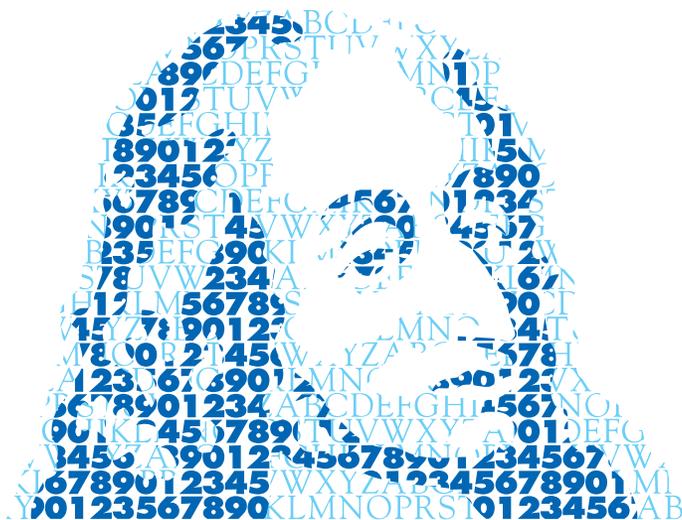


ANNALES MATHÉMATIQUES



BLAISE PASCAL

BENOIT FRESSE

Théorie des opérades de Koszul et homologie des algèbres de Poisson

Volume 13, n° 2 (2006), p. 237-312.

http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2006__13_2_237_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2006, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France*

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

Théorie des opérades de Koszul et homologie des algèbres de Poisson

BENOIT FRESSE

Introduction

On définit une théorie homologique spécifique aux algèbres de Poisson en appliquant une procédure universelle définie par Quillen dans l'article [43]. On travaille dans tout l'article avec un corps de base fixé \mathbb{K} de caractéristique nulle.

Une *algèbre de Poisson* est une algèbre commutative \mathcal{O} munie d'un *crochet de Poisson* : une bidérivation antisymétrique $[-, -] : \mathcal{O} \otimes \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ telle que le couple $(\mathcal{O}, [-, -])$ forme une algèbre de Lie. Une *représentation de Poisson* de \mathcal{O} est un \mathcal{O} -module \mathcal{M} muni d'une bidérivation antisymétrique $[-, -] : \mathcal{M} \otimes \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que le couple $(\mathcal{M}, [-, -])$ forme une représentation de l'algèbre de Lie $(\mathcal{O}, [-, -])$. Une *dérivation de Poisson* de \mathcal{O} dans \mathcal{M} est une application $d : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que $d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$ et $d[f, g] = [df, g] + [f, dg]$, pour tout $f, g \in \mathcal{O}$. Notons $\text{Der}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ le module des dérivations de Poisson de \mathcal{O} dans \mathcal{M} .

On définit la *cohomologie de Poisson* $H_{\text{Pois}}^*(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ comme le foncteur dérivé du module des dérivations de Poisson $\text{Der}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ par rapport à \mathcal{O} . On travaille alors dans le cadre des algèbres de Poisson différentielles graduées. Ainsi, pour déterminer $H_{\text{Pois}}^*(\mathcal{O}, \mathcal{M})$, on commence par fixer une *résolution quasi-libre* de \mathcal{O} . Plus explicitement, on fixe une algèbre de Poisson différentielle graduée \mathcal{R} , libre en tant qu'algèbre de Poisson graduée et quasi-isomorphe à \mathcal{O} . Dans $\text{Der}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$, on remplace \mathcal{O} par \mathcal{R} . On obtient ainsi un module différentiel gradué $\text{Der}_{\text{Pois}}(\mathcal{R}, \mathcal{M})$ dont l'homologie est par définition $H_{\text{Pois}}^*(\mathcal{O}, \mathcal{M})$. On montre que $H_{\text{Pois}}^*(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ ne dépend pas du choix de \mathcal{R} . L'homologie de Poisson $H_*^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ est définie de façon analogue.

La théorie des *opérades de Koszul* fournit un complexe naturel pour calculer l'homologie de Poisson. Notre travail consiste à expliciter ce complexe. Notre idée pour cette construction consiste à composer le complexe

de Hochschild avec le complexe de Chevalley-Eilenberg. En fait, on obtient ainsi un bicomplexe. Cette propriété est également un résultat général de la théorie des opérades (cf. Fox-Markl [11]).

Le résultat suivant est une conséquence de notre construction :

Théorème. — *Soit \mathcal{O} une algèbre de Poisson. Soit \mathcal{M} une représentation de Poisson de \mathcal{O} .*

(i) *On a une suite spectrale de la forme*

$$E_{s,t}^1 = \overline{\mathrm{HH}}_{s+t}^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \Rightarrow H_{s+t}^{\mathrm{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}),$$

où $\overline{\mathrm{HH}}_*^{(s)}$ désigne la composante de poids s de l'homologie de Hochschild réduite.

(ii) *On a $E_{s,0}^1 = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^s(\mathcal{O})$. De plus, sur cette composante, la différentielle $d^1 : E_{s,0}^1 \rightarrow E_{s,0}^1$ s'identifie à la différentielle canonique classique.*

(iii) *Si \mathcal{O} est lisse, alors $E_{s,t}^1 = 0$ pour $t \neq 0$ et la suite spectrale ci-dessus dégénère au rang 2. Par suite, l'homologie de Poisson d'une algèbre lisse coïncide avec l'homologie canonique réduite. Plus explicitement, on a l'identité $H_s^{\mathrm{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \overline{H}_s^{\mathrm{can}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$.*

La décomposition en poids de l'homologie de Hochschild

$$\overline{\mathrm{HH}}_n(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \bigoplus_{1 \leq s \leq n} \overline{\mathrm{HH}}_n^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$$

provient des travaux de Burghelea-Vigué [6], [51], Gerstenhaber-Schack [17], [18], Loday [33], [32, Chapitre 4], et Quillen [43].

L'assertion (iii) du théorème ci-dessus est une conséquence du théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg. Rappelons que la différentielle canonique

$$\delta^{\mathrm{can}} : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^s(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^{s-1}(\mathcal{O})$$

est définie par la formule

$$\begin{aligned} \delta^{\mathrm{can}}(x \otimes df_1 \cdots df_s) &= \sum_{1 \leq i \leq s} \pm [x, f_i] \otimes df_1 \cdots \widehat{df}_i \cdots df_s \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq s} \pm x \otimes df_1 \cdots d[f_i, f_j] \cdots \widehat{df}_j \cdots df_s. \end{aligned}$$

Le complexe canonique $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^*(\mathcal{O}), \delta^{\mathrm{can}})$ a été introduit par Brylinski [5], Gelfand-Dorfman [16] et Koszul [27] dans le cadre des variétés de Poisson

et par Huebschmann [24] dans le cadre algébrique. Si on suppose \mathcal{O} lisse, alors le complexe canonique permet de calculer l'homologie de Hochschild d'une algèbre associative obtenue par déformation de \mathcal{O} (cf. Brylinski [5], Kassel [25]). On renvoie également le lecteur au livre de Vaisman [49] pour un ouvrage de synthèse sur l'homologie canonique et la géométrie de Poisson.

On peut étendre le complexe canonique $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^s(\mathcal{O}), \delta^{can})$ aux algèbres de Poisson différentielles graduées. Cependant, le foncteur $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^s(\mathcal{O})$ ne préserve pas les quasi-isomorphismes et l'homologie canonique n'est pas invariante par quasi-isomorphisme. En fait, avec le théorème précédent, on obtient :

Théorème. — *L'homologie de Poisson est caractérisée par les propriétés suivantes :*

- (i) *L'homologie de Poisson est invariante par quasi-isomorphisme. Plus explicitement, soit $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ un morphisme d'algèbres de Poisson différentielles graduées. Soit \mathcal{M}' une représentation de \mathcal{O}' . Si $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ est un quasi-isomorphisme, alors f induit un isomorphisme en homologie de Poisson :*

$$f_* : H_*^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}') \xrightarrow{\cong} H_*^{\text{Pois}}(\mathcal{O}', \mathcal{M}').$$

- (ii) *Soit \mathcal{O} une algèbre de Poisson différentielle graduée. Soit \mathcal{M} une représentation de \mathcal{O} . Si \mathcal{O} est lisse comme algèbre commutative, alors on a $H_*^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \overline{H}_*^{can}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$.*

Ce théorème permet de calculer l'homologie de Poisson d'une intersection complète à singularités isolées (cf. [14]). On détermine par exemple l'homologie de Poisson des surfaces de Klein, munies de leur structure de Poisson naturelle induite par la structure symplectique standard du plan (cf. Alev-Lambre [1]).

On a des résultats similaires pour la cohomologie de Poisson. En particulier, on montre que la cohomologie de Poisson d'une algèbre lisse s'identifie à la cohomologie de Lichnerowicz-Poisson classique (cf. Braconnier [4], Huebschmann [24], Krasilshchik [28], Lichnerowicz [29]). Mentionnons que Ginzburg et Kaledin utilisent la cohomologie de Poisson dans leur travail sur les résolutions de singularités symplectiques [21].

Getzler et Jones ont étudié une variante de l'homologie de Poisson du point de vue de la théorie des opérades (cf. [19]). Plus précisément,

ces auteurs considèrent des algèbres de Poisson graduées dont le crochet est homogène de degré $r \geq 1$. On parle d'algèbre de Gerstenhaber pour distinguer ces structures de la notion d'algèbre de Poisson classique. La structure d'algèbre de Gerstenhaber intervient dans l'étude des espaces de lacets itérés. La cohomologie des algèbres de Gerstenhaber intervient également dans la démonstration de Tamarkin du théorème de formalité de Kontsevich [48] et a été étudiée par Ginot [20]. Dans ce cadre, il semble possible d'obtenir des résultats similaires aux théorèmes ci-dessus. En particulier, on a une suite spectrale convergeant vers l'homologie des algèbres de Gerstenhaber qui fait apparaître l'homologie de Hochschild supérieure, introduite par Pirashvili dans l'article [40].

Le but de cet article sera de donner un exposé complet des définitions et propriétés fondamentales de l'homologie de Poisson, annoncées dans la note [13], en omettant la relation de la cohomologie avec les déformations de Poisson. On renvoie le lecteur à l'article de Ginzburg-Kaledin [21] pour cet aspect spécifique de la théorie. Nos calculs d'homologie, annoncés dans la note [14], seront rédigés dans un article ultérieur.

Remerciements : Je voudrais remercier Jacques Alev, Thierry Lambre, Jean-Louis Loday, Claude Roger et Micheline Vigué pour toutes leurs questions et observations. Je suis particulièrement reconnaissant envers Thierry Lambre de m'avoir continuellement motivé pour ce travail.

HOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE POISSON

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	237
Contenu	242
Conventions	243
1. Résultats	246
1.1. Représentations de Poisson	246
1.2. Définition et propriétés caractéristiques de l'homologie de Poisson	250
1.3. Le bicomplexe de Poisson	256
La décomposition en poids du complexe de Hochschild	257
Définition du bicomplexe de Poisson	261
Une formule de Künneth	266
1.4. Homologie de Poisson des algèbres lisses	268
2. La structure du bicomplexe de Poisson	272
2.1. Résolution quasi-libre d'une algèbre sur une opérade de Koszul	272
2.2. Résolution quasi-libre d'une algèbre de Poisson	281
Le complexe $\mathcal{B}^{\text{Pois}}(\mathcal{O})$	282
Le complexe $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R})$ associé à la résolution $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\text{Pois}}(\mathcal{O})$	285
Récapitulation	291
2.3. Du complexe canonique au bicomplexe de Poisson	292
Résolution commutative quasi-libre d'une algèbre de Poisson	292
Le complexe canonique pour la résolution de Schlessinger et Stasheff	294
3. Le crochet de Poisson shuffle	299
3.1. Construction du crochet shuffle	299
3.2. Les propriétés du crochet shuffle	300
4. Appendices	304
4.1. Crochets de Lie de degré -1	304
4.2. La structure de la cogèbre tensorielle et la cogèbre de Lie colibre	305
Références	308

Contenu

Section 1. Énoncé des résultats. — On précise la définition de l'homologie de Poisson, on définit le bicomplexe de Poisson qui la calcule, et on montre que l'homologie de Poisson d'une algèbre lisse se réduit à l'homologie canonique. La construction du bicomplexe de Poisson est basée sur la décomposition en poids de la cogèbre tensorielle et du complexe de Hochschild. Plus spécifiquement, on s'appuie sur les faits suivants :

- (i) La cogèbre tensorielle munie du produit shuffle est isomorphe à l'algèbre commutative libre engendrée par la cogèbre de Lie colibre.
- (ii) Si \mathcal{O} est une algèbre de Poisson, alors la cogèbre de Lie colibre coengendrée par \mathcal{O} forme une bigèbre de Lie. Ce résultat est établi dans la 3^{ème} Section de l'article.

Section 2. La structure du bicomplexe de Poisson. — La théorie des opérades de Koszul fournit un complexe naturel pour calculer l'homologie associée à une structure d'algébrique. On rappelle cette construction générale. On montre que le complexe obtenu dans le cas des algèbres de Poisson est le complexe total du bicomplexe de Poisson introduit dans la première section de l'article. Pour conclure la section, on montre que le bicomplexe de Poisson s'identifie au complexe canonique d'une certaine algèbre commutative quasi-libre universelle.

Section 3. Le crochet de Poisson shuffle. — On montre que la cogèbre tensorielle engendrée par une algèbre de Poisson forme une algèbre de Hopf-Poisson. On obtient une structure de bigèbre sur la cogèbre de Lie colibre par passage aux indécomposables.

Conventions

0.1. Modules différentiels gradués. — On fixe un corps de base \mathbb{K} de caractéristique 0. On travaille dans la catégorie des modules différentiels gradués sur \mathbb{K} que l'on munit de son produit tensoriel habituel, l'opérateur de symétrie suivant la règle des signes. Pour abrégé, on parle de dg-modules.

Soit V un dg-module. On suppose généralement que V est gradué positivement et inférieurement. La différentielle de V est notée $\delta : V \rightarrow V$ et a pour degré -1 . L'homologie du complexe (V, δ) , notée $\pi_*(V)$, représente l'*homotopie* de V . Le terme d'homologie sera réservé à des complexes spécifiques.

Soit $\mathbb{K}e$ le module gradué engendré par un élément e de degré 1. La *suspension* de V est le dg-module $\Sigma V := \mathbb{K}e \otimes V$. On peut identifier $v \in V_{i-1}$ au tenseur $\Sigma v := e \otimes v \in (\Sigma V)_i$. De la sorte, on a l'identité $V_{i-1} = (\Sigma V)_i$. La différentielle de ΣV est déterminée par la règle des signes. On a explicitement $\delta(\Sigma v) = -\Sigma(\delta v)$. Rappelons qu'un dg-module W est *connexe* s'il est nul en degré 0. La suspension induit clairement un isomorphisme de la catégorie des dg-modules dans la catégorie des dg-modules connexes.

La notation $|v|$ désigne le degré d'un élément $v \in V$.

0.2. Dérivations. — Soient V_1, \dots, V_n des modules différentiels gradués. La différentielle d'un tenseur $v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ est déterminée par la formule de dérivation :

$$\delta(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = \sum \pm v_1 \otimes \dots \otimes \delta v_i \otimes \dots \otimes v_n$$

(le signe est déterminé par les permutations de la différentielle δ avec les facteurs v_1, \dots, v_{i-1}).

Ainsi, une opération multilinéaire $p : V^{\otimes n} \rightarrow V$ est un morphisme de dg-modules si on a la relation

$$\delta(p(v_1, \dots, v_n)) = \sum \pm p(v_1, \dots, \delta v_i, \dots, v_n).$$

On dit aussi que δ est une *dérivation* par rapport à p . On peut étendre la notion de dérivation aux opérations de degré homogène. La permutation de δ et p produit alors un signe supplémentaire dans la relation ci-dessus. Duale, soit $p : V \rightarrow V^{\otimes n}$ une coopération. L'application p est un

morphisme de dg-modules si on a la relation

$$p(\delta v) = \sum \pm v_{(1)} \otimes \cdots \otimes \delta v_{(i)} \otimes \cdots \otimes v_{(n)},$$

où $p(v) = \sum v_{(1)} \otimes \cdots \otimes v_{(n)}$. On dit alors que δ est une *codérivation* par rapport à p .

0.3. Algèbres différentielles graduées. — On travaille avec diverses structures d'algèbres et de cogèbres différentielles graduées (algèbres commutatives, algèbres de Lie, algèbres de Poisson, algèbres de Hopf, ...). On suppose toujours la structure algébrique compatible avec la structure de module différentiel gradué.

Plus précisément, soit A un module différentiel gradué. Si A est muni d'une structure algébrique spécifiée par des opérations $p : A^{\otimes n} \rightarrow A$ (ou des coopérations $p : A \rightarrow A^{\otimes n}$), alors ces applications $p : A^{\otimes n} \rightarrow A$ sont supposées de degré homogène (le plus souvent égal à 0) et vérifient les relations de dérivation du paragraphe précédent.

0.4. L'homologie associée à une structure algébrique. — On considère un complexe $(C^{truc}(A), \theta)$ muni d'une différentielle θ déterminée par la structure algébrique d'un objet donné A . Par exemple : le *complexe de Hochschild* d'une algèbre associative, le *complexe de Chevalley-Eilenberg* d'une algèbre de Lie, le *complexe canonique* d'une algèbre de Poisson, ...

L'homologie d'un tel complexe sera notée $H^{truc}(A)$. Ainsi, si C^{truc} est gradué inférieurement, alors on pose explicitement :

$$H_s^{truc}(A) := \pi_s(C_*^{truc}(A), \theta).$$

Le *complexe réduit* associé à C^{truc} , que l'on notera $\overline{C}^{truc}(A)$, est généralement défini par la relation

$$\overline{C}_s^{truc}(A) = 0, \quad \text{si } s = 0, \quad \text{et} \quad \overline{C}_s^{truc}(A) = C_s^{truc}(A), \quad \text{si } s > 0.$$

Son homologie, notée également $\overline{H}^{truc}(A)$, représente l'*homologie réduite* de A .

En général, le complexe $(C^{truc}(A), \theta)$ s'étend de façon naturelle au cadre différentiel gradué. Dans cette situation, chaque composante de $C^{truc}(A)$ forme elle-même un module différentiel gradué et $C^{truc}(A)$ forme un complexe de dg-modules. Plus explicitement, on a $C_s^{truc}(A) = \bigoplus_* C_s^{truc}(A)_*$ et la différentielle de A induit une différentielle interne $\delta : C_s^{truc}(A)_* \rightarrow C_{s-1}^{truc}(A)_{*-1}$ qui commute avec la différentielle algébrique $\theta : C_s^{truc}(A)_* \rightarrow C_{s-1}^{truc}(A)_{*-1}$. On observe qu'un complexe de dg-modules définit aussi un

bicomplexe. Sous ce point de vue, le module $C_s^{truc}(A)_{s+t}$ constitue la composante de bidegré (s, t) de $C^{truc}(A)$, la différentielle interne

$$\delta : C_s^{truc}(A)_{s+t} \rightarrow C_s^{truc}(A)_{s+t-1}$$

définit la différentielle verticale de $C^{truc}(A)$, tandis que la différentielle algébrique

$$\theta : C_s^{truc}(A)_{s+t} \rightarrow C_{s-1}^{truc}(A)_{s+t-1}$$

définit la différentielle horizontale. L'homologie $H_*^{truc}(A)$ est l'homologie du complexe total de $C^{truc}(A)$. Donc, pour résumer, dans le cadre différentiel gradué, on note :

$$H_*^{truc}(A) := \pi_*(\text{Tot}(C^{truc}(A), \delta, \theta)).$$

Si A est concentré en degré 0, alors le bicomplexe C^{truc} est concentré sur la ligne $t = 0$ et $H_*^{truc}(A)$ se réduit à l'homologie du complexe $(C^{truc}(A), \theta)$ comme dans notre définition initiale.

Dans la suite, comme les différentielles δ et θ ne jouent pas des rôles symétriques, on préférera souvent considérer $C^{truc}(A)$ comme un complexe de dg-modules et laisser implicite la structure différentielle graduée interne de $C^{truc}(A)$.

0.5. Unités. — On travaille avec des algèbres sans unité. On pourra observer que la catégorie formée par ces algèbres est isomorphe à la catégorie des algèbres avec unité augmentées. En effet, à une algèbre avec unité augmentée A , on peut associer l'idéal d'augmentation de A (lequel est noté \bar{A}). Réciproquement, à une algèbre sans unité A , on peut associer l'algèbre avec unité augmentée $A_+ := \mathbb{K}1 \oplus A$.

Le coproduit des algèbres commutatives sans unité s'identifie au produit tensoriel réduit, défini par la formule :

$$V \bar{\otimes} W := V \oplus W \oplus V \otimes W.$$

On a l'identité $A_+ \otimes B_+ = (A \bar{\otimes} B)_+$.

0.6. Algèbres libres et cogèbres colibres. — L'algèbre tensorielle est la structure constituée par le module $\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{s \geq 0} V^{\otimes s}$ muni du produit de concaténation des tenseurs. On rappelle que cette objet représente l'algèbre associative libre engendrée par V . L'algèbre tensorielle possède un idéal d'augmentation naturel $\bar{\mathcal{T}}(V) \subset \mathcal{T}(V)$ tel que $\bar{\mathcal{T}}(V) = \bigoplus_{s \geq 1} V^{\otimes s}$.

On peut aussi munir le module $\mathcal{T}(V)$ du coproduit de déconcaténation et donner à $\mathcal{T}(V)$ une structure de cogèbre. La structure obtenue s'appelle

alors la *cogèbre tensorielle* coengendrée par V et représente la cogèbre coassociative augmentée colibre coengendrée par V .

On note $\mathfrak{S}(V) = \bigoplus_{s \geq 0} (V^{\otimes s})_{\Sigma_s}$ l'*algèbre symétrique*. On pose aussi $\overline{\mathfrak{S}}(V) = \bigoplus_{s \geq 1} (V^{\otimes s})_{\Sigma_s}$. La structure d'algèbre de $\mathfrak{S}(V)$ est également donnée par le produit de concaténation. L'algèbre symétrique représente l'algèbre commutative avec unité libre engendrée par V . On peut aussi munir $\mathfrak{S}(V)$ du *coproduit shuffle* et faire de $\mathfrak{S}(V)$ une cogèbre cocommutative. La structure obtenue représente alors la cogèbre cocommutative augmentée colibre coengendrée par V . Rappelons la définition du coproduit shuffle. Soient $v_1, \dots, v_n \in V$. Si $I = \{i_1, \dots, i_p\}$, alors on note v_I le produit $v_{i_1} \cdots v_{i_s}$ dans $\mathfrak{S}(V)$. Le coproduit de $v_1 \cdots v_n$ dans $\mathfrak{S}(V)$ s'écrit

$$\mu(v_1 \cdots v_n) = \sum v_I \otimes v_J$$

en sommant sur l'ensemble des partitions $I \cup J = \{1, \dots, n\}$.

On note aussi $\mathcal{L}(V)$ l'algèbre de Lie libre engendrée par V et $\mathcal{L}^c(V)$ la cogèbre de Lie colibre coengendrée par V .

Les foncteurs $\mathcal{F}(V) = \mathcal{T}(V)$, $\mathfrak{S}(V)$, $\mathcal{L}(V)$ et $\mathcal{L}^c(V)$ ont une décomposition en somme de composantes homogènes $\mathcal{F}_s(V)$, $0 \leq s$. Ainsi, pour $\mathcal{F} = \mathcal{T}$ et $\mathcal{F} = \mathfrak{S}$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(V) &= \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{T}_s(V), \quad \text{avec } \mathcal{T}_s(V) = V^{\otimes s}, \\ \text{et } \mathfrak{S}(V) &= \bigoplus_{s \geq 0} \mathfrak{S}_s(V), \quad \text{avec } \mathfrak{S}_s(V) = (V^{\otimes s})_{\Sigma_s}. \end{aligned}$$

On renvoie le lecteur au Paragraphe 1.3.2 et à la section 4.2 pour le développement de l'algèbre de Lie libre $\mathcal{F} = \mathcal{L}$ et de la cogèbre de Lie colibre $\mathcal{F} = \mathcal{L}^c$.

1. Résultats

1.1. Représentations de Poisson

1.1.1. Algèbres de Poisson. — Soit \mathcal{O} une algèbre commutative. Un *crochet de Poisson* est une bidérivation antisymétrique $[-, -] : \mathcal{O} \otimes \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ telle que $(\mathcal{O}, [-, -])$ forme une algèbre de Lie. En écrivant ces propriétés

explicitement, on obtient les relations :

$$[f, gh] = [f, g]h + g[f, h] \quad (\text{formule de distribution de Poisson}), \quad (\text{a})$$

$$[f, g] = -[g, f] \quad (\text{propriété d'antisymétrie}), \quad (\text{b})$$

$$[f, [g, h]] = [[f, g], h] + [g, [f, h]] \quad (\text{relation de Jacobi}). \quad (\text{c})$$

Une *algèbre de Poisson* est une algèbre commutative munie d'un crochet de Poisson. Si \mathcal{O} est une algèbre commutative avec unité augmentée, alors on suppose que le crochet de Poisson préserve l'idéal d'augmentation de \mathcal{O} . Ainsi, par définition, $\bar{\mathcal{O}}$ forme une sous-algèbre de Poisson (sans unité) de \mathcal{O} . Inversement, si \mathcal{O} est une algèbre de Poisson sans unité, alors l'algèbre avec unité augmentée associée \mathcal{O}_+ est munie d'une structure d'algèbre de Poisson naturelle : on pose $[1, f] = 0$, pour tout $f \in \mathcal{O}$. En conclusion, la catégorie des algèbres de Poisson avec unité augmentées est isomorphe à la catégorie des algèbres de Poisson sans unité.

Dans cet article, on travaille avec des algèbres de Poisson sans unité.

1.1.2. Représentations de Poisson. — On fixe une algèbre de Poisson \mathcal{O} . Une *représentation de Poisson* de \mathcal{O} est un module \mathcal{M} sur l'algèbre commutative \mathcal{O} muni d'une application bilinéaire antisymétrique

$$[-, -] : \mathcal{M} \otimes \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$$

qui est une bidérivation par rapport à l'action de \mathcal{O} sur \mathcal{M} et telle que \mathcal{M} forme une représentation de l'algèbre de Lie $(\mathcal{O}, [-, -])$.

On suppose ainsi que le crochet de \mathcal{M} vérifie les relations du paragraphe 1.1.1, une des variables f, g et h appartenant à \mathcal{M} . Plus explicitement, si \mathcal{M} est un \mathcal{O} -module, alors on suppose que \mathcal{O} agit de façon symétrique à gauche et à droite sur \mathcal{M} . Une application bilinéaire $[-, -] : \mathcal{M} \otimes \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ munit \mathcal{M} d'une structure de représentation de Poisson si elle

vérifie les relations

$$[f, g x] = [f, g] x + g [f, x] \quad \text{et} \quad [f g, x] = [f, x] g + f [g, x] \quad (\text{a})$$

(formules de distribution de Poisson),

$$[f, x] = -[x, f] \quad (\text{propriété d'antisymétrie}), \quad (\text{b})$$

$$[f, [g, x]] = [[f, g], x] + [g, [f, x]] \quad (\text{relation de Jacobi}), \quad (\text{c})$$

pour $f, g \in \mathcal{O}$ et $x \in \mathcal{M}$.

Comme exemples principaux de représentations de Poisson, on considère la *représentation triviale* $\mathcal{M} = \mathbb{K}$ et la *représentation adjointe* $\mathcal{M} = \mathcal{O}$.

1.1.3. Morphismes de représentations de Poisson. — Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} des représentations de Poisson. Une application $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ est un morphisme de représentations si elle vérifie les relations :

$$\phi(fx) = f\phi(x) \quad \text{et} \quad \phi([f, x]) = [f, \phi(x)],$$

quels que soient $f \in \mathcal{O}$ et $x \in \mathcal{M}$.

On notera $\text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ le \mathbb{K} -module des morphismes de représentations de Poisson de \mathcal{M} dans \mathcal{N} .

1.1.4. L'algèbre enveloppante de Poisson. — La notation $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ renvoie en fait à l'*algèbre enveloppante de Poisson* de \mathcal{O} . C'est une \mathbb{K} -algèbre associative qui est caractérisée par la propriété suivante : “la catégorie des $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ -modules à gauche est isomorphe à la catégorie des représentations de Poisson de \mathcal{O} ”. Cette propriété justifie la notation introduite au paragraphe précédent.

On construit cette algèbre enveloppante par générateurs et relations en adaptant une construction générale introduite par Ginzburg et Kapranov dans le cadre des opérades (*cf.* [22]). Une définition différente de l'algèbre enveloppante de Poisson apparaît dans les travaux de S.-Q. Oh (*cf.* [37]). Explicitement, on considère l'algèbre associative engendrée par l'algèbre \mathcal{O} et par des éléments symboliques X_f , où $f \in \mathcal{O}$. L'algèbre $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ est le quotient de cet objet par les relations :

$$X_f \cdot g = [f, g] + g \cdot X_f, \quad (\text{a})$$

$$X_{fg} = f \cdot X_g + g \cdot X_f, \quad (\text{b})$$

$$\text{et} \quad X_f \cdot X_g = X_{[f, g]} + X_g \cdot X_f, \quad \text{pour } f, g \in \mathcal{O}. \quad (\text{c})$$

Ainsi, on note qu'un élément de $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ peut s'écrire comme une somme de produits de la forme $f \cdot X_{g_1} \dots X_{g_s}$.

Si \mathcal{M} est un $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ -module à gauche, alors \mathcal{M} possède une structure de représentation de Poisson naturelle. En effet, par restriction de structure, \mathcal{M} forme un module sur l'algèbre commutative \mathcal{O} . De plus, on a un crochet antisymétrique naturel $[-, -] : \mathcal{M} \otimes \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ qui est défini par l'identité

$$[f, x] = -[x, f] = X_f \cdot x, \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{O} \text{ et } x \in \mathcal{M}.$$

On définit ainsi un isomorphisme de la catégorie des $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ -modules à gauche dans la catégorie des représentations de Poisson de \mathcal{O} .

On peut établir le résultat suivant en utilisant notre présentation par générateurs et relations de l'algèbre enveloppante de Poisson.

1.1.5. Proposition. — *On a un anti-isomorphisme de \mathbb{K} -algèbres $\iota : \mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ caractérisé par les identités $\iota(X_f) = -X_f$ et $\iota(f) = f$.*

Par suite, la catégorie des $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ -modules à gauche est isomorphe à la catégorie des $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ -modules à droite. Ainsi, soit \mathcal{M} un $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ -module à gauche. On munit \mathcal{M} d'une structure de $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ -module à droite en posant $x \cdot u := \iota(u) \cdot x$. Notons que, en prenant respectivement $u = f$ et $u = X_f$, on obtient les formules

$$x \cdot f = f \cdot x \quad \text{et} \quad x \cdot X_f = [x, f].$$

1.1.6. Produit tensoriel de représentations de Poisson. — Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} des représentations de Poisson. On peut considérer \mathcal{M} comme un $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ -module à droite, \mathcal{N} comme un $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ -module à gauche, et former le produit tensoriel de \mathcal{M} et \mathcal{N} au dessus de $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$:

$$\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})} \mathcal{N}.$$

En fait, comme les éléments $f \in \mathcal{O}$ et $X_f \in \mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ engendrent la \mathbb{K} -algèbre $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$, ce produit tensoriel $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})} \mathcal{N}$ est le quotient du produit tensoriel sur le corps de base $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ par les relations :

$$xf \otimes y = x \otimes fy \quad \text{et} \quad [x, f] \otimes y = x \otimes [f, y], \quad \text{pour } f \in \mathcal{O}, x \in \mathcal{M} \text{ et } y \in \mathcal{N}.$$

1.1.7. Représentations de Poisson et représentations d'algèbres de Lie-Rinehart. — La notion de représentation de Poisson est équivalente à une notion plus classique introduite par Rinehart (*cf.* Huebschmann [24], Rinehart [46]). Plus précisément, si \mathcal{O} est une algèbre de

Poisson, alors le module des différentielles de Kähler $\Omega^1(\mathcal{O})$ est muni d'un crochet de Lie (cf. [24]) et le couple $(\mathcal{O}, \Omega^1(\mathcal{O}))$ possède une structure d'*algèbre de Lie-Rinehart*. On a une notion de représentation et d'algèbre enveloppante pour les algèbres de Lie-Rinehart. Une représentation de Poisson de \mathcal{O} est équivalente à une représentation de l'algèbre de Lie-Rinehart $(\mathcal{O}, \Omega^1(\mathcal{O}))$. L'algèbre enveloppante de Poisson de \mathcal{O} est également isomorphe à l'algèbre enveloppante de $(\mathcal{O}, \Omega^1(\mathcal{O}))$.

Le travail de Rinehart montre que l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Poisson lisse possède une structure analogue à l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie classique. Plus précisément, l'algèbre $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ est munie d'une filtration naturelle telle que l'algèbre graduée associée est isomorphe à l'algèbre symétrique engendrée par $\Omega^1(\mathcal{O})$, du moins si \mathcal{O} est lisse comme algèbre commutative (cf. [46]).

1.2. Définition et propriétés caractéristiques de l'homologie de Poisson

1.2.1. Dérivations. — Une *dérivation de Poisson* est une application linéaire $d : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M}$ qui est une dérivation par rapport au produit et par rapport au crochet de \mathcal{O} . Explicitement, on suppose qu'une dérivation de Poisson vérifie les identités :

$$d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg \tag{a}$$

$$\text{et } d[f, g] = [df, g] + [f, dg]. \tag{b}$$

On note $\text{Der}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ le module des dérivations de Poisson de \mathcal{O} dans \mathcal{M} . Le foncteur $\text{Der}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}, -)$ est représentable : il existe une représentation de Poisson, notée $\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O})$, telle que

$$\text{Der}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})}(\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O}), \mathcal{M}).$$

Pour construire $\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O})$, on prend le $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ -module à gauche libre engendré par les symboles df , $f \in \mathcal{O}$, et on quotiente par les relations (a-b) ci-dessus. On revient sur cette construction plus loin (cf. Paragraphe 1.2.6). On est amené à introduire un décalage en degré dans la définition de $\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O})$. Ainsi, dans la situation présente, le module $\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O})$ est en fait gradué et concentré en degré 1. Dualement, le module $\text{Der}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ est gradué (supérieurement) et concentré en degré 1.

La cohomologie de Poisson est le foncteur dérivé du module de morphismes $\text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})}(\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O}), \mathcal{M})$ par rapport à \mathcal{O} . Dualement, l'homologie de Poisson est le foncteur dérivé du produit tensoriel $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O})$. Pour définir ces foncteurs dérivés, il est nécessaire de travailler avec des algèbres de Poisson différentielles graduées.

1.2.2. Algèbres de Poisson différentielles graduées. — Une *algèbre de Poisson graduée* est un module gradué muni d'une structure d'algèbre de Poisson, le produit et le crochet étant de degré 0. Une *algèbre de Poisson différentielle graduée* est un dg-module avec une structure d'algèbre de Poisson graduée compatible. Plus précisément, on suppose que la différentielle forme une dérivation de Poisson (*cf.* Convention 0.3).

1.2.3. Algèbres de Poisson libres. — On note $\mathcal{P}(V)$ l'algèbre de Poisson (avec unité) librement engendrée par V . Rappelons que $\mathcal{P}(V)$ est caractérisée par la relation d'adjonction

$$\text{Hom}_{\text{Pois}}(\mathcal{P}(V), \mathcal{O}_+) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathcal{O}_+).$$

En fait, le foncteur \mathcal{P} s'obtient par composition de l'algèbre symétrique \mathcal{S} et de l'algèbre de Lie libre \mathcal{L} . On a explicitement $\mathcal{P}(V) = \mathcal{S}(\mathcal{L}(V))$. On étend le crochet de $\mathcal{L}(V)$ à $\mathcal{S}(\mathcal{L}(V))$ en suivant la formule de distribution de Poisson.

Dans la suite, on considérera l'idéal d'augmentation de $\mathcal{P}(V)$

$$\overline{\mathcal{P}}(V) = \overline{\mathcal{S}}(\mathcal{L}(V)),$$

qui forme l'algèbre de Poisson sans unité librement engendrée par V .

1.2.4. Algèbres de Poisson quasi-libres. — La construction de l'algèbre de Poisson libre s'étend au cadre des algèbres graduées. Ainsi, une dg-algèbre de Poisson (sans unité) \mathcal{R} est libre si on a $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{P}}(V)$ pour un certain sous-module homogène $V \subset \mathcal{R}$ stable par la différentielle de \mathcal{R} (tel que $\delta(V) \subset V$).

Une algèbre de Poisson quasi-libre est une algèbre de Poisson différentielle graduée qui est libre en tant qu'algèbre de Poisson graduée. De façon équivalente, une dg-algèbre de Poisson \mathcal{R} est *quasi-libre* si on a $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{P}}(V)$ pour un certain sous-module gradué $V \subset \mathcal{R}$ sans supposer que V est stable par la différentielle de \mathcal{R} . On notera néanmoins que la différentielle d'une algèbre quasi-libre \mathcal{R} est déterminée par sa restriction à V . Plus précisément, étant donné une application linéaire $\delta : V \rightarrow \mathcal{R}$, il existe

une et une seule façon d'étendre δ à $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{P}}(V)$ en suivant les relations de dérivation (a-b) du Paragraphe 1.2.1. Une *résolution quasi-libre* d'une algèbre de Poisson \mathcal{O} est une algèbre de Poisson quasi-libre \mathcal{R} avec un quasi-isomorphisme surjectif $\mathcal{R} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}$. On montre que toute algèbre de Poisson admet une résolution quasi-libre (*cf.* Section 2).

1.2.5. Structure de catégorie modèle. — On montre que les algèbres de Poisson différentielles graduées forment une catégorie modèle (voir [41], voir aussi [42]) comme toute catégorie d'algèbres différentielles graduées associées à une opérade (*cf.* [19, Section 4], [30], [3]). Plus précisément, dans la catégorie des algèbres de Poisson différentielles graduées, on distingue trois classes de morphismes : les *équivalences faibles*, les *fibrations* et les *cofibrations*. Les équivalences faibles sont nos quasi-isomorphismes. Un morphisme p est une fibration si il est surjectif en degré $d > 0$. Si p est une fibration et une équivalence faible, alors on dit que p est une *fibration acyclique*. (Dans ce cas, on observe que p est aussi surjectif en degré $d = 0$.) Un morphisme i est une cofibration si il a la propriété du relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques (*cf.* [41, p. 1.1]). Ces classes de morphismes vérifient des axiomes semblables aux propriétés des équivalences faibles, fibrations et cofibrations en topologie.

Un objet \mathcal{O}_+ est *cofibrant* si le morphisme d'unité $\mathbb{K} \rightarrow \mathcal{O}_+$ est une cofibration. On montre que les algèbres de Poisson quasi-libres sont des objets cofibrants. Réciproquement, on peut montrer que \mathcal{O}_+ est cofibrant si et seulement si \mathcal{O}_+ est rétract d'une algèbre de Poisson quasi-libre (voir [42, Proposition 5.5], [41, Remarque 4, p. 4.11], [19, Section 4.2]). Ainsi, une résolution quasi-libre de \mathcal{O}_+ est une factorisation du morphisme d'unité $\mathbb{K} \rightarrow \mathcal{O}_+$

$$\mathbb{K} \xrightarrow{i} \mathcal{R}_+ \xrightarrow{p} \mathcal{O}_+$$

telle que i est une cofibration et p une fibration acyclique.

1.2.6. Degré des dérivations de Poisson. — On étend la définition de $\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O})$ aux algèbres différentielles graduées. Dans ce cadre, la représentation $\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O})$ forme un module différentiel gradué. On fixe le degré d'un générateur df à $|df| = |f| + 1$ et il est nécessaire de corriger les signes des relations de dérivations. Ainsi, pour définir $\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O})$, on quotiente par

les relations :

$$d(fg) = df \cdot g + (-1)^{|f|} f \cdot dg \tag{a}$$

$$\text{et } d[f, g] = [df, g] + (-1)^{|f|} [f, dg]. \tag{b}$$

On munit $\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O})$ de la différentielle $\delta : \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O})_s \rightarrow \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O})_{s-1}$, induite par la différentielle de \mathcal{O} et caractérisée par l'identité $\delta(df) = -d(\delta f)$. Selon ces définitions, si \mathcal{O} est non-gradué, alors $\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O})$ est concentré en degré 1. De plus, les signes disparaissent dans les relations (a-b) comme dans la définition initiale de $\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O})$.

Le module de dérivations $\text{Der}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})}(\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O}), \mathcal{M})$ associé à une représentation de \mathcal{O} forme un dg-module gradué supérieurement. La différentielle de ce dg-module $\delta : \text{Der}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})^s \rightarrow \text{Der}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})^{s+1}$ est caractérisée par l'identité

$$(\delta d)(f) = (-1)^s d(\delta f), \quad \text{pour } d \in \text{Der}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})^s.$$

Si \mathcal{M} est un module non-gradué, alors la composante homogène de degré s de $\text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})}(\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O}), \mathcal{M})$ est constituée des morphismes $\phi : \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{M}$ qui sont nuls sur toute composante $\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O})_n$ de degré $n \neq s$. Le module homogène correspondant $\text{Der}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})^s$ est formé des dérivations $d : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M}$ nulles en tout degré différent de $s - 1$. Si l'algèbre \mathcal{O} elle-même est non-graduée, alors $\text{Der}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ est concentré en degré 1.

Il n'est pas difficile de déterminer la structure de $\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R})$ quand \mathcal{R} est une algèbre graduée libre. On obtient le résultat suivant :

1.2.7. Lemme. — *On suppose que \mathcal{R} est une algèbre de Poisson graduée libre. Alors, $\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R})$ forme un $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})$ -module gradué libre. Plus précisément, on fixe $V \subset \mathcal{R}$ tel que $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{P}}(V)$. On a un isomorphisme de $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})$ -modules*

$$\alpha : \mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R}) \otimes \Sigma V \xrightarrow{\cong} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R})$$

qui est défini par la formule $\alpha(u \otimes \Sigma v) := u \cdot dv$.

On applique cette observation de façon répétitive, car l'homologie de Poisson s'obtient en évaluant le foncteur Ω_{Pois}^1 sur des algèbres de Poisson quasi-libres.

1.2.8. Définition de l'homologie de Poisson. — Soit \mathcal{O} une algèbre de Poisson (éventuellement différentielle graduée). Soit \mathcal{M} une représentation de \mathcal{O} . On fixe une résolution quasi-libre de \mathcal{O} : soit $\mathcal{R} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}$. Le

module \mathcal{M} est une représentation de \mathcal{R} par restriction de structure. On munit les modules $\text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})}(\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R}), \mathcal{M})$ et $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R})$ de la structure de différentielle graduée induite (cf. Paragraphe 1.2.6). On définit l'homologie et la cohomologie de Poisson de \mathcal{O} à coefficients dans \mathcal{M} par :

$$H_s^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \pi_s(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R}))$$

et

$$H_{\text{Pois}}^s(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \pi^s(\text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})}(\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R}), \mathcal{M})).$$

On vérifie que les modules $H_{\text{Pois}}^s(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ et $H_s^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ ne dépendent pas du choix de la résolution \mathcal{R} (voir [43, Sections 1-2]).

On récapitule les propriétés de l'homologie de Poisson inhérentes à notre définition et que l'on pourra déduire de l'énoncé général [43, Proposition 2.4].

1.2.9. Proposition. — *Soit \mathcal{O} une algèbre de Poisson (non-graduée). Soit \mathcal{M} une représentation de Poisson de \mathcal{O} . L'homologie de Poisson de \mathcal{O} est concentrée en degré $s \geq 1$. De plus :*

$$H_1^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O}).$$

Dualement, la cohomologie de Poisson de \mathcal{O} est concentrée en degré $s \geq 1$. De plus :

$$H_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})}(\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O}), \mathcal{M}) = \text{Der}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}).$$

Si \mathcal{O} est libre (en tant qu'algèbre de Poisson), alors l'homologie et la cohomologie de Poisson de \mathcal{O} se réduisent aux composantes ci-dessus.

L'homologie de Poisson est invariante par quasi-isomorphisme. Plus explicitement, soit $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ un morphisme d'algèbres de Poisson différentielles graduées. Soit \mathcal{M}' une représentation de \mathcal{O}' . Le module \mathcal{M}' forme aussi une représentation de \mathcal{O} par restriction de structure. On suppose que $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ est un quasi-isomorphisme. Alors, f induit un isomorphisme en homologie et en cohomologie de Poisson. Explicitement, on a :

$$f_* : H_*^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}') \xrightarrow{\cong} H_*^{\text{Pois}}(\mathcal{O}', \mathcal{M}') \quad \text{et} \quad f^* : H_{\text{Pois}}^*(\mathcal{O}', \mathcal{M}') \xrightarrow{\cong} H_{\text{Pois}}^*(\mathcal{O}, \mathcal{M}').$$

1.2.10. Coefficients universels. — La représentation $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ forme en quelque sorte un module de “coefficients universels” pour l'homologie de Poisson. En effet, considérons le $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ -module différentiel gradué

$$L_{\mathcal{R}} := \mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R})$$

HOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE POISSON

dont l'homotopie est égale à $H_*^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}))$. On a clairement

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R}) &= \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})} L_{\mathcal{R}} \\ \text{et } \text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})}(\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R}), \mathcal{M}) &= \text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})}(L_{\mathcal{R}}, \mathcal{M}). \end{aligned}$$

En conséquence, l'homologie et la cohomologie de Poisson de \mathcal{O} est déterminée par le complexe $L_{\mathcal{R}}$. Plus explicitement, on a les identités :

$$\begin{aligned} H_*^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) &= \pi_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})} L_{\mathcal{R}}) \\ \text{et } H_{\text{Pois}}^*(\mathcal{O}, \mathcal{M}) &= \pi^*(\text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})}(L_{\mathcal{R}}, \mathcal{M})). \end{aligned}$$

On observe que $L_{\mathcal{R}}$ forme un dg- $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ -modules quasi-libre. Cette assertion est un corollaire du Lemme 1.2.7, lequel montre que $\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R})$ est libre en tant que $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})$ -module gradué. En conséquence :

1.2.11. Proposition. — *Soit \mathcal{O} une algèbre de Poisson (non-graduée).*

Une suite exacte courte de représentations de Poisson $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$ induit une suite exacte longue en homologie (et en cohomologie) de Poisson

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_s^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}') \rightarrow H_s^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \rightarrow H_s^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}'') \rightarrow \\ \rightarrow H_{s-1}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}'') \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Soit \mathcal{M} une représentation de Poisson de \mathcal{O} . On a des suites spectrales de coefficients universels de la forme :

$$\begin{aligned} E_{s,t}^2 &= \text{Tor}_s^{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})}(\mathcal{M}, H_t^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}))) \Rightarrow H_{s+t}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \\ \text{et } E_2^{s,t} &= \text{Ext}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})}^s(H_t^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})), \mathcal{M}) \Rightarrow H_{\text{Pois}}^{s+t}(\mathcal{O}, \mathcal{M}). \end{aligned}$$

En général, ces suites spectrales ne dégèrent pas au rang 2. En fait, on ne peut pas représenter l'homologie de Poisson par un foncteur Tor. Plus précisément, on a le résultat suivant :

1.2.12. Observation. — *L'homologie de Poisson $H_*^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, -)$ est représentée par un foncteur de la forme $\text{Tor}_{*-1}^{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})}(-, H)$ si et seulement si*

$$H_s^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})) = 0, \quad \text{pour } s > 1.$$

On a alors

$$H_s^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \text{Tor}_{s-1}^{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})}(\mathcal{M}, H) \quad \text{et} \quad H_s^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \text{Ext}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})}^{s-1}(H, \mathcal{M})$$

avec $H = \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{O})$.

Démonstration. En effet, si le foncteur $H_s^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, -)$ est représenté par un foncteur Tor, alors il s'annule sur $\mathcal{M} = \mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$, car $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ forme un objet libre dans la catégorie des représentations de Poisson. Réciproquement, l'annulation de l'homologie $H_s^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}))$ entraîne que les suites spectrales de coefficients universels dégénèrent. Le résultat s'ensuit. \square

On peut montrer que l'homologie de Poisson d'une algèbre lisse se réduit à un foncteur Tor (*cf.* [24]). Cependant, on peut trouver des algèbres de Poisson mettant en défaut la propriété $H_s^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})) = 0$, pour $s > 1$ (parmi les algèbres à une singularité isolée munies d'une structure de Poisson triviale, par exemple).

1.2.13. Extensions abéliennes. — Une *extension* de \mathcal{O} par \mathcal{M} est une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{i} \tilde{\mathcal{O}} \xrightarrow{p} \mathcal{O} \rightarrow 0$$

telle que :

- (i) L'application $p : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}$ est un morphisme d'algèbres de Poisson.
- (ii) Si $x, y \in \mathcal{M}$, alors on a $i(x)i(y) = [i(x), i(y)] = 0$. Autrement dit, l'application i est un morphisme d'algèbres de Poisson, quand on munit \mathcal{M} de la structure d'algèbre de Poisson triviale.
- (iii) Soit $f \in \mathcal{O}$. On fixe $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{O}}$ tel que $p(\tilde{f}) = f$. On suppose que $i(fx) = \tilde{f}i(x)$ et $i([f, x]) = [\tilde{f}, i(x)]$, quel que soit $x \in \mathcal{M}$.

On a une notion évidente d'isomorphisme d'extensions. On peut établir l'énoncé classique suivant :

1.2.14. Proposition. — *On a une bijection naturelle entre le groupe de cohomologie $H_{\text{Pois}}^2(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ et l'ensemble des classes d'isomorphismes d'extensions de \mathcal{O} par \mathcal{M} .*

1.3. Le bicomplexe de Poisson

On explicite un bicomplexe pour calculer l'homologie de Poisson. Notre définition est basée sur la décomposition en poids du complexe de Hochschild d'une algèbre commutative.

Plus précisément, le complexe de Hochschild d'une algèbre commutative \mathcal{O} se scinde en une somme de sous-complexes

$$C_*(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \bigoplus_{s \geq 0} C_*^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}),$$

HOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE POISSON

les composantes de poids homogènes de $C_*(\mathcal{O}, \mathcal{M})$. On forme un module bigradué en posant

$$C_{s,t}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \begin{cases} 0, & \text{pour } s = 0 \text{ et } t \geq 0, \\ C_{s+t}^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), & \text{pour } s > 0 \text{ et } t \geq 0. \end{cases}$$

Le bord de Hochschild, déterminé par le produit de \mathcal{O} , induit une différentielle verticale sur $C_{s,t}^{\text{Pois}}$. Si \mathcal{O} est une algèbre de Poisson, alors on munit $C_{s,t}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ d'une différentielle horizontale

$$\delta^{CE} : C_{s+t}^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \rightarrow C_{s+t-1}^{(s-1)}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$$

qui est déterminée par le crochet de Poisson de \mathcal{O} . On construit ainsi le *bicomplexe de Poisson*.

On montrera plus précisément que le crochet de Poisson de \mathcal{O} induit un crochet de Lie sur la cogèbre de Lie colibre $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$. La différentielle δ^{CE} s'identifie à la différentielle du complexe de Chevalley-Eilenberg de cette algèbre de Lie qui est relié au complexe de Poisson par un isomorphisme naturel

$$C_*^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes \mathfrak{S}_s(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})).$$

On revient sur la décomposition en poids du complexe de Hochschild dans la première partie de cette section. La définition de la différentielle de Chevalley-Eilenberg du bicomplexe de Poisson se trouve dans la deuxième partie. On montrera pour conclure cette section que l'homologie de Poisson possède de bonnes propriétés (formule de Künneth) qui se déduisent des propriétés du complexe de Hochschild. Les démonstrations des résultats principaux sont repoussées aux Sections 2.2 et 3.

La décomposition en poids du complexe de Hochschild

Cette partie ne contient pas de résultat original. On rappelle simplement la structure du complexe de Hochschild d'une algèbre commutative en se référant aux travaux de Gerstenhaber-Shack [17], [18] et Loday [31], [32, Chapitre 4]. Plus précisément, on utilise la structure d'algèbre de Hopf de la cogèbre tensorielle pour construire la décomposition en poids de l'homologie de Hochschild. (Les auteurs cités dans l'introduction suivent une approche différente.) Les origines de ce point de vue se trouvent dans les travaux de Chen sur les intégrales itérées (*cf.* Chen [7], [8], Hain [23]).

Les théorèmes de structures utilisés sont résumés dans l'Appendice 4.2. On renvoie le lecteur à la bibliographie pour plus de détails.

1.3.1. La cogèbre tensorielle. — On fixe une algèbre commutative \mathcal{O} . La cogèbre tensorielle $\mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O})$ est munie du coproduit de déconcaténation et du produit shuffle et forme une algèbre de Hopf. Un tenseur de $\mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O})$ est noté (f_1, \dots, f_n) , où $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}$. Pour simplifier, on ne marque pas les suspensions dans cette notation. Le produit shuffle de $u, v \in \mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O})$ est noté $u \cdot v$. On munit $\mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O})$ du *bord de Hochschild* b' , défini par la formule classique

$$b'(f_1, \dots, f_n) := - \sum_{i=1}^{n-1} \pm(f_1, \dots, f_i f_{i+1}, \dots, f_n).$$

Le produit de \mathcal{O} induit une application de degré -1 de $\Sigma\mathcal{O} \otimes \Sigma\mathcal{O}$ dans $\Sigma\mathcal{O}$. Le signe \pm qui apparaît dans la formule provient de la permutation de cette application avec les tenseurs $\Sigma f_1, \dots, \Sigma f_{i-1}$. On rappelle que le bord de Hochschild b' est une dérivation par rapport au produit shuffle et une codérivation par rapport au coproduit de déconcaténation. Pour résumer ces assertions, on dit que $(\mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O}), b')$ forme une algèbre de Hopf différentielle graduée.

1.3.2. La cogèbre de Lie colibre. — On note $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ la cogèbre de Lie colibre. Rappelons que $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ s'identifie aux indécomposables de la cogèbre tensorielle pour le produit shuffle. On fixe une section de $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ dans $\mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O})$ en identifiant $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ à l'image du premier idempotent Eulerien $e^{(1)}$ (*cf.* Appendice 4.2). Plus explicitement, on pose :

$$\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) = e^{(1)}\mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O}) \subset \mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O}).$$

La cogèbre colibre possède une décomposition $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) = \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{L}_s^c(\Sigma\mathcal{O})$ avec

$$\mathcal{L}_s^c(\Sigma\mathcal{O}) = e^{(1)}(\Sigma\mathcal{O})^{\otimes s}.$$

On a en particulier $\mathcal{L}_1^c(\Sigma\mathcal{O}) = \Sigma\mathcal{O}$. De plus, la projection sur $\mathcal{L}_1^c(\Sigma\mathcal{O})$ s'identifie à la projection naturelle $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \Sigma\mathcal{O}$.

On montre (*cf. loc. cit.*) que le bord de Hochschild b' commute avec $e^{(1)}$ et induit une différentielle sur $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$:

$$b' : \mathcal{L}_s^c(\Sigma\mathcal{O})_{s+t} \rightarrow \mathcal{L}_{s-1}^c(\Sigma\mathcal{O})_{s+t-1}.$$

Comme b' est une codérivation par rapport au coproduit de déconcaté-
nation, le complexe $(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}), b')$ forme une *cogèbre de Lie différentielle*
graduée.

1.3.3. Le complexe de Hochschild. — Soit \mathcal{M} un \mathcal{O} -module. On
note $C_*(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ le *complexe de Hochschild* de \mathcal{O} à coefficients dans \mathcal{M} . On
a $C_*(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O})$. On pose

$$b''(x \otimes (f_1, \dots, f_n)) = xf_1 \otimes (f_2, \dots, f_n) - \pm f_n x \otimes (f_1, \dots, f_{n-1}).$$

De la sorte, le bord de Hochschild à coefficients dans \mathcal{M} se décompose en :

$$b(x \otimes (f_1, \dots, f_n)) = b''(x \otimes (f_1, \dots, f_n)) + x \otimes b'(f_1, \dots, f_n).$$

Pour des coefficients triviaux, on a $C_*(\mathcal{O}, \mathbb{K}) = \mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O})$ et le bord b ci-dessus
se réduit au bord de Hochschild $b' : \mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O})$.

Le complexe de Hochschild admet une décomposition en somme de sous
complexes

$$C_*(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \bigoplus_{s \geq 0} C_*^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}).$$

On a explicitement

$$C_*^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes e^{(s)}\mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O}),$$

où $e^{(s)}$ désigne le s -ième idempotent Eulerien (*cf.* Appendice 4.2.5). On
vérifie simplement que le bord de Hochschild commute à $1 \otimes e^{(s)}$ et par
suite préserve $C_*^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ (*cf.* Gerstenhaber-Shack [17], [18], Loday [31],
[32, Chapitre 4]). Ce complexe $C_*^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ est la composante de *poïds* s
de $C_*(\mathcal{O}, \mathcal{M})$.

On note $\overline{C}_*(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ le complexe de Hochschild réduit. On a en fait

$$\overline{C}_*(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \bigoplus_{s \geq 1} C_*^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}).$$

1.3.4. Décomposition en poïds et structures multiplicatives. —
On utilise les structures multiplicatives de la cogèbre tensorielle pour re-
présenter le complexe $C_*^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$. Rappelons que le produit shuffle induit
un isomorphisme

$$\mathfrak{S}_s(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})) \simeq e^{(s)}\mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O})$$

(*cf.* Appendice 4.2). En conséquence :

Assertion. — On a l'identité $C_*^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{S}_s(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))$. De façon explicite, un élément de $C_*^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ est somme de tenseurs de la forme :

$$x \otimes u_1 \cdots u_s, \quad x \in \mathcal{M}, \quad u_1, \dots, u_s \in \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}).$$

Dans cette expression, $u_1 \cdots u_s$ représente le produit shuffle de u_1, \dots, u_s dans $\mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O})$.

On explicite le bord de Hochschild d'un produit comme ci-dessus en utilisant les propriétés multiplicatives du complexe de Hochschild. Rappelons que le complexe de Hochschild $(C_*(\mathcal{O}, \mathcal{O}_+), b)$ forme une algèbre commutative différentielle graduée. En fait, en accouplant le produit shuffle

$$\mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O}) \otimes \mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O})$$

avec le produit de \mathcal{O} -module

$$\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_+ \rightarrow \mathcal{M}$$

on obtient un produit pour le complexe de Hochschild :

$$C_*(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \otimes C_*(\mathcal{O}, \mathcal{O}_+) \rightarrow C_*(\mathcal{O}, \mathcal{M}).$$

Il est bien connu que le bord de Hochschild est une dérivation par rapport à ce produit (cf. [32, Chapitre 4], [34, Chapitre X]).

Soit $x \otimes u_1 \cdots u_s \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{S}_s(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))$. On identifie $u_i \in \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ au tenseur $1 \otimes u_i \in \mathcal{O}_+ \otimes \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) = C_*^{(1)}(\mathcal{O}, \mathcal{O}_+)$. On a également $C_*^{(0)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \mathcal{M}$. D'où $x \in C_*^{(0)}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$. Le produit de x et des u_i dans $C_*(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ s'identifie au tenseur $x \otimes u_1 \cdots u_s$. Comme b est une dérivation par rapport au produit du complexe de Hochschild, on obtient :

Assertion. — Dans $C_*^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$, on a l'identité

$$b(x \otimes u_1 \cdots u_s) = \sum_i \pm x \cdot u_1 \cdots b(u_i) \cdots u_s.$$

Dans le membre de droite, on calcule le bord de u_i dans $C_*^{(1)}(\mathcal{O}, \mathcal{O}_+)$. Ainsi, si $u_i = e^{(1)}(f_1, \dots, f_n)$, alors on obtient :

$$\begin{aligned} b(u_i) &= b \cdot (1 \otimes e^{(1)}) \cdot (1 \otimes (f_1, \dots, f_n)) \\ &= (1 \otimes e^{(1)}) \cdot b \cdot (1 \otimes (f_1, \dots, f_n)) \\ &= f_1 \otimes e^{(1)}(f_2, \dots, f_n) - \pm f_n \otimes e^{(1)}(f_1, \dots, f_{n-1}) + 1 \otimes e^{(1)}b'(f_1, \dots, f_n) \\ &= f_1 \otimes e^{(1)}(f_2, \dots, f_n) - \pm f_n \otimes e^{(1)}(f_1, \dots, f_{n-1}) + 1 \otimes b'(u_i). \end{aligned}$$

La somme $f_1 \otimes e^{(1)}(f_2, \dots, f_n) - \pm f_n \otimes e^{(1)}(f_1, \dots, f_{n-1})$ représente aussi l'image de $1 \otimes u_i \in C_*(\mathcal{O}, \mathcal{O}_+)$ par la composante b'' du bord de Hochschild. Finalement :

Assertion. — *Si $u_i = e^{(1)}(f_1, \dots, f_n)$, alors on a*

$$\begin{aligned} \pm m \cdot u_1 \cdots b(u_i) \cdots u_s &= \pm(mf_1) \otimes u_1 \cdots e^{(1)}(f_2, \dots, f_n) \cdots u_s \\ &\quad - \pm(f_n m) \otimes u_1 \cdots e^{(1)}(f_1, \dots, f_{n-1}) \cdots u_s \\ &\quad + \pm m \otimes u_1 \cdots b'(u_i) \cdots u_s. \end{aligned}$$

Définition du bicomplexe de Poisson

On suppose maintenant que \mathcal{O} est une algèbre de Poisson. Le crochet de Poisson de \mathcal{O} induit un crochet de Lie sur $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ qui est compatible avec la structure de cogèbre de Lie de $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$. Plus précisément, on a le résultat suivant :

1.3.5. Lemme. — *Il existe un et un seul crochet de Lie de degré -1 (par rapport au degré tensoriel et par rapport au degré total)*

$$[-, -] : \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \otimes \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$$

tel que :

- (i) *le triplet $(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}), [-, -], b')$ définit une bigèbre de Lie différentielle graduée ;*
- (ii) *la projection naturelle $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \Sigma\mathcal{O}$ est un morphisme d'algèbres de Lie. (On munit $\Sigma\mathcal{O}$ du crochet de Lie de degré -1 obtenu par suspension du crochet de Poisson de \mathcal{O} , cf. Appendice 4.1.)*

On explicite un crochet de Lie vérifiant ces propriétés dans la Section 3. Plus précisément, on construit un crochet sur la cogèbre tensorielle $[-, -] : \mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O}) \otimes \mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O})$ qui induit le crochet de $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ par passage au quotient $\mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$.

L'unicité se démontre par l'argument suivant. La relation de distribution entre le crochet et le cocrochet d'une bigèbre de Lie suppose que l'application $[u, -] : \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$, $u \in \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$, forme une codérivation de $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$. Par conséquent, $[u, -]$ est déterminé par sa projection sur $\Sigma\mathcal{O}$.

Rappelons que $\mathcal{L}_1^c(\Sigma\mathcal{O}) = \Sigma\mathcal{O}$, l'application naturelle $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \Sigma\mathcal{O}$ s'identifiant à la projection sur $\mathcal{L}_1^c(\Sigma\mathcal{O})$. De la sorte, la propriété (ii) ci-dessus signifie que le crochet de $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ coïncide avec le crochet de $\Sigma\mathcal{O}$ sur $\mathcal{L}_1^c(\Sigma\mathcal{O})$. Explicitement, si $u, v \in \mathcal{L}_1^c(\Sigma\mathcal{O})$, alors on a $u = (f)$ et $v = (g)$, pour $f, g \in \mathcal{O}$. Le crochet de u et v dans $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ s'écrit $[u, v] = (\pm[f, g])$. Le signe provient de la suspension (*cf.* Appendice 4.1).

1.3.6. Remarque. — Une structure de bigèbre de Lie duale, sur l'algèbre de Lie libre, a été introduite par Drinfeld (*cf.* [10]). La structure ci-dessus intervient aussi (avec un décalage en degré) dans la démonstration de Tamarkin du théorème de formalité de Kontsevich (*cf.* [26], [48]). Ces auteurs déduisent la construction du crochet de Lie de son unicité. La définition que l'on en donnera dans la section 3 est plus explicite et plus combinatoire.

1.3.7. Extension d'une structure de représentation de Poisson. — On peut également étendre le crochet d'une représentation de Poisson à la cogèbre de Lie colibre. On suppose que \mathcal{M} est une représentation de Poisson de \mathcal{O} . On reprend le résultat précédent : le module $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ forme une algèbre de Lie au dessus de $\Sigma\mathcal{O}$. Par restriction de structure, on obtient un crochet de Lie de degré -1

$$[-, -] : \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \oplus \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$$

qui fait de \mathcal{M} une représentation de l'algèbre de Lie $(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}), [-, -])$. De façon explicite, si $u \in \mathcal{L}_t^c(\Sigma\mathcal{O})$, alors l'action de u sur $m \in \mathcal{M}$ s'écrit :

$$[u, x] = \begin{cases} [f, x], & \text{si } t = 1 \text{ et } u = (f), \\ 0, & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

1.3.8. La différentielle de Chevalley-Eilenberg. — La composante de poids s du complexe de Hochschild $C_*^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{S}_s(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))$ s'identifie à la composante de degré s du complexe de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie $\mathcal{G} = \Sigma^{-1}\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$. Rappelons que le complexe de Chevalley-Eilenberg d'une algèbre de Lie \mathcal{G} s'écrit précisément

$$C_s^{\text{Lie}}(\mathcal{G}, \mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{S}_s(\Sigma\mathcal{G}).$$

avec une différentielle $\delta^{CE} : C_s^{\text{Lie}}(\mathcal{G}, \mathcal{M}) \rightarrow C_{s-1}^{\text{Lie}}(\mathcal{G}, \mathcal{M})$ définie par la formule :

$$\begin{aligned} \delta^{CE}(x \otimes u_1 \cdots u_s) &= \sum_{1 \leq i \leq s} \pm [x, u_i] \otimes u_1 \cdots \widehat{u}_i \cdots u_s \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq s} \pm x \otimes u_1 \cdots [u_i, u_j] \cdots \widehat{u}_j \cdots u_s. \end{aligned}$$

On munit le complexe de Hochschild d'une différentielle supplémentaire

$$\delta^{CE} : C_{s+t}^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \rightarrow C_{s+t-1}^{(s-1)}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$$

en appliquant cette formule à $\mathcal{G} = \Sigma^{-1}\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$.

1.3.9. Formules explicites en bas degré. — Dans ce paragraphe, on explicite la différentielle de Chevalley-Eilenberg des composantes homogènes d'un tenseur $x \otimes (f_1, \dots, f_n)$ de degré $n = 2, 3$. On suppose pour simplifier que \mathcal{O} et \mathcal{M} sont non-gradués. On rappelle que $e^{(s)}(f_1, \dots, f_n) = 0$ pour $s > n$.

Assertion. — *Pour le poids $s = 2$, on obtient les formules :*

$$\begin{aligned} \delta^{CE}(x \otimes e^{(2)}(f_1, f_2)) &= [x, f_1] \otimes f_2 - [x, f_2] \otimes f_1 + x \otimes [f_1, f_2], \\ \delta^{CE}(x \otimes e^{(2)}(f_1, f_2, f_3)) &= \frac{1}{2} \{ [x, f_1] \otimes e^{(1)}(f_2, f_3) + [x, f_3] \otimes e^{(1)}(f_1, f_2) \\ &\quad - x \otimes e^{(1)}([f_1, f_3], f_2) - x \otimes e^{(1)}(f_1, [f_2, f_3]) \\ &\quad + x \otimes e^{(1)}([f_1, f_2], f_3) + x \otimes e^{(1)}(f_2, [f_1, f_3]) \} \end{aligned}$$

Pour le poids $s = 3$, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta^{CE}(x \otimes e^{(3)}(f_1, f_2, f_3)) &= \frac{1}{6} \{ [x, f_1] \otimes e^{(1)}(f_2) \cdot e^{(1)}(f_3) - [x, f_2] \otimes e^{(1)}(f_1) \cdot e^{(1)}(f_3) \\ &\quad + [x, f_3] \otimes e^{(1)}(f_1) \cdot e^{(1)}(f_2) + x \otimes e^{(1)}([f_1, f_2]) \cdot e^{(1)}(f_3) \\ &\quad - x \otimes e^{(1)}([f_1, f_3]) \cdot e^{(1)}(f_2) - x \otimes e^{(1)}(f_1) \cdot e^{(1)}([f_2, f_3]) \} \\ &= \frac{1}{3} \{ [x, f_1] \otimes e^{(2)}(f_2, f_3) - [x, f_2] \otimes e^{(2)}(f_1, f_3) \\ &\quad + [x, f_3] \otimes e^{(2)}(f_1, f_2) + x \otimes e^{(2)}([f_1, f_2], f_3) \\ &\quad - x \otimes e^{(2)}([f_1, f_3], f_2) - x \otimes e^{(2)}(f_1, [f_2, f_3]) \} \end{aligned}$$

On utilise la relation du Lemme 4.2.4 pour identifier la composante de poids s d'un tenseur $u = (f_1, \dots, f_n)$ à un produit d'éléments de $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$. On a explicitement :

$$e^{(s)}(u) = \frac{1}{s!} \sum_{(u)} e^{(1)}(u_1^k) \dots e^{(1)}(u_s^k).$$

On rappelle que dans cette formule l'expression $\sum_{(u)} u_1^k \otimes \dots \otimes u_s^k$ représente le coproduit itéré de u dans la cogèbre tensorielle. Ainsi, pour $n = 2, 3$, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{(2)}(f_1, f_2) &= \frac{1}{2!} e^{(1)}(f_1) \cdot e^{(1)}(f_2), \\ e^{(2)}(f_1, f_2, f_3) &= \frac{1}{2!} \{ e^{(1)}(f_1, f_2) \cdot e^{(1)}(f_3) + e^{(1)}(f_1) \cdot e^{(1)}(f_2, f_3) \}, \\ e^{(3)}(f_1, f_2, f_3) &= \frac{1}{3!} e^{(1)}(f_1) \cdot e^{(1)}(f_2) \cdot e^{(1)}(f_3). \end{aligned}$$

On applique ensuite notre construction explicite du crochet de la cogèbre de Lie $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$. On utilise plus précisément que ce crochet s'obtient par passage au quotient

$$\mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O}) \xrightarrow{e^{(1)}} e^{(1)}\mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O}) = \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$$

du crochet shuffle, défini dans la Section 3. Donc, en général, on a la formule :

$$\begin{aligned} \delta^{CE}(x \otimes e^{(s)}(u)) &= \frac{1}{s!} \sum \pm [x, e^{(1)}(u_i^k)] \otimes e^{(1)}(u_1^k) \dots e^{(1)}(\widehat{u_i^k}) \dots e^{(1)}(u_s^k) \\ &\quad - \sum \pm x \otimes e^{(1)}(u_1^k) \dots e^{(1)}([u_i^k, u_j^k]) \dots e^{(1)}(\widehat{u_j^k}) \dots e^{(1)}(u_s^k), \end{aligned}$$

où $[u_i^k, u_j^k]$ désigne le crochet shuffle des tenseurs u_i^k, u_j^k dans $\mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O})$. On obtient les formules annoncées pour $n = 2, 3$ en explicitant le crochet $[u_i^k, u_j^k]$ des tenseurs qui apparaissent dans le développement de $e^{(s)}(f_1, \dots, f_n)$.

1.3.10. Le bicomplexe de Poisson. — Récapitulons. On se donne une algèbre de Poisson \mathcal{O} (non-graduée pour simplifier) et une représentation de Poisson \mathcal{M} . Le crochet de Poisson de \mathcal{O} détermine un crochet de Lie de degré -1 sur la cogèbre de Lie colibre

$$[-, -] : \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \otimes \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$$

(cf. Lemme 1.3.5). De plus, le module \mathcal{M} forme une représentation de l'algèbre de Lie définie par $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ (cf. Paragraphe 1.3.5).

HOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE POISSON

On pose :

$$C_{s,t}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \begin{cases} 0, & \text{si } s = 0 \text{ et } t \geq 0, \\ C_{s+t}^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), & \text{si } s > 0 \text{ et } t \geq 0. \end{cases}$$

On a :

$$C_{s,t}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes \bar{\mathfrak{S}}_s(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))_{s+t}.$$

Le bord de Hochschild forme une différentielle verticale sur $C_{s,t}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$

$$b : C_{s,t}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \rightarrow C_{s,t-1}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$$

tandis que la différentielle de Chevalley-Eilenberg de $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ forme une différentielle horizontale

$$\delta^{CE} : C_{s,t}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \rightarrow C_{s-1,t}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}).$$

On appelle $(C_{s,t}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), b, \delta^{CE})$ le *bicomplexe de Poisson*.

1.3.11. Remarque. — Dans la Section 2.3, on identifie le bicomplexe de Poisson de \mathcal{O} au complexe canonique d'une certaine algèbre de Poisson différentielle graduée $\tilde{\mathcal{O}}$ (cf. Théorème 2.3.14). La différentielle de $\tilde{\mathcal{O}}$ est notée β . Comme $\tilde{\mathcal{O}}$ est une algèbre de Poisson différentielle graduée, le complexe canonique associé forme un bicomplexe. On a un isomorphisme $\alpha : C_{s,t}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\cong} C_s^{\text{can}}(\tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{M})_{s+t}$ qui envoie la différentielle interne de $\tilde{\mathcal{O}}$ sur le bord de Hochschild et la différentielle canonique sur la différentielle Chevalley-Eilenberg. Plus précisément, on a les identités $b = \alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha$ et $\delta^{CE} = \alpha^{-1} \cdot \delta^{\text{can}} \cdot \alpha$. Cette observation montre que le bord de Hochschild et la différentielle de Chevalley-Eilenberg commutent. On peut aussi vérifier cette propriété directement.

L'énoncé suivant constitue le résultat principal de notre article :

1.3.12. Théorème. — *Le bicomplexe de Poisson calcule l'homologie de Poisson. Plus explicitement, soit \mathcal{O} une algèbre de Poisson. Soit \mathcal{M} une représentation de Poisson de \mathcal{O} . On a l'identité :*

$$H_*^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \pi_*(\text{Tot}(C_{*,*}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), b, \delta^{CE})).$$

Le théorème ci-dessus s'étend facilement au cadre différentiel gradué. Dans ce cas, le bicomplexe de Poisson $C_{s,t}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ forme un tricomplexe. En effet, on a une différentielle supplémentaire

$$\delta : C_{s,t}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \rightarrow C_{s,t}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$$

induite par la différentielle interne de \mathcal{O} (cf. Convention 0.4).

1.3.13. Le bicomplexe de Poisson cohomologique. — On a aussi un bicomplexe de Poisson cohomologique pour calculer la cohomologie de Poisson de \mathcal{O} à coefficients dans \mathcal{M} (cf. Théorème 1.3.14). Dans ce cas, la composante de poids s du complexe de Hochschild s'écrit :

$$C_{(s)}^*(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{S}_s(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})), \mathcal{M}).$$

Ce module d'identifie à la composante de degré s du complexe de cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$. On vérifie que la différentielle de Chevalley-Eilenberg commute au bord de Hochschild. On pose alors

$$C_{\text{Pois}}^{s,t}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \begin{cases} 0, & \text{si } s = 0 \text{ et } t \geq 0, \\ C_{(s)}^{s+t}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), & \text{si } s > 0 \text{ et } t \geq 0. \end{cases}$$

On appelle $C_{\text{Pois}}^{s,t}$ le bicomplexe de Poisson cohomologique. Le bord de Hochschild

$$b : C_{(s)}^{s+t}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \rightarrow C_{(s)}^{s+t+1}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$$

forme la différentielle verticale de $C_{\text{Pois}}^{s,t}$ et la différentielle de Chevalley-Eilenberg de $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$

$$\delta^{CE} : \text{Hom}(\overline{\mathcal{S}}_s(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})), \mathcal{M})^{s+t} \rightarrow \text{Hom}(\overline{\mathcal{S}}_{s+1}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})), \mathcal{M})^{s+t}$$

forme la différentielle horizontale.

1.3.14. Théorème. — *Le bicomplexe de Poisson cohomologique calcule la cohomologie de Poisson. Plus explicitement, soit \mathcal{O} une algèbre de Poisson. Soit \mathcal{M} une représentation de Poisson de \mathcal{O} . On a l'identité :*

$$H_{\text{Pois}}^*(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \pi^*(\text{Tot}(C_{\text{Pois}}^{*,*}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), b, \delta_{CE})).$$

Une formule de Künneth

En application du Théorème 1.3.12, on établit une formule de Künneth pour calculer l'homologie d'un produit tensoriel d'algèbres de Poisson. Cette formule a été prouvée indépendamment par Ginzburg et Kaledin

dans leur article [21]. On comparera ce résultat avec la formule de Künneth obtenue par Getzler et Jones pour les algèbres E_n (cf. [19, Section 6.2]).

1.3.15. Produit tensoriel d'algèbres de Poisson. — Soient \mathcal{R} et \mathcal{S} des algèbres de Poisson (sans unité). Le produit tensoriel $\mathcal{R} \overline{\otimes} \mathcal{S}$ est muni d'une structure d'algèbre de Poisson naturelle caractérisée par la propriété suivante : les applications naturelles

$$\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} \overline{\otimes} \mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S}$$

forment des morphismes d'algèbres de Poisson. Il est plus facile d'exprimer le crochet de Poisson de $\mathcal{R} \overline{\otimes} \mathcal{S}$ sur l'algèbre de Poisson avec unité augmentée associée $(\mathcal{R} \overline{\otimes} \mathcal{S})_+ = \mathcal{R}_+ \otimes \mathcal{S}_+$. En fait, pour $f_1, f_2 \in \mathcal{R}_+$ et $g_1, g_2 \in \mathcal{S}_+$, on obtient la formule

$$[f_1 \otimes g_1, f_2 \otimes g_2] = f_1 f_2 \otimes [g_1, g_2] + [f_1, f_2] \otimes g_1 g_2.$$

De même, le produit tensoriel $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ d'une représentation \mathcal{M} de \mathcal{R} avec une représentation \mathcal{N} de \mathcal{S} forme une représentation de Poisson de $\mathcal{R} \overline{\otimes} \mathcal{S}$. Le crochet de Poisson d'un élément de $(\mathcal{R} \overline{\otimes} \mathcal{S})_+$ avec un élément de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ est également donné par la formule ci-dessus.

1.3.16. Proposition. — *L'homologie de Poisson vérifie la formule de Künneth. Plus précisément, avec les notations et les définitions du paragraphe précédent, on obtient :*

$$H_*^{\text{Pois}}(\mathcal{R} \overline{\otimes} \mathcal{S}, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) = H_*^{\text{Pois}}(\mathcal{R}, \mathcal{M}) \overline{\otimes} H_*^{\text{Pois}}(\mathcal{S}, \mathcal{N}).$$

Démonstration. On sait que le produit shuffle induit un quasi-isomorphisme entre les complexes de Hochschild réduits

$$\overline{C}_*(\mathcal{R}, \mathcal{M}) \overline{\otimes} \overline{C}_*(\mathcal{S}, \mathcal{N}) \rightarrow \overline{C}_*(\mathcal{R} \overline{\otimes} \mathcal{S}, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$$

(cf. [34, Chapitre X, Théorème 7.4]).

Soient $u_1, \dots, u_s \in \mathcal{L}^c(\Sigma \mathcal{R})$ et $v_1, \dots, v_t \in \mathcal{L}^c(\Sigma \mathcal{S})$. Soient $x \in \mathcal{M}$ et $y \in \mathcal{N}$. Si on identifie les u_i et les v_j à leur image dans $\mathcal{L}^c(\Sigma(\mathcal{R} \overline{\otimes} \mathcal{S}))$, alors le produit shuffle des tenseurs

$$x \otimes u_1 \cdots u_s \in \overline{C}_*(\mathcal{R}, \mathcal{M}) \quad \text{et} \quad y \otimes v_1 \cdots v_t \in \overline{C}_*(\mathcal{S}, \mathcal{N})$$

s'écrit :

$$(x \otimes y) \otimes u_1 \cdots u_s \cdot v_1 \cdots v_t \in \overline{C}_*(\mathcal{R} \overline{\otimes} \mathcal{S}, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}).$$

On montre par une vérification facile que le produit shuffle commute à la différentielle de Chevalley-Eilenberg en observant que $[u_i, v_j] = 0$, $[x \otimes y, u_i] = [x, u_i] \otimes y$ et $[x \otimes y, v_j] = x \otimes [y, v_j]$. On en conclut que le produit shuffle définit un quasi-isomorphisme entre les bicomplexes de Poisson :

$$C^{\text{Pois}}(\mathcal{R}, \mathcal{M}) \overline{\otimes} C^{\text{Pois}}(\mathcal{S}, \mathcal{N}) \rightarrow C^{\text{Pois}}(\mathcal{R} \overline{\otimes} \mathcal{S}, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}).$$

□

1.4. Homologie de Poisson des algèbres lisses

1.4.1. Les différentielles de Kähler classiques d'une algèbre de Poisson. — Soit \mathcal{O} une algèbre commutative (différentielle graduée). On note $\Omega^*(\mathcal{O})$ l'algèbre des *différentielles de Kähler (classiques)* de \mathcal{O} . On définit $\Omega^*(\mathcal{O})$ comme la \mathcal{O} -algèbre commutative graduée engendrée par les éléments df , $f \in \mathcal{O}$, avec $|df| := |f| + 1$, et quotientée par les relations $d(f \cdot g) = df \cdot g + (-1)^{|f|} f \cdot dg$. Si \mathcal{O} est non graduée, alors $\Omega^s(\mathcal{O})$ est concentré en degré s . Sinon, on pose $\delta(df) := -d(df)$. On vérifie que δ passe au quotient et induit une différentielle interne $\delta : \Omega^s(\mathcal{O}) \rightarrow \Omega^s(\mathcal{O})$. Ainsi, $\Omega^*(\mathcal{O})$ forme une algèbre différentielle graduée commutative.

On suppose que \mathcal{O} est une algèbre de Poisson. Alors, le crochet de \mathcal{O} induit un crochet de Poisson de degré -1 sur $\Omega^*(\mathcal{O})$ caractérisé par l'identité :

$$[df, dg] = (-1)^{|f|} d[f, g], \text{ pour } df, dg \in \Omega^1(\mathcal{O}).$$

Le signe provient du décalage en degré (*cf.* Appendice 4.1). De même, si \mathcal{M} est une représentation de Poisson de \mathcal{O} , alors on a un crochet de Poisson $[-, -] : \mathcal{M} \otimes \Omega^*(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{M}$ de degré -1 tel que :

$$[x, df] = [x, f], \text{ pour } x \in \mathcal{M} \text{ et } df \in \Omega^1(\mathcal{O}).$$

1.4.2. L'homologie canonique d'une algèbre de Poisson. — Le *complexe canonique* de \mathcal{O} est défini par la formule $C_s^{\text{can}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) := \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^s(\mathcal{O})$. La différentielle de ce complexe

$$\delta^{\text{can}} : C_s^{\text{can}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})_{s+t} \rightarrow C_{s-1}^{\text{can}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})_{s+t-1}$$

est déterminée par l'identité

$$\begin{aligned} \delta^{can}(x \otimes df_1 \cdots df_s) &= \sum_{1 \leq i \leq s} \pm [x, df_i] \otimes df_1 \cdots \widehat{df}_i \cdots df_s \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq s} \pm x \otimes df_1 \cdots [df_i, df_j] \cdots \widehat{df}_j \cdots df_s, \\ &\text{pour } x \otimes df_1 \cdots df_s \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^s(\mathcal{O}). \end{aligned}$$

Si \mathcal{O} est une algèbre différentielle graduée, alors $C^{can}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ forme un bicomplexe. La différentielle canonique forme la différentielle horizontale de $C^{can}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$. La différentielle verticale de $C^{can}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ est induite par la différentielle de \mathcal{O} , comme ci-dessus. L'homologie canonique de \mathcal{O} est l'homologie du complexe total de $C^{can}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ (cf. Convention 0.4). Cependant, on peut oublier la structure interne du complexe canonique, tant qu'il ne s'agit pas de calculer l'homologie d'une algèbre de Poisson spécifique.

1.4.3. Du bicomplexe de Poisson au complexe canonique. —

Soit $\pi : C_*(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^*(\mathcal{O})$ l'application définie par la formule

$$\pi(x \otimes (f_1, \dots, f_s)) := x \otimes df_1 \cdots df_s.$$

On a $\pi b = 0$ (cf. [32, Lemme 1.3.14]). Autrement dit, l'application π est un morphisme du complexe de Hochschild vers le complexe $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^*(\mathcal{O}), 0)$. Le théorème classique de Hochschild-Kostant-Rosenberg affirme que π est un quasi-isomorphisme quand \mathcal{O} est lisse (cf. [32, Section 3.4]).

En fait, on a le résultat plus précis suivant (cf. [51], [32, Section 4.5]). On montre que π est nulle sur les composantes $C_{s+t}^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ avec $t > 0$. Pour $t = 0$, on a $C_s^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{S}_s(\Sigma\mathcal{O})$ et π s'identifie à la projection naturelle de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{S}_s(\Sigma\mathcal{O})$ sur $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^s(\mathcal{O})$. De plus, π induit un isomorphisme de $H_s^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ sur $\Omega^s(\mathcal{O})$. Ainsi, le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg équivaut à l'assertion suivante : si \mathcal{O} est lisse, alors on a $H_{s+t}^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = 0$ quand $t > 0$.

Le morphisme π est également compatible aux différentielles provenant de la structure de Poisson :

1.4.4. Lemme. — *L'application π est un morphisme du bicomplexe de Poisson $(C_{s,t}^{Pois}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), \delta^{CE}, b)$ dans le bicomplexe formé par le complexe canonique réduit $(\overline{C}_s^{can}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), \delta^{can})$ concentré sur la colonne $t = 0$.*

Démonstration. On vérifie que π commute aux différentielles provenant de la structure de Poisson. Soit $x \otimes u_1 \cdots u_s \in C_{s,0}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$. Pour $i = 1, \dots, s$, on a $u_i = (f_i) \in \mathcal{L}_1^c(\Sigma\mathcal{O})$. Rappelons que le crochet de u_i et u_j dans $\mathcal{L}_1^c(\Sigma\mathcal{O})$ est donné par le crochet de f_i et f_j dans $\Sigma\mathcal{O}$. Comme le décalage en degré entre $\Sigma\mathcal{O}$ et \mathcal{O} d'une part et entre $\Omega^1(\mathcal{O})$ et \mathcal{O} d'autre part est le même, il n'y a pas de différence de signe entre le crochet de f_i, f_j dans $\Sigma\mathcal{O}$ et le crochet de df_i, df_j dans $\Omega^1(\mathcal{O})$. Ipso facto, on obtient :

$$\begin{aligned} & \pi\left(\sum \pm [x, u_i] \otimes u_1 \cdots \widehat{u}_i \cdots u_s - \sum \pm x \otimes u_1 \cdots [u_i, u_j] \cdots \widehat{u}_j \cdots u_s\right) \\ &= \sum \pm [x, df_i] \otimes df_1 \cdots \widehat{df}_i \cdots df_s - \sum \pm x \otimes df_1 \cdots [df_i, df_j] \cdots \widehat{df}_j \cdots df_s. \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\pi(\delta^{CE}(x \otimes u_1 \cdots u_s)) = \delta^{can}(x \otimes df_1 \cdots df_s) = \delta^{can}(\pi(x \otimes u_1 \cdots u_s)).$$

□

En corollaire, on obtient :

1.4.5. Proposition. — *Pour les algèbres lisses, l'homologie de Poisson coïncide avec l'homologie canonique réduite. Plus explicitement, si \mathcal{O} est lisse, alors on a $H_*^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \simeq \overline{H}_*^{can}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$.*

On peut également appliquer cette idée dans le cadre différentiel gradué. Ainsi, dans l'article [14], on utilise l'énoncé suivant pour calculer l'homologie de Poisson d'intersections complètes à singularités isolées.

1.4.6. Proposition. — *Soit \mathcal{O} une algèbre de Poisson. On fixe une algèbre de Poisson différentielle graduée, libre en tant qu'algèbre commutative graduée, et avec un quasi-isomorphisme $\epsilon : \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}$. L'homologie de Poisson de \mathcal{O} se réduit à l'homologie canonique de \mathcal{O}' . Plus explicitement, on a l'identité*

$$H_*^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \pi_*(\text{Tot}(\overline{C}_*^{can}(\mathcal{O}', \mathcal{M}), \delta, \delta^{can})).$$

1.4.7. Remarque. — On peut relier ce résultat à la suite spectrale de l'introduction

$$\overline{\text{HH}}_{s+t}^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \Rightarrow H_{s+t}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}).$$

HOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE POISSON

En fait, l'homologie verticale du complexe $(C_*^{can}(\mathcal{O}', \mathcal{M}), \delta, \delta^{can})$ représente l'homologie de Hochschild de \mathcal{O} . Plus précisément, on a

$$\overline{HH}_*^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \pi_*(\overline{C}_s^{can}(\mathcal{O}', \mathcal{M}), \delta).$$

Cette idée est utilisée par Burghilea et Vigué pour calculer l'homologie de Hochschild d'algèbres commutatives (cf. [6], [51], [50]). La proposition précédente permet en quelque sorte d'enrichir leur méthode pour le calcul de l'homologie de Poisson.

1.4.8. La cohomologie de Lichnerowicz-Poisson. — On a un résultat similaire à la proposition précédente pour la cohomologie de Poisson. On considère la *cohomologie de Lichnerowicz-Poisson* (algébrique) que l'on note $H_{LP}^*(\mathcal{O}, \mathcal{M})$. Le complexe associé s'écrit

$$C_{LP}^s(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega^s(\mathcal{O}), \mathcal{M}).$$

La différentielle $\delta_{LP} : C_{LP}^s(\mathcal{O}, \mathcal{M})_{t-s} \rightarrow C_{LP}^{s+1}(\mathcal{O}, \mathcal{M})_{t-s-1}$ de ce complexe est définie par la formule

$$\begin{aligned} (\delta_{LP}\phi)(df_1 \cdots df_{s+1}) &= \sum_{1 \leq i \leq s} \pm[\phi(df_1 \cdots \widehat{df}_i \cdots df_{s+1}), f_i] \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq s} \pm\phi(df_1 \cdots d[f_i, f_j] \cdots \widehat{df}_j \cdots df_{s+1}), \end{aligned}$$

pour $df_1, \dots, df_{s+1} \in \Omega^1(\mathcal{O})$ et pour $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega^s(\mathcal{O}), \mathcal{M})$.

On a un morphisme naturel $\pi' : \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega^s(\mathcal{O}), \mathcal{M}) \rightarrow C^s(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ tel que $b\pi' = 0$. Si $u : \Omega^s(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{M}$, alors on pose $(\pi'u)(f_1, \dots, f_s) := u(df_1 \cdots df_s)$. En fait, cette application π' induit un morphisme homogène

$$\pi' : \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega^s(\mathcal{O}), \mathcal{M}) \rightarrow C_{(s)}^s(\mathcal{O}, \mathcal{M}).$$

On vérifie que π' est un morphisme de complexes de $(\overline{C}_{LP}^s(\mathcal{O}, \mathcal{M}), \delta_{LP})$ dans $(C_{\text{Pois}}^{s,0}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), \delta_{CE})$.

La version cohomologique du théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg affirme que π' est un quasi-isomorphisme quand \mathcal{O} est lisse. En conséquence :

1.4.9. Proposition. — *Pour les algèbres de Poisson lisses, la cohomologie de Poisson coïncide avec la cohomologie de Lichnerowicz-Poisson réduite. Explicitement, si \mathcal{O} est lisse, alors on a $H_{\text{Pois}}^*(\mathcal{O}, \mathcal{M}) \simeq \overline{H}_{LP}^*(\mathcal{O}, \mathcal{M})$.*

2. La structure du bicomplexe de Poisson

On applique la théorie des opérades de Koszul au cas des algèbres de Poisson : pour une algèbre de Poisson donnée \mathcal{O} , on a une algèbre de Poisson quasi-libre naturelle $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ avec un quasi-isomorphisme

$$\epsilon : \mathcal{R} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}.$$

On montre que le dg-module $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R})$ associé à cette résolution quasi-libre particulière $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ s'identifie au complexe total du bicomplexe de Poisson introduit dans la Section 1.3. Dualelement, le dg-module $\text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})}(\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R}), \mathcal{M})$ s'identifie au complexe total du bicomplexe de Poisson cohomologique. Les Théorèmes 1.3.12 et 1.3.14 sont des conséquences de ces résultats.

On peut également appliquer la théorie des opérades de Koszul au cas des algèbres commutatives pour obtenir une algèbre commutative quasi-libre $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{R}^{\text{Com}}(\mathcal{O})$ avec un quasi-isomorphisme

$$\epsilon : \tilde{\mathcal{O}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}.$$

On montre que le crochet de Poisson de \mathcal{O} se relève à $\tilde{\mathcal{O}}$. De la sorte, le dg-module $\tilde{\mathcal{O}}$ forme une algèbre de Poisson différentielle graduée, quasi-isomorphe à \mathcal{O} et libre en tant qu'algèbre commutative graduée. La Proposition 1.4.6 suppose que l'homologie de Poisson de \mathcal{O} se réduit à l'homologie canonique de $\tilde{\mathcal{O}}$. Le complexe canonique de $\tilde{\mathcal{O}}$ forme un bicomplexe, car $\tilde{\mathcal{O}}$ est une algèbre différentielle graduée. On montre que ce bicomplexe est en fait isomorphe au bicomplexe de Poisson.

On résume la théorie des opérades de Koszul dans la première partie de cette section (pour les non-spécialistes). On rappelle principalement la construction générale des résolutions quasi-libres. On se réfère à l'article de Getzler et Jones [19], à l'article original de Ginzburg et Kapranov [22], au livre de Markl, Shnider, Stasheff [36] et à l'article [15].

2.1. Résolution quasi-libre d'une algèbre sur une opérade de Koszul

2.1.1. Algèbres sur une opérade. — Une *opérade* est une structure paramétrant des opérations multilinéaires associées à une catégorie d'algèbres. Une opérade étant désignée par la lettre \mathcal{P} , les algèbres associées sont appelées \mathcal{P} -algèbres.

HOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE POISSON

Explicitement, une opérade \mathcal{P} est constituée par une suite de Σ_n -modules $\mathcal{P}(n)$ dont les éléments $p \in \mathcal{P}(n)$ représentent des polynômes multilinéaires $p = p(X_1, \dots, X_n)$ pour le type d'algèbres considéré. L'action du groupe symétrique provient de la permutation des variables.

Une structure de \mathcal{P} -algèbre est spécifiée par une suite de produits

$$\mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \rightarrow A.$$

L'image du tenseur $p \otimes (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n}$ par ce produit est notée $p(a_1, \dots, a_n)$. Cette expression représente en fait l'évaluation du polynôme $p \in \mathcal{P}(n)$ en $a_1, \dots, a_n \in A$. On a la relation d'équivariance :

$$(\sigma p)(a_1, \dots, a_n) = p(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}).$$

Dans cet article, on travaille avec des opérades unitaires connexes. Plus précisément, on suppose que \mathcal{P} admet une unité $1 \in \mathcal{P}(1)$ qui représente l'opération identité. On a explicitement $1(a) = a$, pour tout $a \in A$, pour toute \mathcal{P} -algèbre A . De plus :

$$\mathcal{P}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(1) = \mathbb{K}1.$$

On a une notion naturelle de \mathcal{P} -algèbre différentielle graduée : on insère le signe ad hoc dans la relation d'équivariance ci-dessus et on demande que le produit $\mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \rightarrow A$ forme un morphisme de dg-modules. De la sorte, quel que soit $p \in \mathcal{P}(n)$, on a la relation de dérivation :

$$\delta(p(a_1, \dots, a_n)) = \sum \pm p(a_1, \dots, \delta a_i, \dots, a_n)$$

(cf. Convention 0.2).

2.1.2. Exemples. — On note Com l'opérade associée aux algèbres commutatives sans unité. Le module $\text{Com}(n)$ est engendré par le monôme $X_1 \cdots X_n$ et $\text{Com}(n)$ forme la représentation triviale de Σ_n .

On note Lie l'opérade associée aux algèbres de Lie. Le module $\text{Lie}(n)$ admet une base formée par les polynômes de Lie

$$[[\dots [[X_{i(1)}, X_{i(2)}], X_{i(3)}], \dots], X_{i(n)},$$

tels que $(i(1), \dots, i(n))$ décrit l'ensemble des permutations de $(1, \dots, n)$ satisfaisant $i(1) = 1$ (cf. [45, Paragraphe 5.6.2]).

L'opérade de Poisson Pois associée aux algèbres de Poisson est la “composée” de l'opérade commutative et de l'opérade de Lie (cf. [35], [11]). Ainsi, un élément de $\text{Pois}(n)$ est un produit de polynômes de Lie :

$$P_1(X_{i(1,1)}, \dots, X_{i(1,n_1)}) \cdots P_s(X_{i(s,1)}, \dots, X_{i(s,n_s)}),$$

avec $P_i \in \text{Lie}(n_i)$, pour $i = 1, \dots, s$. On suppose que les entiers n_1, \dots, n_s forment une partition de n , les indices des variables

$$i(1, 1), \dots, i(1, n_1), \dots, i(s, 1), \dots, i(s, n_s)$$

formant une permutation de $1, \dots, n$. De la sorte, le produit ci-dessus est multilinéaire en X_1, \dots, X_n . On montre que $\text{Pois}(n)$ est la représentation régulière de Σ_n (cf. Paragraphe 2.1.4).

2.1.3. Structure de l'algèbre libre sur une opérade. — Soit $\mathcal{S}(\mathcal{P}, V)$ le module :

$$\mathcal{S}(\mathcal{P}, V) := \bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{P}(n) \otimes V^{\otimes n})_{\Sigma_n}.$$

On note $p(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{S}(\mathcal{P}, V)$ l'élément de $\mathcal{S}(\mathcal{P}, V)$ représenté par le tenseur $p \otimes \mathcal{P}(n) \otimes V^{\otimes n}$. Rappelons que $1 \in \mathcal{P}(1)$ désigne l'unité de \mathcal{P} . On a un morphisme naturel $V \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{P}, V)$ qui identifie un élément $v \in V$ au tenseur $1 \otimes v \in \mathcal{P}(1) \otimes V$.

On montre que le module $\mathcal{S}(\mathcal{P}, V)$ forme la \mathcal{P} -algèbre libre engendrée par V . L'élément $p(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{S}(\mathcal{P}, V)$ représente en fait l'image du tenseur

$$p \otimes (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{P}(n) \otimes V^{\otimes n} \hookrightarrow \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{S}(\mathcal{P}, V)^{\otimes n}$$

par le produit de \mathcal{P} -algèbre de $\mathcal{S}(\mathcal{P}, V)$. Ceci motive notre notation.

On peut déterminer l'opérade \mathcal{P} associée à un type d'algèbres en explicitant la structure de l'algèbre libre. Ainsi, dans les cas qui nous occupent, on obtient les résultats suivants :

2.1.4. Développement des algèbres libres classiques. —

L'algèbre commutative libre ($\mathcal{P} = \text{Com}$): L'algèbre commutative libre est représentée par l'algèbre symétrique. On a donc :

$$\mathcal{S}(\text{Com}, V) = \overline{\mathcal{S}}(V) = \bigoplus_{n \geq 0} (V^{\otimes n})_{\Sigma_n}.$$

L'algèbre de Lie libre ($\mathcal{P} = \text{Lie}$): Le développement de l'algèbre de Lie libre s'obtient en dualisant notre représentation de la cogèbre de Lie colibre. Explicitement, la cogèbre de Lie colibre s'écrit :

$$\mathcal{L}^c(V) = \bigoplus_{n \geq 0} e^{(1)} V^{\otimes n} = \bigoplus_{n \geq 0} ((\mathbb{K}[\Sigma_n] e^{(1)}) \otimes V^{\otimes n})_{\Sigma_n}.$$

En dualisant, on obtient :

$$\mathfrak{S}(\text{Lie}, V) = \bigoplus_{n \geq 0} ((\mathbb{K}[\Sigma_n]e^{(1)})^\vee \otimes V^{\otimes n})_{\Sigma_n}.$$

L'algèbre de Poisson libre ($\mathcal{P} = \text{Pois}$): Rappelons que l'algèbre de Poisson libre s'écrit $\overline{\mathcal{P}}(V) = \overline{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}(V))$. Cependant, d'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, on a :

$$\mathfrak{S}(\mathcal{L}(V)) \simeq \mathcal{U}_{\text{Lie}}(\mathcal{L}(V)) \simeq \mathcal{T}(V).$$

En conséquence, on a l'identité :

$$\mathfrak{S}(\text{Pois}, V) = \bigoplus_{n \geq 0} (\text{Pois}(n) \otimes V^{\otimes n})_{\Sigma_n}$$

avec $\text{Pois}(n) \simeq \mathbb{K}[\Sigma_n]$.

2.1.5. Algèbres quasi-libres sur une opérade. — Une \mathcal{P} -algèbre *quasi-libre* est une \mathcal{P} -algèbre différentielle graduée qui est libre en tant qu'algèbre graduée. Explicitement, si \mathcal{R} est quasi-libre, alors on a $\mathcal{R} = \mathfrak{S}(\mathcal{P}, V)$, pour un certain un module gradué $V \subset \mathcal{R}$. Le module V n'est pas nécessairement stable par la différentielle de \mathcal{R} . Cependant, la différentielle de \mathcal{R} est déterminée par sa restriction à V .

En général, étant donné une application $f : V \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{P}, V)$, il existe une et une seule dérivation $d_f : \mathfrak{S}(\mathcal{P}, V) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{P}, V)$ dont la restriction à V est égale à f . Cette affirmation résulte de l'identité :

$$\begin{aligned} d_f(p(v_1, \dots, v_n)) &= \sum \pm p(v_1, \dots, d_f(v_i), \dots, v_n) \\ &= \sum \pm p(v_1, \dots, f(v_i), \dots, v_n), \end{aligned}$$

valable pour tout élément $p(v_1, \dots, v_n) \in \mathfrak{S}(\mathcal{P}, V)$. Si f est homogène de degré -1 , alors d_f est également homogène de degré -1 . De plus, la dérivation d_f est une différentielle sur $\mathfrak{S}(\mathcal{P}, V)$ si et seulement si on a la relation $d_f^2 = 0$ sur $V \subset \mathfrak{S}(\mathcal{P}, V)$. La formule ci-dessus permet d'exprimer cette équation en termes de l'application f . En effet, si pour $v \in V$ on écrit $f(v) = \sum p(v_1, \dots, v_n)$, alors on a $d_f^2(v) = \sum \pm p(v_1, \dots, f(v_i), \dots, v_n)$.

2.1.6. Cogèbres sur une opérade. — On a également une notion de *cogèbre* associée à chaque opérade (cf. [19, Section 1.7], [15, Paragraphes 1.2.17-18]). Dans cet article, on ne considère que des cogèbres différentielles graduées connexes. Rappelons que C est connexe si $C_0 = 0$. On suppose

chaque module $\mathcal{P}(n)$ de dimension finie. Soit V un dg-module connexe. La \mathcal{P} -cogèbre colibre coengendrée par V s'écrit :

$$\mathcal{C}(\mathcal{P}, V) = \bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{P}(n)^\vee \otimes V^{\otimes n})^{\Sigma_n}.$$

Ainsi, une structure de \mathcal{P} -cogèbre est spécifiée par un morphisme de dg-modules de C dans $\mathcal{C}(\mathcal{P}, C)$. De façon équivalente, chaque opération $p \in \mathcal{P}(n)$ détermine un coproduit :

$$p^* : C \rightarrow C^{\otimes n}.$$

De plus, si $p^*(c) = \sum c_{(1)} \otimes \cdots \otimes c_{(n)} \in C^{\otimes n}$, alors, dans $C^{\otimes n}$, on a la relation d'équivariance

$$(\sigma p)^*(c) = \sum \pm c_{(\sigma^{-1}(1))} \otimes \cdots \otimes c_{(\sigma^{-1}(n))},$$

ainsi que la relation de codérivation

$$p^*(\delta c) = \sum \pm c_{(1)} \otimes \cdots \otimes \delta(c_{(i)}) \otimes \cdots \otimes c_{(n)}$$

(cf. Convention 0.2).

2.1.7. Dualité de Koszul des opérades. — On rappelle rapidement les idées de la *dualité de Koszul* des opérades introduite par Ginzburg et Kapranov. Ces auteurs ont défini une notion d'*opérade quadratique* avec une opération de dualité $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}^!$. Les opérades $\mathcal{P} = \text{Com}, \text{Lie}, \text{Pois}$ sont quadratiques. De plus, on montre que $\text{Com}^! = \text{Lie}$, $\text{Lie}^! = \text{Com}$ et $\text{Pois}^! = \text{Pois}$.

Fixons une paire d'opérades quadratiques duales \mathcal{P} et $\mathcal{P}^!$. Notons $\text{dg Alg}_{\mathcal{P}}$ la catégorie des \mathcal{P} -algèbres différentielles graduées et $\text{dg Alg}_{\mathcal{P}^!}^c$ la catégorie des $\mathcal{P}^!$ -cogèbres différentielles graduées connexes. On a un couple de foncteurs adjoints naturels

$$\mathcal{C}_{\mathcal{P}} : \text{dg Alg}_{\mathcal{P}^!}^c \rightleftarrows \text{dg Alg}_{\mathcal{P}} : \mathcal{B}^{\mathcal{P}}$$

(cf. [19, Sections 2.3 et 2.4]). Quand \mathcal{P} est une bonne opérade, la counité d'adjonction $\epsilon : \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\mathcal{B}^{\mathcal{P}}(A)) \rightarrow A$ est un quasi-isomorphisme pour toute algèbre $A \in \text{dg Alg}_{\mathcal{P}}$, ainsi que l'unité d'adjonction $\eta : C \rightarrow \mathcal{B}^{\mathcal{P}}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(C))$, et les foncteurs $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ définissent des équivalences de catégories homotopiques. Dans cette situation, on dit que \mathcal{P} est une *opérade de Koszul*. On montre que les opérades $\mathcal{P} = \text{Com}, \text{Lie}, \text{Pois}$ sont de Koszul (cf. [19], [22], cf. [35] pour $\mathcal{P} = \text{Pois}$). En fait, pour $\mathcal{P} = \text{Lie}$, on retrouve un énoncé classique en homotopie rationnelle : on a une équivalence entre la catégorie

homotopique des algèbres de Lie différentielles graduées et la catégorie homotopique des cogèbres cocommutatives différentielles graduées connexes (cf. [42]).

On pose $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A) = \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\mathcal{B}^{\mathcal{P}}(A))$. Cette algèbre est quasi-libre par construction (voir ci-dessous). Donc, si \mathcal{P} est une opérade de Koszul, alors $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A)$ forme une résolution quasi-libre de A et ce quel que soit A .

Notre but est de comprendre la structure de l'algèbre $\mathcal{R}^{\text{Pois}}(A)$. On rappelle d'abord la définition générale des foncteurs $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$. On reprend essentiellement la présentation de Getzler et Jones. On renvoie le lecteur à l'article [19] pour plus de détails. Rappelons que la composante $\mathcal{P}^!(2)$ de l'opérade duale de \mathcal{P} est la représentation contragrédiente de $\mathcal{P}(2)$. On a explicitement $\mathcal{P}^!(2) = \mathcal{P}(2)^{\vee} \otimes \text{sgn}_2$, en notant $\mathcal{P}(2)^{\vee}$ la représentation duale de $\mathcal{P}(2)$ et sgn_2 la représentation signature du groupe Σ_2 .

2.1.8. La construction $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$. — Soit C une dg- $\mathcal{P}^!$ -cogèbre connexe. On considère la \mathcal{P} -algèbre libre engendrée par $\Sigma^{-1}C$. Plus explicitement, on pose :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(C) := \mathcal{S}(\mathcal{P}, \Sigma^{-1}C).$$

On a ainsi $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(C) = \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^s(C)$, avec $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^s(C) = (\mathcal{P}(s) \otimes (\Sigma^{-1}C)^{\otimes s})_{\Sigma_s}$. On munit $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(C)$ d'une différentielle

$$\theta'' : \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^s(C)_{t-s} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^{s+1}(C)_{t-s-1}$$

que l'on détermine par la structure de cogèbre de C . On a aussi une différentielle interne

$$\delta : \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^s(C)_{t-s} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^s(C)_{t-s-1}$$

induite par la différentielle de C . De la sorte, $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(C)$ forme un bicomplexe du second quadrant. La différentielle totale de l'algèbre $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(C)$ est la somme de la différentielle algébrique θ'' et de la différentielle interne δ .

On caractérise θ'' par sa restriction à $\Sigma^{-1}C \subset \mathcal{S}(\mathcal{P}, \Sigma^{-1}C)$. Plus précisément, la composante quadratique du coproduit de C induit une application de degré -1

$$\Sigma^{-1}C \rightarrow (\mathcal{P}(2) \otimes (\Sigma^{-1}C)^{\otimes 2})_{\Sigma_2} \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{P}, \Sigma^{-1}C)$$

que l'on étend à $\mathcal{S}(\mathcal{P}, \Sigma^{-1}C)$ en suivant la relation de dérivation pour définir la différentielle

$$\theta'' : \mathcal{S}(\mathcal{P}, \Sigma^{-1}C) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{P}, \Sigma^{-1}C)$$

(cf. Paragraphe 2.1.5). On vérifie que $\theta''^2 = 0$.

En fait, la composante quadratique du coproduit de C induit une application de degré -1 de $\Sigma^{-1}C$ dans $\Sigma^{-2}(\mathcal{P}^!(2)^\vee \otimes C^{\otimes 2})^{\Sigma_2}$. Cependant, on a un isomorphisme Σ_2 -équivariant naturel $(\Sigma^{-1}C)^{\otimes 2} \simeq \Sigma^{-2}(\text{sgn}_2 \otimes C^{\otimes 2})$. En conséquence, on a les relations

$$\Sigma^{-2}(\mathcal{P}^!(2)^\vee \otimes C^{\otimes 2})^{\Sigma_2} = \Sigma^{-2}(\mathcal{P}(2) \otimes \text{sgn}_2 \otimes C^{\otimes 2})^{\Sigma_2} \simeq (\mathcal{P}(2) \otimes (\Sigma^{-1}C)^{\otimes 2})^{\Sigma_2}.$$

Par suite, si on compose ces isomorphismes avec l'inverse de la trace

$$(\mathcal{P}(2) \otimes (\Sigma^{-1}C)^{\otimes 2})^{\Sigma_2} \simeq (\mathcal{P}(2) \otimes (\Sigma^{-1}C)^{\otimes 2})_{\Sigma_2},$$

alors on obtient un isomorphisme naturel

$$\Sigma^{-2}(\mathcal{P}^!(2)^\vee \otimes C^{\otimes 2})^{\Sigma_2} \simeq (\mathcal{P}(2) \otimes (\Sigma^{-1}C)^{\otimes 2})_{\Sigma_2}.$$

2.1.9. La construction $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$. — On dualise la définition du foncteur $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ pour définir la cogèbre $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}(A)$ associée à une \mathcal{P} -algèbre A . On pose

$$\mathcal{B}^{\mathcal{P}}(A) := \mathcal{C}(\mathcal{P}^!, \Sigma A).$$

On a aussi $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}(A) = \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{B}_s^{\mathcal{P}}(A)$, avec $\mathcal{B}_s^{\mathcal{P}}(A) = (\mathcal{P}^!(s)^\vee \otimes (\Sigma A)^{\otimes s})_{\Sigma_s}$. On munit $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}(A)$ d'une différentielle

$$\theta' : \mathcal{B}_s^{\mathcal{P}}(A)_{s+t} \rightarrow \mathcal{B}_{s-1}^{\mathcal{P}}(A)_{s+t-1}$$

déterminée par la structure d'algèbre de A . On a aussi une différentielle interne

$$\delta : \mathcal{B}_s^{\mathcal{P}}(A)_{s+t} \rightarrow \mathcal{B}_s^{\mathcal{P}}(A)_{s+t-1}$$

induite par la différentielle de A . De la sorte, la cogèbre $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}(A)$ forme un bicomplexe du premier quadrant.

De façon précise, la composante quadratique du produit de A définit une application de degré -1

$$(\mathcal{P}^!(2)^\vee \otimes (\Sigma A)^{\otimes 2})^{\Sigma_2} \simeq \Sigma^2(\mathcal{P}(2) \otimes A)_{\Sigma_2} \rightarrow \Sigma A.$$

La différentielle θ' est l'unique codérivation de $\mathcal{C}(\mathcal{P}^!, \Sigma A)$ dont la composée avec la projection naturelle $\mathcal{C}(\mathcal{P}^!, \Sigma A) \rightarrow \Sigma A$ est l'*opposée* de l'application ci-dessus sur la composante quadratique de $\mathcal{C}(\mathcal{P}^!, \Sigma A)$ et est nulle sur les autres composantes. On vérifie que $\theta'^2 = 0$.

2.1.10. L'algèbre $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A)$. — On pose $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A) = \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\mathcal{B}^{\mathcal{P}}(A))$. Par définition, $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A)$ forme une dg- \mathcal{P} -algèbre quasi-libre. On reprend nos constructions pour préciser la structure de $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A)$. On rappelle aussi la définition du morphisme naturel $\epsilon : \mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A) \rightarrow A$ qui forme la counité de l'adjonction entre $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$.

La structure d'algèbre graduée de $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A)$. — L'algèbre $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A)$ possède une graduation naturelle. On a explicitement $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A) = \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{R}_s^{\mathcal{P}}(A)$, en notant $\mathcal{R}_s^{\mathcal{P}}(A)$ le sous-module de $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A)$ engendré par les produits

$$p(c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{S}(\mathcal{P}, \Sigma^{-1}\mathcal{B}^{\mathcal{P}}(A))$$

avec $c_i \in \Sigma^{-1}\mathcal{B}_{s_i}^{\mathcal{P}}(A)$, $i = 1, \dots, n$, tels que $(s_1 - 1) + \dots + (s_n - 1) = s$. On note que $\mathcal{R}_0^{\mathcal{P}}(A) = A$.

Si A est une dg-algèbre, alors chaque composante homogène $\mathcal{R}_s^{\mathcal{P}}(A)$ possède une structure différentielle graduée interne, et $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A)$ forme une algèbre bigraduée. On rappelle que $\mathcal{R}_s^{\mathcal{P}}(A)_{s+t}$ désigne le sous-module de $\mathcal{R}_s^{\mathcal{P}}(A)$ engendré par les éléments de degré total $s+t$ et forme la composante de bidegré (s, t) de $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A)$ (cf. 0.4). Si A est non graduée, alors $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A)$ est concentré sur la colonne $t = 0$.

La différentielle de $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A)$. — La différentielle de $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A)$ est la somme de la différentielle interne δ , de la différentielle θ' provenant de la construction $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$ et de la différentielle θ'' provenant de la construction $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$.

On note $\theta = \theta' + \theta''$. De la sorte, la différentielle de $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A)$ se compose d'une différentielle interne δ et d'une différentielle θ déterminée par les structures algébriques. On a en outre

$$\theta : \mathcal{R}_s^{\mathcal{P}}(A)_{s+t} \rightarrow \mathcal{R}_{s-1}^{\mathcal{P}}(A)_{s+t-1} \quad \text{et} \quad \delta : \mathcal{R}_s^{\mathcal{P}}(A)_{s+t} \rightarrow \mathcal{R}_s^{\mathcal{P}}(A)_{s+t-1}$$

et $(\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A), \theta, \delta)$ forme un bicomplexe du premier quadrant. Quand A est non-graduée, ce bicomplexe est concentré sur la ligne $t = 0$ et la différentielle de $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A)$ se réduit à la différentielle algébrique θ .

Le morphisme $\epsilon : \mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A) \rightarrow A$. — On a par définition $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A) = \mathcal{S}(\mathcal{P}, \Sigma^{-1}\mathcal{C}(\mathcal{P}, \Sigma A))$. Donc notre algèbre est librement engendrée (comme \mathcal{P} -algèbre graduée) par le module $\Sigma^{-1}\mathcal{C}(\mathcal{P}, \Sigma A)$. La counité d'adjonction entre $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{B}^{\mathcal{P}}$ est le morphisme de \mathcal{P} -algèbres

$$\epsilon : \mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A) \rightarrow A$$

induit par la projection naturelle $\Sigma^{-1}\mathcal{C}(\mathcal{P}, \Sigma A) \rightarrow A$. Cette application s'identifie aussi à la projection de $\mathcal{R}_*^{\mathcal{P}}(A)$ sur $\mathcal{R}_0^{\mathcal{P}}(A)$, la colonne $s = 0$ du bicomplexe. On a clairement $\epsilon\delta = \delta\epsilon$. On vérifie que l'on a de plus $\epsilon\theta = 0$. Par conséquent, l'application ϵ est un morphisme d'algèbres différentielles graduées de $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A)$ dans A .

Quand l'opérade \mathcal{P} est de Koszul, ce morphisme $\epsilon : \mathcal{R}^{\mathcal{P}}(A) \rightarrow A$ est un quasi-isomorphisme pour toute algèbre A donnée.

2.1.11. Exemple : cas de l'opérade commutative ($\mathcal{P} = \text{Com}$). — Soit \mathcal{O} une algèbre commutative. On a $\text{Com}^! = \text{Lie}$. Donc :

$$\mathcal{B}^{\text{Com}}(\mathcal{O}) = \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}^{\text{Com}}(\mathcal{O}) = \overline{\mathcal{S}}(\Sigma^{-1}\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})).$$

La différentielle de \mathcal{B}^{Com} s'identifie en fait au bord de Hochschild $b' : \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$. En effet, on sait que b' est une codérivation par rapport au cocrochet de $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$. On vérifie également que la dernière composante de b'

$$\mathcal{L}_2^c(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{L}_1^c(\Sigma\mathcal{O}) = \Sigma\mathcal{O}$$

est induite par le produit de \mathcal{O} . C'est pourquoi on a la relation :

$$(\mathcal{B}^{\text{Com}}(\mathcal{O}), \theta') = (\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}), b').$$

On peut aussi expliciter la différentielle de la construction \mathcal{C}_{Com} (cf. Paragraphe 2.3.2). *In fine*, on identifie $\mathcal{R}^{\text{Com}}(\mathcal{O})$ comme la résolution introduite par Schlessinger et Stasheff dans l'article [47]. On revient sur cette résolution dans la Section 2.3.

2.1.12. Exemple : cas de l'opérade de Lie ($\mathcal{P} = \text{Lie}$). — Rappelons que l'algèbre symétrique $\mathcal{S}(V)$, munie du coproduit shuffle, représente la cogèbre cocommutative augmentée colibre. On prend l'idéal d'augmentation de $\mathcal{S}(V)$ pour obtenir la cogèbre cocommutative non-augmentée colibre.

Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie. On a $\text{Lie}^! = \text{Com}$. Donc :

$$\mathcal{B}^{\text{Lie}}(\mathcal{G}) = \overline{\mathcal{S}}(\Sigma\mathcal{G}) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}^{\text{Lie}}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\Sigma^{-1}\overline{\mathcal{S}}(\Sigma\mathcal{G})).$$

Explicitons la différentielle de la construction \mathcal{B}^{Lie} . Le complexe $(\mathcal{B}^{\text{Lie}}(\mathcal{G}), \theta')$ s'identifie en fait au complexe de Chevalley-Eilenberg à coefficients triviaux dont la différentielle, notée $(\delta^{CE})' : \overline{\mathcal{S}}(\Sigma\mathcal{G}) \rightarrow \overline{\mathcal{S}}(\Sigma\mathcal{G})$, est définie par la formule :

$$(\delta^{CE})'(u_1 \cdots u_n) := \sum \pm u_1 \cdots [u_i, u_j] \cdots \widehat{u}_j \cdots u_n.$$

On vérifie facilement que $(\delta^{CE})'$ est une codérivation par rapport au coproduit de $\overline{\mathcal{S}}(\Sigma\mathcal{G})$. Il est également clair que la dernière composante de $(\delta^{CE})'$

$$\overline{\mathcal{S}}_2(\Sigma\mathcal{G}) \rightarrow \overline{\mathcal{S}}_1(\Sigma\mathcal{G}) = \Sigma\mathcal{G}$$

est induite par le crochet de \mathcal{G} . C'est pourquoi on a la relation :

$$(\mathcal{B}^{\text{Lie}}(\mathcal{G}), \theta') = (\overline{\mathcal{S}}(\Sigma\mathcal{G}), (\delta^{CE})').$$

2.2. Résolution quasi-libre d'une algèbre de Poisson

On applique la construction de la section précédente à l'opérade de Poisson $\mathcal{P} = \text{Pois}$. Soit \mathcal{O} une algèbre de Poisson. On considère l'algèbre de Poisson quasi-libre associée $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\text{Pois}}(\mathcal{O})$. On détermine les complexes

$$(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R}), \theta) \quad \text{et} \quad (\text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})}(\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R}), \mathcal{M}), \theta)$$

définis par cette résolution particulière. On obtient le résultat suivant :

2.2.1. Théorème. — *Soit \mathcal{O} une algèbre de Poisson. On fixe $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ comme ci-dessus. Le complexe*

$$(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R}), \theta)$$

est canoniquement isomorphe au complexe total du bicomplexe de Poisson introduit au Paragraphe 1.3.10 :

$$(C^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), b, \delta^{CE}).$$

Dualement, le complexe $(\text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})}(\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R}), \mathcal{M}), \theta)$ est isomorphe au complexe total du bicomplexe de Poisson cohomologique $(C_{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), b, \delta_{CE})$.

Ce résultat montre que le bicomplexe $(C^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), b, \delta^{CE})$ calcule l'homologie de Poisson (cf. Théorème 1.3.12) et le bicomplexe $(C_{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), b, \delta_{CE})$ la cohomologie de Poisson (cf. Théorème 1.3.14).

On a $\text{Pois}^! = \text{Pois}$. En conséquence, si $\overline{\mathcal{P}}^c(\Sigma\mathcal{O})$ désigne la cogèbre de Poisson sans counité colibre coengendrée par $\Sigma\mathcal{O}$, alors on a

$$\mathcal{B}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}) = \overline{\mathcal{P}}^c(\Sigma\mathcal{O}) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}) = \overline{\mathcal{P}}(\Sigma^{-1}\overline{\mathcal{P}}^c(\Sigma\mathcal{O})).$$

On commence par expliciter la structure de la cogèbre de Poisson colibre $\overline{\mathcal{P}}^c(\Sigma\mathcal{O})$. On montre que $\overline{\mathcal{P}}^c(\Sigma\mathcal{O}) = \overline{\mathcal{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))$. On détermine ensuite la différentielle de $\mathcal{B}^{\text{Pois}}(\mathcal{O})$.

En fait, le théorème ci-dessus suppose que $(\mathcal{B}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}), \theta')$ est le bicomplexe de Poisson à coefficients triviaux $(C^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathbb{K}), b', (\delta^{CE})')$. En effet, pour la représentation de Poisson triviale $\mathcal{M} = \mathbb{K}$, le produit tensoriel $\mathbb{K} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R})$ se réduit au module des éléments indécomposables de l'algèbre de Poisson \mathcal{R} . On obtient ainsi $\mathbb{K} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R}) \simeq \mathcal{B}^{\text{Pois}}(\mathcal{O})$.

La composante θ'' de la différentielle $\theta : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ est par construction contenue dans les éléments décomposables de \mathcal{R} . Par suite, la différentielle de $\mathbb{K} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R})$ se réduit à la différentielle de $\mathcal{B}^{\text{Pois}}(\mathcal{O})$.

Pour récapituler, on a :

$$(\mathbb{K} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R}), \theta) = (\mathcal{B}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}), \theta').$$

On montre l'identité

$$(\mathcal{B}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}), \theta') = (C^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathbb{K}), b', (\delta^{CE})).$$

Ce résultat constitue la première étape de la démonstration du Théorème.

Le complexe $\mathcal{B}^{\text{Pois}}(\mathcal{O})$

2.2.2. Cogèbres de Poisson différentielles graduées. — Une cogèbre de Poisson (non-augmentée) Γ est un module muni d'une structure de cogèbre cocommutative (non-augmentée) définie par un coproduit $\mu : \Gamma \rightarrow \Gamma \otimes \Gamma$ et d'une structure de cogèbre de Lie définie par un cocrochet $\gamma : \Gamma \rightarrow \Gamma \otimes \Gamma$. On suppose que μ et γ vérifient la relation de distribution

$$\mu \otimes 1 \cdot \gamma = 1 \otimes \gamma \cdot \mu + (2 \ 3) \cdot \gamma \otimes 1 \cdot \mu$$

Cette relation est évidemment duale à la formule de distribution de Poisson.

Une application $\delta : \Gamma \rightarrow \Gamma$ est une codérivation de Poisson si c'est une codérivation par rapport au coproduit et par rapport au cocrochet de Γ . Plus explicitement, on suppose que δ vérifie les identités

$$\mu \cdot \delta = \delta \otimes 1 \cdot \mu + 1 \otimes \delta \cdot \mu \quad \text{et} \quad \gamma \cdot \delta = \delta \otimes 1 \cdot \gamma + 1 \otimes \delta \cdot \gamma.$$

Une cogèbre de Poisson différentielle graduée est une cogèbre de Poisson graduée Γ munie d'une codérivation $\delta : \Gamma \rightarrow \Gamma$ de degré -1 et telle que $\delta^2 = 0$.

2.2.3. Structure de la cogèbre de Poisson colibre. — On note $\overline{\mathcal{P}}^c(V)$ la cogèbre de Poisson non-augmentée colibre. Rappelons que $\overline{\mathcal{P}}^c(V)$ est caractérisée par la relation d'adjonction

$$\text{Vect}(\Gamma, V) = \text{Alg}_{\text{Pois}}^c(\Gamma, \overline{\mathcal{P}}^c(V)).$$

L'algèbre de Poisson libre est composée de l'algèbre commutative libre et de l'algèbre de Lie libre. Dualement, la cogèbre de Poisson colibre s'écrit comme la composée de la cogèbre cocommutative colibre et de la cogèbre

HOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE POISSON

de Lie colibre. La cogèbre cocommutative colibre est représentée par l'algèbre symétrique munie du coproduit shuffle. On obtient donc la formule $\overline{\mathcal{P}}^c(V) = \overline{\mathcal{S}}(\mathcal{L}^c(V))$ annoncée au début de la section. On explicite le coproduit et le cocrochet de $\overline{\mathcal{S}}(\mathcal{L}^c(V))$.

Soient $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{L}^c(V)$. Soit $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ une partie de $\{1, \dots, n\}$. La notation u_I représente le produit $u_{i_1} \cdots u_{i_p}$ dans $\overline{\mathcal{S}}(\mathcal{L}^c(V))$ (cf. Convention 0.6). Le coproduit de $\overline{\mathcal{P}}^c(V)$ est donné par la formule

$$\mu(u_1 \cdots u_n) := \sum u_I \otimes u_J.$$

(On reprend simplement la définition du coproduit shuffle.)

Si on note $\sum_{(u_k)} u'_k \otimes u''_k$ le cocrochet d'un élément u_k dans $\mathcal{L}^c(V)$, alors le cocrochet du produit $u_1 \cdots u_n$ dans $\overline{\mathcal{P}}^c(V)$ s'écrit

$$\gamma(u_1 \cdots u_n) := \sum \left\{ \sum_{(u_k)} u_I u'_k \otimes u_J u''_k \right\},$$

en sommant sur l'ensemble des partitions $I \cup J \cup \{k\} = \{1, \dots, n\}$.

2.2.4. Lemme. — *La cogèbre de Poisson $(\mathcal{B}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}), \theta')$ s'identifie au complexe total du bicomplexe de Poisson à coefficients triviaux*

$$(C^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathbb{K}), b', (\delta^{CE})').$$

On a explicitement $\mathcal{B}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}) = \overline{\mathcal{P}}^c(\Sigma\mathcal{O}) = \overline{\mathcal{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))$ et la différentielle $\theta' : \mathcal{B}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{B}^{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ est la somme du bord de Hochschild à coefficients triviaux

$$b' : \overline{\mathcal{S}}_s(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))_{s+t} \rightarrow \overline{\mathcal{S}}_s(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))_{s+t-1}$$

et de la différentielle de Chevalley-Eilenberg

$$(\delta^{CE})' : \overline{\mathcal{S}}_s(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))_{s+t} \rightarrow \overline{\mathcal{S}}_{s-1}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))_{s+t-1}$$

associée au crochet de Lie

$$[-, -] : \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \otimes \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$$

défini dans le Lemme 1.3.5.

Ce lemme est une conséquence des deux observations ci-dessous.

Mentionnons que $C^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathbb{K})$ s'identifie aussi au complexe de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie différentielle graduée $(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}), b')$ munie du bord de Hochschild $b' : \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ comme différentielle interne.

On comprend ainsi pourquoi les différentielles b' et $(\delta^{CE})'$ du bicomplexe de Poisson à coefficients triviaux commutent.

2.2.5. Observation. — *Le bord de Hochschild*

$$b' : \bar{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})) \rightarrow \bar{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))$$

est une codérivation par rapport au coproduit et par rapport au cocrochet de $\bar{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))$.

De plus, la composée de b' avec la projection naturelle $\bar{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})) \rightarrow \Sigma\mathcal{O}$ est induite par le produit de \mathcal{O} sur $\mathcal{L}_2^c(\Sigma\mathcal{O}) \subset \bar{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))$ et s'annule sur les autres composantes de $\bar{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))$.

Démonstration. Soient $u_1, \dots, u_s \in \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$. On a la formule

$$b'(u_1 \cdots u_n) = \sum \pm u_1 \cdots b'(u_i) \cdots u_n.$$

Cette identité entraîne immédiatement que b' est une codérivation par rapport au coproduit shuffle. Rappelons que b' est une codérivation par rapport au cocrochet de $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$. Cette propriété implique que b' est aussi une codérivation par rapport au cocrochet de $\bar{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))$.

La composée de b' avec la projection naturelle $\bar{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})) \rightarrow \Sigma\mathcal{O}$ se réduit à une composante

$$\mathcal{B}_{1,1}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}) \xrightarrow{b'} \mathcal{B}_{1,0}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}).$$

On a $\mathcal{B}_{1,1}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}) = \mathcal{L}_2^c(\Sigma\mathcal{O})$. Or, on sait que $(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}), b')$ s'identifie à la construction $(\mathcal{B}^{\text{Com}}(\mathcal{O}), \theta')$ (cf. Paragraphe 2.1.11). En particulier, sur $\mathcal{L}_2^c(\Sigma\mathcal{O})$, le bord b' est donné par le produit de \mathcal{O} . \square

2.2.6. Observation. — *La différentielle de Chevalley-Eilenberg*

$$(\delta^{CE})' : \bar{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})) \rightarrow \bar{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))$$

est une codérivation par rapport au coproduit et par rapport au cocrochet de $\bar{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))$.

De plus, la composée de $(\delta^{CE})'$ avec la projection naturelle $\bar{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})) \rightarrow \Sigma\mathcal{O}$ est induite par le produit de \mathcal{O} sur $\bar{\mathfrak{S}}_2(\Sigma\mathcal{O}) \subset \bar{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))$ et est nulle sur les autres composantes de $\bar{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))$.

Démonstration. On sait que $(\overline{\mathcal{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})), (\delta^{CE})')$ représente le complexe

$$(\mathcal{B}^{\text{Lie}}(\Sigma^{-1}\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})), (\delta^{CE})')$$

(cf. Paragraphe 2.1.12). Par conséquent, $(\delta^{CE})'$ est une codérivation par rapport au coproduit de $\overline{\mathcal{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))$. En utilisant la relation de distribution entre le crochet et le cocrochet de $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$, on vérifie également facilement que $(\delta^{CE})'$ est une codérivation par rapport au cocrochet de $\overline{\mathcal{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))$.

La dernière assertion du lemme résulte du fait que la composante

$$\mathcal{L}_1^c(\Sigma\mathcal{O}) \otimes \mathcal{L}_1^c(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{L}_1^c(\Sigma\mathcal{O})$$

du crochet de $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ s'identifie au crochet de $\Sigma\mathcal{O}$. \square

Le complexe $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R})$ associé à la résolution $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\text{Pois}}(\mathcal{O})$

2.2.7. Données. — On passe au cas de coefficients non-triviaux. On note

$$\Gamma = \mathcal{B}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}) = \overline{\mathcal{P}}^c(\Sigma\mathcal{O}) = \overline{\mathcal{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})).$$

On pose également :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\text{Pois}}(\mathcal{O}) = \mathcal{C}_{\text{Pois}}(\Gamma).$$

On montre que le module différentiel gradué

$$(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R}), \theta)$$

s'identifie au complexe total du bicomplexe de Poisson

$$(C^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), b, \delta^{CE}).$$

Pour commencer, on a un isomorphisme de modules gradués naturel

$$\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R}) \simeq C^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}).$$

En effet, d'après le Lemme 1.2.7 :

2.2.8. Lemme. — Si $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\Sigma^{-1}\Gamma)$, alors on a un isomorphisme

$$\alpha : \mathcal{M} \otimes \Gamma \xrightarrow{\simeq} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R})$$

tel que $\alpha^{-1}(x \otimes dy) = x \otimes (\Sigma y)$ pour tout $y \in \Sigma^{-1}\Gamma$ et $x \in \mathcal{M}$.

On fixe $x \in \mathcal{M}$ et $y \in \Sigma^{-1}\Gamma \subset \mathcal{R}$. Si on suppose que $y = \Sigma^{-1}(u_1 \cdots u_s)$, avec $u_1, \dots, u_s \in \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$, alors on a la relation :

$$x \otimes dy = \alpha(x \otimes u_1 \cdots u_s) \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R}).$$

La différentielle de $x \otimes dy$ dans $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R})$ s'écrit $-x \otimes d\theta(y)$ (cf. Paragraphe 1.2.6). On démontre le résultat suivant :

2.2.9. Affirmation. — *On a $\alpha^{-1}(-x \otimes d\theta(y)) = (b + \delta^{CE})(x \otimes u_1 \cdots u_s)$.*

Cette relation montre bien que la différentielle du complexe $M \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R})$ correspond à la différentielle totale du bicomplexe de Poisson par l'isomorphisme α . La suite de cette section est consacrée à la démonstration de cette affirmation.

2.2.10. La différentielle de y dans $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\text{Pois}}(\mathcal{O})$. — Par définition, la différentielle de y dans $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ s'écrit $\theta(y) = \theta''(y) + \theta'(y)$ avec :

$$\theta'(y) \in \Sigma^{-1}\Gamma = \mathcal{C}_{\text{Pois}}^1(\Gamma) \quad \text{et} \quad \theta''(y) \in \overline{\mathcal{P}}_2(\Sigma^{-1}\Gamma) = \mathcal{C}_{\text{Pois}}^2(\Gamma).$$

Comme

$$\overline{\mathcal{P}}_2(\Sigma^{-1}\Gamma) = \overline{\mathcal{S}}_2(\Sigma^{-1}\Gamma) \oplus \mathcal{L}_2(\Sigma^{-1}\Gamma).$$

on décompose $\theta''(y) \in \overline{\mathcal{P}}_2(\Sigma^{-1}\Gamma)$ en $\theta''(y) = \theta''_{\mathcal{S}}(y) + \theta''_{\mathcal{L}}(y)$, avec :

$$\theta''_{\mathcal{S}}(y) \in \overline{\mathcal{S}}_2(\Sigma^{-1}\Gamma) \quad \text{et} \quad \theta''_{\mathcal{L}}(y) \in \mathcal{L}_2(\Sigma^{-1}\Gamma).$$

Les applications $\theta''_{\mathcal{S}} : \Sigma^{-1}\Gamma \rightarrow \overline{\mathcal{S}}_2(\Sigma^{-1}\Gamma)$ et $\theta''_{\mathcal{L}} : \Sigma^{-1}\Gamma \rightarrow \mathcal{L}_2(\Sigma^{-1}\Gamma)$ sont les composantes de la restriction de θ'' à $\Sigma^{-1}\Gamma$. On reprend la définition de cette application (cf. Paragraphe 2.1.8). Ainsi, le cocrochet de Γ induit une application de degré -1

$$\Sigma^{-1}\Gamma \rightarrow \Sigma^{-2}(\Gamma \otimes \Gamma \otimes \text{sgn}_2)^{\Sigma_2}$$

que l'on compose avec l'isomorphisme

$$\Sigma^{-2}(\Gamma \otimes \Gamma \otimes \text{sgn}_2)^{\Sigma_2} \simeq (\Sigma^{-1}\Gamma \otimes \Sigma^{-1}\Gamma)_{\Sigma_2} = \overline{\mathcal{S}}_2(\Sigma^{-1}\Gamma).$$

Cette application composée définit la composante $\theta''_{\mathcal{S}}$. De même, le coproduit de Γ induit une application de degré -1

$$\Sigma^{-1}\Gamma \rightarrow \Sigma^{-2}(\Gamma \otimes \Gamma)^{\Sigma_2}$$

que l'on compose avec l'isomorphisme

$$\Sigma^{-2}(\Gamma \otimes \Gamma)^{\Sigma_2} \simeq (\Sigma^{-1}\Gamma \otimes \Sigma^{-1}\Gamma \otimes \text{sgn}_2)_{\Sigma_2} = \mathcal{L}_2(\Sigma^{-1}\Gamma).$$

On obtient alors l'application $\theta''_{\mathcal{L}}$.

On explicite maintenant l'expression de $\theta''_{\mathcal{S}}(y)$ et de $\theta''_{\mathcal{L}}(y)$ pour un élément donné $y = \Sigma^{-1}(u_1 \cdots u_s)$. On reprend les conventions du Paragraphe 2.2.3 : la somme

$$\mu(u_1 \cdots u_s) = \sum \pm u_I \otimes u_J$$

représente le coproduit de $u_1 \cdots u_s$ dans $\overline{\mathcal{P}}^c(\Sigma\mathcal{O})$ et si on note $\gamma(u_k) = \sum_{(u_k)} u'_k \otimes u''_k$ le cocrochet d'un facteur u_k dans $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$, alors le cocrochet de $u_1 \cdots u_s$ dans $\overline{\mathcal{P}}^c(\Sigma\mathcal{O})$ est représenté par l'expression

$$\gamma(u_1 \cdots u_s) = \sum \left\{ \sum_{(u_k)} \pm u_I u'_k \otimes u_J u''_k \right\}.$$

Pour passer des invariants aux coinvariants, on divise simplement ces sommes par 2. On obtient finalement :

Assertion. — *Avec les notations ci-dessus, on a :*

$$\theta''_{\mathcal{S}}(y) = \frac{1}{2} \sum \left\{ \sum_{(u_k)} \pm \Sigma^{-1}(u_I u'_k) \cdot \Sigma^{-1}(u_J u''_k) \right\}, \quad \text{dans } \overline{\mathcal{S}}_2(\Sigma^{-1}\Gamma),$$

$$\text{et } \theta''_{\mathcal{L}}(y) = \frac{1}{2} \sum \pm [\Sigma^{-1}u_I, \Sigma^{-1}u_J], \quad \text{dans } \mathcal{L}_2(\Sigma^{-1}\Gamma).$$

2.2.11. La différentielle de $x \otimes dy$ dans $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R})$. — On rappelle que la différentielle de $x \otimes dy$ dans $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R})$ s'écrit

$$-x \otimes d\theta(y) = -x \otimes d\theta''(y) - x \otimes d\theta'(y).$$

Comme $\theta'(y) = -\Sigma^{-1}(\theta'(u_1 \cdots u_s)) \in \Sigma^{-1}\Gamma$, on obtient immédiatement :

Assertion. — *On a l'identité $\alpha^{-1}(-x \otimes d\theta'(y)) = x \otimes \Sigma\theta'(u_1 \cdots u_s)$.*

On calcule maintenant l'élément de $\mathcal{M} \otimes \Gamma$ correspondant aux composantes $x \otimes d\theta''_{\mathcal{S}}(y)$ et $x \otimes d\theta''_{\mathcal{L}}(y)$ de la différentielle de $x \otimes dy$. On exprime ces termes sous la forme $x' \otimes dy'$, avec $y' \in \Sigma^{-1}\Gamma$, en utilisant les règles de dérivation. Ainsi, en reprenant le développement de $\theta''_{\mathcal{S}}(y)$ et de $\theta''_{\mathcal{L}}(y)$, on obtient :

$$d\theta''_{\mathcal{S}}(y) = \frac{1}{2} \sum \left\{ \sum_{(u_k)} \left\{ \pm \Sigma^{-1}(u_I u'_k) \cdot d(\Sigma^{-1}(u_J u''_k)) \right. \right. \\ \left. \left. + \pm d(\Sigma^{-1}(u_I u''_k)) \cdot \Sigma^{-1}(u_J u''_k) \right\} \right\}$$

$$\text{et } d\theta''_{\mathcal{L}}(y) = \frac{1}{2} \sum \left\{ \pm [d(\Sigma^{-1}u_I), \Sigma^{-1}u_J] + \pm [\Sigma^{-1}u_I, d(\Sigma^{-1}u_J)] \right\}.$$

On explicite le signe provenant des permutations des symboles de suspension et de dérivation. Ainsi, dans la suite, *le signe \pm sera déterminé par la position relative des seuls tenseurs u_1, \dots, u_s* . Ainsi, avec cette convention, on obtient :

$$\begin{aligned} d\theta''_S(y) &= -\frac{1}{2} \sum \left\{ \sum_{(u_k)} \pm \Sigma^{-1}(u_I u'_k) \cdot d(\Sigma^{-1}(u_J u''_k)) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum \left\{ \sum_{(u_k)} \pm \Sigma^{-1}(u_J u''_k) \cdot d(\Sigma^{-1}(u_I u'_k)) \right\} \end{aligned}$$

En effet, les signes provenant des permutations de la désuspension Σ^{-1} et de la différentielle d avec les tenseurs u_1, \dots, u_s s'annulent. En outre, dans chacune des sommes, la commutation du symbole d et d'une désuspension Σ^{-1} produit un signe (-1) . Comme les facteurs des termes de la deuxième somme sont permutés, on a un signe (-1) supplémentaire dû à l'interversion des désuspensions.

On regroupe maintenant les deux sommes ci-dessus en utilisant l'antisymétrie du cocrochet de $\overline{\mathcal{P}}^c(\Sigma\mathcal{O})$. Plus explicitement, cette relation d'antisymétrie donne la relation

$$\sum \pm u_I u'_k \otimes u_J u''_k = - \sum \pm u_J u''_k \otimes u_I u'_k.$$

On en déduit

$$d\theta''_S(y) = - \sum \left\{ \sum_{(u_k)} \pm \Sigma^{-1}(u_I u'_k) \cdot d(\Sigma^{-1}(u_J u''_k)) \right\}.$$

On a de même :

$$d\theta''_{\mathcal{L}}(y) = - \sum \pm [\Sigma^{-1}u_I, d(\Sigma^{-1}u_J)].$$

On observe que $\epsilon(\Sigma^{-1}u_I) = 0$ si l'ensemble I n'est pas réduit à un élément. C'est pourquoi on obtient le résultat final suivant :

Assertion. — *On a*

$$\alpha^{-1}(-x \otimes d\theta''_S(y)) = \sum_i \left\{ \sum_{(u_i)} \pm x \cdot \epsilon(\Sigma^{-1}u'_i) \otimes u_1 \cdots u''_i \cdots u_s \right\}$$

$$\text{et} \quad \alpha^{-1}(-x \otimes d\theta''_{\mathcal{L}}(y)) = \sum_i \pm [x, \epsilon(\Sigma^{-1}u_i)] \otimes u_1 \cdots \hat{u}_i \cdots u_s.$$

2.2.12. Comparaison de la différentielle obtenue avec les différentielles du bicomplexe de Poisson. — Il s'agit d'identifier les expressions obtenues aux composantes du bord de Hochschild et de la différentielle de Chevalley-Eilenberg de $x \otimes u_1 \cdots u_s$. D'abord, si on combine les résultats obtenus pour le complexe de Poisson à coefficients triviaux (cf. Lemme 2.2.4) avec les formules explicitées dans le paragraphe précédent 2.2.11, alors on obtient l'assertion :

Assertion. — *On a l'identité : $\alpha^{-1}(-x \otimes d\theta'(y)) = x \otimes \theta'(u_1 \cdots u_s) = x \otimes b'(u_1 \cdots u_s) + x \otimes (\delta^{CE})'(u_1 \cdots u_s)$.*

On regroupe les termes de la différentielle de $x \otimes dy$:

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(-x \otimes d\theta(y)) &= \alpha^{-1}(-x \otimes d\theta''(y)) + \alpha^{-1}(-x \otimes d\theta'(y)) \\ &= \{ \alpha^{-1}(-x \otimes d\theta''_S(y)) + x \otimes (\delta^{CE})'(u_1 \cdots u_s) \} \\ &\quad + \{ \alpha^{-1}(-x \otimes d\theta''_{\mathcal{L}}(y)) + x \otimes b'(u_1 \cdots u_s) \}, \end{aligned}$$

et on identifie chacune de ces sommes aux composantes de la différentielle de Poisson.

Assertion. — *On a*

$$\alpha^{-1}(-x \otimes d\theta''_S(y)) + x \otimes (\delta^{CE})'(u_1 \cdots u_s) = \delta^{CE}(x \otimes u_1 \cdots u_s)$$

En effet, si on somme la formule du Paragraphe 2.2.11

$$\alpha^{-1}(-x \otimes d\theta''_{\mathcal{L}}(y)) = \sum_i \pm [x, \epsilon(\Sigma^{-1}u_i)] \otimes u_1 \cdots \widehat{u}_i \cdots u_s$$

avec l'expression

$$x \otimes (\delta^{CE})'(u_1 \cdots u_s) = - \sum_{1 \leq i < j \leq s} \pm x \otimes u_1 \cdots [u_i, u_j] \cdots \widehat{u}_j \cdots u_s,$$

alors on obtient clairement la différentielle de Chevalley-Eilenberg de $m \otimes u_1 \cdots u_s$. On note simplement que $[x, \epsilon(\Sigma^{-1}u_i)]$ représente le crochet de $x \in \mathcal{M}$ avec l'image de u_i par la projection naturelle $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O}$ (cf. Paragraphe 1.3.7).

Assertion. — *On a*

$$\alpha^{-1}(-x \otimes d\theta''_S(y)) + x \otimes b'(u_1 \cdots u_s) = b(x \otimes u_1 \cdots u_s)$$

En effet, on rappelle que le bord de Hochschild de $x \otimes u_1 \cdots u_s$ s'écrit :

$$\begin{aligned} b(x \otimes u_1 \cdots u_s) &= \sum_i \pm x \cdot u_1 \cdots b(u_i) \cdots u_s \\ &= \sum_i \pm x \otimes u_1 \cdots b'(u_i) \cdots u_s + \sum_i \pm x \cdot u_1 \cdots b''(u_i) \cdots u_s \\ &= x \otimes b'(u_1 \cdots u_s) + \sum_i \pm x \cdot u_1 \cdots b''(u_i) \cdots u_s. \end{aligned}$$

De plus, si $u_i = e^{(1)}(f_1, \dots, f_n)$, alors on a

$$b''(u_i) = f_1 \otimes e^{(1)}(f_2, \dots, f_n) - \pm f_n \otimes e^{(1)}(f_1, \dots, f_{n-1})$$

(cf. Paragraphe 1.3.4).

On observe que l'expression obtenue au Paragraphe 2.2.11

$$\alpha^{-1}(-x \otimes d\theta_{\mathcal{O}}''(y)) = \sum_i \left\{ \sum_{(u_i)} \pm x \cdot \epsilon(\Sigma^{-1}u_i') \otimes u_1 \cdots u_i'' \cdots u_s \right\}$$

s'identifie à la somme $\sum_i \pm x \cdot u_1 \cdots b''(u_i) \cdots u_s$. En fait, le cocrochet d'un élément de la forme $u_i = e^{(1)}(f_1, \dots, f_n)$ dans $\mathcal{L}^c(\Sigma^{-1}\tilde{\mathcal{O}})$ s'écrit

$$\begin{aligned} \gamma(u_i) &= \sum_{p=1}^n \{ e^{(1)}(f_1, \dots, f_p) \otimes e^{(1)}(f_{p+1}, \dots, f_n) \\ &\quad - \pm e^{(1)}(f_{p+1}, \dots, f_n) \otimes e^{(1)}(f_1, \dots, f_p) \}. \end{aligned}$$

L'image du tenseur $e^{(1)}(f_1, \dots, f_p)$ (respectivement, $e^{(1)}(f_{p+1}, \dots, f_n)$) par la projection naturelle $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \Sigma\mathcal{O}$ est nulle sauf pour $p = 1$ (respectivement, $p = n - 1$). En conséquence, la somme $\sum_{(u_i)} \pm x \cdot \epsilon(\Sigma^{-1}u_i') \otimes u_1 \cdots u_i'' \cdots u_s$ se réduit aux termes

$$\pm x \cdot f_1 \otimes u_1 \cdots e^{(1)}(f_2, \dots, f_n) \cdots u_s - \pm x \cdot f_n \otimes u_1 \cdots e^{(1)}(f_1, \dots, f_{n-1}) \cdots u_s$$

et la conclusion s'ensuit. (On comparera ce calcul avec la démonstration de l'affirmation 2.3.11.)

La démonstration de l'Affirmation 2.2.9 est maintenant complète.

Récapitulation

Récapitulons. On est parvenu au résultat suivant :

2.2.13. Lemme. — *L'isomorphisme naturel*

$$\alpha : \mathcal{M} \otimes \Gamma \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R})$$

définit un isomorphisme du bicomplexe de Poisson

$$C^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes \overline{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})) = \mathcal{M} \otimes \Gamma$$

dans le complexe $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R})$ associé à la résolution $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\text{Pois}}(\mathcal{O})$.

Ceci démontre la première identité du Théorème 2.2.1. L'identité duale

$$C_{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}) = \text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})}(\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R}), \mathcal{M})$$

peut se déduire de ce résultat. En effet, si on pose

$$L_{\mathcal{R}} = \mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})} \Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R}),$$

comme dans le Paragraphe 1.2.10, alors on obtient

$$L_{\mathcal{R}} \simeq C^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})).$$

De plus, on a la relation $\text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{R})}(\Omega_{\text{Pois}}^1(\mathcal{R}), \mathcal{M}) = \text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})}(L_{\mathcal{R}}, \mathcal{M})$ (cf. Paragraphe 1.2.10). La deuxième identité du Théorème 2.2.1 est donc une conséquence de l'observation suivante :

2.2.14. Observation. — [cf. [2]] *On pose*

$$L_{\mathcal{R}} := C^{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})) = \mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O}) \otimes \overline{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})).$$

On munit $L_{\mathcal{R}}$ de l'action à gauche naturelle de $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$. De la sorte, le complexe $L_{\mathcal{R}}$ forme un bicomplexe de $\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})$ -modules. On a la relation de dualité

$$(C_{\text{Pois}}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), b, \delta_{CE}) = (\text{Hom}_{\mathcal{U}_{\text{Pois}}(\mathcal{O})}(L_{\mathcal{R}}, \mathcal{M}), b^*, \delta^{CE*}).$$

2.3. Du complexe canonique au bicomplexe de Poisson

Résolution commutative quasi-libre d'une algèbre de Poisson

2.3.1. Résolution quasi-libre d'une algèbre commutative. —

Soit \mathcal{O} une algèbre commutative. On applique la construction $\mathcal{R}^{\mathcal{P}}$ à l'opérade $\mathcal{P} = \text{Com}$. On obtient ainsi une résolution commutative quasi-libre de \mathcal{O}

$$\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{R}^{\text{Com}}(\mathcal{O}).$$

Il est utile d'introduire quelques notations spécifiques pour $\tilde{\mathcal{O}}$. Ainsi, on note β'' (respectivement β') la différentielle de la construction \mathcal{C}_{Com} (respectivement \mathcal{B}^{Com}). On note également β la différentielle de $\mathcal{R}^{\text{Com}}(\mathcal{O})$. Rappelons que $(\mathcal{B}^{\text{Com}}(\mathcal{O}), \beta') = (\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}), b')$ (cf. Paragraphe 2.1.11). On a $\tilde{\mathcal{O}} = \bar{\mathcal{S}}(\Sigma^{-1}\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))$ et le morphisme d'augmentation $\epsilon : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}$ est induit par la projection naturelle $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \Sigma\mathcal{O}$. On explicite la définition de la différentielle β'' .

2.3.2. La différentielle de la construction \mathcal{C}_{Com} . — On fixe une cogèbre de Lie Γ . Par exemple, on prend $\Gamma = \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$, comme ci-dessus. La différentielle β'' est caractérisée par sa restriction à $\Sigma^{-1}\Gamma \subset \mathcal{C}_{\text{Com}}(\Gamma)$. On rappelle la définition de cette application. Le cocrochet de Γ induit une application de degré -1

$$\Sigma^{-1}\Gamma \rightarrow \Sigma^{-2}(\Gamma \otimes \Gamma \otimes \text{sgn}_2)^{\Sigma_2}.$$

La restriction de β'' à $\Sigma^{-1}\Gamma$ est l'image de cette application par l'isomorphisme

$$\Sigma^{-2}(\Gamma \otimes \Gamma \otimes \text{sgn}_2)^{\Sigma_2} \simeq (\Sigma^{-1}\Gamma \otimes \Sigma^{-1}\Gamma)_{\Sigma_2} = \bar{\mathcal{S}}_2(\Sigma^{-1}\Gamma).$$

Explicitement, soit $u \in \Gamma$. Si $\sum_{(u)} u' \otimes u''$ représente le cocrochet de u dans Γ , alors dans $\bar{\mathcal{S}}_2(\Sigma^{-1}\Gamma)$ on a l'identité :

$$\beta''(\Sigma^{-1}u) = \frac{1}{2} \sum_{(u)} \pm(\Sigma^{-1}u') \cdot (\Sigma^{-1}u'').$$

2.3.3. Application à une algèbre de Poisson. — On suppose que \mathcal{O} est une algèbre de Poisson. Alors, le crochet de Poisson de \mathcal{O} se relève à $\tilde{\mathcal{O}}$. Plus précisément, on a le résultat suivant :

2.3.4. Lemme. — *On munit $\tilde{\mathcal{O}} = \mathfrak{S}(\Sigma^{-1}\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}))$ du crochet de Poisson induit par le crochet de Lie de $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ défini dans le Lemme 1.3.5. On obtient alors une algèbre de Poisson différentielle graduée, quasi-isomorphe à \mathcal{O} et qui est quasi-libre comme algèbre commutative.*

Démonstration. On vérifie que $(\tilde{\mathcal{O}}, \beta)$ forme une algèbre de Poisson différentielle graduée. Plus précisément, on démontre que le crochet de Poisson induit est compatible avec la différentielle de $\tilde{\mathcal{O}}$. Cette assertion est un cas particulier $\Gamma = \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ de l'énoncé suivant : \square

2.3.5. Affirmation. — *On suppose que Γ est munie d'un crochet de Lie de degré -1 et forme une bigèbre de Lie (différentielle graduée). On munit $\mathcal{C}_{\text{Com}}(\Gamma) = \mathfrak{S}(\Sigma^{-1}\Gamma)$ du crochet de Poisson induit par le crochet de Lie de Γ . Ce crochet de Poisson est compatible avec la différentielle β'' . En conséquence, le complexe $(\mathcal{C}_{\text{Com}}(\Gamma), \beta'')$ forme une algèbre de Poisson différentielle graduée.*

Démonstration. Il s'agit d'établir l'identité :

$$\beta''[x, y] = [\beta''(x), y] + \pm[x, \beta''(y)].$$

On peut supposer que x et y sont des générateurs de $\mathcal{C}_{\text{Com}}(\Gamma)$. On écrit $x = \Sigma^{-1}u$ et $y = \Sigma^{-1}v$, avec $u, v \in \Gamma$. On reprend les notations du Paragraphe 2.3.2. On a :

$$\beta''(\Sigma^{-1}u) = \frac{1}{2} \sum_{(u)} \pm(\Sigma^{-1}u') \cdot (\Sigma^{-1}u'').$$

Si on applique la formule de distribution de Poisson, alors on obtient :

$$\begin{aligned} [\beta''(\Sigma^{-1}u), \Sigma^{-1}v] &= \frac{1}{2} \sum_{(u)} \{ \pm[\Sigma^{-1}u', \Sigma^{-1}v] \cdot (\Sigma^{-1}u'') \\ &\quad + (\Sigma^{-1}u') \cdot [\Sigma^{-1}u'', \Sigma^{-1}v] \}. \end{aligned}$$

On regroupe ces deux sommes en utilisant l'antisymétrie du cocrochet de u . On obtient :

$$[\beta''(\Sigma^{-1}u), \Sigma^{-1}v] = \sum_{(u)} \pm[\Sigma^{-1}u', \Sigma^{-1}v] \cdot (\Sigma^{-1}u'').$$

On a de même :

$$[\Sigma^{-1}u, \beta''(\Sigma^{-1}v)] = \sum_{(v)} \pm[\Sigma^{-1}u, \Sigma^{-1}v'] \cdot (\Sigma^{-1}v'').$$

Finalement, dans $\bar{\mathfrak{S}}_2(\Sigma^{-1}\Gamma) = (\Sigma^{-1}\Gamma \otimes \Sigma^{-1}\Gamma)_{\Sigma_2}$, notre relation de dérivation s'écrit :

$$\begin{aligned} \beta''[\Sigma^{-1}u, \Sigma^{-1}v] &= \sum_{(u)} \pm[\Sigma^{-1}u', \Sigma^{-1}v] \cdot (\Sigma^{-1}u'') \\ &\quad + \sum_{(v)} \pm[\Sigma^{-1}u, \Sigma^{-1}v'] \cdot (\Sigma^{-1}v''). \end{aligned}$$

Comme le crochet de $\Sigma^{-1}\Gamma$ est obtenu par désuspension du crochet de Γ , cette équation s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \beta''(\Sigma^{-1}[u, v]) &= \sum_{(u)} \pm(\Sigma^{-1}[u', v]) \cdot (\Sigma^{-1}u'') \\ &\quad + \sum_{(v)} \pm(\Sigma^{-1}[u, v']) \cdot (\Sigma^{-1}v''). \end{aligned}$$

L'image de $\Sigma^{-1}[u, v]$ par β'' correspond au cocrochet de $[u, v]$ dans Γ . Finalement, dans $\Sigma^{-2}(\text{sgn}_2 \otimes \Gamma \otimes \Gamma)^{\Sigma_2}$, l'équation ci-dessus équivaut à la relation de distribution entre le crochet et le cocrochet de Γ :

$$\begin{aligned} \gamma([u, v]) &= \sum_{(u)} \{\pm[u', v] \otimes u'' - \pm u' \otimes [u'', v]\} \\ &\quad + \sum_{(v)} \{\pm[u, v'] \otimes v'' - \pm v' \otimes [u, v'']\} \end{aligned}$$

(cf. Paragraphe 4.1.3). □

Le complexe canonique pour la résolution de Schlessinger et Stasheff

Soit \mathcal{O} une algèbre commutative. On suppose que $\tilde{\mathcal{O}}$ est une résolution quasi-libre de \mathcal{O} . On peut relier la composante de poids s de l'homologie de Hochschild de \mathcal{O} à l'homotopie du dg-module $\mathcal{M} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \Omega^s(\tilde{\mathcal{O}})$ (cf. [6], [51], cf. Remarque 1.4.7). Plus précisément, on a l'identité $\overline{\text{HH}}_*^{(s)}(\tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{M}) = \pi_*(\mathcal{M} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \Omega^s(\tilde{\mathcal{O}}))$. Pour la résolution naturelle $\tilde{\mathcal{O}} = F^{\text{Com}}(\mathcal{O})$, on obtient un énoncé plus précis :

2.3.6. Lemme. — *On a des isomorphismes de complexes*

$$\begin{aligned} (\overline{C}_*^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), b) &\simeq (\mathcal{M} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \Omega^s(\tilde{\mathcal{O}}), \beta) \\ \text{et } (\overline{C}_{(s)}^*(\mathcal{O}, \mathcal{M}), b) &\simeq (\text{Hom}_{\tilde{\mathcal{O}}}(\Omega^*(\tilde{\mathcal{O}}), \mathcal{M}), \beta). \end{aligned}$$

On donne une démonstration détaillée de la relation $(\overline{C}_*^{(s)}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), b) = (\mathcal{M} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \Omega^s(\tilde{\mathcal{O}}), \beta)$. L'identité duale se démontre de la même façon ou se déduit de ce résultat. Nous n'avons pas trouvé de référence où ces identités sont énoncées pour toute valeur de s . Cependant, pour $s = 1$, ce résultat est connu (*cf.* [47]).

2.3.7. Notations. — On note $\Gamma = \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$. De la sorte, on a $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{R}^{\text{Com}}(\mathcal{O}) = \mathcal{C}_{\text{Com}}(\Sigma^{-1}\Gamma) = \mathcal{S}(\Sigma^{-1}\Gamma)$. On part du résultat suivant :

Assertion. — *On a un isomorphisme de modules gradués naturel*

$$\alpha : \mathcal{M} \otimes \mathcal{S}_s(\Gamma) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \Omega^s(\tilde{\mathcal{O}}).$$

Si $x \otimes u_1 \cdots u_s \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{S}_s(\Gamma)$, alors on a explicitement

$$\alpha(x \otimes u_1 \cdots u_s) = x \otimes dy_1 \cdots dy_s,$$

où $y_i = \Sigma^{-1}u_i \in \tilde{\mathcal{O}}$, pour $i = 1, \dots, s$.

On montre que α forme un morphisme de complexes dans les paragraphes suivants.

2.3.8. La différentielle dans le complexe $\mathcal{M} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \Omega^s(\tilde{\mathcal{O}})$. — La différentielle de $x \otimes dy_1 \cdots dy_s$ dans $\mathcal{M} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \Omega^s(\tilde{\mathcal{O}})$ s'écrit :

$$- \sum_i \pm x \otimes dy_1 \cdots d(\beta(y_i)) \cdots dy_s.$$

Le signe \pm provient des commutations entre la différentielle β et les tenseurs dy_1, \dots, dy_{i-1} . Le signe supplémentaire provient de la relation de commutation $\beta(dy_i) = -d(\beta(y_i))$.

Rappelons que le bord de Hochschild de $x \otimes u_1 \cdots u_s$ s'écrit :

$$b(x \otimes u_1 \cdots u_s) = \sum_i \pm x \cdot u_1 \cdots b(u_i) \cdots u_s$$

(*cf.* Paragraphe 1.3.4).

On montre que la différentielle de $x \otimes dy_1 \cdots dy_s$ dans $\mathcal{M} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \Omega^s(\tilde{\mathcal{O}})$ correspond au bord de Hochschild par l'isomorphisme α . Comme les différentielles considérées satisfont des identités de dérivations et comme l'isomorphisme α préserve les produits, il suffit de démontrer l'assertion suivante pour tout élément $y = \Sigma^{-1}u \in \Gamma$:

2.3.9. Affirmation. — *On a la relation $\alpha^{-1}(-d(\beta(y))) = b(u)$ dans $C_*^{(1)}(\mathcal{O}, \mathcal{O}_+)$.*

2.3.10. La différentielle de l'algèbre $\tilde{\mathcal{O}}$. — Par définition, la différentielle de y dans $\tilde{\mathcal{O}}$ s'écrit $\beta(y) = \beta''(y) + \beta'(y)$ avec :

$$\beta'(y) = -\Sigma^{-1}(b'(u)) \in \Sigma^{-1}\Gamma$$

$$\text{et } \beta''(y) = \frac{1}{2} \sum_{(u)} \pm(\Sigma^{-1}u') \cdot (\Sigma^{-1}u'') \in \bar{\mathfrak{S}}_2(\Sigma^{-1}\Gamma),$$

l'expression $\sum_{(u)} \pm u' \otimes u''$ désignant toujours le cocrochet de l'élément u dans la cogèbre Γ (cf. Paragraphe 2.3.2).

On a clairement :

Assertion. — *On a $\alpha^{-1}(-d(\beta'(y))) = b'(u)$.*

On identifie le terme $\alpha^{-1}(-d(\beta''(y)))$ à la composante $b''(u)$ du bord de Hochschild. En appliquant la relation de dérivation, on obtient la formule :

$$d(\beta''(y)) = \frac{1}{2} \sum_{(u)} \{ \pm d(\Sigma^{-1}u') \cdot (\Sigma^{-1}u'') + \pm(\Sigma^{-1}u') \cdot d(\Sigma^{-1}u'') \}.$$

Comme dans le Paragraphe 2.2.11, on peut simplifier cette expression en utilisant la symétrie du produit et l'antisymétrie du cocrochet de u . On obtient :

$$d(\beta''(y)) = - \sum_{(u)} (\Sigma^{-1}u') \cdot d(\Sigma^{-1}u'').$$

Dans cette expression, le signe \pm provient du développement du cocrochet de u . On constate en effet que les signes provenant des commutations avec les symboles “ d ” ou “ Σ^{-1} ” s'annulent et se réduisent au signe -1 . Finalement :

Assertion. — *On a l'identité*

$$\alpha^{-1}(-d(\beta''(y))) = \sum_{(u)} \pm \epsilon(\Sigma^{-1}u') \otimes u''.$$

L'expression $\epsilon(\Sigma^{-1}u')$ représente l'image de $\Sigma^{-1}u'$ par le morphisme d'augmentation $\epsilon : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}$. Rappelons que ϵ est induit par la projection naturelle de $\Sigma^{-1}\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ sur \mathcal{O} .

2.3.11. Affirmation. — On a l'identité $\sum_{(u)} \pm \epsilon(\Sigma^{-1}u') \otimes u'' = b''(u)$.

On reprend les mêmes arguments que dans le Paragraphe 2.2.12 pour la démonstration de l'Affirmation 2.2.9. On peut supposer que u est égal à $e^{(1)}(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{L}^c(\mathcal{O})$. On a alors :

$$b''(u) = f_1 \otimes e^{(1)}(f_2, \dots, f_n) - \pm f_n \otimes e^{(1)}(f_1, \dots, f_{n-1})$$

(cf. Paragraphe 1.3.4).

On rappelle que le coproduit de u dans $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \gamma(u) = \sum_{p=1}^n \{ & e^{(1)}(f_1, \dots, f_p) \otimes e^{(1)}(f_{p+1}, \dots, f_n) \\ & - \pm e^{(1)}(f_{p+1}, \dots, f_n) \otimes e^{(1)}(f_1, \dots, f_p) \}. \end{aligned}$$

L'image du tenseur $e^{(1)}(f_1, \dots, f_p)$ (respectivement, $e^{(1)}(f_{p+1}, \dots, f_n)$) par la projection naturelle $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \Sigma\mathcal{O}$ est nulle sauf pour $p = 1$ (respectivement, $p = n - 1$). En conséquence, la somme $\sum_{(u)} \pm \epsilon(\Sigma^{-1}u') \otimes u''$ se réduit aux termes

$$\pm f_1 \otimes e^{(1)}(f_2, \dots, f_n) - \pm f_n \otimes e^{(1)}(f_1, \dots, f_{n-1})$$

Cette expression représente effectivement le bord $b''(u)$.

On complète ainsi la démonstration de l'Affirmation 2.3.9.

2.3.12. Le complexe canonique de $\tilde{\mathcal{O}}$. — On suppose maintenant que \mathcal{O} est une algèbre de Poisson (non-graduée pour simplifier). On applique le Lemme 2.3.4 : l'algèbre $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{R}^{\text{Com}}(\mathcal{O})$ forme une algèbre de Poisson, quasi-isomorphe à \mathcal{O} et quasi-libre comme algèbre commutative. Soit \mathcal{M} une représentation de Poisson de \mathcal{O} .

On considère le complexe canonique réduit de $\tilde{\mathcal{O}}$:

$$\overline{C}_s^{\text{can}}(\tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \Omega^s(\tilde{\mathcal{O}}).$$

Comme $\tilde{\mathcal{O}}$ est une algèbre de Poisson différentielle graduée, le complexe canonique $\overline{C}_*^{\text{can}}(\tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{M})$ forme un bicomplexe, la différentielle interne de $\tilde{\mathcal{O}}$ induit une différentielle verticale

$$\beta : \overline{C}_s^{\text{can}}(\tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{M})_{s+t} \rightarrow \overline{C}_s^{\text{can}}(\tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{M})_{s+t-1},$$

et la différentielle canonique définit une différentielle horizontale

$$\delta^{can} : \overline{C}_s^{can}(\tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{M})_{s+t} \rightarrow \overline{C}_{s-1}^{can}(\tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{M})_{s+t-1}$$

(cf. Paragraphe 1.4.2).

Le Lemme 2.3.6 montre que les complexes verticaux de ce bicomplexe $(\overline{C}_s^{can}(\tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{M})_{s+*}, \beta)$ s'identifient aux complexes verticaux du bicomplexe de Poisson $(C_{s,*}^{Pois}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), b)$. On peut compléter ce résultat par l'assertion suivante :

2.3.13. Affirmation. — *L'isomorphisme $\alpha : \mathcal{M} \otimes \overline{\mathfrak{S}}(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})) \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \Omega^s(\tilde{\mathcal{O}})$ défini au Paragraphe 2.3.7 envoie la différentielle canonique sur la différentielle de Chevalley-Eilenberg du bicomplexe de Poisson. Plus explicitement, on a l'identité $\alpha^{-1} \cdot \delta^{can} \cdot \alpha = \delta^{CE}$.*

En conclusion :

2.3.14. Théorème. — *Soit \mathcal{O} une algèbre de Poisson. Les bicomplexes*

$$(C^{Pois}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), b, \delta^{CE}) \quad \text{et} \quad (C^{can}(\tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{M}), \beta, \delta^{can})$$

sont isomorphes.

On a un énoncé analogue pour la cohomologie de Poisson. On considère le bicomplexe formé par le complexe de Lichnerowicz-Poisson de $\tilde{\mathcal{O}}$ avec la différentielle interne comme différentielle verticale

$$\beta : C_{LP}^s(\tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{M})^{s+t} \rightarrow C_{LP}^s(\tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{M})^{s+t+1}$$

et la différentielle de Lichnerowicz-Poisson comme différentielle horizontale

$$\delta_{LP} : C_{LP}^s(\tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{M})^{s+t} \rightarrow C_{LP}^{s+1}(\tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{M})^{s+t+1}.$$

On obtient :

2.3.15. Théorème. — *Soit \mathcal{O} une algèbre de Poisson. Les bicomplexes*

$$(C_{Pois}(\mathcal{O}, \mathcal{M}), b, \delta_{CE}) \quad \text{et} \quad (C_{LP}(\tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{M}), \beta, \delta_{LP})$$

sont isomorphes.

L'Affirmation 2.3.13 ci-dessus est une conséquence du résultat général suivant (on prend $\mathfrak{G} = \Sigma^{-1}\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$) :

2.3.16. Lemme. — *Soit \mathfrak{G} une algèbre de Lie. On note $\tilde{\mathcal{O}} = \overline{\mathfrak{S}}(\mathfrak{G})$. On munit $\tilde{\mathcal{O}}$ du crochet de Poisson induit par le crochet de Lie de \mathfrak{G} . On*

suppose que \mathcal{M} est une représentation de Poisson de $\tilde{\mathcal{O}}$. Comme l'inclusion naturelle $\mathcal{G} \hookrightarrow \overline{\mathcal{S}}(\mathcal{G}) = \tilde{\mathcal{O}}$ est un morphisme d'algèbres de Lie, le module \mathcal{M} forme aussi une représentation de l'algèbre de Lie \mathcal{G} par restriction de structure.

On a un isomorphisme de complexes :

$$(C^{CE}(\mathcal{G}, \mathcal{M}), \delta^{CE}) \simeq (C^{can}(\tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{M}), \delta^{can}).$$

Plus précisément, la bijection naturelle $\alpha : \mathcal{M} \otimes \mathcal{S}(\Sigma \mathcal{G}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \Omega^*(\tilde{\mathcal{O}})$ (définie comme dans le Paragraphe 2.3.7) est un isomorphisme du complexe de Chevalley-Eilenberg de \mathcal{G} dans le complexe canonique de $\tilde{\mathcal{O}}$.

La démonstration de ce lemme ne pose pas de difficulté particulière.

3. Le crochet de Poisson shuffle

3.1. Construction du crochet shuffle

3.1.1. Construction du crochet de Poisson shuffle. — On définit un crochet de Poisson de degré -1

$$[-, -] : \mathcal{T}(\Sigma \mathcal{O}) \otimes \mathcal{T}(\Sigma \mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma \mathcal{O})$$

que l'on appelle le *crochet de Poisson "shuffle"*. Soient $\underline{f} = (f_1, \dots, f_p)$ et $\underline{g} = (g_1, \dots, g_q)$ des éléments de $\mathcal{T}(\Sigma \mathcal{O})$. On obtient $[\underline{f}, \underline{g}]$ en effectuant les opérations suivantes :

- (i) on mélange les mots \underline{f} et \underline{g} (ou plus exactement, on en fait le produit shuffle),
- (ii) on effectue le crochet dans $\Sigma \mathcal{O}$ (cf. Appendice 4.1) de chacun des facteurs $f_i \otimes g_j$ (f_i et g_j étant consécutifs).

Par exemple, pour \mathcal{O} non-gradué, si $p = q = 2$, alors on obtient

$$\begin{aligned} \underline{f} \cdot \underline{g} &= (f_1, f_2, g_1, g_2) - (f_1, g_1, f_2, g_2) + (f_1, g_1, g_2, f_2) \\ &\quad + (g_1, f_1, f_2, g_2) - (g_1, f_1, g_2, f_2) + (g_1, g_2, f_1, f_2) \\ \text{et } [\underline{f}, \underline{g}] &= -(f_1, [f_2, g_1], g_2) - ([f_1, g_1], f_2, g_2) - (f_1, g_1, [f_2, g_2]) \\ &\quad + ([f_1, g_1], g_2, f_2) + (g_1, f_1, [f_2, g_2]) + (g_1, [f_1, g_2], f_2). \end{aligned}$$

Attention aux signes : vu la suspension, chaque facteur f_i ou g_j est de degré 1 et le crochet est de degré -1 . Aussi, chaque permutation du crochet avec un facteur f_i ou g_j produit un signe (-1) .

3.1.2. Lemme. — *Avec le crochet ci-dessus, on munit l'algèbre de Hopf différentielle graduée $(\mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O}), b')$ d'une structure d'algèbre de Hopf-Poisson (cf. [9]).*

On observe aussi que la projection naturelle $\mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \Sigma\mathcal{O}$ forme un morphisme d'algèbres de Lie.

Rappelons que la cogèbre de Lie colibre $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ s'identifie aux indécomposables de la cogèbre tensorielle pour le produit shuffle (cf. Appendice 4.2). Ainsi, en utilisant le théorème de structure des algèbres de Hopf-Poisson (cf. [9]), on obtient :

3.1.3. Lemme. — *Par passage au quotient, le crochet de Poisson shuffle induit un crochet de Lie sur $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$:*

$$[-, -] : \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \otimes \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}).$$

Ce crochet est de degré -1 par rapport au degré tensoriel et par rapport au degré total. On munit ainsi la cogèbre de Lie $(\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}), b')$ d'une structure de bigèbre de Lie différentielle graduée. De plus, la projection naturelle $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O}) \rightarrow \Sigma\mathcal{O}$ forme un morphisme d'algèbres de Lie.

On obtient donc un crochet de Lie vérifiant les propriétés du Lemme 1.3.5.

3.2. Les propriétés du crochet shuffle

On démontre que le crochet de Poisson shuffle munit la cogèbre tensorielle d'une structure d'algèbre de Hopf-Poisson différentielle graduée. On vérifie d'abord les propriétés des crochets de Lie de degré -1 (cf. Appendice 4.1).

3.2.1. Affirmation. — *Le crochet de Poisson shuffle est symétrique. Plus explicitement, on a l'identité :*

$$[u, v] = (-1)^{|u||v|}[v, u],$$

quels que soient $u, v \in \mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O})$.

Démonstration. Cette assertion est une conséquence directe de la commutativité du produit shuffle et de l'antisymétrie du crochet de \mathcal{O} . On fixe $u = (f_1, \dots, f_p)$ et $v = (g_1, \dots, g_q)$. Si on développe les produits $u \cdot v$ et $v \cdot u$, alors on obtient exactement les mêmes termes à un facteur $(-1)^{pq}$ près. Aussi, l'action de permuter un facteur $f_i \otimes g_j$ définit une bijection entre les termes de $u \cdot v$ avec f_i et g_j consécutifs et les termes de $v \cdot u$ avec g_j et f_i consécutifs. Comme dans \mathcal{O} on a l'identité $[f_i, g_j] = -\pm [g_j, f_i]$, on arrive ainsi à identifier terme à terme les développements de $[u, v]$ et $[v, u]$. \square

3.2.2. Affirmation. — *Le crochet de Poisson shuffle vérifie la relation de Jacobi. Plus explicitement, on a l'identité :*

$$(-1)^{|u|}[u, [v, w]] + \pm(-1)^{|v|}[v, [w, u]] + \pm(-1)^{|w|}[w, [u, v]] = 0$$

quels que soient $u, v, w \in \mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O})$.

Démonstration. On fixe $u = (f_1, \dots, f_p)$, $v = (g_1, \dots, g_q)$ et $w = (h_1, \dots, h_r)$.

Dans le calcul de $[u, [v, w]]$, $[v, [w, u]]$ et $[w, [u, v]]$, on peut commuter certaines opérations sans que cela pose problème. Ainsi, si on suppose avoir effectué le produit shuffle de u , v et w (avant d'évaluer les crochets de facteurs de u , v , w), alors on obtient le développement de $(-1)^{|u|}[u, [v, w]]$ en effectuant les opérations suivantes :

Termes du type A: étant donné un facteur $f_i \otimes g_j \otimes h_k$, on évalue le crochet de $g_j \otimes h_k$, puis le crochet de $f_i \otimes [g_j, h_k]$ (on obtient donc un facteur de la forme $[f_i, [g_j, h_k]]$) ;

Termes du type A': on évalue le crochet d'un facteur $g_j \otimes h_k$, puis le crochet d'un facteur $f_i \otimes g_{j'}$;

Termes du type A'': on évalue le crochet d'un facteur $g_j \otimes h_k$, puis le crochet d'un facteur $f_i \otimes h_{k'}$.

Les développements de $(-1)^{|v|}[v, [w, u]]$ et $(-1)^{|w|}[w, [u, v]]$ s'obtiennent par symétrie, en effectuant les opérations :

Termes du type B: étant donné un facteur $g_j \otimes h_k \otimes f_i$, on évalue le crochet de $h_k \otimes f_i$, puis le crochet de $g_j \otimes [h_k, f_i]$ (on obtient donc un facteur de la forme $[g_j, [h_k, f_i]]$) ;

Termes du type B': on évalue le crochet d'un facteur $h_k \otimes f_i$, puis le crochet d'un facteur $g_j \otimes h_{k'}$;

Termes du type B'': on évalue le crochet d'un facteur $h_k \otimes f_i$, puis le crochet d'un facteur $g_j \otimes f_{i'}$;

Termes du type C: étant donné un facteur $h_k \otimes f_i \otimes g_j$, on évalue le crochet de $f_i \otimes g_j$, puis le crochet de $h_k \otimes [f_i, g_j]$ (on obtient donc un facteur de la forme $[h_k, [f_i, g_j]]$) ;

Termes du type C': on évalue le crochet d'un facteur $f_i \otimes g_j$, puis le crochet d'un facteur $h_k \otimes f_{i'}$;

Termes du type C'': on évalue le crochet d'un facteur $f_i \otimes g_j$, puis le crochet d'un facteur $h_k \otimes g_{j'}$.

Les termes des types A' et C'' s'éliminent deux à deux (ainsi que les termes des types A'' et B', B'' et C'). En utilisant la relation de Jacobi dans \mathcal{O} , on vérifie que la somme des termes des types A, B et C s'annule. \square

On vérifie maintenant les relations de distribution avec le coproduit de déconcaténation et avec le produit shuffle.

3.2.3. Affirmation. — *Le crochet de Poisson shuffle est compatible avec le coproduit de déconcaténation. Plus explicitement, on a l'identité :*

$$\Delta[u, v] = \sum \pm [u_{(1)}, v_{(1)}] \otimes u_{(2)} \cdot v_{(2)} + \pm u_{(1)} \cdot v_{(1)} \otimes [u_{(2)}, v_{(2)}],$$

quels que soient $u, v \in \mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O})$.

Démonstration. On fixe $u = (f_1, \dots, f_p)$ et $v = (g_1, \dots, g_q)$. On obtient un terme de $\Delta[u, v]$ en effectuant les opérations suivantes :

- (i) on mélange les mots u et v ,
- (ii) on effectue le crochet dans \mathcal{O} d'un facteur $f_i \otimes g_j$,
- (iii) on coupe le mot obtenu.

On peut évidemment intervertir les opérations (ii) et (iii). Ainsi, on développe d'abord l'expression $\Delta(u \cdot v)$. (En fait, on a l'identité $\Delta(u \cdot v) = \sum u_{(1)} \cdot v_{(1)} \otimes u_{(2)} \cdot v_{(2)}$.) Ensuite, on effectue le crochet de chaque facteur de la forme $f_i \otimes g_j$ dans $u_{(1)} \cdot v_{(1)}$ et dans $u_{(2)} \cdot v_{(2)}$. Mais, ainsi, on obtient exactement le membre de droite de l'équation ci-dessus. \square

3.2.4. Affirmation. — *Le crochet de Poisson shuffle est une bidérivation par rapport au produit shuffle. Plus explicitement, on a l'identité :*

$$[u, v \cdot w] = [u, v] \cdot w + (-1)^{(|u|-1)|v|} v \cdot [u, w],$$

quels que soient $u, v, w \in \mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O})$.

Démonstration. Cette assertion résulte uniquement du fait que le produit shuffle est associatif et commutatif. En effet, les termes du membre de gauche s'obtiennent par les opérations suivantes :

- (i) on mélange les mots u, v, w ,
- (ii) on effectue le crochet dans \mathcal{O} d'un facteur de la forme $f_i \otimes g_j$ ou d'un facteur de la forme $f_i \otimes h_k$.

Le terme obtenu s'identifie à un terme du développement de $[u, v] \cdot w$ dans le premier cas et à un terme du développement de $v \cdot [u, w]$ dans le deuxième cas. □

Il nous reste à vérifier que le bord de Hochschild est une dérivation par rapport au crochet de Poisson shuffle :

3.2.5. Affirmation. — *Le bord de Hochschild est une dérivation par rapport au crochet de Poisson shuffle. Plus explicitement, on a l'identité :*

$$b'[u, v] = -[b'u, v] - (-1)^{|u|}[u, b'v],$$

quels que soient $u, v \in \mathcal{T}(\Sigma\mathcal{O})$.

Démonstration. Cette assertion résulte d'une part du fait que le produit shuffle est associatif et commutatif et d'autre part du fait que le crochet de \mathcal{O} est une bidérivation par rapport au produit de \mathcal{O} . En effet, on fixe $u = (f_1, \dots, f_p)$ et $v = (g_1, \dots, g_q)$. En développant l'expression $b'[u, v]$, on fait apparaître des termes avec un facteur de la forme $f_i[f_{i+1}, g_j]$ et des termes avec un facteur de la forme $[f_i, g_j]f_{i+1}$. On regroupe deux de ces termes et on utilise la relation de Poisson pour obtenir un terme avec un facteur de la forme $[f_i f_{i+1}, g_j]$. De même, on regroupe les termes avec un facteur de la forme $g_j[f_i, g_{j+1}]$ et les termes avec un facteur de la forme $[f_i, g_j]g_{j+1}$ pour obtenir des termes avec un facteur de la forme $[f_i, g_j g_{j+1}]$. On identifie immédiatement la somme obtenue à la somme des développements de $[b'u, v]$ et $[u, b'v]$. □

Cette vérification complète la démonstration du Lemme 3.1.2.

4. Appendices

4.1. Crochets de Lie de degré -1

On explicite les propriétés que vérifie un crochet de Lie de degré -1 . Le procédé que l'on décrit se généralise à toute structure algébrique associée à une opérade (cf. [19]).

4.1.1. Suspension d'un crochet de Lie. — Une algèbre de Lie graduée avec un crochet homogène de degré -1 représente la suspension d'une algèbre de Lie graduée avec un crochet homogène de degré 0 . Ainsi, on fixe un module gradué \mathcal{G}' . Une application bilinéaire homogène de degré -1

$$[-, -] : \mathcal{G}' \otimes \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}'$$

est un crochet de Lie si elle vérifie les Propriétés (b) et (c) ci-dessous.

Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie graduée. On suppose que le crochet de \mathcal{G} est homogène de degré 0 . On munit $\Sigma\mathcal{G}$ de l'application $[-, -] : \Sigma\mathcal{G} \otimes \Sigma\mathcal{G} \rightarrow \Sigma\mathcal{G}$ définie par l'identité

$$[\Sigma x, \Sigma y] = (-1)^{|x|} \Sigma[x, y], \quad \text{pour } x, y \in \mathcal{G}. \quad (\text{a})$$

Cette application est homogène de degré -1 . De plus :

Le crochet de $\Sigma\mathcal{G}$ est symétrique. On a l'identité :

$$[u, v] = (-1)^{|u||v|} [v, u], \quad \text{pour } u, v \in \Sigma\mathcal{G}. \quad (\text{b})$$

Soit $u \in \Sigma\mathcal{G}$. L'application $[u, -] : \Sigma\mathcal{G} \rightarrow \Sigma\mathcal{G}$ forme une dérivation de degré $|u| - 1$. Plus explicitement, on a l'identité

$$[u, [v, w]] = (-1)^{|u|-1} \{ [[u, v], w] + (-1)^{(|u|-1)|v|} [v, [u, w]] \}, \quad \text{pour } u, v, w \in \Sigma\mathcal{G}. \quad (\text{c})$$

Le premier signe $(-1)^{|u|-1}$ correspond au croisement de l'application $[u, -]$ et du crochet $[-, -]$. Le deuxième signe $(-1)^{(|u|-1)|v|}$ correspond au croisement de l'application $[u, -]$ et du facteur v . Mentionnons que la relation de dérivation ci-dessus équivaut à l'identité :

$$(-1)^{|u|} [u, [v, w]] + \pm (-1)^{|v|} [v, [w, u]] + \pm (-1)^{|w|} [w, [u, v]] = 0 \quad (\text{d})$$

(les signes non précisés sont déterminés par la position relative des éléments u, v, w).

4.1.2. Algèbres de Gerstenhaber. — Une algèbre de Gerstenhaber est une algèbre commutative graduée munie d'un crochet de Poisson de

degré -1 . Plus précisément, soit \mathcal{O}' une algèbre commutative graduée. On suppose que le produit de \mathcal{O}' est homogène de degré 0 . Un crochet de Poisson de degré -1 est une application bilinéaire de degré -1

$$[-, -] : \mathcal{O}' \otimes \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}'$$

qui est une bidérivation par rapport au produit de \mathcal{O}' et telle que $(\mathcal{O}', [-, -])$ forme une algèbre de Lie.

Ainsi, le crochet de Poisson d'une algèbre de Gerstenhaber vérifie les Propriétés (b) et (c) du Paragraphe 4.1.1. On corrige également les signes de la relation de distribution de Poisson. L'application $[u, -]$, $u \in \mathcal{O}'$, forme une dérivation de degré $|u| - 1$ par rapport au produit de \mathcal{O}' . Donc, on a la relation

$$[u, vw] = [u, v]w + (-1)^{(|u|-1)|v|}v[u, w]$$

quels que soient $u, v, w \in \mathcal{O}'$.

4.1.3. Bigèbres de Lie. — Soit Γ une bigèbre de Lie. On note $[-, -] : \Gamma \otimes \Gamma \rightarrow \Gamma$ le crochet de Γ et $\gamma : \Gamma \rightarrow \Gamma \otimes \Gamma$ le cocrochet. On suppose que Γ est graduée, que le cocrochet γ est de degré 0 et que le crochet $[-, -]$ est de degré -1 . Ainsi, dans la situation du Lemme 1.3.5, la bigèbre Γ est définie par la cogèbre de Lie colibre $\mathcal{L}^c(\Sigma\mathcal{O})$ coengendrée par une algèbre de Poisson \mathcal{O} . On corrige les signes de la relation de distribution entre le cocrochet et le crochet de Γ . On note $\gamma(u) = \sum_{(u)} u' \otimes u''$ et $\gamma(v) = \sum_{(v)} v' \otimes v''$. En appliquant la règle des signes, on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma[u, v] &= \sum_{(u)} \{ \pm[u', v] \otimes u'' + \pm(-1)^{|u'|}u' \otimes [u'', v] \} \\ &\quad + \sum_{(v)} \{ \pm[u, v'] \otimes v'' + \pm(-1)^{|v'|}v' \otimes [u, v''] \} \end{aligned}$$

(les signes non précisés sont déterminés par la position relative des tenseurs u', u'', v et u, v', v'').

4.2. La structure de la cogèbre tensorielle et la cogèbre de Lie colibre

Dans la Section 1.3, on utilise la structure d'algèbre de Hopf de $\mathcal{J}(\Sigma\mathcal{O})$ pour identifier la forme des composantes de la décomposition en poids du complexe de Hochschild. On se base en fait sur le Théorème 4.2.3 ci-dessous. Ce résultat est bien connu et nous rappelons simplement l'idée

de sa démonstration. On renvoie le lecteur à la bibliographie pour plus de détails. Plus spécifiquement, pour les propriétés des idempotents Euleriens et leurs applications aux algèbres de Hopf, on se réfère aux travaux de Gerstenhaber-Schack [18], Loday [33], Patras [38], [39], Reutenauer [44], [45, Chapitre 9], ou à notre article [12]. On peut également reprendre les références citées dans l'introduction de la Section 1.3.

4.2.1. Cogèbres de Lie. — Une cogèbre de Lie est un \mathbb{K} -module Γ muni d'une application bilinéaire antisymétrique $\gamma : \Gamma \rightarrow \Gamma \otimes \Gamma$ vérifiant la relation de Jacobi

$$1 \otimes \gamma \cdot \gamma = \gamma \otimes 1 \cdot \gamma + (1 \ 2) \cdot 1 \otimes \gamma \cdot \gamma.$$

La cogèbre de Lie colibre coengendrée par V est notée $\mathcal{L}^c(V)$. Rappelons que $\mathcal{L}^c(V)$ est caractérisée par la relation d'adjonction

$$\text{Vect}(\Gamma, V) \simeq \text{Alg}_{\text{Lie}}^c(\Gamma, \mathcal{L}^c(V))$$

où $\text{Alg}_{\text{Lie}}^c$ représente la catégorie des cogèbres de Lie.

4.2.2. La cogèbre tensorielle. — On fixe un espace vectoriel V gradué connexe (tel que $V_0 = 0$). On rappelle que la cogèbre tensorielle est le module

$$\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$$

muni du coproduit de déconcaténation. Le produit shuffle donne à la cogèbre tensorielle une structure d'algèbre de Hopf commutative.

Le théorème suivant montre que $\mathcal{L}^c(V)$ est un rétract de $\mathcal{T}(V)$.

4.2.3. Théorème. — *On note $Q\mathcal{T}(V)$ le module des indécomposables de $\mathcal{T}(V)$ pour le produit shuffle.*

- (i) *Soit $\gamma : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{T}(V) \otimes \mathcal{T}(V)$ l'application obtenue par antisymétrisation du coproduit de déconcaténation. Alors γ induit un cocrochet de Lie sur $Q\mathcal{T}(V)$. De plus, le module $Q\mathcal{T}(V)$ s'identifie à la cogèbre de Lie colibre coengendrée par V .*
- (ii) *Soit $e^{(s)} \in \prod_n \mathbb{Q}[\Sigma_n]$ le s -ième idempotent Eulerien. La cogèbre tensorielle admet une décomposition de la forme*

$$\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{s \geq 0} e^{(s)} \mathcal{T}(V).$$

(On suppose que $e^{(s)} \in \prod_n \mathbb{Q}[\Sigma_n]$ agit composante par composante sur $\bigoplus_n V^{\otimes n}$.)

(iii) *Le produit shuffle induit un isomorphisme*

$$\mathfrak{S}_s(e^{(1)}\mathcal{T}(V)) \simeq e^{(s)}\mathcal{T}(V).$$

En corollaire, l'inclusion de la composante $e^{(1)}\mathcal{T}(V)$ dans $\mathcal{T}(V)$ induit un isomorphisme d'algèbres $\mathfrak{S}(e^{(1)}\mathcal{T}(V)) \simeq \mathcal{T}(V)$. De plus, la projection $\mathcal{T}(V) \rightarrow e^{(1)}\mathcal{T}(V)$ s'identifie au quotient $\mathcal{T}(V) \rightarrow Q\mathcal{T}(V)$.

L'assertion (i) est une conséquence du théorème de Milnor-Moore pour les algèbres de Hopf commutative (cf. Paragraphe 4.2.6). Les assertions (ii) et (iii) du théorème sont des cas particuliers de résultats généraux pour les algèbres de Hopf commutative (cf. Paragraphe 4.2.5). L'assertion (iii) peut se déduire du résultat plus précis suivant (cf. [12], [39]) :

4.2.4. Lemme. — *Pour tout élément $u \in \mathcal{T}(V)$, on a la relation*

$$e^{(s)}(u) = \frac{1}{s!} \sum_{(u)} e^{(1)}(u_1^k) \dots e^{(1)}(u_s^k),$$

l'expression $\sum_{(u)} u_1^k \otimes \dots \otimes u_s^k$ représentant le coproduit itéré de u dans la cogèbre tensorielle.

4.2.5. Décomposition en poids et structure des algèbres de Hopf commutatives. — D'après la théorie classique des algèbres de Hopf, si H est une algèbre de Hopf commutative graduée connexe, alors H est une algèbre commutative libre. Par conséquent, si on fixe une section du module des indécomposables de H , soit $V \subset H$, alors on a un isomorphisme d'algèbres $\mathfrak{S}(V) \simeq H$.

Rappelons comment construire une section V naturelle au moyen des idempotents Euleriens. Les idempotents Euleriens $e^{(i)}$, $i \geq 0$ forment une famille d'idempotents orthogonaux de \mathcal{D} , l'algèbre des descentes graduée associée aux groupes symétriques. On a $\mathcal{D} = \prod_{n \geq 0} \mathcal{D}_n$, avec $\mathcal{D}_n \subset \mathbb{Q}[\Sigma_n]$ (cf. [45, Chapitre 9]). En fait, on construit une action de \mathcal{D} sur H au moyen de la structure d'algèbre de Hopf de H (cf. [12], [39]). Pour la cogèbre tensorielle $H = \mathcal{T}(V)$, cette action de l'algèbre des descentes coïncide avec l'action naturelle des permutations sur les tenseurs. Maintenant, comme les idempotents Euleriens $e^{(i)}$, $i \geq 0$, forment une famille d'idempotents orthogonaux dans \mathcal{D} , on a une décomposition naturelle $H = \bigoplus_{i \geq 0} e^{(i)}H$. On appelle $e^{(i)}H$ la composante de poids i de H . La décomposition en

poids vérifie la propriété remarquable suivante : le produit de H préserve le poids et induit un isomorphisme $S_i(e^{(1)}H) \simeq e^{(i)}H$. En corollaire, la composante $e^{(1)}H$ est une section naturelle de QH et engendre H librement. (cf. [12], [39]).

4.2.6. Cogèbres coenveloppantes. — Soit \mathcal{C} une cogèbre coassociative. Soit $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ l'application obtenue par antisymétrisation du coproduit de \mathcal{C} . Cette application est clairement un cocrochet de Lie et on note \mathcal{C}_L la structure de cogèbre de Lie ainsi formée. On dualise la construction de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie pour définir la cogèbre coenveloppante d'une cogèbre de Lie. Ainsi, la cogèbre coenveloppante de Γ , notée $\mathcal{U}^c(\Gamma)$, est caractérisée par la relation d'adjonction

$$\text{Alg}_{\text{As}}^c(\mathcal{U}^c(\Gamma), \mathcal{C}) = \text{Alg}_{\text{Lie}}^c(\Gamma, \mathcal{C}_L).$$

Il se trouve que $\mathcal{U}^c(\Gamma)$ est munie d'une structure d'algèbre de Hopf commutative naturelle.

On dualise le théorème de Milnor-Moore pour reconstituer Γ à partir de la structure d'algèbre de Hopf de $\mathcal{U}^c(\Gamma)$. Soit H une algèbre de Hopf commutative. Le module des indécomposables de H est muni d'une structure de cogèbre de Lie naturelle. Plus précisément, soit $\gamma : H \rightarrow H \otimes H$ le cocrochet obtenu par antisymétrisation du coproduit de H comme ci-dessus. On vérifie que γ passe au quotient et induit un cocrochet de Lie sur QH . Le théorème de Milnor-Moore se dualise comme suit : "La projection naturelle $\mathcal{U}^c(\Gamma) \rightarrow \Gamma$ induit un isomorphisme de cogèbres de Lie $Q\mathcal{U}^c(\Gamma) \simeq \Gamma$ ".

Si Γ est la cogèbre de Lie colibre $\mathcal{L}^c(V)$, alors, par adjonction, la cogèbre coenveloppante $\mathcal{U}^c(\mathcal{L}^c(V))$ s'identifie à la cogèbre tensorielle $\mathcal{T}(V)$. De plus, le produit de $\mathcal{U}^c(\mathcal{L}^c(V))$ s'identifie au produit shuffle de $\mathcal{T}(V)$. En conséquence, on obtient

$$\mathcal{L}^c(V) \simeq Q\mathcal{U}^c(\mathcal{L}^c(V)) \simeq Q\mathcal{T}(V),$$

ce qui démontre l'assertion (i) du théorème.

Références

- [1] J. ALEV & T. LAMBRE — « Comparaison de l'homologie de Hochschild et de l'homologie de Poisson pour une déformation des surfaces de Klein », in *Algebra and operator theory*, Kluwer Acad. Publ., 1998, p. 25–38.

HOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE POISSON

- [2] D. BALAVOINE – « Homology and cohomology with coefficients of an algebra over a quadratic operad », *J. Pure Appl. Algebra* **132** (1998), p. 221–258.
- [3] C. BERGER & I. MOERDIJK – « Axiomatic homotopy theory for operads », *Comment. Math. Helv.* **78** (2003), p. 805–831.
- [4] J. BRACONNIER – « Algèbres de Poisson », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A Math.* **284** (1977), p. 1345–1348.
- [5] J.-L. BRYLINSKI – « A differential complex for Poisson manifolds », *J. Diff. Geometry.* **28** (1988), p. 93–114.
- [6] D. BURGHELEA & M. VIGUÉ-POIRRIER – « Cyclic homology of commutative algebras », *Lecture Notes in Math.*, vol. 1318, p. 51–72, *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, 1988.
- [7] K. T. CHEN – « Integration of paths, geometric invariants and a generalized Baker-Hausdorff formula », *Ann. Math.* **65** (1957), p. 163–178.
- [8] ———, « Iterated path integral », *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), p. 831–879.
- [9] V. G. DRINFELD – « Quantum groups », in *Proc. Int. Congr. Math.*, 1987, p. 798–820.
- [10] ———, « On some unsolved problems in quantum group theory », in *Quantum groups*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 1510, Springer-Verlag, 1992, p. 1–8.
- [11] T. FOX & M. MARKL – « Distributive laws, bialgebras, and cohomology », in *Operads : Proceedings of renaissance conferences*, *Contemp. Math.*, vol. 202, 1997, p. 167–205.
- [12] B. FRESSE – « Algèbre des descentes et cogroupes dans les algèbres sur une opérade », *Bull. Soc. Math. Fr.* **126** (1998), p. 407–433.
- [13] ———, « Homologie de Quillen pour les algèbres de Poisson », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **326** (1998), p. 1053–1058.
- [14] ———, « Structures de Poisson sur une intersection complète à singularités isolées », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **335** (2002), p. 5–10.
- [15] ———, « Koszul duality of operads and homology of partition posets », in *Homotopy theory and its applications*, *Contemp. Math.*, vol. 346, 2004, p. 115–215.

- [16] I. M. GELFAND & I. Y. DORFMAN – « Hamiltonian operators and the classical Yang-Baxter equation », *Funkts. Anal. Prilozh.* **16** (1982), p. 1–9.
- [17] M. GERSTENHABER & S. D. SCHACK – « A Hodge-type decomposition for commutative algebra cohomology », *J. Pure Appl. Algebra* **48** (1987), p. 229–247.
- [18] ———, « The shuffle bialgebra and the cohomology of commutative algebras », *J. Pure Appl. Algebra* **70** (1991), p. 263–272.
- [19] E. GETZLER & J. JONES – « Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces », prépublication arXiv :hep-th/9403055, 1994.
- [20] G. GINOT – « Homologie et modèle minimal des algèbres de Gerstenhaber », *Ann. Math. Blaise Pascal* **11** (2004), p. 95–127.
- [21] V. GINZBURG & D. KALEDIN – « Poisson deformations of symplectic quotient singularities », *Adv. Math.* **186** (2004), p. 1–57.
- [22] V. GINZBURG & M. KAPRANOV – « Koszul duality for operads », *Duke Math. J.* **76** (1995), p. 203–272.
- [23] R. HAIN – « On the indecomposable elements of the bar construction », *Proc. Amer. Math. Soc.* **98** (1986), p. 312–316.
- [24] J. HUEBSCHMANN – « Poisson cohomology and quantization », *J. Reine Angew. Math.* **408** (1990), p. 57–113.
- [25] C. KASSEL – « L’homologie cyclique des algèbres enveloppantes », *Invent. Math.* **91** (1988), p. 221–251.
- [26] M. KONTSEVICH – « Deformation quantization of Poisson manifolds », *Lett. Math. Phys.* **66** (2003), p. 157–216.
- [27] J.-L. KOSZUL – « Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie », in *Elie Cartan et les mathématiques d’aujourd’hui*, Astérisque hors série, 1985, p. 257–271.
- [28] I. S. KRASILSHCHIK – « Hamiltonian cohomology of canonical algebras », *Dokl. Akad. Nauk.* **251** (1980), p. 1306–1309.
- [29] A. LICHNEROWICZ – « Les variétés de Poisson et leurs algèbres de lie associées », *J. Diff. Geometry* **12** (1977), p. 253–300.
- [30] M. LIVERNET – « Homotopie rationnelle des algèbres sur une opérade », Thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1998.
- [31] J.-L. LODAY – « Opérations sur l’homologie cyclique des algèbres commutatives », *Invent. Math.* **96** (1989), p. 205–230.

- [32] ———, *Cyclic homology*, Grund. der Math. Wiss., vol. 301, Springer-Verlag, 1992.
- [33] ———, « Série de Hausdorff, idempotents Euleriens et algèbres de Hopf », *Exposition. Math.* **12** (1994), p. 165–178.
- [34] S. MAC LANE – *Homology*, Grund. der Math. Wiss., vol. 114, Springer-Verlag, 1963.
- [35] M. MARKL – « Distributive laws and Koszulness », *Ann. Inst. Fourier* **46** (1996), p. 307–323.
- [36] M. MARKL, S. SHNIDER & J. STASHEFF – *Operads in algebra, topology and physics*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 96, American Mathematical Society, 2002.
- [37] S.-Q. OH – « Poisson enveloping algebras », *Comm. Algebra* **27** (1999), p. 2181–2186.
- [38] F. PATRAS – « Construction géométrique des idempotents Euleriens. filtration des groupes de polytopes et des groupes d’homologie de Hochschild », *Bull. Soc. Math. Fr.* **119** (1991), p. 173–198.
- [39] ———, « L’algèbre des descentes d’une bigèbre graduée », *J. Algebra* **170** (1994), p. 547–566.
- [40] T. PIRASHVILI – « Hodge decomposition for higher Hochschild homology », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **33** (2000), p. 151–179.
- [41] D. QUILLEN – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Math., vol. 43, Springer-Verlag, 1967.
- [42] ———, « Rational homotopy theory », *Ann. of Math.* **90** (1969), p. 205–295.
- [43] ———, « On the (co)-homology of commutative rings », Proc. Symp. Pure Math., vol. 17, p. 65–87, Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., 1970.
- [44] C. REUTENAUER – « Theorem of Poincaré-Birkhoff-Witt, logarithm and symmetric group representations of degrees equal to Stirling numbers », in *Combinatoire énumérative*, Lecture Notes in Math., vol. 1234, Springer-Verlag, 1986, p. 267–284.
- [45] ———, *Free Lie algebras*, London Math. Soc. Mon., vol. 7, Clarendon Press, 1993.
- [46] G. RINEHART – « Differential forms on general commutative algebras », *Trans. Amer. Math. Soc.* **108** (1963), p. 195–222.

B. FRESSE

- [47] M. SCHLESSINGER & J. STASHEFF – « The Lie algebra structure of tangent cohomology and deformation theory », *J. Pure Appl. Algebra* **38** (1985), p. 313–322.
- [48] D. TAMARKIN – « Another proof of M. Kontsevich formality theorem », prépublication arXiv:math.QA/9803025, 1998.
- [49] I. VAISMAN – *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, Progress in Math., vol. 118, Birkhäuser, 1994.
- [50] M. VIGUÉ-POIRRIER – « Cyclic homology of algebraic hypersurfaces », *J. Pure Appl. Algebra* **72** (1991), p. 95–108.
- [51] ———, « Décompositions de l’homologie cyclique des algèbres différentielles graduées commutatives », *K-theory* **4** (1991), p. 255–267.

BENOIT FRESSE
Laboratoire Painlevé
Université de Lille 1 et CNRS
Cité Scientifique – Bâtiment M2
F-59655 Villeneuve d’Ascq Cedex
France
Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr