ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Salomon Sambou & Souhaibou Sambou

Résolution du $\partial\overline{\partial}$ pour les formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants dans un domaine étoilé strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$

Volume 25, nº 2 (2018), p. 315-326.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2018__25_2_315_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques Blaise Pascal
de l'université Clermont Auvergne, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Annales mathématiques Blaise Pascal **25**, 315-326 (2018)

Résolution du $\partial\overline{\partial}$ pour les formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants dans un domaine étoilé strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$

Salomon Sambou
Souhaibou Sambou

Résumé

On résout le $\partial\overline{\partial}$ pour les formes différentielles admettant une valeur au bord au sens des courants sur Ω qui est un domaine étoilé strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ et sur $\mathbb{C}^n \setminus \overline{\Omega}$, où Ω est un domaine étoilé strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$.

The $\partial\overline{\partial}$-problem for a form with distribution boundary value on a strictly pseudoconvex starry domain Ω of $\mathbb{C}^n$

Abstract

We solve the $\partial\overline{\partial}$-problem for a form with distribution boundary value on a strictly pseudoconvex starry domain Ω of $\mathbb{C}^n$ and on $\mathbb{C}^n \setminus \overline{\Omega}$ where Ω is a strictly pseudoconvex starry domain of $\mathbb{C}^n$.

1. Introduction

La résolution du $\partial\overline{\partial}$ découle de la théorie du pluripotentiel. Cette théorie fut introduite par Lelong et Oka dans les années 1940 et depuis lors elle s'est montrée indispensable dans l'analyse complexe à plusieurs variables.

Les objets principaux dans la théorie sont les fonctions plurisousharmoniques, les courants positifs fermés et l'opérateur de Monge-Ampère. La théorie du pluripotentiel est un outil très puissant en géométrie complexe et son développement et ses applications semblent loin d'être épuisés (voir [7]).

Nous nous proposons ici d'étudier l'équation $\partial\overline{\partial}$ dans le cadre des formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants. La démarche classique dans la résolution du $\partial\overline{\partial}$ est de résoudre l'équation $du = f$ où u et f sont des formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants et ensuite résoudre le ∂ et le $\overline{\partial}$ pour les décompositions de la solution obtenue. L'existence de solution pour l'équation $du = f$ correspond à l'annulation d'un certain groupe de cohomologie de De Rham. Il est donc intéressant de pouvoir avoir des informations pour un domaine donné sur les groupes de cohomologie

Mots-clés : L'opérateur $\partial\overline{\partial}$, Cohomologie de De Rham, Courant prolongeable, Valeur au bord, Formes à croissance polynomiale.
Classification Mathématique (2010) : 32F32.

de De Rham associés. D'autre part une forme différentielle ayant une valeur au bord au sens des courants est un courant prolongeable. Nous allons donc dans un premier temps énoncer des résultats « peut être » déjà connus sur la cohomologie de De Rham. Ces résultats permettent de voir le lien qui existe entre la possibilité de résolution à support exact de l'opérateur d et l'annulation de certains groupes de cohomologie de De Rham du bord $b\Omega$. Nous allons principalement nous situer dans la résolution du $\partial\overline{\partial}$ dans le cas où Ω est un domaine étoilé strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ ou Ω est le complémentaire dans $\mathbb{C}^n$ d'un domaine étoilé strictement pseudoconvexe.

Le travail est organisé de la manière suivante : dans une première partie nous établissons quelques résultats classiques sur la cohomologie de De Rham qui sont une conséquence des suites de Mayer–Vietoris. On obtient ainsi le théorème 2.2, le théorème 2.3 et le théorème 2.4. Ensuite nous résolvons le $\partial\overline{\partial}$ dans le cas où Ω est un domaine étoilé strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$. Et enfin nous terminons ce travail par résoudre le $\partial\overline{\partial}$ dans le cas où Ω est le complémentaire dans $\mathbb{C}^n$ d'un domaine étoilé strictement pseudoconvexe.

On remercie le·la rapporteur·euse de ce papier pour ses remarques sur la forme et le fond, remarques qui nous ont permis de bien améliorer la qualité de ce travail.

Notation 1.1. Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine. Dans cet article, nous désignons par $\check{H}^r(\Omega)$ le $r^{ième}$ groupe de cohomologie de De Rham des courants prolongeables définis sur Ω, $H^r(\Omega)$ le $r^{ième}$ groupe de cohomologie de De Rham des formes différentiables de classe C^∞ définies sur Ω et $H^r(b\Omega)$ le $r^{ième}$ groupe de cohomologie de De Rham des formes différentiables de classe C^∞ définies sur $b\Omega$. Le $r^{ième}$ groupe de cohomologie de De Rham des formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants sur Ω est noté $\tilde{H}^r(\Omega)$.

Définition 1.2. Soient Ω un ouvert relativement compact de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe C^2 et ρ une fonction de classe C^2 à valeurs réelles définie sur un voisinage $U_{b\Omega}$ du bord de Ω telle que $U_{b\Omega} \cap \Omega = \{z \in U_{b\Omega} \mid \rho(z) < 0\}$ et $\mathrm{d}\rho(z) \neq 0$ pour tout $z \in b\Omega$. On dira que Ω est strictement pseudoconvexe si et seulement si

$$\mathcal{L}_{z_0}\rho(\xi) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z_0)\xi_j \bar{\xi}_k > 0$$

pour tout $z_0 \in b\Omega$ et $\xi \in T^{\mathbb{C}}_{z_0}(b\Omega) \setminus \{0\}$ (voir [5]).

Définition 1.3. Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine à bord lisse de classe C^∞ de fonction définissante ρ. Posons $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega \mid \rho(z) < -\varepsilon\}$ où $b\Omega_\varepsilon$ désigne le bord de Ω_ε.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur Ω. On dit que f admet une valeur au bord au sens des distributions, s'il existe une distribution T définie sur le bord $b\Omega$ de Ω telle que pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(b\Omega)$, on ait :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon \mathrm{d}\sigma = \langle T, \varphi\rangle$$

où $\varphi_\varepsilon = i_\varepsilon^*\tilde{\varphi}$ avec $\tilde{\varphi}$ une extension de φ à Ω et $i_\varepsilon : b\Omega_\varepsilon \to \mathbb{C}^n$ l'injection canonique ; $\mathrm{d}\sigma$ désigne l'élément de volume.

Une forme différentielle de classe C^∞ sur Ω admet une valeur au bord au sens des courants si ses coefficients ont une valeur au bord au sens des distributions.

Définition 1.4. On dit qu'une fonction f de classe C^∞ définie sur Ω est à croissance polynomiale d'ordre $N \geq 0$, s'il existe une constante C telle que pour tout $z \in \Omega$, on a :

$$|f(z)| \leq \frac{C}{d(z)^N}$$

où $d(z)$ désigne la distance de z au bord de Ω.

Définition 1.5. Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine. Un courant T défini sur Ω est dit prolongeable s'il existe un courant $\tilde{T}$ défini sur $\mathbb{C}^n$ tel que $\tilde{T}_{|\Omega} = T$.

2. Résolution du d pour les formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants

Les résultats suivants nous seront utiles dans l'élaboration de la démonstration du théorème principal de cette partie.

Proposition 2.1. *Soit Ω un domaine à bord lisse de classe C^∞ et soit f une fonction à croissance polynomiale sur Ω ; alors f admet une valeur au bord au sens des distributions.*

Démonstration. Voir [9, proposition 3.1]. □

Théorème 2.2. *Soit X une variété différentiable de classe C^∞. Pour tout courant T défini sur X, il existe deux opérateurs R et A avec*

$$R : D'^{\bullet}(X) \to \varepsilon^{\bullet}(X) \quad et \quad A : D'^{\bullet}(X) \to D'^{\bullet-1}(X)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(1) *RT est une forme différentielle de classe C^∞.*

(2) *Le support de RT est contenu dans un ε-voisinage du support de T si ε est assez petit.*

(3) *$RT \to T$ et $AT \to 0$ faiblement et fortement quand $\varepsilon \to 0$.*

(4) $T - RT = \mathrm{d}AT + A\mathrm{d}T$.

(5) *A n'augmente pas le support singulier et R est régularisant.*

Démonstration. Voir [5, p. 40]. □

Nous énonçons ici des résultats classiques sur les groupes de cohomologie de De Rham.

Théorème 2.3. *Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné à bord lisse de classe C^∞. Il existe un domaine $\Omega' \subset\subset \mathbb{R}^n$ avec $\Omega \subset\subset \Omega' \subset\subset \mathbb{R}^n$ et tel que l'application restriction de $H^j(\Omega') \to H^j(\Omega)$ soit un isomorphisme pour $j > 1$ et surjective pour $j = 1$.*

Démonstration. C'est une conséquence des suites de Mayer–Vietoris (voir [4, p. 181]). Soit $x_o \in b\Omega$ compact, il existe un voisinage B de x_o dans $\mathbb{R}^n$ avec B contractile et suffisamment petit de sorte que $B \cap \Omega$ soit contractile et $B \cap \Omega^c$ soit contractile (possible car $b\Omega$ est lisse). On note $\varepsilon^r(\Omega)$ l'espace des r-formes différentielles de classe C^∞ sur Ω.

On considère la suite

$$0 \longrightarrow \varepsilon^\bullet(\Omega \cup B) \longrightarrow \varepsilon^\bullet(\Omega) \oplus \varepsilon^\bullet(B) \longrightarrow \varepsilon^\bullet(\Omega \cap B) \longrightarrow 0.$$

Sur le plan cohomologique de De Rham, on a

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(\Omega \cup B) \to H^0(\Omega) \oplus H^0(B) \to H^0(\Omega \cap B) \to H^1(\Omega \cup B) \\ \to H^1(\Omega) \oplus H^1(B) \to H^1(\Omega \cap B) \to \cdots \to H^{n-1}(\Omega \cap B) \to H^n(\Omega \cup B) \\ \to H^n(\Omega) \oplus H^n(B) \to H^n(\Omega \cap B) \to 0. \end{aligned}$$

Pour $j > 1$ on a $j - 1 \geq 1$

$$H^{j-1}(\Omega \cap B) \longrightarrow H^j(\Omega \cup B) \longrightarrow H^j(\Omega) \oplus H^j(B) \longrightarrow H^j(\Omega \cap B) \longrightarrow \cdots$$

Or $H^{j-1}(\Omega \cap B) = 0$, $H^j(B) = 0$ et $H^j(\Omega \cap B) = 0$, alors pour $j > 1$, $H^j(\Omega \cup B) \longrightarrow H^j(\Omega)$ est un isomorphisme et $H^1(\Omega \cup B) \to H^1(\overline{\Omega}) = H^1(\Omega)$ est surjective.

Pour $\Omega \subset \Omega_1 = \Omega \cup B$ on reprend le même processus avec Ω_1 et au bout d'un nombre fini d'étapes $b\Omega$ étant compact on a $\Omega \subset\subset \Omega'$ avec $H^j(\Omega') \to H^j(\overline{\Omega}) = H^j(\Omega)$ est un isomorphisme pour $j > 1$ et surjective pour $j = 1$. □

On peut aussi établir l'analogue du théorème 2.3.

Théorème 2.4. *Soit $\Omega \subset\subset M$ un domaine borné à bord lisse de classe C^∞ d'une variété différentiable M. Si M est contractile et qu'il existe un domaine $\Omega' \subset\subset M$ tel que $\Omega \subset\subset \Omega' \subset\subset M$ et l'application restriction de $H^j(\Omega') \to H^j(\Omega)$ soit un isomorphisme pour $j > 1$ et surjective pour $j = 1$, alors l'application restriction de $H^j(M \setminus \Omega) \to H^j(M \setminus \Omega')$ est un isomorphisme pour $j > 1$ et surjective pour $j = 1$.*

Démonstration. Puisque $\Omega \subset\subset \Omega' \subset\subset M$ alors, $M \setminus \overline{\Omega}' \subset M \setminus \overline{\Omega}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varepsilon^\bullet(M) \arrow[r] \arrow[d, "iden"'] & \varepsilon^\bullet(M \setminus \Omega) \oplus \varepsilon^\bullet(\Omega') \arrow[r] \arrow[d, "rest"'] & \varepsilon^\bullet(\Omega' \setminus \Omega) \arrow[r] \arrow[d, "iden"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varepsilon^\bullet(M) \arrow[r] & \varepsilon^\bullet(M \setminus \Omega') \oplus \varepsilon^\bullet(\Omega) \arrow[r] & \varepsilon^\bullet(\Omega' \setminus \Omega) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sur le plan cohomologie, on a

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(M) \arrow[r] \arrow[d, "iden"'] & H^0(M \setminus \Omega) \oplus H^0(\Omega') \arrow[r] \arrow[d, "rest"'] & H^0(\Omega' \setminus \Omega) \cdots \arrow[r] \arrow[d, "iden"'] & H^n(\Omega' \setminus \Omega) \arrow[r] \arrow[d, "iden"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(M) \arrow[r] & H^0(M \setminus \Omega') \oplus H^0(\Omega) \arrow[r] & H^0(\Omega' \setminus \Omega) \cdots \arrow[r] & H^n(\Omega' \setminus \Omega) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pour $j > 1$, on a

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^{j-1}(\Omega' \setminus \Omega) \arrow[r] \arrow[d] & H^j(M) \arrow[r] \arrow[d] & H^j(M \setminus \Omega) \oplus H^j(\Omega') \arrow[r] \arrow[d] & H^j(\Omega' \setminus \Omega) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
{} \arrow[r] & H^{j-1}(\Omega' \setminus \Omega) \arrow[r] & H^j(M) \arrow[r] & H^j(M \setminus \Omega') \oplus H^j(\Omega) \arrow[r] & H^j(\Omega' \setminus \Omega) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Puisque $H^j(M) = 0$ et $H^{j-1}(\Omega' \setminus \Omega) \to H^{j-1}(\Omega' \setminus \Omega)$ est aussi un isomorphisme pour $j > 1$ alors, d'après le lemme des 4 (ou 5), l'application restriction de $H^j(M \setminus \Omega) \oplus H^j(\Omega') \to H^j(M \setminus \Omega') \oplus H^j(\Omega)$ est un isomorphisme. Puisque $H^j(\Omega') \to H^j(\Omega)$ est un isomorphisme pour $j > 1$ alors $H^j(M \setminus \Omega) \to H^j(M \setminus \Omega')$ est un isomorphisme pour $j > 1$.

Pour $j = 1$, on a

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^0(\Omega' \setminus \Omega) \arrow[r] \arrow[d, "iden"'] & H^1(M) \arrow[r] \arrow[d, "iden"'] & H^1(M \setminus \Omega) \oplus H^1(\Omega') \arrow[r] \arrow[d, "rest"'] & H^1(\Omega' \setminus \Omega) \arrow[r] \arrow[d, "iden"'] & {} \\
{} \arrow[r] & H^0(\Omega' \setminus \Omega) \arrow[r] & H^1(M) \arrow[r] & H^1(M \setminus \Omega') \oplus H^1(\Omega) \arrow[r] & H^1(\Omega' \setminus \Omega) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

L'application restriction de $H^1(M \setminus \Omega) \oplus H^1(\Omega') \to H^1(M \setminus \Omega') \oplus H^1(\Omega)$ est surjective et puisque $H^1(\Omega') \to H^1(\Omega)$ est surjective, alors $H^1(M \setminus \Omega) \to H^1(M \setminus \Omega')$ est surjective. □

Donnons un résultat d'isomorphisme sur les groupes de cohomologie de De Rham :

Théorème 2.5. *Soit Ω un domaine étoilé de $\mathbb{R}^n$ à bord lisse et $\Omega' \supset\supset \Omega$ tel que $H^j(\Omega') = 0$ pour $j \geq 1$. Alors $H^j(\Omega' \setminus \Omega) \to H^j(b\Omega)$ est un isomorphisme pour $j \geq 1$ et $H^n(\Omega' \setminus \Omega) = 0$.*

Démonstration. On a la suite courte exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \varepsilon^\bullet(\Omega') \longrightarrow \varepsilon^\bullet(\Omega' \setminus \Omega) \oplus \varepsilon^\bullet(\overline{\Omega}) \longrightarrow \varepsilon^\bullet(b\Omega) \longrightarrow 0.$$

Sur le plan cohomologie de De Rham, on a

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(\Omega') \to H^0(\Omega' \setminus \Omega) \oplus H^0(\Omega) \to H^0(b\Omega) \to H^1(\Omega') \to H^1(\Omega' \setminus \Omega) \oplus H^1(\Omega) \\ &\to H^1(b\Omega) \to \cdots \to H^{n-1}(b\Omega) \to H^n(\Omega') \to H^n(\Omega' \setminus \Omega) \oplus H^n(\Omega) \to H^n(b\Omega) \to 0. \end{aligned}$$

Puisque $H^j(\Omega') = H^j(\Omega) = 0$ pour $j > 0$, on a les résultats recherchés en remplaçant $H^j(\Omega')$ et $H^j(\Omega)$ par 0 dans la suite longue pour $j \geq 1$. □

On a $H^j(\Omega' \setminus \Omega) \to H^j(b\Omega)$ est un isomorphisme pour $j \geq 1$, alors pour pouvoir résoudre l'équation $du = f$ à support exact sur $\overline{\Omega}$ on a besoin d'avoir l'annulation de $H^j(\Omega' \setminus \Omega)$ pour corriger une solution provenant de l'annulation de $H^{j+1}(\Omega)$. Le théorème 2.5 montre que l'annulation de $H^j(\Omega' \setminus \Omega)$ est équivalente à l'annulation de $H^j(b\Omega)$ avec $1 \leq j \leq n-2$. Nous pensons que c'est une particularité de la cohomologie de De Rham par rapport à la cohomologie de Dolbeault.

Comme conséquence de ce résultat nous avons les résultats suivants :

Théorème 2.6. *Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine étoilé à bord lisse de classe C^∞ avec $H^j(b\Omega)$ trivial pour $1 \leq j \leq 2n-2$. Si f est une r-forme différentielle de classe C^∞ d-fermée admettant une valeur au bord au sens des courants sur Ω, alors il existe une $(r-1)$-forme différentielle g de classe C^∞ sur Ω ayant une valeur au bord au sens des courants telle que $dg = f$.*

Démonstration. D'après [6] si f est une forme différentielle d-fermée ayant une valeur au bord au sens des courants sur Ω alors $[f]$ est un courant prolongeable. Puisque $\overline{\Omega}$ est compact, $[f]$ est d'ordre fini. Il existe un courant F d'ordre m à support compact dans $\overline{\Omega}$ qui prolonge $[f]$. D'après [1], $\check{H}^r(\Omega) = 0$, il existe un courant prolongeable u défini sur Ω tel que d$u = f$. Soit S une extension à support compact dans $\overline{\Omega}$ de u, considérons le courant F défini par $F = dS$ qui est un prolongement de f à support compact dans $\overline{\Omega}$ et d'ordre fini m. D'après la propriété (4) du théorème 2.2, on a $S = RS + A\mathrm{d}S + \mathrm{d}AS$. Or $\mathrm{d}S = F \Rightarrow S = RS + AF + \mathrm{d}AS$ alors $\mathrm{d}S = \mathrm{d}(RS + AF) = F$ donc $(RS + AF)_{|\Omega}$ est une autre solution de l'équation d$u = f$. Or $RS_{|\Omega}$ est une forme différentielle de classe C^∞ à support compact donc admet une valeur au bord au sens des courants. Puisque A n'augmente pas le support singulier, on a si F est de classe C^∞ sur Ω alors AF est aussi de classe C^∞ sur Ω. Donc la solution $RS + AF$ est de classe C^∞ sur Ω. Il reste à montrer que AF admet une valeur au bord au sens des courants sur Ω. Or AF est de même nature que $\langle F, E(x,y)\rangle$ avec

$$E(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log|x-y| & \text{si } n = 2 \\ \frac{1}{(n-2)S_n|x-y|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3 \\ \frac{|x-y|}{2} & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Le noyau de Newton ou la solution élémentaire du laplacien Δ (Voir [5, p. 40]). Nous allons donc montrer que $\langle F, E(x,y)\rangle$ admet une valeur au bord au sens des courants.

Posons $u(x) = \langle F, E(x,y)\rangle$ pour $x \in \Omega$. Soit $x \in \Omega$ et ρ une fonction à support compact sur $B(x, \frac{d(x)}{2})$ comprise entre 0 et 1 qui vaut 1 sur $B(x, \frac{d(x)}{4})$, avec $d(x)$ la distance de x au bord de Ω. On a :

$$u(x) = \langle F, \rho E(x,y)\rangle + \langle F, (1-\rho)E(x,y)\rangle.$$

Posons $u_1(x) = \langle F, \rho E(x,y)\rangle = \int_{y\in\Omega} \rho f \wedge E(x,y)$. $u_1(x)$ est une forme différentielle de classe C^∞ sur $\overline{\Omega}$, donc admet une valeur au bord au sens des courants.

Posons $u_2(x) =< F, (1-\rho)E(x,y) >$. Puisque m est l'ordre du courant F qui prolonge f, on a :

$$\begin{aligned} |u_2(x)| &\leq C\|(1-\rho)E(x,y)\|_{m,\overline{\Omega}} \\ &\leq C\|(1-\rho)E(x,y)\|_{m,\overline{\Omega}\setminus\bar{B}(y,\frac{d(y)}{4})} \\ &\leq \sup_{x\in\overline{\Omega}\setminus\bar{B}(y,\frac{d(y)}{4})} \frac{C'}{|x-y|^{n-2+m}} + \text{des termes moins mauvais} \\ &\leq \sup_{x\in\overline{\Omega}\setminus\bar{B}(y,\frac{d(y)}{4})} \frac{C''}{|x-y|^{n-2+m}} \\ &\leq \frac{C'''}{(d(y))^{n-2+m}}. \end{aligned}$$

Donc u_2 est une forme à croissance polynomiale sur Ω alors elle admet une valeur au bord au sens des courants d'après la proposition 2.1. □

3. Application à la résolution du $\partial\overline{\partial}$ pour les formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants

Tenant compte du théorème 2.6 et des résultats de résolution du $\overline{\partial}$ pour les formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants obtenus dans [9], on obtient le résultat fondamental suivant :

Théorème 3.1. *Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine étoilé strictement pseudoconvexe à bord lisse de classe C^∞ avec $H^j(b\Omega)$ trivial pour $1 \leq j \leq n-2$. Si f est une (p,q)-forme différentielle de classe C^∞, d-fermée admettant une valeur au bord au sens des courants sur Ω avec $1 \leq p \leq n$ et $1 \leq q \leq n$, alors il existe une $(p-1,q-1)$-forme différentielle u de classe C^∞ définie sur Ω ayant une valeur au bord au sens des courants telle que $\partial\overline{\partial}u = f$.*

Démonstration. Soit f une (p,q)-forme différentielle de classe C^∞, d-fermée admettant une valeur au bord au sens des courants sur Ω, alors d'après le théorème 2.6 il existe une $(p+q-1)$-forme différentielle g de classe C^∞ ayant une valeur au bord au sens des courants telle que $dg = f$.

Sans perte de généralité, on peut décomposer g en une $(p-1,q)$-forme différentielle g_1 de classe C^∞ admettant une valeur au bord au sens des courants sur Ω et en une $(p,q-1)$-forme différentielle g_2 de classe C^∞ admettant une valeur au bord au sens des courants sur Ω. On a

$$\mathrm{d}g = \mathrm{d}(g_1 + g_2) = \mathrm{d}g_1 + \mathrm{d}g_2 = f.$$

Comme $\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial}$, on a pour des raisons de bidegré $\bar{\partial}g_1 = 0$, et $\partial g_2 = 0$ alors

$$\partial g_1 + \overline{\partial}g_2 = f.$$

On a besoin du lemme suivant qui est le théorème principal de [9] pour la suite de la démonstration :

Lemme 3.2. *Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine strictement pseudoconvexe à bord lisse de classe C^∞ et soit f une $(0,r)$-forme différentielle de classe C^∞ $\overline{\partial}$-fermée admettant une valeur au bord au sens des courants, $1 \leq r \leq n$. Il existe une $(0,r-1)$-forme différentielle g de classe C^∞ ayant une valeur au bord au sens des courants, telle que $\overline{\partial}g = f$.*

Démonstration du lemme. Elle est identique à la preuve du théorème principal de [9], sauf qu'il faut corriger l'erreur suivante :

Dans leur preuve Sambou et Sané ont dit que puisque $A_\varepsilon T_{|\Omega}$ a une régularité meilleure que celle de T dans un ε-voisinage du support de T alors si $T_{|\Omega}$ est de classe C^∞, $A_\varepsilon T_{|\Omega}$ est donc de classe C^∞ ce qui est incorrect. Il faut plutôt dire, puisque $X = \mathbb{C}^n$, l'opérateur A_ε est modulo un terme lisse l'opérateur K de Bochner- Martinelli et que si f est à support compact dans $\mathbb{C}^n$ et de classe C^k sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}^n$, alors $\langle f, K\rangle$ est de classe $C^{k+\alpha}$ sur $\mathcal{U}$ pour tout $\alpha \in [0,1[$. Donc pour $z \in \Omega$ et ρ une fonction de classe C^∞ à support compact dans Ω qui vaut 1 au voisinage de z. On a

$$K(T) = K((1-\rho)T) + K(\rho T).$$

Puisque $T_{|\Omega} = f$ est de classe C^∞ alors $K(\rho T) = K(\rho f)$ est de classe C^∞ au voisinage de z. $K((1-\rho)T)$ est également de classe C^∞ au voisinage de z car $1-\rho = 0$ au voisinage de z. Ainsi $K(T)$ est de classe C^∞ en tout point $z \in \Omega$. □

D'après le lemme 3.2, il existe une $(p-1, q-1)$-forme différentielle h_1 de classe C^∞ avec une valeur au bord au sens des courants telle que $\overline{\partial} h_1 = g_1$ et une $(p-1, q-1)$-forme différentielle h_2 de classe C^∞ avec une valeur au bord au sens des courants telle que $\partial h_2 = g_2$. On a $\partial\overline{\partial} h_1 + \overline{\partial}\partial h_2 = f$, or $\partial\overline{\partial} = -\overline{\partial}\partial$,

$$\partial\overline{\partial} h_1 - \partial\overline{\partial} h_2 = \partial\overline{\partial}(h_1 - h_2) = f.$$

Posons $u = h_1 - h_2$, u est une $(p-1, q-1)$-forme différentielle de classe C^∞ ayant une valeur au bord au sens des courants définie sur Ω telle que $\partial\overline{\partial} u = f$. □

4. Résolution du $\partial\overline{\partial}$ pour les formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants dans $\mathbb{C}^n \setminus \overline{\Omega}$, où Ω est un domaine étoilé strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$. Dans cette partie il est question de donner l'analogue du théorème 3.1 pour $\Omega = \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$, où $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ est un domaine étoilé strictement pseudoconvexe vérifiant $H^j(bD)$ trivial pour $1 \leq j \leq n-2$. Pour cela commençons par donner l'analogue du théorème principal de [9] pour $\Omega = \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$, où $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ est un domaine étoilé strictement pseudoconvexe. Il s'agit du théorème suivant :

Théorème 4.1. *Soit $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine strictement pseudoconvexe à bord lisse. Posons $\Omega = \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. Soit f une forme différentielle de bidegré $(0, r)$ sur Ω de classe C^∞, $\overline{\partial}$-fermée avec une valeur au bord au sens des courants, $1 \leq r \leq n-2$. Il existe une $(0, r-1)$-forme différentielle g sur Ω de classe C^∞, ayant une valeur au bord au sens des courants telle que $\bar{\partial} g = f$.*

Démonstration. Soit f une forme différentielle de classe C^∞ et $\overline{\partial}$-fermée, admettant une valeur au bord au sens des courants, alors $[f]$ est un courant prolongeable.

Lemme 4.2. *Le courant défini par la forme différentielle f sur Ω noté $[f]$ admet un prolongement F d'ordre fini m.*

Démonstration du lemme. Soit F un prolongement de $[f]$ à $\mathbb{R}^n$. Montrons que F est d'ordre fini.

Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, à support compact telle que $\varphi \equiv 1$ sur $\overline{D}$. $F = \varphi F + (1-\varphi)F$. Puisque $\varphi \equiv 1$ sur $\overline{D}$ et $F = [f]$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$, donc :

$$F = \varphi F + (1-\varphi)[f].$$

φF est à support compact, donc il est d'ordre fini. $(1-\varphi)[f]$ est d'ordre 0 car f est une forme différentielle de classe C^∞ donc continue sur Ω. Donc F est d'ordre fini m. □

Corollaire 4.3. *Le courant prolongeable* $[f]$ *est d'ordre au plus m.*

Tenant compte de [9] et du lemme 3.2, nous avons à résoudre le $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables d'ordre l.

Lemme 4.4. *Soit* $T \in \check{D}_l^{\prime(0,r)}(\Omega) \cap ker\overline{\partial}$, *alors il existe* $S \in \check{D}_l^{\prime(0,r-1)}(\Omega)$ *tel que* $\overline{\partial}S = T$, $1 \leq r \leq n-2$.

Démonstration du lemme 4.4. Elle est identique à la démonstration du théorème 2 de [8]. Il suffit de remplacer les formes différentielles de classe C^∞ à support compact par les formes différentielles de classe C^l à support compact. □

Ainsi $\bar{\partial}S = [f]$ où S est un courant prolongeable d'ordre l. Soit $\check{S}$ un prolongement de S à $\mathbb{C}^n$. D'après la formule du $\overline{\partial}$-homotopie de [3], on a

$$\check{S} = R_\varepsilon\check{S} + A_\varepsilon\overline{\partial}\check{S} + \bar{\partial}A_\varepsilon\check{S}.$$

Posons $S_\varepsilon = R_\varepsilon\check{S} + A_\varepsilon\overline{\partial}\check{S}$. $S_{\varepsilon|\Omega}$ est de classe C^∞ car $R_\varepsilon\check{S}$ est de classe C^∞ et $A_\varepsilon\overline{\partial}\check{S}_{|\Omega}$ a la même régularité que $\overline{\partial}\check{S}_{|\Omega} = f$ sur Ω qui est de classe C^∞. $R_\varepsilon\check{S}$ étant une forme différentielle de classe C^∞ sur $\mathbb{C}^n$, donc $R_\varepsilon\check{S}_{|\Omega}$ admet une valeur au bord au sens des courants. $A_\varepsilon\overline{\partial}\check{S}_{|\Omega}$ admet aussi comme dans le lemme 3.2 une valeur au bord au sens des courants. $S_{\varepsilon|\Omega}$ admet une valeur au bord au sens des courants avec $\bar{\partial}S_{\varepsilon|\Omega} = f$. □

Tenant compte du théorème 4.1, nous avons le théorème suivant :

Théorème 4.5. *Soit* $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ *un domaine étoilé strictement pseudoconvexe à bord lisse de classe* C^∞ *avec* $H^j(bD)$ *trivial pour* $1 \leq j \leq n-2$. *Posons* $\Omega = \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. *Si* f *est une* (p,q)*-forme différentielle de classe* C^∞, *d-fermée et admettant une valeur au bord au sens des courants sur* Ω *avec* $1 \leq p \leq n$ *et* $1 \leq q \leq n$, *alors il existe une* $(p-1, q-1)$*-forme différentielle u de classe* C^∞ *définie sur* Ω *ayant une valeur au bord au sens des courants telle que* $\partial\overline{\partial}u = f$.

Pour faire la preuve du théorème, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.6. *Soit* $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ *un domaine étoilé à bord lisse de classe* C^∞ *avec* $H^j(bD)$ *trivial pour* $1 \leq j \leq 2n-2$. *Posons* $\Omega = \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. *Si* f *est une r-forme différentielle de classe* C^∞, *d-fermée admettant une valeur au bord au sens des courants sur* Ω, *alors il existe une* $(r-1)$*-forme différentielle g de classe* C^∞ *sur* Ω *ayant une valeur au bord au sens des courants telle que* $dg = f$.

Démonstration. Soit f une forme différentielle de classe C^∞, d-fermée ayant une valeur au bord au sens des courants sur Ω, d'après la conséquence du lemme 4.2, $[f]$ est un courant prolongeable d'ordre fini. D'après [2], $\check{H}^j(\Omega) = 0$ pour $2 \le j \le 2n-2$, donc il existe un courant prolongeable u défini sur Ω tel que $du = f$. Soit S un prolongement de u sur $\mathbb{C}^n$ avec $\mathrm{d}S = F$ où F est un prolongement du courant $[f]$ et donc d'ordre fini m. D'après la propriété (4) du théorème 2.2, $S = RS + A\mathrm{d}S + \mathrm{d}AS$. Posons $\check{S} = RS + A\mathrm{d}S$, RS étant une forme différentielle de classe C^∞ sur $\mathbb{C}^n$ donc $RS_{|\Omega}$ admet une valeur au bord au sens des courants. Puisque A n'augmente pas le support singulier donc $AdS_{|\Omega}$ est de classe C^∞ et admet comme dans la démonstration du théorème 2.6 une valeur au bord au sens des courants. $\check{S}_{|\Omega}$ admet aussi une valeur au bord au sens des courants et $\mathrm{d}\check{S}_{|\Omega} = f$. □

Démonstration du théorème 4.5. Soit f une (p,q)-forme différentielle de classe C^∞, d-fermée ayant une valeur au bord au sens des courants sur Ω. D'après le lemme 4.6, il existe une $(p+q-1)$-forme différentielle h de classe C^∞ ayant une valeur au bord au sens des courants telle que $\mathrm{d}h = f$. On a $h = h_1 + h_2$ où h_1 et h_2 sont respectivement une $(p-1,q)$-forme différentielle de classe C^∞ ayant une valeur au bord au sens des courants et une $(p,q-1)$-forme différentielle de classe C^∞ ayant une valeur au bord au sens des courants. On a $\mathrm{d}h = \mathrm{d}h_1 + \mathrm{d}h_2 = f$.

Comme $\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial}$ et pour des raisons de bidegré on a $\partial h_2 = 0$ et $\overline{\partial} h_1 = 0$. D'après le théorème 4.1, $h_1 = \bar{\partial} g_1$ et $h_2 = \partial g_2$ avec g_1 et g_2 des formes différentielles de classe C^∞ ayant une valeur au bord au sens des courants définies sur Ω. On a

$$f = \partial h_1 + \bar{\partial} h_2 = \partial\bar{\partial} g_1 + \overline{\partial}\partial g_2 = \partial\overline{\partial}(g_1 - g_2).$$

Posons $u = g_1 - g_2$, u est une $(p-1, q-1)$-forme différentielle de classe C^∞ ayant une valeur au bord au sens des courants définie sur Ω telle que $\partial\overline{\partial} u = f$. □

Références

[1] Eramane Bodian, Dian Diallo, and Salomon Sambou. Résolution du $\partial\overline{\partial}$ pour les courants prolongeable définis sur la boule euclidienne de $\mathbb{C}^n$. *C. R. Math. Acad. Sci., Soc. R. Can.*, 38(1) :34–37, 2016.

[2] Eramane Bodian, Ibrahima Hamidine, and Salomon Sambou. Résolution du $\partial\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables définis dans un anneau. `https://arxiv.org/abs/1707.03430`, soumis, 2017.

[3] Evgeni M. Chirka. Regularization and $\overline{\partial}$-homotopie on a complex manifold. *Sov. Math., Dokl.*, 20 :73–76, 1979.

[4] Claude Godbillon. *Éléments de topologie algébrique*. Hermann, 1971.

[5] Christine Laurent-Thiébaut. *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables*. Savoirs Actuels. CNRS Éditions ; Masson, 1997.

[6] Stanisław Łojasiewicz and Giuseppe Tomassini. Valeurs au bord des formes holomorphes. In *Several complex variables (Cortona, 1976–77)*, volume IX of *Scuola Normale Superiore*, pages 222–246. Editrice Tecnico Scientifica, 1978.

[7] Lucas Kaufmann Sacchetto. *Dynamique holomorphe, théorie du pluripotentiel et applications*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI (France), 2016.

[8] Salomon Sambou. Résolution du $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables définis dans un anneau. *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math*, 11(1) :105–129, 2002.

[9] Salomon Sambou and Mansour Sané. Résolution du $\overline{\partial}$ pour les formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants dans un domaine strictement pseudoconvexe. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 18(2) :323–331, 2011.

Salomon Sambou
Laboratoire de Mathématiques et Applications
Université Assane Seck de Ziguinchor
BP: 523, Senegal
ssambou@univ-zig.sn

Souhaibou Sambou
Laboratoire de Mathématiques et Applications
Université Assane Seck de Ziguinchor
BP: 523, Senegal
sambousouhaibou@yahoo.fr