{k-1})$ *dans* $H^p(D)$.

Les conditions imposées à V sont moins contraignantes que dans [9] : le prolongement de V au delà de D est seulement de classe C^2 et non analytique complexe ; d'autre part V peut présenter des singularités isolées en dehors d'un voisinage de ∂D (notons cependant que la méthode de [9] permet d'admettre l'existence de telles singularités pour V, comme il est montré dans [8]). Notre résultat est le meilleur possible en ce sens que, sous les hypothèses faites sur V et D, la condition sur f est nécessaire et suffisante.

La méthode d'extension adoptée diffère dans son esprit de celle de [9], puisque nous nous ramenons à un problème de Cousin, après une extension "naturelle" près de V. Le point délicat est la résolution d'équations $\bar\partial G = \omega$ avec estimations de type "L^p au bord" ou "mesures de Carleson", les espaces $V^\alpha(D)$ des mesures de Carleson d'ordre $\alpha \geqslant 0$ définis dans [2] apparaissant comme un outil bien adapté à notre problème. Nous démontrons plus précisément le théorème suivant (les définitions des espaces de mesures considérés sont rappelées plus loin, cf. définitions (0.4) à (0.7)) :

THEOREME 0.2. – *Soient* D *un domaine borné strictement pseudo-convexe de* $\mathbf{C}^n$, *à frontière* C^2, *de fonction d'exhaustion* r, *et* ω *une* $(0,q)$ *forme* $\bar\partial$*-fermée dans* D, (*où* $q \geqslant 1$).

Si $(-r)^\sigma[|\omega| + (-r)^{-1/2}|\bar\partial r \wedge \omega|] \in V^\alpha(D)$ (*respectivement* $W^{1-1/p}(D)$) *où* $\alpha \geqslant 0$, $\sigma > \max(0, n(\alpha-1))$, (*respectivement* $\sigma > 0$, $1 < p < +\infty$) *l'équation* $\bar\partial G = \omega$ *admet dans* D *une solution telle que :*

si $q = 1$, $(-r)^{\sigma-1}|G| \in V^\alpha(D)$ (*respectivement* $W^{1-1/p}(D)$).

si $1 < q \leqslant n$, $(-r)^{\sigma-1/2}[|G| + (-r)^{-1/2}|\bar\partial r \wedge G|] \in V^\alpha(D)$ (*respectivement* $W^{1-1/p}(D)$).

Nous suivrons le *plan de travail* suivant :

Dans la partie I, nous utilisons une construction de noyaux à poids due à Berndtsson-Anderson [3] pour démontrer le théorème 0.2 ; nous obtenons un noyau qui permet à la fois des estimations classiques dans des classes de Bergman, analogues à celles obtenues dans [7] puis [5], et des estimations nouvelles en termes de mesures de Carleson. Dans le dernier paragraphe de cette partie, et en vue de la preuve du théorème 0.1, nous introduisons dans les estimations du théorème 0.2 un poids de la forme $u_1 \ldots u_m(z)$ (où $u_i (i = 1, \ldots, m)$ est de classe C^1 sur D'). Les résultats du théorème 0.2 peuvent être obtenus à partir du noyau de H. Skoda [14] par la méthode déjà utilisée dans [6], mais nous avons préféré construire un noyau explicite, ce qui donne plus aisément les estimations avec un poids de type $u_1 \ldots u_m(z)$.

La partie II est essentiellement consacrée à la preuve du théorème 0.1. Après avoir prouvé dans le paragraphe 1 la nécessité de la condition sur f, nous traitons dans le paragraphe 2 le problème d'extension lorsque D est strictement convexe et

$$V = \{z \in D | z_1 = \cdots = z_k = 0\}$$

une variété linéaire transverse, une récurrence ramenant à l'étude du cas où V est de codimension $k = 1$. Nous donnons également un résultat d'extension dans des classes de Hardy avec poids holomorphes, dont nous aurons besoin pour le problème global de cohomologie. Dans le paragraphe 3 nous prouvons que la condition sur f du théorème 0.1 est suffisante et sommes conduits à l'étude d'un triple complexe classique associé aux opérateurs Cech-cobord, $\bar{\partial}$ et produit intérieur P_u relatif à $(u_1, \ldots, u_k)$; comme les estimations dont nous avons besoin varient d'une étape à l'autre de la résolution, nous ne pouvons appliquer sans précaution les résultats connus et le paragraphe donne les éléments permettant de se ramener au schéma classique de [12] par exemple.

Notons que notre méthode d'extension locale, appliquée au cas $p = +\infty$ permet d'étendre une fonction de $\mathcal{O}(V) \cap L^\infty(\mu_{k-1})$ en une fonction appartenant à la classe BMO (∂D) (définie dans [17]) et non, a priori, à $H^\infty(D)$.

Dans un dernier paragraphe, nous déduisons du théorème 0.1 un résultat d'approximation des fonctions holomorphes sur V appartenant à $L^p(\mu_{k-1})$ par des fonctions holomorphes bornées sur V, et le résultat suivant d'extension dans des classes de Bergman :

THEOREME 0.3. – *Sous les hypothèses du théorème 0.1, une fonction f holomorphe sur* V *admet une extension* F *holomorphe dans* D *appartenant à* $L^p((-r)^{s-k}\lambda_D)$ *si et seulement si f appartient à* $L^p((-r)^s\lambda_V)$ *où* $1 \leqslant p < +\infty$, $s \geqslant k$, λ_D *mesure de Lebesgue sur* D).

Une grande partie de ce travail a fait l'objet d'une thèse de 3^e cycle [6] ; je remercie le Professeur E. Amar qui m'en a proposé le sujet et m'a donné de fertiles conseils, ainsi que le Professeur G.M. Henkin pour d'utiles discussions sur le sujet.

Les résultats de la partie I de cet article, en partie annoncés dans [6], n'y étaient démontrés, par un procédé différent, que pour les (0,1) formes ; nous avons par ailleurs amélioré le résultat de [6] en exhibant ici un opérateur d'extension linéaire.

Depuis la réalisation de ce travail sous forme de 3^e cycle, G.M. Henkin et Leiterer d'une part [10], E. Amar [1] d'autre part, ont étudié indépendamment le cas où la variété V n'est plus transverse, les estimations H^p $(1 \leqslant p < +\infty)$ [1] reposant encore sur la partie II présentée ici.

Notations et définitions

1) D est un domaine borné strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$, à frontière C^2, s'il existe un domaine D' de $\mathbf{C}^n$ et une fonction r de classe C^2, strictement plurisousharmonique dans D', vérifiant $dr(z) \neq 0$ si $z \in \partial D$, tels que :

$$D = \{z \in D' \mid r(z) < 0\} \subset\subset D'.$$

D est strictement convexe, borné dans $\mathbf{C}^n$, à frontière C^2, si $D = \{z \in D' \mid r(z) < 0\} \subset\subset D'$, où r est de classe C^2, strictement convexe dans D', c'est-à-dire $d^2r(z).\ w^{(2)} > 0$, si $z \in D'$, $w \in \mathbf{C}^n - \{0\}$ (où $d^2r(z).\ w^{(2)}$ est la valeur en w de la forme quadratique associée à la différentielle d'ordre 2, $d^2r(z)$).
On note pour $\epsilon \in \mathbf{R}$: $D_\epsilon \doteq \{z \in D' \mid r(z) < -\epsilon\}$, $r_\epsilon = r + \epsilon$.
Pour $x \in \partial D$, $\Pi_x^{\mathbf{C}} = \{z \in \mathbf{C}^n \mid \partial r(x).(x - z) = 0\}$ désigne le plan tangent complexe en x à ∂D.

Pour $x \in \partial D$ et $t > 0$, $A(x, t)$ désigne la pseudo-boule de Hörmander-Koranyi [11] de centre x, de rayon t : si $b(x, t)$ est la boule euclidienne de $\Pi_x^{\mathbf{C}}$ de centre x de rayon $\sqrt{t}$, $A(x, t)$ est l'ensemble des points de D dont la distance à $b(x, t)$ est inférieure à t. Nous notons ρ la pseudo-distance de Koranyi sur ∂D [15]. Pour $t \leqslant t_0$, où $t_0 > 0$ est suffisamment petit, nous pouvons considérer que $A(x, t)$ est définie de la manière suivante :

$$\left.\begin{array}{l} \exists t_0 > 0 \mid \forall t,\ 0 < t \leqslant t_0,\ \forall x \in \partial D : \\ A(x, t) = \{z \in D \mid -r(z) + \rho(z', x) < t\}, \\ \text{où } z' \text{ est la projection normale de } z \text{ sur } \partial D. \end{array}\right] \tag{0.2}$$

2) $C^s_{p,q}(D)$ est l'espace des formes différentielles de bidegré (p, q) dont les coefficients sont de classe C^s sur D. Si $\beta \in C^s_{p,q}(D)$ s'écrit $\beta = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \beta_{I,J}\, dz^I \wedge d\bar{z}^J$ où $I = (i_1, \ldots, i_p)$, $J = (j_1, \ldots, j_q)$ sont des multi-indices tels que $i_1 < \ldots < i_p$ et $j_1 < \ldots < j_q$, on note :

$$|\beta| = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} |\beta_{I,J}| \tag{0.3}$$

3) λ_D, $\lambda_{\partial D}$ etc., ou λ s'il n'y a pas de confusion, désignera la mesure de Lebesgue sur D, ∂D etc.

$V^0(D) = W^0(D)$ est l'espace des mesures bornées sur D. Nous rappelons quelques définitions et résultats sur les espaces $V^\alpha(D)$ des mesures de Carleson d'ordre $\alpha > 0$ et les espaces $W^{1-1/p}(D)$ $(1 < p < +\infty)$, définis dans [2] : soit ν une mesure sur D :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Pour } \alpha \geqslant 1 : \\ \nu \in V^\alpha(D) \iff \exists C > 0,\ \forall x \in \partial D,\ \forall t > 0,\ |\nu|(A(x, t)) \leqslant C t^{n\alpha}. \end{array}\right. \tag{0.4}$$

Lorsque $\nu \in V^1(D)$ on dit simplement que ν est une mesure de Carleson dans D.

Pour $0 < \alpha < 1$, $V^\alpha(D)$ peut être défini comme interpolé réel faible entre $V^0(D)$ et $V^1(D)$:

$$\text{Si } 0 < \alpha < 1 \ :\ V^\alpha(D) = (V^0(D), V^1(D))_{\alpha,\infty}. \tag{0.5}$$

L'espace $W^{1-1/p}(D)$ peut être caractérisé des deux manières suivantes :

Si $1 < p < +\infty$: $W^{1-1/p}(D) = (V^0(D), V^1(D))_{1-1/p,p}$ (0.6)

(interpolé réel fort).

Si $1 < p < +\infty$:

$$\nu \in W^{1-1/p}(D) \Longleftrightarrow \exists \nu_0 \in V^1(D), \exists h \in L^p(\nu_0) | \nu = h\nu_0 . \quad (0.7)$$

4) Soient D un domaine borné strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$, à frontière C^2, V un sous-ensemble analytique de D ; nous désignons par $\mathcal{O}(D)$, $H^\infty(D)$, $C^k(D)$ $(0 \leqslant k \leqslant +\infty)$ (respectivement $\mathcal{O}(V)$, $H^\infty(V)$) les espaces des fonctions holomorphes, holomorphes bornées, de classe C^k sur D (respectivement sur V), par $H^p(D)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ l'espace des fonctions F holomorphes sur D telles que : $n(F) = \sup_{\epsilon > 0} \int_{\partial D_\epsilon} |F(z)|^p \, d\lambda(z) < +\infty$. Si $F \in H^p(D)$ on note $\|F\|_{H^p(D)} = [n(F)]^{1/p}$.

I. RESOLUTION DE L'EQUATION $\bar\partial u = f$ AVEC ESTIMATIONS DE TYPE MESURES DE CARLESON

Soit D un domaine strictement pseudo-convexe borné de $\mathbf{C}^n$, à frontière C^2, $D = \{z \in D' | r(z) < 0\} \subset\subset D' \subset \mathbf{C}^n$, où r est de classe C^2 strictement plurisouharmonique dans D', avec $dr(z) \neq 0$ si $z \in \partial D$. On note pour $\sigma > -1$:

$$\nu_\sigma = (-r)^\sigma \lambda_D , \quad \text{où } \lambda_D \text{ est la mesure de Lebesgue.} \quad (1.1)$$

Nous allons introduire, dans une construction de noyaux à poids due à Berndtsson et Anderson [3], une section du fibré de Cauchy-Leray bien adaptée à la géométrie du domaine D pour montrer :

THEOREME I.1. – *Soit f une $(0, q)$ forme $\bar\partial$-fermée dans* D $(q \geqslant 1)$.

a) *si* $|f| \in L^p(\nu_\sigma)$ *et* $|\bar\partial r \wedge f| \in L^p(\nu_{\sigma-1/2})$, *où* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et $\sigma > 0$, *l'équation* $\bar\partial g = f$ *admet une solution telle que pour* $0 \leqslant \eta \leqslant 1/2$, $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\beta} - 1$:

si $q = 1$: $|g| \in L^{p'}(\nu_{\sigma-1+\eta})$ *dès que* $\beta = 1$ *ou*

$$1 < \beta < 1 + \eta(n+\sigma)^{-1}$$

si $1 < q \leqslant n$: $|g| \in L^{p'}(\nu_{\sigma-(1/2)+\eta})$ *dès que* $\beta = 1$ *ou*

$$1 < \beta < 1 + \eta(n + \sigma + 1/2)^{-1},$$

$|\bar\partial r \wedge g| \in L^{p'}(\nu_{\sigma-1+\eta})$ *dès que* $\beta = 1$ *ou*

$$1 < \beta < 1 + \eta(n + \sigma)^{-1}$$

b) *si* $(-r)^\sigma [|f| + (-r)^{-1/2} |\bar\partial r \wedge f|] \in V^\alpha(D)$, (*respectivement* $W^{1-1/p}(D)$) *où* $\alpha \geqslant 0$ *et* $\sigma > \max[0, n(\alpha - 1)]$, (*respectivement* $\sigma > 0$ et $1 < p < +\infty$), *l'équation* $\bar\partial g = f$ *admet une solution dans* D *telle que :*

si $q = 1$: $(-r)^{\sigma-1} |g| \in V^\alpha(D)$ (*respectivement* $W^{1-1/p}(D)$)

si $1 < q \leqslant n$: $(-r)^{\sigma-1/2} [|g| + (-r)^{-1/2} |\bar\partial r \wedge g|] \in V^\alpha(D)$

(*respectivement* $W^{1-1/p}(D)$) .

Les résultats de a) ne sont pas nouveaux (voir [7], et lorsque $q = 1$, D boule de $\mathbf{C}^2$, [5]; par contre le noyau utilisé dans [7] ne semble pas satisfaire toutes les estimations de b).

1. Introduction d'un noyau à poids.

DEFINITION [3]. — *Pour* $(\zeta, z) \in \bar D \times \bar D$, $\zeta \neq z$:

$$K^{(k)}(\zeta, z) = -c_n \sum_{m=0}^{n-1} \gamma_m (1 - \langle R, \zeta - z\rangle)^{-k-m} \langle s, \zeta - z\rangle^{-n+m} s^0 \wedge (dR^0)^m \wedge (ds^0)^{n-m-1}$$

où $k > 0$, $\gamma_m = (-1)^m \dfrac{(n-1)!\,(k-m+1)!}{m!\,(m-1)!}$, c_n *constante*

$$R = (R_1, \ldots, R_n) : \bar D \times \bar D \longrightarrow \mathbf{C}^n ; \quad R^0 = \sum_{j=1}^n R_j d(\zeta_j - z_j); \tag{1.2}$$

$$\langle R, \zeta - z\rangle = \sum_{j=1}^n R_j(\zeta, z)(\zeta_j - z_j)$$

$$s = (s_1, \ldots, s_n) : \bar D \times \bar D - \Delta \longrightarrow \mathbf{C}^n ; \quad s^0 = \sum_{j=1}^n s_j d(\zeta_j - z_j);$$

$$\langle s, \zeta - z\rangle = \sum_{j=1}^n s_j(\zeta, z)(\zeta_j - z_j)$$

s est une section du fibré de Cauchy-Leray au-dessus de $\bar D \times \bar D - \Delta$ (*où* Δ *est la diagonale de* D).

D'après [3] (Th. 5 et exemple 1), si R est de classe C^1 sur $\bar{D} \times \bar{D}$, $R(\zeta, .)$ holomorphe sur D pour tout ζ de D, avec par exemple $\mathrm{Re}\,[1 - \langle R, \zeta - z\rangle] > 0$ sur $\bar{D} \times \bar{D}$, si la section s, de classe C^1, satisfait les deux conditions suivantes :

$$(\mathcal{S}_1)\ |s(\zeta, z)| \leqslant \text{cste}\, |\zeta - z|, \quad (\mathcal{S}_2)\ |\langle s, \zeta - z\rangle| \geqslant \text{cste}\, |\zeta - z|^2,$$

uniformément pour $(\zeta, z) \in \bar{D} \times G$ pour tout compact $G \subset D$, alors le noyau $K^{(k)}(\zeta, z)$ satisfait la formule de Koppelman :

$$\left[\begin{array}{l} \forall f \in C^1_{p,q}(\bar{D}) \quad (\text{où } q > 0)\,;\ \forall z \in D : \\ f(z) = C_{p,q,n} \left\{ \int_{\partial D} f(\zeta) \wedge K^{(k)}_{p,q}(\zeta, z) \right. \\ \qquad + (-1)^{p+q+1} \int_D \bar\partial f(\zeta) \wedge K^{(k)}_{p,q}(\zeta, z) \\ \qquad\qquad \left. + (-1)^{p+q}\, \bar\partial_z \left[\int_D f(\zeta) \wedge K^{(k)}_{p,q-1}(\zeta, z)\right] \right\} \end{array}\right. \tag{1.3}$$

où $K^{(k)}_{p,q}$ est la composante de $K^{(k)}$ qui est de bidegré (p, q) en z et $(n - p, n - q - 1)$ en ζ.

Pour le choix de R et s nous ferons appel à une construction de J.E. Fornaess ([8] Th. 16).

LEMME 1.1 [8]. — *Soit* D *un domaine strictement pseudoconvexe borné de* $\mathbf{C}^n$, *à frontière* C^2 ; *il existe un voisinage* D' *de* D, $D \subset\subset D'$, *une fonction* r *strictement plurisousharmonique, de classe* C^2 *dans* D', *telle que* $D = \{z \in D' \mid r(z) < 0\}$, $dr(z) \neq 0$ *si* $z \in \partial D$, *et une fonction* $F \in C^1(D' \times D')$ *telle que :*

(i) $F(\zeta, .)$ *est holomorphe sur* D', $\forall \zeta \in D'$

(ii) $\forall G$ *compact* $\subset D'$, $\exists \delta_G > 0$, $\forall (\zeta, z) \in G \times G$:

$$\mathrm{Re}\, F(\zeta, z) \geqslant r(\zeta) - r(z) + \delta_G\, |\zeta - z|^2$$

(iii) $F(\zeta, \zeta) = 0$, $\forall \zeta \in D'$

(iv) $d_\zeta F(\zeta, z)|_{\zeta = z} = - d_z F(\zeta, z)|_{\zeta = z} = \partial r(z)$

(v) $F(\zeta, z) = \sum_{j=1}^{n} F_j(\zeta, z)(\zeta_j - z_j)$ où $F_j \in C^1(D' \times D')$, $F_j(\zeta, .)$ *est holomorphe sur* D', $\forall \zeta \in D'$.

La propriété (iv) n'est pas mentionnée dans [8] mais résulte immédiatement de la définition de F.

Nous supposons que la fonction r d'exhaustion choisie pour D est celle du lemme 1.1 et posons pour $\epsilon \geqslant 0$:

$$2R_j^\epsilon = -(-r(\zeta)+\epsilon)^{-1} F_j$$

$$s_j = BP_j + r(\zeta)\, Q_j$$

où $Q_j(\zeta, z) = P_j(z, \zeta) = (1/2)\, F_j(z, \zeta)$, $P = (P_1, \ldots, P_n)$,

$$Q = (Q_1, \ldots, Q_n), \quad B(\zeta, z) = -r(z) + \langle Q, z - \zeta\rangle,$$

$$C(\zeta, z) = B(z, \zeta).$$

Nous déduisons du lemme 1.1 (ii) que pour ϵ_0 assez petit et $(\zeta, z) \in \overline{D}_{-\epsilon_0} \times \overline{D}_{-\epsilon_0}$:

$$\min(\operatorname{Re} C(\zeta, z), \operatorname{Re} B(\zeta, z)) \geqslant \frac{-r(\zeta)}{2} - \frac{r(z)}{2} + C_1\,|\zeta - z|^2 \tag{1.4}$$

$$\operatorname{Re} B \operatorname{Re} C - r(z)\, r(\zeta) \geqslant \left(\frac{r(\zeta) - r(z)}{2}\right)^2 + 2C_1(-r(\zeta) - r(z))\,|\zeta - z|^2 + C_1^2\,|\zeta - z|^4 . \tag{1.5}$$

En écrivant que :

$$(\operatorname{Im} B \operatorname{Re} C)^2 + (\operatorname{Im} C \operatorname{Re} B)^2 + 2r(z)\, r(\zeta) \operatorname{Im} B \operatorname{Im} C \geqslant 2\,|\operatorname{Im} B \operatorname{Im} C|\,[\operatorname{Re} B \operatorname{Re} C - r(z)\, r(\zeta)]$$

nous déduisons de (1.5) que s est une section du fibré de Cauchy-Leray au-dessus de $\overline{D} \times \overline{D} - \Delta$ et satisfait $(\mathcal{S}_2)$; la vérification de $(\mathcal{S}_1)$ est immédiate ; les noyaux $K_\epsilon^{(k)}(\epsilon > 0)$ définis à partir de (1.2) par un tel choix de s et R_ϵ satisfont donc la formule de Koppelman. Vérifions que le noyau $K_0^{(k)}$ satisfait encore (1.3). Notons :

$$\Pi = \sum_{j=1}^{n} P_j\, d(\zeta_j - z_j), \; \Omega = \sum_{j=1}^{n} Q_j\, d(\zeta_j - z_j) ;$$

$$K_\epsilon^{(k)} = -c_n \sum_{m=0}^{n-1} K_\epsilon^{(k)m} .$$

Nous avons :

$$s^0 = B\Pi + r(\zeta)\,\Omega,$$

$$dR_\epsilon^0 = -(-r(\zeta)+\epsilon)^{-1}\, d_\zeta \Pi - (-r(\zeta)+\epsilon)^{-2}\, dr(\zeta) \wedge \Pi .$$

Remarquant que $\Pi \wedge \Omega = O(|z - \zeta|)$ et utilisant (1.4), nous obtenons : $|s^0 \wedge (dR_\epsilon^0)^m| = O(1)\,|z - \zeta|\,(-r(\zeta)+\epsilon)^{-m}$

$$|K_\epsilon^{(k)m} = O(1)[\epsilon + C(\zeta, z)]^{-m-1} |\zeta - z|^{1+2m-2n} = O(1)|z - \zeta|^{1-2n}$$

uniformément en $\zeta \in \overline{D}$, $\epsilon > 0$, $z \in G$, pour tout compact G de D ; par suite :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \overline{\partial}_z \left(\int_D f(\zeta) \wedge K_\epsilon^{(k)}(\zeta, z) \right) = \text{cste}\, f(z) + \int_D \overline{\partial} f(\zeta) \wedge K_0^{(k)}(\zeta, z) + (-1)^{p+q+1} \int_{\partial D} f(\zeta) \wedge K_0^{(k)}(\zeta, z)$$

uniformément en $z \in G$ pour tout G compact de D, et $K_0^{(k)}$ satisfait (1.3). Remarquons que $K_0(\zeta, z) = 0$ si $\zeta \in \partial D$, $\forall k \geqslant 1$; nous obtenons, en notant $K = K_0$:

Si $f \in C^1_{p,q}(\overline{D})$ avec $\overline{\partial} f = 0$, $g(z) = \int_D f(\zeta) \wedge K^{(k)}(\zeta, z)$ satisfait sur D l'équation $\overline{\partial} g = f$, dès que $k \geqslant 1$.

Par des procédés standard de régularisation, on peut affaiblir les hypothèses sur f et supposer par exemple f à coefficients mesures dans D avec $|f| + (-r)^{-1/2} |\overline{\partial} r \wedge f| \in V^0(D)$.

2. Estimations.

A – *Etude de* $K^{(k)}(\zeta, z)$

LEMME 2.1. – *Il existe* $\delta > 0$ *tel que, si* $|\zeta - z| < \delta$, $(\zeta, z) \in \overline{D} \times \overline{D}$:

$$\begin{aligned} |C(\zeta, z)| &\approx -r(\zeta) - r(z) + |\zeta - z|^2 + |\operatorname{Im} C(\zeta, z)| \\ &\approx -r(\zeta) + |r(\zeta) - r(z)| + |\zeta - z|^2 + |\operatorname{Im} B(\zeta, z)| \qquad (2.1) \\ &\approx -r(z) + |r(\zeta) - r(z)| + |\zeta - z|^2 + |\operatorname{Im} C(\zeta, z)| \end{aligned}$$

$$|C(\zeta, z)| \approx |B(\zeta, z)| \qquad (2.2)$$

$$|\langle s, \zeta - z \rangle| \geqslant \text{cste}\, \{[|r(\zeta) - r(z)| + |\operatorname{Im} C(\zeta, z)| + |z - \zeta|^2]^2 + (-r(\zeta) - r(z))|z - \zeta|^2\}. \qquad (2.3)$$

D'après le lemme 1.1 (iii) et (iv)) nous avons :

$$2 \operatorname{Re} F(\zeta, z) = r(\zeta) - r(z) + O(|z - \zeta|^2) \qquad (2.4)$$

$$F(\zeta, z) = -F(z, \zeta) + O(|z - \zeta|^2). \qquad (2.5)$$

Tenant compte de (ii), on en déduit les estimations (2.1) et (2.2). Posons :

$$A(\zeta, z) = (\operatorname{Im} B \operatorname{Re} C)^2 + (\operatorname{Im} C \operatorname{Re} B)^2 + 2r(z)\, r(\zeta) \operatorname{Im} B \operatorname{Im} C\,;$$

l'estimation (2.3) sur $\langle s, \zeta - z\rangle = B\,C - r(z)\, r(\zeta)$ découle de (1.5), (2.5) et de l'inégalité :

$$A(\zeta, z) \geqslant \left[\left(\frac{r(\zeta) + r(z)}{2}\right)^2 + C_1^2\, |\zeta - z|^4\right] [(\operatorname{Im} B)^2 + (\operatorname{Im} C)^2] - 2r(z)\, r(\zeta)\, |\operatorname{Im} B \operatorname{Im} C|$$

$$A(\zeta, z) \geqslant C_1^2\, |\zeta - z|^4\, [(\operatorname{Im} B)^2 + (\operatorname{Im} C)^2], \quad \forall (\zeta, z) \in \overline{D} \times \overline{D}.$$

Nous allons expliciter les coefficients de

$$K^{(k)}(\zeta, z) = c_n \sum_{m=0}^{n-1} K^{(k)m}(\zeta, z)$$

et les estimer pour $|\zeta - z|$ suffisamment petit.

Notons Z_m la composante de bidegré $(n, n-q)$ en ζ, $(0, q-1)$ en z de $s^0 \wedge (\overline{\partial} R^0)^m \wedge (\overline{\partial} s^0)^{n-m-1}$ (où $m \in \{0, \ldots, n-q\}$). Comme C et P_j (respectivement B et Q_j) sont holomorphes en $z \in D$ (respectivement en ζ), nous avons :

$$\left\{\begin{array}{l} Z_m = \sum_{i=1}^{3} Z_m^i \quad \text{avec :} \\ Z_m^1 = (r(\zeta))^{\epsilon_q (q-2) - m}\, B^{n-m-q}\, s^0 \wedge [r(\zeta)\, \overline{\partial}_z \Omega + \overline{\partial}_z \langle Q, z - \zeta\rangle \wedge \Pi]^{\epsilon_q} \wedge \theta_m^1 \\ Z_m^2 = (r(\zeta))^{q-1-m}\, B^{n-m-q}\, \overline{\partial} r(\zeta) \wedge \Pi \wedge \Omega \wedge \theta_m^2 \\ Z_m^3 = \epsilon_q\, (r(\zeta))^{q-1-m}\, B^{n-m-q}\, \overline{\partial} r(z) \wedge \Pi \wedge \Omega \wedge \theta_m^3\,, \\ \text{où les formes } \theta_m^i\ (i = 1, 2, 3) \text{ sont à coefficients bornés sur } \overline{D} \times \overline{D}, \\ \epsilon_1 = 0\,,\ \epsilon_q = 1 \text{ si } q > 1. \end{array}\right.$$

Pour toute $(0, q)$ forme f sur $D (q > 0)$:

$$f(\zeta) \wedge K^{(k)}(\zeta, z) = f(\zeta) \wedge \sum_{i=1}^{3} K_i^{(k)}(\zeta, z)$$

où $K_i^{(k)} = \sum_{m=0}^{n-q} K_i^{(k)m}$,

$$K_i^{(k)m} = \text{cste}\, (-r(\zeta))^{k+m}\, C^{-k-m}\, \langle s, \zeta - z\rangle^{-n+m}\, Z_m^i.$$

Utilisant le lemme 2.1 et les estimations :

$$|\Pi \wedge \Omega| = O(|z-\zeta|) \quad \text{et} \quad |s^0| = O(1)\,[-r(\zeta)\,|\zeta - z| + |r(\zeta)-r(z)| + |\operatorname{Im} C(\zeta,z)| + |z-\zeta|^2],$$

nous obtenons :

$$\forall (\zeta,z) \in \overline{D} \times \overline{D} - \Delta,\ |\zeta - z| < \delta,\ \forall m \in \{0,\dots,n-q\} :$$

$$|K_1^{(k)m}| + (-r(\zeta))^{1/2}\,[|K_2^{(k)m}| + |K_3^{(k)m}|] = O(1)\,\frac{(-r(\zeta))^k\,|B|^{n-m-1}}{|C|^{k+m}\,|\langle s,\zeta - z\rangle|^{n-m-1/2}}. \tag{2.6}$$

B – *Estimations de type* L^p *à poids*

Posons pour $\sigma > 0$, $m = 0,\dots,n-q$:

$$K_1^{(k)m}(\zeta,z) = (-r(\zeta))^{\sigma}\,N_1^{(k,\sigma)m}(\zeta,z);$$

$$K_3^{(k)m}(\zeta,z) = (-r(\zeta))^{\sigma}\,\overline{\partial} r(z) \wedge N_3^{(k,\sigma)m}(\zeta,z)$$

$$K_2^{(k)m}(\zeta,z) = (-r(\zeta))^{\sigma-1/2}\,\overline{\partial} r(\zeta) \wedge N_2^{(k,\sigma)m}(\zeta,z); \tag{2.7}$$

$$N_j^{(k,\sigma)} = \sum_{m=0}^{n-q} N_j^{(k,\sigma)m} \quad \text{où} \quad j = 1,2,3.$$

La partie a) du théorème I.1 découle du lemme 2.6.1 de [13], (qui reste valable si on remplace la mesure de Lebesgue de D par des mesures positives sur D), et du résultat suivant :

LEMME 2.2. –

a) $\displaystyle\sup_{z\in\overline{D}} \int_D |N_j^{(k,\sigma)}(\zeta,z)|^{\beta}\,dv_{\sigma-1/2}(\zeta) < +\infty$, si $j = 1,2$; $k \geqslant \sigma > 0$; $1 \leqslant \beta < (2(n+\sigma))^{-1} + 1$

$\displaystyle\sup_{z\in\overline{D}} \int_D |N_3^{(k,\sigma)}(\zeta,z)|^{\beta}\,dv_{\sigma}(\zeta) < \infty$, si $k \geqslant \sigma + \frac{1}{2}$; $1 \leqslant \beta < (2(n+\sigma+1/2))^{-1} + 1$

b) $\displaystyle\sup_{z\in\overline{D}} \int_D |K_j^{(k)}(\zeta,z)|\,d\lambda(\zeta) < +\infty$, si $j = 1,2,3$; $k \geqslant 1$

c) $\displaystyle\sup_{\zeta\in D} \int_D |N_j^{(k,\sigma)}(\zeta,z)|^{\beta}\,dv_{\sigma+\eta-1}(z) < +\infty$, si $j = 1,2$; $\eta \geqslant 0$, $k > \sigma + \eta$; $\beta = 1$ ou $1 < \beta < 1 + \eta(n+\sigma)^{-1}$

$\displaystyle\sup_{\zeta\in D} \int_D |N_3^{(k,\sigma)}(\zeta,z)|^{\beta}\,dv_{\sigma+\eta-1/2}(z) < +\infty$, si $\eta \geqslant 0$; $k > \sigma + \eta$, $\beta = 1$ ou $1 < \beta < 1 + \eta(n+\sigma+1/2)^{-1}$.

Le noyau $(-r(\zeta))^{-k}\,\mathrm{K}^{(k)}(\zeta, z)$ étant continu sur $\overline{\mathrm{D}} \times \overline{\mathrm{D}} - \Delta$, nous nous restreindrons dans les calculs au cas où $|\zeta - z| < a$, avec a choisi suffisamment petit.

Preuve de a). – D'après (2.6) et le lemme 2.2, nous avons par exemple :

$$|\mathrm{N}_j^{(k,\sigma)m}(\zeta, z)| = \mathrm{O}(1)\,\frac{(-r(\zeta))^{k-\sigma}\,|\mathrm{B}|^{n-1-m}}{|\mathrm{C}|^{k+m}\,|\langle s, \zeta - z\rangle|^{n-m-1/2}}, \quad (j = 1,2)$$

$$|\mathrm{N}_j^{(k,\sigma)m}(\zeta, z)| \tag{2.8}$$

$$= \mathrm{O}(1)\,\frac{(-r(\zeta))^{k-\sigma}[-r(z) + |r(\zeta) - r(z)| + |\mathrm{Im}\,\mathrm{C}(\zeta, z)| + |z - \zeta|^2]^{n-k-2m-1}}{\{[|r(\zeta) - r(z)| + |\mathrm{Im}\,\mathrm{C}(\zeta, z)| + |z - \zeta|^2]^2 + (-r(\zeta) - r(z))\,|\zeta - z|^2\}^{n-m-1/2}}$$

D'après le lemme 1.1 ((iii) et (iv)), il existe pour tout z de $\overline{\mathrm{D}}$ un changement de variables de classe C^1 de $\mathrm{B}_{2n}(z, a)$ dans $\mathbf{R}^{2n} \simeq \mathbf{C}^n$ de la forme

$$\Phi_z : \zeta \longrightarrow (r(\zeta) - r(z) + i\,\mathrm{Im}\,\mathrm{C}(\zeta, z),\ \zeta_{n_2} - z_{n_2}, \ldots, \zeta_{n_n} - z_{n_n});$$

les jacobiens de Φ_z et Φ_z^{-1} sont uniformément bornés sur $\mathrm{B}_{2n}(z, a)$ et $\Phi_z(\mathrm{B}_{2n}(z, a))$, et ce, uniformément en $z \in \overline{\mathrm{D}}$ (par compacité) (voir par exemple [14] lemme 7.1 pour un changement de variables de ce type).

Suivant alors par exemple [7], dont nous reprendrons les notations, passons aux coordonnées :

$t_1 = r(\zeta) - r(z)$, $t_2 = \mathrm{Im}\,\mathrm{C}(\zeta, z)$, $t_3, \ldots, t_{2n}$, puis aux coordonnées sphériques $t_1 = r\cos\varphi_1$, $t_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2$ etc. ; posant $\epsilon = -r(z)$ et $s_i = \cos\varphi_i$ $(i = 1,2)$ nous sommes ramenés à l'étude de l'intégrale :

$$\mathrm{I}_1 = \int_{\substack{|t|<1\\ t_1+\epsilon>0}} \frac{(t_{1+\epsilon})^{(k-\sigma)\beta+\sigma-1/2}(\epsilon + |t_1| + |t_2| + |t|^2)^{(n-k-1-2m)\beta}}{\{(|t_1| + |t_2| + |t|^2)^2 + (t_1 + 2\epsilon)\,|t|^2\}^{(n-m-1/2)\beta}}\,dt_1 \ldots dt_{2n}$$

$$\mathrm{I}_1 = \mathrm{O}(1)\int_{\substack{0<r,s_2<1\\ -1<s_1<1,\\ rs_1+\epsilon>0}} \frac{(rs_1 + \epsilon)^{(k-\sigma)\beta+\sigma-1/2}(\epsilon + r|s_1| + rs_2 + r^2)^{(n-m-1)\beta-1/2}\,r^{(2n-1)(1-\beta)}}{(\epsilon + r|s_1| + rs_2 + r^2)^{k\beta-1/2}\{rs_1 + 2\epsilon + [r + |s_1| + s_2]^2\}^{(n-m-1/2)\beta}}\,dr\,ds_1\,ds_2$$

$\left(\text{en remarquant que : } \dfrac{|s_1| + s_2}{4} \leqslant |s_1| + s_2\sqrt{1 - s_1^2} \leqslant |s_1| + s_2\right)$

$$\mathrm{I}_1 = \mathrm{O}(1)\int_{\substack{0<r,s_2<1\\ -1<s_1<1,\\ rs_1+\epsilon>0}} \frac{r^{(2n-1)(1-\beta)}\,dr\,ds_1\,ds_2}{(\epsilon + r|s_1| + rs_2 + r^2)^{\sigma(\beta-1)}\{rs_1 + 2\epsilon + [r + |s_1| + s_2]^2\}^{\frac{\beta+1}{2}}} \quad \text{dès que } k \geqslant \sigma$$

si $\beta = 1$:

$$\mathrm{I}_1 = \mathrm{O}(1) \int_{0<r,\,|s_1|,\,s_2<1} \frac{dr\, d\,|s_1|\, ds_2}{\epsilon + (r + |s_1| + s_2)^2} = \mathrm{O}(1)$$

uniformément en ϵ ;

si $\beta > 1$:

$$\mathrm{I}_1 = \mathrm{O}(1) \int \frac{r^{(2n-1)(1-\beta)}\, dr\, d\,|s_1|\, ds_2}{(\epsilon + r^2)^{\sigma(\beta-1)} \{\epsilon + r^2 + (|s_1| + s_2)^2\}^{\frac{\beta+1}{2}}} .$$

En intégrant en polaires par rapport à $(|s_1|, s_2)$ nous obtenons :

$$\mathrm{I}_1 = \mathrm{O}(1) \int_0^2 \frac{r^{(2n-1)(1-\beta)}\, dr}{(\epsilon + r^2)^{(\beta-1)(\sigma+1/2)}} = \mathrm{O}(1)$$

uniformément en ϵ dès que $\beta < 1 + \dfrac{1}{2(n+\sigma)}$.

L'estimation b) découle immédiatement de (2.7) et de la partie a) du lemme.

Preuve de c). — Utilisant (2.6), (2.7) et le lemme 2.1, nous avons pour $|\zeta - z| < a$:

$$\mathrm{N}_j^{(k,\sigma)m}(\zeta, z)$$

$$= \mathrm{O}(1) \frac{(-r(\zeta))^{k-\sigma-x_j} [-r(\zeta) + |r(\zeta) - r(z)| + |\mathrm{Im}\, \mathrm{B}(\zeta, z)| + |z - \zeta|^2]^{n-k-1-2m}}{\{[|r(\zeta) - r(z)| + |\mathrm{Im}\, \mathrm{B}(\zeta, z)| + |z - \zeta|^2]^2 + (-r(\zeta) - r(z))\, |\zeta - z|^2\}^{n-m-1/2}}$$

où $x_j = 0$ si $j = 1,2$; $x_3 = -1/2$.

Posons $\epsilon = -r(\zeta)$ et utilisons le changement de variables $\Phi_\zeta : \mathrm{B}_{2n}(\zeta, a) \to \mathbf{R}^{2n}$, introduit plus haut, ce qui conduit aux $2n$ nouvelles coordonnées réelles :

$$t_1 = r(z) - r(\zeta),\quad t_2 = \mathrm{Im}\, \mathrm{B}(\zeta, z),\quad t_3, \dots, t_{2n} ;$$

nous sommes ramenés à l'étude des intégrales :

$$\mathrm{J}_1 = \int_{\substack{|t|<1\\ t_1+\epsilon>0}} \frac{\epsilon^{(k-\sigma)\beta} (t_1 + \epsilon)^{\sigma-1+\eta} [\epsilon + |t_1| + |t_2| + |t|^2]^{(n-k-1-2m)\beta}}{\{(|t_1| + |t_2| + |t|^2 + (t_1 + 2\epsilon)\, |t|^2\}^{(n-m-1/2)\beta}}\, dt_1 \dots dt_{2n}$$

$$\mathrm{J}_2 = \int_{\substack{|t|<1,\\ t_1+\epsilon>0}} \frac{\epsilon^{(k-\sigma-1/2)\beta} (t_1 + \epsilon)^{\sigma-1/2+\eta} [\epsilon + |t_1| + |t_2| + |t|^2]^{(n-k-1-2m)\beta}}{\{(|t_1| + |t_2| + |t|^2)^2 + (t_1 + 2\epsilon)\, |t|^2\}^{(n-m-1/2)\beta}}\, dt_1 \dots dt_{2n}$$

Les deux intégrales se traitant de manière analogue, considérons par exemple J_1. Introduisons les coordonnées sphériques

$t_1 = r\cos\varphi_1$, $\quad t_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2$ etc. et posons $s_i = \cos\varphi_i$ $(i = 1,2)$.

$$\mathrm{J}_1 = \mathrm{O}(\epsilon^{(k-\sigma)\beta}) \int_{\substack{0<r,s<1\\ -1<s_1<1\\ rs_1+\epsilon>0}} \frac{(rs_1+\epsilon)^{\sigma-1+\eta}(\epsilon+r|s_1|+rs_2+r^2)^{(n-m-1)\beta}\, r^{(2n-1)(1-\beta)+2m\beta}\, dr\, ds_1\, ds_2}{(\epsilon+r|s_1|+rs_2+r^2)^{k\beta+m\beta}\{rs_1+2\epsilon+(|s_1|+s_2+r)^2\}^{(n-m-1/2)\beta}}$$

$$\mathrm{J}_1 = \mathrm{O}(\epsilon^{(k-\sigma)\beta}) \int \frac{(rs_1+\epsilon)^{\sigma-1+\eta}\, r^{(2n-1)(1-\beta)}\, dr\, ds_1\, ds_2}{(\epsilon+r|s_1|+rs_2)^{k\beta-1/2}\{rs_1+2\epsilon+(|s_1|+s_2)^2+r(|s_1|+s_2)\}^{(\beta+1)/2}}$$

Suivant toujours [7] posons $s_1 = su$, $s_2 = s(1-|u|)$, où $0<s<2$, $-1<u<1$, puis $v = \epsilon^{-1} rs$ et passons aux coordonnées (v,s,u) ; nous obtenons :

$$\mathrm{J}_1 = \mathrm{O}(1)\,\epsilon^{(k-\sigma)\beta} \int_{\substack{0<r,s<2\\ -1<u<1\\ rsu+\epsilon>0}} \frac{(rsu+\epsilon)^{\sigma-1+\eta}\, r^{(2n-1)(1-\beta)}\, s\, dr\, ds\, du}{(\epsilon+rs)^{k\beta-1/2}\{rsu+2\epsilon+rs+s^2\}^{\frac{\beta+1}{2}}}$$

$$\epsilon^{(\beta-1)(2n-1+\sigma)-\eta-1/2}\,\mathrm{J}_1$$

$$= \mathrm{O}(1) \int_{\substack{uv+1>0\\ -1<u<1;\\ 0<s<2\\ 0<v<4\epsilon^{-1}}} \frac{(uv+1)^{\sigma-1+\eta}\, du\, dv\, ds}{v^{(2n-1)(\beta-1)}(v+1)^{k\beta-1/2}\{s^2+\epsilon(v+1)\}^{1-(\beta-1)(n-1)}}$$

$$\epsilon^{(\beta-1)(n+\sigma)-\eta}\,\mathrm{J}_1 =$$

$$= \mathrm{O}(1) \int_{\substack{uv+1>0\\ 0<v<4\epsilon^{-1}\\ -1<u<1}} \frac{(uv+1)^{\sigma-1+\eta}\, du\, dv}{v^{(2n-1)(\beta-1)}(v+1)^{k\beta-(\beta-1)(n-1)}} \times \int_0^{+\infty} \frac{d\theta}{(1+\theta^2)^{1-(\beta-1)(n-1)}}$$

$$\epsilon^{(\beta-1)(n+\sigma)-\eta}\,\mathrm{J}_1 =$$

$$= \mathrm{O}(1) \int_0^1 \frac{dv}{v^{(2n-1)(\beta-1)}} \int_{-1}^{1} (uv+1)^{\sigma-1+\eta}\, du + \int_1^{4/\epsilon} \frac{dv}{v^{k\beta+n(\beta-1)}} \int_{-1/v}^{1} (uv+1)^{\sigma-1+\eta}\, du$$

$= \mathrm{O}(1)$ dès que $k > \sigma+\eta$ et $\beta < 1 + (2n-1)^{-1}$.

Par suite $\mathrm{J}_1 = \mathrm{O}(1)$ uniformément en ϵ si $k > \sigma + \eta$ et $\beta \leqslant 1 + \dfrac{\eta}{n+\sigma}$, $0 \leqslant \eta < 1/2$. □

C — *Estimations en termes de mesures de Carleson.*

DEFINITIONS. — *Posons pour* $k \in \mathrm{N}^*$, $\sigma > 0$, $m \geqslant 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{L}_1(k,\sigma,m)(\zeta,z) = (-r(z))^{\sigma-1}(-r(\zeta))^{-m/2}|z-\zeta|^m\,|\mathrm{N}_1^{(k,\sigma)}(\zeta,z)| \\ \mathrm{L}_2(k,\sigma,m)(\zeta,z) = (-r(z))^{\sigma-1}(-r(\zeta))^{-m/2}|z-\zeta|^m\,|\mathrm{N}_2^{(k,\sigma)}(\zeta,z)| \\ \mathrm{L}_3(k,\sigma,m)(\zeta,z) = (-r(z))^{\sigma-1/2}(-r(\zeta))^{-m/2}|z-\zeta|^m\,|\mathrm{N}_3^{(k,\sigma)}(\zeta,z)| \end{array}\right. \tag{2.9}$$

Si μ est une mesure sur D, $\mathscr{K}(\zeta, z)$ un noyau sur $\overline{\mathrm{D}} \times \overline{\mathrm{D}}$, $\mathscr{K}^*\mu$ désignera la balayée de μ par $\mathscr{K}$:

$$\mathscr{K}^*\mu(z) = \int_{\mathrm{D}} \mathscr{K}(\zeta, z)\, d\mu(\zeta), \quad \text{où} \quad z \in \mathrm{D}.$$

La partie b) du théorème I.1 découle du lemme suivant :

LEMME 2.3. — *Soit* μ *une mesure positive sur* D.

a) *Si* $\mu \in \mathrm{V}^{\beta'}(\mathrm{D})$, où $\beta' \geqslant 0$, *alors* $\mathrm{L}_i(k,\sigma,m)^*\mu \in \mathrm{V}^{\beta'}(\mathrm{D})$, $(i = 1, 2, 3)$, *dès que* $m \geqslant 0$, $\sigma > \max(0, n(\beta'-1))$, $k > \sigma + 1/2 + m/2$.

b) *Si* $\mu \in \mathrm{W}^{1-1/p}(\mathrm{D})$, *où* $1 < p < +\infty$, *alors*

$$\mathrm{L}_i(k,\sigma,m)^*\mu \in \mathrm{W}^{1-1/p}(\mathrm{D})$$

pour $i = 1, 2, 3$, *dès que* $m \geqslant 0$, $\sigma > 0$, $k > \sigma + 1/2 + m/2$.

Il suffit de prouver le lemme pour $m = 0$ puisque

$$\mathrm{L}_i(k,\sigma,m) = \mathrm{L}_i(k',\sigma,0)$$

où k' est la partie entière de $k - m/2$.

Preuve du a). — Pour $\beta' = 0$, le résultat découle du lemme 2.2.

Soit $\beta' \geqslant 1$, $\sigma > n(\beta'-1)$, $\mu \in \mathrm{V}^{\beta'}(\mathrm{D})$ (définition (0.4)) ; pour $x \in \partial\mathrm{D}$, $t > 0$, notons :

$$\mathrm{I}(x,t) = \int_{\mathrm{A}(x,t)} d\lambda(z) \int_{\mathrm{D}} (-r(z))^{\sigma-1}\,[\,|\mathrm{N}_1^{(k,\sigma)}| + |\mathrm{N}_2^{(k,\sigma)}| + (-r(z))^{1/2}\,|\mathrm{N}_3^{(k,\sigma)}|\,]\, d\mu(\zeta)$$

où $\mathrm{A}(x,t)$ est défini par (0.2), $\mathrm{N}_j^{(k,\sigma)}$ par (2.7).

$$\mathrm{I}(x,t) = \mathrm{I}_0(x,t) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{I}_j(x,t), \text{ avec :}$$

$$\mathrm{I}_0(x,t) = \int_{\mathrm{A}(x,t)} d\lambda(z) \int_{\mathrm{A}(x,bt)} \{\quad\}\, d\mu(\zeta),$$

$$\mathrm{I}_j(x,t) = \int_{\mathrm{A}(x,t)} d\lambda(z) \int_{\mathscr{D}_j} \{\quad\}\, d\mu(\zeta) \text{ si } j \geqslant 1,$$

$\mathcal{D}_j = A(x, 2^j bt) - A(x, 2^{j-1} bt)$, b étant une constante positive à préciser dans la suite.

• D'après le lemme 2.2 c) nous avons :

$$I_0(x, t) = O(1) \int_{\mathcal{D}_j} d\mu(\zeta)) \leqslant Ct^{n\beta'},$$

où C est indépendante de $x \in \partial D$ et $t > 0$.

• Considérons $I_j(x, t)$, $(j \geqslant 1)$

Supposons $t \leqslant t_0$, $|\zeta - z| < a$ où t et a sont suffisamment petits, et notons z' la projection normale de z sur ∂D. D'après le lemme 1.1 (propriété (ii), (iii), (iv)) la pseudo-distance de Koranyi $\delta(\zeta, z')$ pour $\zeta \in D$, $|\zeta - z| < a$ est de l'ordre de

$$-r(\zeta) + |\operatorname{Im} C(\zeta, z')| + |\zeta - z'|^2 ;$$

nous avons donc d'après (2.1) :

$$[|C(\zeta, z)| \geqslant |C(\zeta, z')| - |C(\zeta, z) - C(\zeta, z')| \geqslant C_1\, \delta(\zeta, z') - C_2(-r(z))$$

$$|C(\zeta, z)| \leqslant C_3[-r(z) + \delta(\zeta, z')] . \tag{2.10}$$

D'autre part si $z \in A(x, t)$, $\zeta \in \mathcal{D}_j$, nous avons $\zeta \in A(z', 2^j b_0 t)$, $\zeta \notin A(z', bK_0^{-1}\, 2^{j-1} t)$, où K_0, b_0 sont indépendants de z, ζ, x, t (voir [11]) ; si b est choisie suffisamment grande, nous obtenons donc à partir de (2.10), (2.2) :

Pour $z \in A(x, t)$, $\zeta \in \mathcal{D}_j$:

$$|B(\zeta, z)| \approx |C(\zeta, z)| \approx 2^j\, t$$

$$|\langle s, \zeta - z\rangle| \geqslant |BC| - r(z)\, r(\zeta) \geqslant \text{cste}\ 2^{2j}\, t^2 .$$

Nous en déduisons, en tenant compte de (2.6) et des majorations :

$|\zeta - z| \leqslant (2^j t)^{1/2}$, $(-r(\zeta)) < 2^j t$ si $z \in A(x, t)$, $\zeta \in \mathcal{D}_j$:

$$|N_1^{(k,\sigma)}(\zeta, z)| + |N_2^{(k,\sigma)}(\zeta, z)| = O(1)\,(2^j t)^{-n-\sigma}$$

et $|N_3^{(k,\sigma)}(\zeta, z)| = O(1)\,(2^j t)^{-n-\sigma-1/2}$ pour $(\zeta, z) \in \mathcal{D}_j \times A(x, t)$.

$$I_j^2(x, t) = \int_{\mathcal{D}_j} d\mu(\zeta) \int_{A(x,t)} (-r(z))^{\sigma-1}\, |N_2^{(k,\sigma)}(\zeta, z)|\, d\lambda(z)$$

$$= O(1)\,(2^j)^{-n-\sigma} \int_{\mathcal{D}_j} d\mu(\zeta)) = O(1)\,(2^j)^{-n-\sigma+n\beta'}\, t^{n\beta'}$$

$$\sum_{1}^{\infty} \mathrm{I}_j(x\,,t) = \mathrm{O}(1)\, t^{n\beta'} \quad \text{dès que} \quad n + \sigma > n\beta'$$

d'où le résultat d'après (0.4).

Le résultat pour $0 < \beta' < 1$ et la partie b) découlent des cas $\beta' = 0$, $\beta' = 1$ par interpolation, en utilisant (0.5) et (0.6). □

3. Autres estimations pour les solutions des équations $\bar{\partial} u = f$ et $\bar{\partial}_b u = f$.

Nous allons déduire du lemme 2.3 des résultats dont nous avons besoin pour le problème d'extension envisagé dans la partie II.

A – Soient $h_1, \ldots, h_k$ des fonctions de classe C^1 dans D. Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$, nous notons : $h_{(\alpha)} = h_{\alpha_1} \ldots h_{\alpha_p}$ et

$$(h(z) - h(\zeta))_{(\alpha)} = \prod_{i=1}^{p} (h_{\alpha_i}(z) - h_{\alpha_i}(\zeta))$$

avec la convention $h_{(\alpha)} = 1$ si $\alpha = \phi$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ avec

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \subset \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}\,,$$

nous écrivons par abus $\alpha \subset \beta$.

Definition 3.1. – *Soit β un multi-indice et $1 \leqslant p \leqslant +\infty$; une $(0,q)$ forme f sur* D *vérifie l'estimation $\mathcal{W}^p_{h,\beta}$ (respectivement $\overline{\mathcal{W}}^p_{h,\beta}$) si pour tout multi-indice $\alpha \subset \beta$ avec $|\beta| \geqslant |\alpha| \geqslant 1$ (respectivement $|\beta| \geqslant |\alpha| \geqslant 0$) :*

$$(-r)^{|\alpha|/2-1/2}\, |h_{(\beta)}\, h_{(\alpha)}^{-1}|\, [(-r)^{-1/2}\, |\bar{\partial} r \wedge f| + |f|] \in \mathrm{W}^{1-1/p}(\mathrm{D})\,, \qquad \text{si } q \geqslant 1\,;$$

$$(-r)^{|\alpha|/2-1/2}\, |h_{(\beta)}\, h_{(\alpha)}^{-1}|\, |f| \in \mathrm{W}^{1-1/p}(\mathrm{D}) \quad \text{si} \quad q = 0$$

(*avec la convention* $\mathrm{W}^1(\mathrm{D}) = \mathrm{V}^1(\mathrm{D})$).

Corollaire 3.1. – *Soient $h_1, \ldots, h_m$ des fonctions de classe C^1 sur $\bar{\mathrm{D}}$, β un multi-indice tel que $\beta \subset (1, \ldots, m)$, $|\beta| \geqslant 1$, f une $(0,q)$ forme $\bar{\partial}$-fermée dans* D, *$(-r)^{1/2} f$ satisfaisant $\mathcal{W}^p_{h,\beta}$*

(où $q \geqslant 1$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$) ; *l'équation* $\bar{\partial} g = f$ *admet une solution satisfaisant* $\mathcal{W}^p_{h,\beta}$; *si* $q = 1$, $(-r)^{-1/2} g$ *satisfait* $\mathcal{W}^p_{h,\beta}$.

$$\forall \alpha \subset \beta, \forall (\zeta, z) \in \bar{\mathrm{D}} \times \bar{\mathrm{D}}, \tag{3.1}$$
$$h_{(\beta)} h^{-1}_{(\alpha)}(z) = \sum_{\substack{\gamma \subset \beta - \alpha \\ |\gamma| \geqslant 0}} (h_{(\beta)} h^{-1}_{(\alpha)} h^{-1}_{(\gamma)})(\zeta)\,(h(z) - h(\zeta))_{(\gamma)}.$$

Notons $g(z) = \int_{\mathrm{D}} \mathrm{K}^{(k)}(\zeta, z) \wedge f(\zeta)$ la solution de $\bar{\partial} g = f$ envisagée dans les sections 1 et 2, avec $k > \frac{|\beta|}{2} + 1$; nous aurons par exemple :

$$(-r)^{|\alpha|/2 - 1/2}\, |h_{(\beta)} h^{-1}_{(\alpha)} g| = \mathrm{O}(1) \sum_{i=1}^{3} \sum_{\substack{\gamma \subset \beta - \alpha \\ \gamma \geqslant 0}} \mathrm{L}_i \left(k, \frac{|\alpha|}{2} + \epsilon_i, |\gamma|\right)^* \nu^i_\gamma,$$

où les noyaux $\mathrm{L}_i(k, \sigma, j)$ sont définis par (2.9), $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1/2, \epsilon_3 = 0$,

$$\begin{aligned} \nu^i_\gamma(\zeta) &= (-r(\zeta))^{|\alpha|/2 + |\gamma|/2 + \epsilon_i}\, |h_{(\beta)} h^{-1}_{(\alpha)} h^{-1}_{(\gamma)} f|(\zeta) \quad \text{si} \quad i = 1, 3, \\ \nu^2_\gamma(\zeta) &= (-r(\zeta))^{|\alpha|/2 + |\gamma|/2 + 1/2}\, |h_{(\beta)} h^{-1}_{(\alpha)} h^{-1}_{(\gamma)} (-r)^{-1/2}\, |\bar{\partial} r \wedge f|(\zeta), \end{aligned} \tag{3.2}$$

le corollaire résulte alors du lemme 2.3. □

B – Soit f une (0,1) forme $\bar{\partial}$-fermée sur D, vérifiant par exemple $(-r)^{-1/2}\, |\bar{\partial} r \wedge f| + |f| \in \mathrm{V}^0(\mathrm{D})$. Posons pour $z \in \partial \mathrm{D}$ et $k \geqslant 1$: $\tilde{g}(z) = \int_{\mathrm{D}} \mathrm{K}^{(k)}(\zeta, z) \wedge f(\zeta)$.

Utilisant (2.6) et le lemme 2.1. nous avons :

$$\begin{aligned} &\text{si } |\zeta - z| < a, \ z \in \partial\mathrm{D}, \ \zeta \in \mathrm{D} : \\ &|\mathrm{K}^{(k)}_1(\zeta, z)| + (-r(\zeta))^{-1/2}\, |\mathrm{K}^{(k)}_2(\zeta, z)| \\ &\quad = \mathrm{O}(1)\,(-r(\zeta))^k\, [-r(\zeta) + |\mathrm{Im}\, \mathrm{C}(\zeta, z)| + |\zeta - z|^2]^{-k-n} \end{aligned} \tag{3.3}$$

on déduit de [14] (lemme 7.3) que $\tilde{g} \in \mathrm{L}^1(\partial \mathrm{D})$.

$g(z) = \int_{\mathrm{D}} \mathrm{K}^{(k)}(\zeta, z) \wedge f(\zeta)$, (où $z \in \mathrm{D}$) est solution de l'équation $\bar{\partial} g = f$; il est immédiat de vérifier que d'une part $\tilde{g}$ est valeur au bord de g au sens de Stokes :

$$\forall \omega \in \mathrm{C}^1_{n,n-1}(\bar{\mathrm{D}}), \quad \int_{\mathrm{D}} f \wedge \omega = \int_{\partial \mathrm{D}} \tilde{g} \wedge \omega - \int_{\mathrm{D}} g \wedge \bar{\partial} \omega ; \tag{3.4}$$

d'autre part que $\widetilde{g}$ est solution de l'équation "au bord" $\overline{\partial}_b \widetilde{g} = f$ au sens de Stokes [14] :

$$\forall \omega \in C^1_{n,n-1}(\overline{D}), \quad \overline{\partial}\omega = 0 : \int_{\partial D} \widetilde{g} \wedge \omega = \int_D f \wedge \omega . \quad (3.5)$$

Reprenant les notations du paragraphe 3.1 et utilisant (3.1) (avec $\alpha = \phi$) nous écrivons :

$$|h_{(\beta)} g| = O(1) \sum_{i=1}^{2} \sum_{\substack{\gamma \subset \beta \\ |\gamma| \geqslant 0}} \mathcal{L}_i(k,\gamma)^* \tau^i_\gamma \quad (3.6)$$

où $k > |\beta|/2 + 1$, $\mathcal{L}_i(k,\gamma)(\zeta, z) = (-r(\zeta))\, L_i(k, 1, |\gamma|)(\zeta, z)$, $(i = 1,2)$;

$\tau^1_\gamma = (-r)^{|\gamma|/2}\, |h_{(\beta)} h^{-1}_{(\gamma)} f|$, $\quad \tau^2_\gamma = (-r)^{|\gamma|/2 - 1/2}\, |h_{(\beta)} h^{-1}_{(\gamma)} \overline{\partial} r \wedge f|$.

Nous déduisons de (3.2), (3.3), (3.6), du lemme 2.3 et de [2] (Th. 6) :

PROPOSITION 3.2. – *Soient $h_1, \ldots, h_m$ des fonctions de classe C^1 sur $\overline{D}$, β un multi-indice, $\beta \subset (1, \ldots, m)$, $|\beta| \geqslant 0$, f une (0,1) forme $\overline{\partial}$-fermée sur D telle que $(-r)^{1/2} f$ vérifie $\mathcal{W}^p_{h,\beta}$, où $1 \leqslant p \leqslant +\infty$; l'équation $\overline{\partial} g = f$ admet une solution g telle que :*

a) *g satisfait l'estimation $\mathcal{W}^p_{h,\beta}$.*

b) *g admet une valeur au bord au sens de Stokes $\widetilde{g}$ telle que $\overline{\partial}_b \widetilde{g} = f$ et $h_{(\beta)} \widetilde{g} \in L^p(\partial D)$ si $1 \leqslant p < +\infty$.*

II. EXTENSION HOLOMORPHE DANS DES ESPACES DE HARDY ET DE BERGMAN

1. Condition nécessaire du théorème 0.1.

Sous les hypothèses du théorème 0.1, soit F une fonction de $H^p(D)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ dont la restriction à V est f ; d'après le théorème de Carleson ([11] th. 4.3), une mesure positive μ sur D est de

Carleson dans D si et seulement si il existe une constante C telle que pour tout $q > 0$ et toute fonction G de $H^q(D)$, on ait :

$$\int_D |G|^q \, d\mu \leqslant C \int_{\partial D} |G|^q \, d\lambda .$$

La condition d'intégrabilité sur f résulte alors du lemme suivant :

LEMME 1.1. – *Sous les hypothèses du théorème 1, la mesure* μ_{k-1} *est de Carleson dans* D.

La mesure μ_{k-1} sera de Carleson dans D si :

$$\exists C > 0, \forall x \in \partial D, \quad \forall t > 0, \mu_{k-1}(A(x, t)) \leqslant C\, t^n$$

où $A(x, t)$ est la pseudo-boule de Koranyi (définition (0.2)).

μ_{k-1} étant bornée sur D, nous pouvons nous ramener au cas où $t \leqslant t_0$, t_0 arbitrairement petit et considérer que l'on a :

$$A(x, t) = \{z \in D | -r(z) + \rho(z', x) < t\},$$

où z' est la projection normale de z sur ∂D et ρ la pseudo-distance de Koranyi sur ∂D.

Remarquons que pour $\epsilon_0 > 0$, ϵ_0 suffisamment petit, il existe $K > 0$ tel que :

$$\forall z \in V \cap (D - D_{\epsilon_0}), \; d(z, \partial D \cap V') \leqslant K(-r(z)). \qquad (1.1)$$

• Considérons tout d'abord $x \in \partial D \cap V'$ et $0 < t \leqslant t_0 \leqslant \epsilon_0$.

Pour tout z de $A(x, t) \cap V$, nous avons par (1.1) :

$$d(z, \partial D \cap V') \leqslant K(-r(z)) \leqslant K\, t$$

d'où :

$$\mu_{k-1}(A(x, t)) \leqslant K\, t^{k-1} \lambda_V(A(x, t)).$$

Pour calculer $\lambda_V(A(x, t))$, nous nous ramenons localement par un changement de variables Φ_x de G.M. Henkin ([9] lemme 11) au cas où $x = 0$, $D = \{w \in D' | R(w) < 0\}$ est strictement convexe avec $R(w) = 2 \operatorname{Re} w_{k+1} + q(w) + O(\|w\|^2)$ (q forme quadratique), $V = \{w \in D | w_1 = \cdots = w_k = 0\}$ est linéaire transverse ; le jacobien de la transformation Φ_x et son inverse sont supposés, par compacité, bornés indépendamment de $x \in \partial D \cap V'$. Le plan tangent complexe $\Pi_0^{\mathbf{C}}$ en 0 à D est d'équation $w_{k+1} = 0$ et nous pouvons toujours supposer que $(w_1, \ldots, w_k, w_{k+2}, \ldots, w_n)$ forme un système de coordonnées complexes de $\Pi_0^{\mathbf{C}}$, en sorte que pour $z \in A(x, t)$, $-r(z) + \rho(z', x)$ est de l'ordre de $|w_{k+1}| + \sum_{i \neq k+1} |w_i|^2$; nous avons :

$$\forall x \in \partial D \cap V', \ \forall t, \ 0 \leqslant t \leqslant t_0 :$$

$$\begin{aligned} \mu_{k-1}(A(x,t)) &\leqslant C_0 t^{k-1} \int_{|w_{k+1}| + \sum_{i \neq k+1} |w_i|^2 \leqslant \alpha t} d\lambda(w_{k+1}) \ldots d\lambda(w_n) \\ &\leqslant C_1 t^n \end{aligned} \tag{1.2}$$

où C_1 est indépendante de (x, t).

• Considérons $x \in \partial D$ et $0 < t \leqslant t_0$ tels que $A(x, t) \cap V \neq \emptyset$.

Soit $z \in A(x, t) \cap V$, et $y \in \partial D \cap V'$ tel que

$$|z - y| = d(z, \partial D \cap V') ;$$

nous avons en utilisant (1.1.) : $\rho(z', y) \leqslant b\,|z - y| \leqslant b K t$ et donc : $z \in A(y, b't)$ où $b' = 1 + bK$ est indépendant de (x, t).

Nous en déduisons que $A(x, t) \subset A(y, K'b't)$ où K' est indépendant de (x, t) (cf. [11]) ; il suffit d'utiliser (1.2) pour achever la preuve du lemme. □

2. Problèmes d'extension lorsque D est strictement convexe, V une variété linéaire complexe transverse.

Soit $D = \{z \in D' \mid r(z) < 0\} \subset\subset D' \subset \mathbf{C}^n$ où r est de classe C^2, strictement convexe dans D'.

Un sous-ensemble analytique V de D sera appelé *variété linéaire complexe transverse de codimension* k *de* D si V est de la forme $V = \{z \in D \mid z_1 = \cdots = z_k = 0\}$ et si l'on a :

$$\forall z \in \partial D \cap \overline{V}, \ \exists j(z), \ k < j(z) \leqslant n \mid \frac{\partial r}{\partial z_j}(z) \neq 0 .$$

A – *Extension dans les espaces de Hardy* $H^p(D)$

PROPOSITION 2.1. – *Soient* D *un domaine borné strictement convexe de* $\mathbf{C}^n$, *à frontière* C^2, $V = \{z \in D \mid z_1 = \cdots = z_k = 0\}$ *une variété linéaire complexe transverse de* D *de codimension* k ;

on suppose que $V_1 = \{z \in D \mid z_1 = 0\}$ *est transverse à* D. *Il existe un opérateur linéaire borné d'extension de* $\mathcal{O}(V) \cap L^p(\mu_{k-1})$ *dans* $H^p(D)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$.

La proposition se démontre par récurrence sur k.

Soit f une fonction holomorphe sur V appartenant à $L^p(\mu_{k-1})$ (définition (0.1)).

- *Supposons* V *de codimension* $k = 1$.

LEMME 2.1. – a) *il existe* $a > 0$ *tel que pour* $z = (z_1, z') \in D$ *vérifiant* $|z_1| < 2a(-r(z))$, *on ait* $(0, z') \in D$.

b) *il existe une constante* $C > 0$ *telle que* f *admette une extension de classe* C^∞ *dans* D *vérifiant* :

$$\forall z = (z_1, z') \in D, |\overline{\partial} F(z)| \leqslant C(-r(z))^{-1} |f(0, z')| \mathbf{1}_{\mathcal{C}}(z)$$

où $$\mathcal{C} = \{z \in D \mid (a/2)(-r(z) < |z_1| < a(-r(z))\}.$$

a) Supposons $D \subset D'' \subset\subset D'$ où D'' est convexe, tel que $z = (0, z') \in D''$ si $z \in D$; la fonction r étant de classe C^2, strictement convexe dans D', nous avons pour $z \in D$:

$$r(\hat{z}) = r(z) - 2 \operatorname{Re}\left(\frac{\partial r}{\partial z_1}(z) z_1\right) + d^2 r(\zeta)(\hat{z} - z)^{(2)}, \text{ où } \zeta \in [z, \hat{z}] ;$$

$(d^2 r(\zeta) . w^{(2)}$ désignant la valeur en w de la forme quadratique associée à $d^2 r(\zeta))$. Comme $|r(\hat{z}) - r(z)| \leqslant A_1 |z_1|$, il suffit de choisir a tel que $0 < 2A_1 a < 1$.

b) Notons $\mathcal{G}_i = \{z \in D \mid |z_1| < 2^{1-i} a(-r(z))\}$, $i = 0, 1, 2$.

Soit θ une fonction de classe C^∞ dans D à support dans $\mathcal{G}_1$ telle que $\theta \equiv 1$ sur $\mathcal{G}_2$ et vérifiant :

$$|\overline{\partial} \theta(z)| \leqq C(-r(z))^{-1} \mathbf{1}_{\mathcal{C}}(z), \forall z \in D.$$

Si $\widetilde{f}(z) = f(\hat{z})$ pour $z \in \mathcal{G}_0$, la fonction $F = \theta \widetilde{f}$ est l'extension cherchée.

□

Posons :

$$\omega = \frac{\overline{\partial} F}{z_1}$$

$$\omega^1 = z_1 \omega, \omega^2 = (-r)^{-1/2} \overline{\partial} r \wedge z_1 \omega, \qquad (2.1.)$$

$$\omega^3 = (-r)^{1/2} \omega, \omega^4 = \overline{\partial} r \wedge \omega$$

ω est une $(0, 1)$ forme $\bar{\partial}$-fermée, de classe C^∞ sur D.

LEMME 2.2.

$$\forall i = 1, \ldots, 4 : |\omega^i| \in W^{1-\frac{1}{p}}(D)\ (1 \leqslant p < +\infty)$$

et $\max{}^{\cdot}\ \| |\omega| \|_{W^{1-1/p}(D)} \leqslant C_1 \|f\|_{L^p(V)}$, *où* C_1 *est indépendante de* f.

Si nous tenons compte de (2.1) et du lemme 2.1, nous sommes ramenés à estimer la mesure $\tau = |z_1|^{-2}\ |f(0, z')|\ \mathbf{1}_{\mathcal{C}}(z)\ \lambda_D$

Remarquons que l'on a :

$\forall (z_1, z') \in \mathcal{C}, z_1 \in \mathcal{C}'$

$$\text{où } \mathcal{C}' = \{z_1 \mid (a/2)(-r(0, z') < |z_1| < a(-r(0, z')\}. \quad (2.2)$$

Si $f \in L^1(V) : \tau(D) \leqslant 4\pi \operatorname{Log} 2\ \|f\|_1$.

Si $f \in L^\infty(V)$: vérifions que τ est de Carleson dans D ; soit $x \in \partial D, t > 0, A(x, t)$ la pseudo-boule de Hörmander-Koranyi (définition (0.2)).

$$\tau(A(x, t)) \leqslant 4\pi \operatorname{Log} 2\ \|f\|_\infty \int_{(0, z') \in A(x, t) \cap V} d\lambda(z') \leqslant C_2 \|f\|_\infty\ t^n,$$

puisque λ_V est de Carleson dans D (lemme 1.1.).

L'estimation lorsque $f \in L^p(V), (1 < p < +\infty)$, s'obtient par interpolation à partir des résultats précédents, en utilisant (0.6), ce qui achève la preuve du lemme. □

Soit g la solution de l'équation $\bar{\partial} g = \omega$ donnée par la proposition I.3.2 ; la valeur au bord au sens de Stokes $\tilde{g}$ de g est telle que $z_1 \tilde{g} \in L^p(\partial D)$. Posant $\tilde{F} = F - z_1 g$, nous définissons sur D une extension holomorphe de f, admettant une valeur au bord au sens de Stokes dans $L^p(\partial D)$ (remarquons que F admet en tout point de $\partial D - \bar{V}$ une limite nulle). Par suite $\tilde{F}$ appartient à $H^p(D)$ et vérifie :

$$\|F\|_{H^p(D)} = \|z_1 g\|_{L^p(\partial D)} \leqslant \text{cste}\ \|f\|_{L^p(V)}.$$

La proposition est donc démontrée pour $k = 1$.

• *Supposons la proposition 2.1 vraie pour* $k - 1$ $(k \geqslant 2)$.

Considérons :

$\widetilde{V}_1 = \{\widetilde{z} = (z, z_{n+1}) \in D' \times \mathbf{C} \,|\, \widetilde{r}(\widetilde{z}) = r(z) + |z_{n+1}|^2 < 0 \;,\; z_1 = 0\}$

$\widetilde{V} = \{\widetilde{z} \in \widetilde{V}_1 \,|\, z_2 = \cdots = z_k = 0\}$

$\widetilde{V}_1$ est un domaine borné, strictement convexe de $\mathbf{C}^n$ à frontière C^2, $V_1 = \{\widetilde{z} \in \widetilde{V}_1 \,|\, z_{n+1} = 0\}$ et $\widetilde{V}$ sont des variétés linéaires complexes transverses de $\widetilde{V}_1$ de codimensions respectives 1 et $k-1$.

Posant $\widetilde{f}(\widetilde{z}) = f(z)$ si $\widetilde{z} \in \widetilde{V}$, nous définissons sur $\widetilde{V}$ une fonction holomorphe appartenant à $L^p(\widetilde{\mu}_{k-2})$ où

$$\widetilde{\mu}_{k-2} = (-\widetilde{r})^{k-2}\,\lambda_{\widetilde{V}}\,.$$

La fonction $\widetilde{f}$ admet donc par hypothèse de récurrence une extension G appartenant à $H^p(\widetilde{V}_1)$.

D'autre part, la mesure d'intégration sur V_1 étant de Carleson dans $\widetilde{V}_1$ (lemme 1.1), nous déduisons du théorème de Carleson [11] que la fonction g, holomorphe sur V_1, définie pour $z \in V_1$ par $g(z) = G(z, 0)$, appartient à $L^p(V_1)$; g admet donc une extension $F \in H^p(D)$ (proposition 2.1., cas $k = 1$) ; F est l'extension de f cherchée. □

B – *Extension dans des "espaces de Hardy à poids"*

Nous aurons besoin par la suite du résultat suivant :

PROPOSITION 2.2. – *Soient* $D = \{z \in D' \,|\, r(z) < 0\} \subset\subset D' \subset \mathbf{C}^n$ *un domaine strictement convexe à frontière* C^2,

$$V = \{z \in D \,|\, z_1 = \cdots = z_k = 0\}$$

une variété linéaire complexe; on pose $v(z) = z_{i_1} \ldots z_{i_m}$ *avec* $k < i_1 < \cdots < i_m < n$ *et on suppose que :*

$$\forall z \in \overline{V} \cap \partial D : dr(z) \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_k \wedge dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_m} \neq 0 \quad \text{(i)}\,.$$

Alors, une fonction f *holomorphe sur* V *admet une extension* F *holomorphe dans* D *telle que* $vF \in H^p(D)$ *si et seulement si* $vf \in L^p(\mu_{k-1})$. *Le procédé d'extension fournit un opérateur linéaire* J *d'extension tel que*

$$\|vJ(f)\|_{H^p(D)} \leqslant C\,\|vf\|_{L^p(\mu_{k-1})}\,,\quad (1 \leqslant p < +\infty)\,.$$

La condition nécessaire résulte du théorème de Carleson et du lemme 1.1. La méthode d'extension est identique à celle donnée dans la partie A ; aussi indiquons-nous seulement les lemmes d'estimation de mesures relatifs à la codimension $k = 1$; ces lemmes, joints à la proposition I.3.2, permettront de donner de l'équation $\overline{\partial}_b g = \omega$ (ω défini par (2.1.)) une solution telle que $z_1 vg \in L^p(\partial D)$.

LEMME 2.3. – *Soit* σ *une mesure de Carleson dans* D, *portée par* V, *où* V *est une variété linéaire complexe transverse de* D, *de codimension* k*; toute fonction* h *holomorphe sur* V *appartenant à* $L^p(\mu_{k-1})$ *est dans* $L^p(\sigma)$ *et vérifie :*

$$\|h\|_{L^p(\sigma)} \leqslant C_\sigma \|h\|_{L^p(\mu_{k-1})}.$$

Soit $\widetilde{V} = \{\widetilde{Z} = (z_{k+1}, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}) \in \mathbf{C}^n \mid$

$$r(0, \ldots, 0, z_{k+1}, \ldots, z_n) + \sum_{j=1}^{k} |z_{n+j}|^2 < 0\}$$

$\widetilde{V}$ est un domaine borné strictement convexe de $\mathbf{C}^n$, à frontière C^2 ; comme la mesure d'intégration sur le bord de $\widetilde{V}$ est équivalente à $(-r)^{k-1} \lambda_V \otimes dS_k$ où dS_k est la mesure normalisée sur la sphère d'équation $\sum_{j=1}^{k} |z_{n+j}|^2 = -r(0, \ldots, 0, z_{k+1}, \ldots, z_n)$ la fonction h peut être considérée comme une fonction de $H^p(\widetilde{V})$, indépendante des k dernières coordonnées. Le lemme se déduira alors du théorème de Carleson si nous vérifions que σ est de Carleson dans $\widetilde{V}$. Soit $x = (x_{k+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) = (x', x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) \in \partial\widetilde{V}$ et $t > 0$; σ étant portée par V, nous nous ramenons au cas où $x = (x', 0, \ldots, 0) \in \partial D \cap \overline{V}$; nous pouvons supposer, V étant transverse à ∂D, que le plan tangent complexe à ∂D en $(0, \ldots, 0, x')$ est d'équation $z_{k+1} = 0$; le plan tangent complexe à $\partial\widetilde{V}$ en $(x', 0, \ldots, 0)$ sera également d'équation $z_{k+1} = 0$. Notant $A_{\widetilde{V}}((x', 0), t)$ la pseudo-boule de centre x de rayon t dans $\widetilde{V}$ nous aurons : $A_{\widetilde{V}}((x', 0), t) \cap V \approx A_D((0, x'), t) \cap V$, (en ce sens qu'il existe des constantes positives C_1 et C_2 telles que l'on ait pour $x \in \partial D$ et $0 < t < t_0$:

$$A_{\widetilde{V}}((x', 0), C_1 t) \cap V \subset A_D((0, x'), t) \cap V \subset A_{\widetilde{V}}((x', 0), C_2 t) \cap V).$$

La mesure σ, de Carleson dans D, sera donc de Carleson dans $\widetilde{V}$.

DEFINITIONS. — *Supposons* V *de codimension* $k = 1$. *Pour tout multi-indice* α *nous posons* $z_{(\alpha)} = 1$ *si* $|\alpha| = 0$, $z_{(\alpha)} = z_{\alpha_1} \dots z_{\alpha_j}$ *si* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j)$

$$\tau_\alpha = (-r)^{|\alpha|/2} \, |z_{(\alpha)}|^{-1} \, \lambda_V$$

$$\nu_\alpha = (-r)^{|\alpha|/2} \, |z_{(\alpha)}|^{-1} \, |z_1 z_{i_1} \dots z_{i_m}| \, |\omega|$$

$$\nu'_\alpha = (-r)^{|\alpha|/2 - 1/2} \, |z_{(\alpha)}|^{-1} \, |z_{i_1} \dots z_{i_m}| \, |\overline{\partial} r \wedge \omega|$$

où ω *est défini par (2.1),* $k < i_1 < \dots < i_m < n$.

LEMME 2.4. — *Sous les hypothèses de la proposition 2.2., avec* $k = 1$, *soit* α *un multi-indice,* $\alpha \subset (i_1, \dots, i_m)$, $|\alpha| \geqslant 0$; f *holomorphe sur* V *avec* $vf \in L^p(V)$

a) *la mesure* τ_α *est de Carleson dans* D *et* $vf \in L^p(\tau_\alpha)$

b) *les mesures* ν_α *et* ν'_α *sont dans la classe* $W^{1-\frac{1}{p}}(D)$.

a) Soit $x \in \partial D \cap \overline{V}$ et $0 < t < t_0$, t_0 arbitrairement petit ; nous pouvons supposer, grâce à la condition (i), que le plan tangent complexe à ∂D en x est d'équation $z_n = 0$; si $\alpha = (2, \dots, j)$ par exemple, nous obtenons en intégrant en polaires pour chaque coordonnée :

$$\tau_\alpha(A(x, t)) = O(1) \, t^{|\alpha|/2} \int_{\substack{0 < \rho_n < t \\ 0 < \rho_i < \sqrt{t} \text{ si } i \neq n}} \rho_{j+1} \dots \rho_n \, d\rho_2 \dots d\rho_n = O(1) \, t^n$$

d'où τ_α est de Carleson dans D (si $\alpha = \phi$ cf. lemme 1.1.), par suite $vf \in L^p(\tau_\alpha)$ par le lemme 2.3.

b) Si $\alpha = \phi$, le résultat découle du lemme 2.2.

Si $\alpha \neq \phi$, utilisant la définition de ν_α, ν'_α, (2.1) et le lemme 2.1., nous sommes ramenés à montrer que la mesure ν''_α suivante est dans $W^{1-\frac{1}{p}}(D)$:

$$\nu''_\alpha = (-r(z))^{|\alpha|/2} \, |z_{(\alpha)}|^{-1} \, |z_1|^{-2} \, |v(z) f(0, z')| \, \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$$

$$\nu''_\alpha = |v(z) f(0, z')| \, Y_\alpha .$$

Pour $A(x, t)$ pseudo-boule de centre $x \in \partial D$, nous avons en utilisant (2.2) et le lemme 2.4 a) :

$$Y_\alpha(A(x, t)) = O(1) \int_{V \cap A(x,t)} (-r(0, z'))^{|\alpha|/2} \, |z'_\alpha|^{-1} \, d\lambda(z') \times \int_{\mathcal{C}'} |z_1|^{-2} \, d\lambda(z_1)$$

$$= O(1) \, \tau_\alpha(A(x, t)) = O(t^n) .$$

Y_α est donc de Carleson dans D.

D'autre part, par un calcul analogue, nous avons d'après le lemme 2.3 :

$$\int_{\mathrm{D}} |v(z) f(0, z')|^p \, d\mathrm{Y}_\alpha = \mathrm{O}(1) \int_{\mathrm{V}} |v f|^p \, d\tau_\alpha = \mathrm{O}(1).$$

v''_α est donc dans la classe $\mathrm{W}^{1-1/p}(\mathrm{D})$ d'après (0.7), ce qui achève la preuve du lemme.

3. Condition suffisante du théorème 0.1.

DEFINITION 3.1. – *Un recouvrement ouvert* $\mathcal{U} = (\mathrm{U}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *de* $\overline{\mathrm{D}}$ *est dit de type* $\mathcal{F}$ *si :*

(1) $\mathrm{U}_i \cap \mathrm{D}$ *est strictement pseudo-convexe à frontière* C^2.

(2) *si* $\mathrm{U}_i \cap \partial \mathrm{D} \cap \mathrm{V}' = \phi$ *alors* $\mathrm{U}_i \cap \mathrm{V} = \phi$ ou $\mathrm{U}_i \cap \partial \mathrm{D} = \phi$.

(3) *si* $\mathrm{U}_i \cap \partial \mathrm{D} \cap \mathrm{V}' \neq \phi$, *il existe sur* $\overline{\mathrm{U}}_i$ *un changement de variables de classe* C^2, $\Phi(z) = (w_1, \ldots, w_n)$ *avec :*

$w_j = u_j(z)$, $j = 1, \ldots, k$, Φ *biholomorphe sur* $\mathrm{U}_i \cap \mathrm{D}$, $\Phi(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{D}) = \{w \mid \mathrm{R}(w) < 0\}$ *strictement convexe à frontière* C^2 *avec*

$$\partial \mathrm{R}(w) \wedge dw_1 \ldots \wedge dw_k \neq 0, \quad \forall w \in \Phi(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{D}).$$

(4) $\exists\, i_0 \in \mathrm{I}$ et $\epsilon > 0$ *tels que* $\mathrm{U}_{i_0} = \mathrm{D}_\epsilon$ *et* $\mathrm{D} - \mathrm{D}_{2\epsilon} \subset\subset \bigcup_{i\in \mathrm{I}_0} \mathrm{U}_i$ *où* $\mathrm{I}_0 = \{i \in \mathrm{I} \mid \mathrm{U}_i \cap \partial \mathrm{D} \neq \phi\}$.

On note

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{T}' = \{z \in \mathrm{D}' \mid \partial r(z) \wedge \partial u_1(z) \wedge \ldots \wedge \partial u_k(z) \neq 0\} \\ \mathrm{T} = (\mathrm{T}' \cap \mathrm{D}) \cup \mathrm{D}_{\epsilon_0} \quad \text{où} \quad \epsilon_0 \quad \text{est tel que } \mathrm{V} \subset \mathrm{T}. \end{array}\right] \tag{3.1}$$

Sous les hypothèses du théorème 0.1, soit f holomorphe sur V, avec $f \in \mathrm{L}^p(\mu_{k-1})$. Considérons un recouvrement $\mathcal{U}$ de type $\mathcal{F}$ de $\overline{\mathrm{D}}$, supposé fini par compacité ; l'existence d'un tel recouvrement est assuré par le lemme 11 de [9]).

$$\mathcal{U} = (\mathrm{U}_i)_{i=0}^m \quad \text{où} \begin{cases} \mathrm{U}_0 = \mathrm{D}_{\epsilon_0}, \mathrm{U}_i \cap \partial \mathrm{D} \cap \mathrm{V}' \neq \phi \text{ si } 1 \leqslant i \leqslant m_0 \\ \mathrm{U}_i \cap \partial \mathrm{D} \neq \phi \text{ et } \mathrm{U}_i \cap \mathrm{D} \not\subset \mathrm{T} \quad \text{si} \quad i > m_0 . \end{cases}$$

Posons $\widetilde{f}_i = 0$, si $i > m_0$:

$\widetilde{f_0} = \mathrm{E}(f)$ sur U_0, où E est l'opérateur d'extension linéaire de Cartan Bungart de $\mathrm{H}^\infty(\mathrm{V} \cap \mathrm{D}_{\epsilon_0/2})$ dans $\mathcal{O}(\mathrm{D}_{\epsilon_0/2})$ [4].

$\widetilde{f_i} = \mathrm{E}_i(f)$ sur $\mathrm{U}_i \cap \mathrm{D}\ (1 \leqslant i \leqslant m_0)$, où E_i est l'opérateur d'extension linéaire borné de $\mathcal{O}(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{D}) \cap \mathrm{L}^p(\mu_{k-1}, \mathrm{U}_i \cap \mathrm{D})$ dans $\mathrm{H}^p(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{D})$ donné par la proposition 2.1 ($\mathrm{U}_i \cap \mathrm{D}$ jouant le rôle de D dans la définition (0.1)).

L'objet du paragraphe est la résolution de cocycle $c = (\widetilde{f_i} - \widetilde{f_j})_{i,j}$ sous la forme $c = \delta b$ où $b = (b^{(i)})_{i \in \mathrm{I}}$ avec $b^{(i)}$ holomorphe sur $\mathrm{U}_i \cap \mathrm{D}$, nulle sur $\mathrm{V} \cap \mathrm{U}_i$, $b^{(i)} = a^{(i)} + \mathrm{G}$ où G est de classe C^∞ dans D, admet une valeur au bord au sens de Stokes (cf I.3.4.) g dans $\mathrm{L}^p(\partial \mathrm{D})$ et

$$\max_i \left(\sup_{\epsilon > 0} \int_{\partial \mathrm{D}_\epsilon \cap \mathrm{U}_i} |a^{(i)}|^p \, d_{\sigma_\epsilon}\right)^{1/p} + \|g\|_{\mathrm{L}^p(\partial \mathrm{D})} \leqslant \text{cste } \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mu_{k-1})}.$$

La fonction $\mathrm{F} = \widetilde{f_i} - b^{(i)}$ sur $\mathrm{U}_i \cap \mathrm{D}$, holomorphe sur D, à valeur au bord au sens de Stokes dans $\mathrm{L}^p(\partial \mathrm{D})$ est alors l'extension de f cherchée.

A – *Complexe de Koszul avec estimations "de type Hardy"*

Soient $\Delta = \{z \in \Delta' \mid \mathrm{R}(z) < 0\} \subset\subset \Delta' \subset \mathbf{C}^n$ un domaine strictement convexe à frontière C^2, $\mathrm{X} = \{z \in \Delta \mid z_1 = \ldots = z_k = 0\}$.

On note $\mathcal{O}(\Delta)$ l'anneau des fonctions holomorphes dans Δ ; $\mathrm{L} = (\mathcal{O}(\Delta))^k$ est un $\mathcal{O}(\Delta)$-module libre de base $\{e_1, \ldots, e_k\}$.

Pour $j = 1, \ldots, k$, les éléments $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_j}$ (où $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant k$) forment une base du produit extérieur $\overset{j}{\wedge}\mathrm{L}$; on notera $e_\alpha = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_j}$ pour tout multi-indice $\alpha = (i_1, \ldots, i_j)$ et $e_\phi = 1$.

On définit un opérateur linéaire Y_j de $\overset{j}{\wedge}\mathrm{L}$ dans $\overset{j-1}{\wedge}\mathrm{L}, (j \geqslant 1)$ (avec $\overset{0}{\wedge}\mathrm{L} = \mathcal{O}(\Delta)$), par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{Y}_1(e_m) = z_m, \quad 1 \leqslant m \leqslant k \\ \mathrm{Y}_j(e_\alpha \wedge e_m) = \mathrm{Y}_{j-1}(e_\alpha) \wedge e_m + (-1)^m z_m e_\alpha \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si} \quad |\alpha| = j-1, j \geqslant 2 ; \end{cases}$$

nous avons, classiquement, $\mathrm{Y}_{j-1} \circ \mathrm{Y}_j = 0$, $(j \geqslant 2)$.

Pour tout multi-indice $\alpha = (i_1, \ldots, i_j)$ on note $z_{(\alpha)} = z_{i_1} \ldots z_{i_j}$, avec les conventions $z_{(\alpha)} = 0$ si les i_1 ne sont pas distincts deux à deux, $z_{(\alpha)} = 1$ si $|\alpha| = 0$.

DEFINITION 3.2. – *Un élément* $f = \sum_{|\alpha|=j} f_\alpha e_\alpha$ *de* $\overset{j}{\wedge} \mathrm{L}$, $(j \geqslant 0)$, *vérifie l'estimation* $\mathcal{H}^p_z$ *si :*

$$\forall \alpha, \ |\alpha| = j, \ z_{(\alpha)} f_\alpha \in \mathrm{H}^p(\Delta) ;$$

f vérifie l'estimation $\mathcal{H}^p_{z,v}$ (*où* $v \in \mathcal{O}(\Delta)$) *si :*

$$\forall \alpha, \ |\alpha| = j, \ v z_{(\alpha)} f_\alpha \in \mathrm{H}^p(\Delta) .$$

On note alors : $\|f\|_{\mathcal{H}^p_{z,v}} = \sum_{|\alpha|=j} \|v z_{(\alpha)} f_\alpha\|_{\mathrm{H}^p(\Delta)}$.

Notons $\mathrm{S}_j(z_1, \ldots, z_k ; p, v) = (\overset{j}{\wedge} \mathrm{L}, \mathcal{H}^p_{z,v})$ le sous-groupe des éléments de $\overset{j}{\wedge} \mathrm{L}$ vérifiant la condition $\mathcal{H}^p_{z,v}$ pour $j = 1, \ldots, k$, $\mathrm{S}_0(z_1, \ldots, z_k : p, v)$ le sous-groupe des éléments f de

$$\mathcal{J}_{\mathrm{X}} = \{f \in \mathcal{O}(\Delta) \mid f|_{\mathrm{X}} \equiv 0\}$$

tels que $vf \in \mathrm{H}^p(\Delta)$.

Nous cherchons à résoudre le complexe $\mathrm{S}(z_1, \ldots, z_k ; p, v)$ défini par la suite :

$$0 \xrightarrow{\gamma_{k+1}} \mathrm{S}_k(z_1, \ldots, z_k ; p, v) \longrightarrow \ldots$$
$$\xrightarrow{\gamma_1} \mathrm{S}_0(z_1, \ldots, z_k ; p, v) \xrightarrow{\gamma_0} 0.$$

Remarque 3.1. – On définit bien sûr d'une manière analogue, à côté de $\mathrm{S}(z_1, \ldots, z_k ; p, v) = \mathrm{S}(z_1, \ldots, z_k, \mathcal{O}(\Delta) ; p, v)$ le complexe $\mathrm{S}(z_1, \ldots, z_k, \mathcal{O} ; p, v)$ à partir de l'anneau $\mathcal{O}$ des germes de fonctions holomorphes sur Δ.

Comme les estimations dans $\mathrm{S}(z_1, \ldots, z_k ; p, v)$ diffèrent à chaque étape, nous ne pouvons appliquer directement les résultats connus d'algèbre sur le complexe de Koszul. Nous allons suivre une démarche classique pour démontrer :

PROPOSITION 3.1. – *Soit* α *un multi-indice* $(|\alpha| \geqslant 0)$ *tel que l'on ait :*

$$d\mathrm{R}(z) \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_k \wedge \partial^\alpha z_{(\alpha)} \neq 0, \ \forall z \in \bar{\Delta} \quad (où$$

$\partial^\alpha z_{(\alpha)} = 1$ *si* $|\alpha| = 0$, $\partial^\alpha z_{(\alpha)} = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_j}$ *si* $\alpha = (i_1, \ldots, i_j)$).

a) *la suite définissant le complexe* $S(z_1, \ldots, z_k ; p, z_{(\alpha)})$ *est exacte.*

b) *plus précisément si* $f \in S_j(z_1, \ldots, z_k ; p, z_{(\alpha)})$ *avec* $Y_j(f) = 0$, $j \geqslant 0$, *on a* $f = Y_{j+1}(g)$ *avec* $\|g\|_{\mathcal{H}^p_{z,z_{(\alpha)}}} \leqslant \text{cste}\, \|f\|_{\mathcal{H}^p_{z,z_{(\alpha)}}}$

On raisonne par récurrence sur k ; pour $k = 1$ le résultat est immédiat ; supposons le démontré pour $k-1$ $(k \geqslant 2)$ et toutes valeurs convenables de α. Posons $v(z) = z_{(\alpha)}$.

• Montrons tout d'abord la surjectivité de Y_1.

Soit f holomorphe dans Δ, nulle sur X telle que $vf \in H^p(\Delta)$; la fonction $f(0, \ldots, 0, z_k, \ldots, z_n)$ holomorphe sur

$$X_{k-1} = \{z \in \Delta | z_1 = \cdots = z_{k-1} = 0\},$$

nulle pour $z_k = 0$ s'écrit $f(0, \ldots, 0, z_k, \ldots, z_n) = z_k g_k$ où g_k est holomorphe sur le strictement convexe X_{k-1} ; nous avons d'après le théorème de Carleson [11] et le lemme 1.1. :

$$v z_k g_k \in A^p(\mu_{k-2}) \quad \text{où} \quad \mu_{k-2} = (-R)^{k-2} \lambda_{X_{k-1}}.$$

La fonction g_k admet donc d'après la proposition 2.2. une extension F_k holomorphe dans Δ telle que $v z_k F_k \in H^p(\Delta)$.

La fonction $f - z_k F_k \in S_0(z_1, \ldots, z_{k-1} ; p, v)$ s'écrit alors par hypothèse de récurrence :

$$f - z_k F_k = \sum_1^{k-1} z_j F_j, \quad \text{où} \quad v z_j F_j \in H^p(D)$$

d'où $f \in \operatorname{Im} Y_1$.

• Montrons que $\operatorname{Ker} Y_j = \operatorname{Im} Y_{j+1}$, $j = 1, \ldots, k-1$ (il est immédiat de vérifier que Y_k est injectif).

Soit $f \in S_j(z_1, \ldots, z_k ; p, v)$ tel que $Y_j(f) = 0$;

$$f = \sum_{\substack{|\gamma| = j \\ k \notin \gamma}} f_\gamma e_\gamma + \sum_{\substack{|\beta| = j-1 \\ k \notin \beta}} f'_\beta e_\beta \wedge e_k .$$

Considérant $f' = \sum_{\substack{|\beta| = j-1 \\ k \notin \beta}} f'_\beta e_\beta$ comme un élément de $S_{j-1}(z_1, \ldots, z_{k-1} ; p, z_k v)$ tel que $Y_{j-1}(f') = 0$, nous pouvons écrire, d'après l'hypothèse de récurrence, $f' = Y_i(g')$ où

$$g' = \sum_{\substack{|y|=j \\ k \notin y}} g'_y \, e_y \in S_j(z_1, \ldots, z_{k-1} \,;\, p, z_k v).$$

Posons :

$$g = g' \wedge e_k \in S_{j+1}(z_1, \ldots, z_k \,; p, v) \,;$$

nous avons :

$$f - Y_{j+1}(g) = \sum_{\substack{|y|=j \\ k \notin y}} (f_y + (-1)^{k+1} z_k \, g'_y) \, e_y$$

$$f - Y_{j+1}(g) \in S_j(z_1, \ldots, z_{k-1} \,; p, v) \,;$$

l'élément $f - Y_{j+1}(g)$ étant par hypothèse de récurrence de la forme $Y_{j+1}(h)$ où $h \in S_{j+1}(z_1, \ldots, z_{k-1} \,; p, v)$ nous avons $f \in \mathrm{Im}\, Y_{j+1}$ dans $S(z_1, \ldots, z_k \,; p, v)$.

La preuve de b) ne présente pas de difficultés.

B – Résultats de cohomologie avec estimations

Reprenons les notations du paragraphe I.3. Soient α, β deux multi-indices, $\alpha \subset \beta$, $|\beta| \geqslant 0$, ω une $(0, q)$ forme sur un ouvert $\Omega \subset D$, $q \geqslant 0$. Posons :

$$\tau_{\alpha,\beta,r}(\omega) = (-r)^{|\alpha|/2 - 1/2} \, |u_{(\beta)} u_{(\alpha)}^{-1}| \, [\, |\omega| + \epsilon_q (-r)^{-1/2} \, |\bar{\partial} r \wedge \omega| \,] \, \mathbf{1}_\Omega$$

où $\epsilon_q = 1$ si $q \geqslant 1$, $\epsilon_0 = 0$. (3.2)

Rappelons (définition I.3.1) que pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, ω vérifie $\mathfrak{W}^p_{u,\beta}$ avec $|\beta| \geqslant 1$, (respectivement $\overline{\mathfrak{W}}^p_{u,\beta}$, avec $|\beta| \geqslant 0$) si $\tau_{\alpha,\beta,r}(\omega) \in W^{1-\frac{1}{p}}(D)$, pour tout $\alpha \subset \beta$ tel que $|\alpha| \geqslant 1$ (respectivement $|\alpha| \geqslant 0$) ; on note alors :

$$\|\omega\|_{\mathfrak{W}^p_{u,\beta}} = \max_{\substack{\alpha \subset \beta \\ |\alpha| \geqslant 1}} \|\tau_{\alpha,\beta,r}(\omega)\|_{W^{1-1/p}(D)}$$

(et une expression analogue pour $\overline{\mathfrak{W}}^p_{u,\beta}$).

Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de $\bar{D}$ de type $\mathfrak{F}$. Nous reprenons les notations de la partie A.

$C^m(\mathcal{U}, \operatorname{Ker} Y_j, \mathcal{H}_u^p)$, (où $m \geqslant 0$, $0 \leqslant j \leqslant k$) est l'espace des m-cochaînes c sur $\mathcal{U}$ à valeurs dans

$$S_j(u_1, \ldots, u_k ; \mathcal{O}, p, 1) \cap \operatorname{Ker} Y_j$$

près de V ; plus précisément si

$$s = (i_1, \ldots, i_{m+1}) \text{ et } U^{(s)} = U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_{m+1}},$$

nous aurons :

. si $U^{(s)} \cap D$ n'est pas inclus dans T : $c^{(s)} = 0$,

. sinon $c^{(s)} = \sum_{|\beta|=j} c_\beta^{(s)} e_\beta$ satisfait $Y_j(c^{(s)}) = 0$ et est tel que :

$$u_{(\beta)} c_\beta^{(s)} \in H^p(U^{(s)} \cap D), \quad \forall \beta, |\beta| = j.$$

On note alors $\|c\|_{\mathcal{H}_u^p} = \max_{s,\beta} \|u_{(\beta)} c_\beta^{(s)}\|_{H^p(U^{(s)} \cap D)}$.

$C^m(\mathcal{U}, \operatorname{Ker} Y_j, \mathcal{W}_u^p)$ $(m \geqslant 0, 0 \leqslant j \leqslant k)$ est l'espace des m-cochaînes c sur $\mathcal{U}$ telles que :

. si $U^{(s)} \cap D$ n'est pas inclus dans T : $c^{(s)} = 0$.

. sinon $c^{(s)} = \sum_{|\beta|=j} c_\beta^{(s)} e_\beta$ satisfait $Y_j(c^{(s)}) = 0$ et est tel que :

$c_\beta^{(s)}$ est holomorphe sur $U^{(s)} \cap D$, $\forall j = 0, \ldots, k$; $\forall \beta, |\beta| = j$

$c_\beta^{(s)}$ vérifie $\mathcal{W}_{u,\beta}^p$ sur $U^{(s)} \cap D$, $\forall j \geqslant 1$; $\forall \beta, |\beta| = j$

$c^{(s)} = Y_1(b^{(s)})$, où $b^{(s)}$ satisfait $\mathcal{W}_u^p$, si $j = 0$.

On note alors :

$$\|c\|_{\mathcal{W}_u^p} = \max_{s,\beta} \|c_\beta^{(s)}\|_{\mathcal{W}_{u,\beta}^p}, \text{ si } j \geqslant 1.$$

$$\|c\|_{\mathcal{W}_u^p} = \max_{\substack{s,\beta \\ |\beta|=1}} \|b_\beta^{(s)}\|_{\mathcal{W}_{u,\beta}^p}, \text{ si } j = 0.$$

THEOREME 3.1. – *Sous les hypothèses du théorème* 0.1, *soit* c *une cochaîne de* $C^m(\mathcal{U}, \operatorname{Ker} Y_j, \mathcal{H}_u^p)$ *telle que* $\delta c = 0$, $(m \geqslant 0$, $0 \leqslant j \leqslant k)$.

a) *Il existe un recouvrement* $\mathcal{U}' = (U'_i)_{i\in I}$ *de type* $\mathfrak{F}$ *de* $\bar{D}$, *plus fin que* $\mathcal{U}$ *et une cochaîne* $b \in C^{m-1}(\mathcal{U}', \operatorname{Ker} Y_j, \mathcal{W}^p_u)$ *tels que* $\delta b = \Pi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}(c)$, *(où* $\Pi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ *est la restriction canonique) et :*

$$\|b\|_{\mathcal{W}^p_u} \leqslant \text{cste } \|c\|_{\mathcal{H}^p_u}$$

b) *Si* $m = 1$, $b = (b^{(i)})_{i\in I}$ *est de la forme :* $b^{(i)}_\beta = a^{(i)}_\beta + G_\beta$, *où* G_β *est de classe* C^∞ *dans* D, *admet une valeur au bord* g_β *au sens de Stokes sur* ∂D, *avec* $u_{(\beta)} g_\beta \in L^p(\partial D)$ *et :*

$$\max_{\substack{i\in I\\ |\beta|=j}} \left(\sup_{\epsilon>0} \int_{\partial D_\epsilon \cap U'_i} |u_{(\beta)} a^{(i)}|^p \, d\lambda\right) + \|u_{(\beta)} g_\beta\|_{L^p(\partial D)} \leqslant \text{cste } \|c\|_{\mathcal{H}^p_u}.$$

Le théorème se prouve par une récurrence sur les m décroissants suivant un schéma classique (cf. [12] Prop. 7.6.1 et Th. 7.6.10) et nous renvoyons à [12] pour les étapes "algébriques" de la démonstration ; les résultats d'estimation sont basés sur le corollaire I.3.1. pour la partie a), la proposition I.3.2. pour la partie b), et les trois lemmes suivants :

LEMME 3.1. – *Soit* $\mathcal{U}$ *un recouvrement fini de* $\bar{D}$, *de type* $\mathfrak{F}$, m *un réel,* $m \geqslant 1$; *il existe un recouvrement* $\mathcal{U}'$ *de* $\bar{D}$ *de type* $\mathfrak{F}$, *plus fin que* $\mathcal{U}$ *tel que pour tous multi-indices* β, s $(1 \leqslant |\beta| \leqslant k$, $|s| = m)$ *et toute* $(0,q)$ *forme* $\omega \in C^\infty_{0,q}(U^{(s)} \cap D)$ $(q \geqslant 1)$, $\bar{\partial}$*-fermée, vérifiant l'estimation* $\mathcal{W}^p_{u,\beta}$, *l'équation* $\bar{\partial} g = \omega$ *admette dans* $U'^{(s)} \cap D$ *une solution* $g \in C^\infty_{0,q-1}(U'^{(s)} \cap D)$ *vérifiant* $\mathcal{W}^p_{u,\beta}$ *avec* $\|g\|_{\mathcal{W}^p_{u,\beta}} \leqslant \text{cste } \|\omega\|_{\mathcal{W}^p_{u,\beta}}$.

Soit $\mathcal{U}'$ un recouvrement fini de $\bar{D}$, de type $\mathfrak{F}$, plus fin que $\mathcal{U}$ tel que pour tout multi-indice s $(|s| = m)$:

$$U'^{(s)} \cap D \subset \Omega_s \cap D \subset U^{(s)} \cap D,$$

où $U'^{(s)} \subset\subset \Omega_s$ ouvert $\subset\subset U^{(s)}$, $\Omega_s \cap D$ étant strictement pseudoconvexe à frontière C^2.

Si $\Omega_s \cap D = \{z \mid R_s(z) < 0\}$, on peut supposer, quitte à raffiner le recouvrement $\mathcal{U}$ que l'on a, lorsque $U^{(s)} \cap \partial D \neq \emptyset$:

$r \leqslant R_s \leqslant 0$ sur $\overline{\Omega_s \cap D}$

$$\exists \epsilon_1 > 0\,,\ r(z) = \mathrm{R}_s(z) \qquad \text{si } z \in \overline{\Omega_s \cap \mathrm{D}} \qquad \text{et } 0 \leqslant -r(z) \leqslant \epsilon_1\,. \tag{3.3}$$

Nous omettons dans la suite l'indice s pour alléger l'écriture.

Si $\mathrm{U} \cap \partial\mathrm{D} = \phi$: $0 < \epsilon_0 < -r(z)$ sur Ω et $|\omega| \in \mathrm{V}^0(\Omega)$; l'équation $\bar\partial g = \omega$ admet une solution $g \in \mathrm{V}^0(\Omega)$ et les mesures $\tau_{\alpha,\beta,r}(\omega)$ (définies par (3.2.)) sont bornées dans D, à support compact, donc dans $\mathrm{W}^{1-1/p}(\mathrm{D})$.

Supposons que $\mathrm{U} \cap \partial\mathrm{D} \neq \phi$:

• Si ω satisfait $\mathcal{W}^0_{u,\beta}$, les mesures $(-\mathrm{R})^{1/2}\tau_{\alpha,\beta,\mathrm{R}}(\omega)$ seront bornées sur Ω, $\forall \alpha \subset \beta$; l'équation $\bar\partial g = \omega$ admet une solution g telle que $\tau_{\alpha,\beta,\mathrm{R}}(g) \in \mathrm{V}^0(\Omega)$, $\forall \alpha \subset \beta$ (corollaire I.3.1) et l'on vérifie sans peine que $\tau_{\alpha,\beta,r}(g)\,\mathbf{1}_{\mathrm{U}'\cap\mathrm{D}} \in \mathrm{V}^0(\mathrm{D})$.

• Si ω satisfait $\mathcal{W}^\infty_{u,\beta}$, soit g la solution de $\bar\partial g = \omega$ satisfaisant $\mathcal{W}^0_{u,\beta}$ donnée par le corollaire I.3.1. Les pseudo-distances de Koranyi relatives à Ω et D étant (par 3.3) du même ordre dans un voisinage de $\overline{\mathrm{U}' \cap \mathrm{D}} \cap \partial\mathrm{D}$, des calculs analogues à ceux des preuves du corollaire I.3.1 et du lemme I.2.3 montrent que les mesures $\tau_{\alpha,\beta,r}(g)\,\mathbf{1}_{\mathrm{U}'\cap\mathrm{D}}$ sont de Carleson dans D.

• Le cas $1 < p < +\infty$ se déduit des précédents par interpolation.

□

LEMME 3.2. – *Pour tout*

$$\alpha = (i_1, \ldots, i_j) \quad \textit{où} \quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_j \leqslant k\,,$$

la mesure $(-r)^{(|\alpha|/2)-1}\,|u_{(\alpha)}|^{-1}\,\mathbf{1}_\mathrm{T}$ *est de Carleson dans* D (T *est défini par 3.1*).

La preuve est analogue à celle du lemme 2.4.

LEMME 3.3. – *Soient* $\mathcal{U}$ *un recouvrement fini de* $\bar{\mathrm{D}}$, *de type* $\mathcal{F}$, *et* $c \in \mathrm{C}^m(\mathcal{U}, \mathrm{Ker}\,\mathrm{Y}_j, \mathcal{H}^p_u)$, $(j \geqslant 0)$; *il existe un recouvrement* $\mathcal{U}'$ *de type* $\mathcal{F}$ *plus fin que* $\mathcal{U}$, *une m-cochaîne a sur* $\mathcal{U}'$ *tels que* $\Pi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}c = \mathrm{Y}_{j+1}(a)$, *où a vérifie les estimations* $\mathcal{H}^p_u$ *et* $\mathcal{W}^p_u$.

Reprenons les mêmes notations que dans la preuve du lemme 3.1.

• On peut supposer que si $\mathrm{U}^{(s)} \cap \partial\mathrm{D} \cap \bar{\mathrm{V}} \neq \phi$, l'ouvert $\Omega^{(s)} \cap \mathrm{D}$ satisfait la condition (3) de la définition (3.1.) (cf. [9]

lemme 11) ; $c^{(s)}$ s'écrit alors d'après la proposition 3.1. sous la forme $c^{(s)} = Y_{j+1}(a^{(s)})$ avec $u_{(\beta)}\, a_\beta^{(s)} \in H^p(\Omega_s \cap D)$ $(\forall \beta, |\beta| = j+1)$. Si l'on remarque que la mesure $w_\alpha = (-r)^{(|\alpha|/2)-1}\, |u_{(\alpha)}|^{-1}\, \mathbf{1}_{T\cap\Omega}$, de Carleson dans D (cf. lemme 3.2.) est aussi de Carleson dans $\Omega \cap D$, nous déduisons des estimations sur $a^{(s)}$ que $u_{(\beta)} a_\beta^{(s)} \in L^p(w_\alpha)$, $\forall \alpha \subset \beta$ d'où l'estimation $\mathcal{W}^p_{u,\beta}$ d'après (0.7).

- Si $U^{(s)} \cap \partial D = \phi$ avec $U^{(s)} \subset T'$, on peut écrire

$$c^{(s)} = Y_{j+1}(a^{(s)})$$

où $a_\beta^{(s)}$ est holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega_s \cap D}$; les mesures $|u_{(\beta)}\, a_\beta^{(s)}|\, w_\alpha$ (où $\alpha \subset \beta$) seront bornées, à support compact dans D.

- Dans tous les autres cas $c^{(s)} = 0$ (en supposant $U_i \cap \partial D \neq \phi$ si $i \neq i_0$). □

4. Applications du théorème 0.1.

Notons V^* l'ensemble des points réguliers de V.

COROLLAIRE 4.1. – *Sous les hypothèses du théorème 0.1, si de plus* D *est à frontière* C^3 *et* V *de classe* $C^m (m \geq 2)$ *jusqu'au bord, pour toute fonction* f *de* $\mathcal{O}(V) \cap L^p(\mu_{k-1})$, *il existe une suite* (f_n) *de fonctions de* $H^\infty(V) \cap C^m(\overline{V}^*)$ *qui converge vers* f *dans* $L^p(\mu_{k-1})$.

Soit $f \in \mathcal{O}(V) \cap L^p(\mu_{k-1})$, F une extension de f appartenant à $H^p(D)$, (Th. 0.1), $(F_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes dans un voisinage Ω de $\overline{D}$, qui converge vers F dans $H^p(D)$ (voir [16]). Notant f_n la restriction de F_n à $\Omega \cap V'$, il suffit, pour prouver le corollaire, de déduire du lemme 1.1. la majoration :

$$\| f_n - f \|_{L^p(\mu_{k-1})} \leq \text{cste}\ \| F_n - F \|_{H^p(D)} . \qquad \square$$

Rappelons que pour $s > -1$: $\mu_s = (-r)^s \lambda_V$ et $\nu_s = (-r)^s \lambda_D$.

PROPOSITION 4.2. – *Sous les hypothèses du théorème 0.1, soient* $1 \leq p < +\infty$ *et* $s > k-1$; *une fonction* f *holomorphe sur* V *admet une extension* F *holomorphe dans* D *appartenant à* $L^p(\nu_{s-k})$ *si et seulement si* f *appartient à* $L^p(\mu_s)$.

• La condition nécessaire résulte du théorème de Carleson lorsque s est entier et de résultats d'interpolation dans les autres cas.

• Soit $f \in \mathcal{O}(V) \cap L^p(\mu_s)$, où $s > k-1$.

Supposons s entier et posons $m = s - k + 1$; V est un sous-ensemble analytique transverse, de classe C^2 jusqu'au bord, de codimension $s+1$ dans le domaine

$$\widetilde{D}_m = \{\tilde{z} = (z, z_{n+1}, \ldots, z_{n+m}) \in D' \times \mathbf{C}^m \mid r(z) + \sum_{j=1}^{m} |z_{n+j}|^2 < 0\} ;$$

f admet d'après le théorème 0.1 une extension $\widetilde{F}$ appartenant à $H^p(\widetilde{D}_m)$; la restriction de $\widetilde{F}$ à D est alors une extension holomorphe de f appartenant à $L^p(\nu_{s-k})$ puisque ν_{m-1} est de Carleson dans $\widetilde{D}_m$.

Ce résultat d'extension se démontre par ailleurs (et pour toutes valeurs de $s > k-1$) en suivant une démarche parallèle à celle des paragraphes II.2 et II.3 ; supposons D strictement convexe, V variété linéaire complexe transverse de codimension $k = 1$ dans D ; soit $f \in \mathcal{O}(V) \cap L^p(V)$; on vérifie aisément que la fonction F du lemme 2.1 et la fonction $z_1 g$, où g est solution de l'équation $\bar{\partial} g = \omega$ donnée par le théorème I.1 (ω étant défini par II(2.1)) appartiennent à $L^p(\nu_{s-1})$; une récurrence simple permet de passer au cas où $V = \{z \in D \mid z_1 = \ldots = z_k = 0\}$ est transverse dans D strictement convexe (avec $k \geq 2$) : une fonction f de $\mathcal{O}(V) \cap L^p(\mu_s)$ s'étendant tout d'abord en une fonction $\tilde{f}$ holomorphe sur $V_1 = \{z \in D \mid z_1 = 0\}$ telle que $\tilde{f} \in L^p((-r)^{s-k+1} \lambda_{V_1})$ puis en une fonction de $\mathcal{O}(D) \cap L^p(\nu_{s-k})$. Dans le cas général, les estimations intervenant dans la résolution du problème de cohomologie sont basées sur le théorème I.1.a).

Remarque. – On peut déduire du théorème 0.1 et des résultats connus d'interpolation sur les espaces $H^p(D)$ $(1 \leq p < +\infty)$ des résultats d'interpolation pour les espaces de Bergman relatifs à V, par exemple : sous les hypothèses du théorème 0.1 :

$$[\mathcal{O}(V) \cap L^{p_0}(\mu_{k-1}), \mathcal{O}(V) \cap L^{p_1}(\mu_{k-1})]_{\theta, p} = \mathcal{O}(V) \cap L^p(\mu_{k-1})$$

où $$1 \leq p_0, p_1 < +\infty, \ 0 < \theta < 1, \ \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. AMAR, Extension de fonctions holomorphes et courants, à paraître dans *Bull. Sciences Math.*, (1982).

[2] E. AMAR et A. BONAMI, Mesures de Carleson d'ordre α et solutions au bord de l'équation $\bar{\partial}$, *Bull. Soc. Math. France*, 107 (1979), 23-48.

[3] B. BERNDTSSON and M. ANDERSON, Henkin-Ramirez formulas with weight factors, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble 32-3 (1982), 91-110.

[4] L. BUNGART, Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas, *Trans. Amer. Math. Sc.*, 111 (1964), 317-344.

[5] P. CHARPENTIER, Formules explicites pour les solutions minimales de l'équation $\bar{\partial}u = f$ dans la boule et le polydisque, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 30-4 (1980), 121-154.

[6] A. CUMENGE, Thèse $3^{\text{ème}}$ cycle. Toulouse (1980).

[7] S.A. DAUTOV and G.M. HENKIN, Zeros of holomorphic functions of finite ordre and weighted estimates for solutions of $\bar{\partial}$-equation, *Math. USSR Sbornik*, Vol. 35 N° 4 (1979).

[8] J.E. FORNAESS, Embedding strictly pseudoconvex domains in convex domains, *Amer. J. Math.*, 98 (1976).

[9] G.M. HENKIN, Continuation of bounded functions from submanifolds in general position to strictly pseudo-convex domains, *Math. USSR. Izv.*, 6, n° 3 (1972), 356-563.

[10] G.M. HENKIN and J. LEITERER, Theory of functions on strictly pseudoconvex sets with non-smooth boundary, Preprint.

[11] L. HORMANDER, L^p-estimates for (pluri) – subharmonic functions, *Math. Scand.*, 20 (1967), 65-78.

[12] L. HORMANDER, *An introduction to complex analysis in several variables*, van Nostrand, Princeton, 1966.

[13] N. KERZMAN, Hölder and L^p-estimates for solutions of $\bar{\partial} u = f$ in strongly pseudo-convex domains, *Commun. Pure Appl. Math.*, 24 (1971), 301-379.

[14] H. SKODA, Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur d'' et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 104 (1976), 225-299.

[15] E.M. STEIN, Boundary behaviour of holomorphic functions of several complex variables, *Mathematical Notes*, Princeton, Princeton University Press, 1972.

[16] E.L. STOUT, H^p-functions on strictly pseudo-convex domains, *Amer. J. Math.*, 98 n° 3, 821-852.

[17] N. VAROPOULOS, BMO functions and the $\bar{\partial}$ equation, *Pacific J. Math.*, t. 71 (1977), 221-273.

Manuscrit reçu le 28 juin 1982.

Anne CUMENGE,
Université Paul Sabatier
UER M.I.G.
118 route de Narbonne
31062 Toulouse CEDEX.