Journées

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Évian-les-Bains, 5 juin–9 juin 2006

Didier Bresch et Benoît Desjardins

Sur la théorie globale des équations de Navier-Stokes compressible

J. É. D. P. (2006), Exposé n° III, 26 p.

<http://jedp.cedram.org/item?id=JEDP_2006____A3_0>

Journées *Équations aux dérivées partielles*
Évian-les-Bains, 5 juin–9 juin 2006
GDR 2434 (CNRS)

Sur la théorie globale des équations de Navier-Stokes compressible

Didier Bresch Benoît Desjardins

Résumé

Le but de cet article est de présenter quelques résultats mathématiques plus ou moins récents sur la théorie de l'existence globale en temps (solutions faibles et solutions fortes) pour les équations de Navier-Stokes compressibles en dimension supérieure ou égale à deux sans aucune hypothèse de symétrie sur le domaine et sans aucune hypothèse sur la taille des données initiales.

1. Introduction

Un fluide compressible conducteur de chaleur est gouverné par les équations de la mécanique suivantes

$$\partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \tag{1}$$
$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u\otimes u) = \operatorname{div}\sigma + \rho f, \tag{2}$$
$$\partial_t(\rho E) + \operatorname{div}(\rho u H) = \operatorname{div}((\sigma - pI)\cdot u) + \operatorname{div}(\kappa\nabla\theta) + \rho f\cdot u, \tag{3}$$
$$E = e + \frac{|u|^2}{2}, \quad H = h + \frac{|u|^2}{2}, \quad h = e + \frac{p}{\rho},$$

où $u \in \mathbb{R}^d$ désigne le vecteur vitesse du fluide, ρ la densité, κ le coefficient de conductivité thermique, σ le tenseur des contraintes, p la pression, e l'énergie interne spécifique et h l'enthalpie spécifique. L'énergie totale spécifique est notée E et l'enthalpie spécifique associée H. Enfin, les forces extérieures sont donnés par le champ de vecteur f. Les équations (1) (2) et (3) expriment respectivement la conservation de la masse, du moment et de l'énergie totale. Afin de fermer le système, deux ingrédients supplémentaire sont alors nécessaires. Tout d'abord, le fluide est supposé Newtonien, de telle sorte qu'il existe deux coefficients de viscosité μ et λ tels que

$$\sigma = 2\mu D(u) + (\lambda \operatorname{div} u - p)\,\mathbf{I}, \tag{4}$$

où $D(u)$ désigne le tenseur des taux de déformation, défini comme partie symétrique du gradient de vitesse ∇u. Comme deuxième condition, une loi thermodynamique

MSC 2000 : 35Q30.
Mots-clés : Équations de Navier-Stokes compressibles, existence globale, explosion, solutions faibles, solutions fortes, viscosités constantes, viscosités non constantes, fluides barotropes, fluides conducteurs de chaleur.

de fermeture donne la pression p et l'énergie interne e comme fonctions de la densité ρ et de la température θ

$$p = \mathcal{P}(\rho, \theta) \quad \text{et} \quad e = \mathcal{E}(\rho, \theta). \tag{5}$$

Afin d'être consistant avec le second principe de la thermodynamique, qui implique l'existence de l'entropie comme une forme différentielle fermée, la condition de compatibilité appelée "équation de Maxwell" entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$ doit satisfaire

$$\mathcal{P}(\rho, \theta) = \rho^2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho}\Big|_\theta + \theta \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta}\Big|_\rho. \tag{6}$$

L'entropie $s = \mathcal{S}(\rho, e)$ est d éfinier à une constante additive près par

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial e}\Big|_\rho = \frac{1}{\theta} \quad \text{and} \quad \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \rho}\Big|_\theta = -\frac{p}{\rho^2 \theta}, \tag{7}$$

Une autre hypothèse importante sur la fonction d'entropie est faite

$$\text{l'entropie} \quad \mathcal{S} \quad \text{est une fonction concave de} \quad (\rho^{-1}, e). \tag{8}$$

La propriété (8) assure en particulier la positivité du coefficient C_v donné par

$$C_v = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta}\Big|_\rho = -\frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial e^2}\Big|_\rho^{-1}.$$

Le système (1)(2)(3) est complété avec des conditions initiales

$$\rho|_{t=0} = \rho_0, \qquad \rho u|_{t=0} = m_0, \qquad \rho E|_{t=0} = G_0 + \frac{|m_0|^2}{2\rho_0}. \tag{9}$$

Les fonctions ρ_0, m_0, et G_0 sont supposées satisfaire

$$\rho_0 \geq 0 \ \text{ p.p. sur } \ \Omega, \quad \text{et} \quad \frac{|m_0|^2}{\rho_0} = 0 \quad \text{p.p. sur} \quad \{x \in \Omega \,/\, \rho_0(x) = 0\}, \tag{10}$$

et G_0 doit être pris tel que

$$G_0(x) \in \overline{\rho_0(x)\mathcal{E}(\rho_0(x), \mathbb{R}_+)} \ \text{ pour p.p. } x \in \Omega, \tag{11}$$

ce qui permet de définir la température initiale θ_0 sur $\{x \in \Omega \,/\, \rho_0(x) \neq 0\}$, qui est supposée être positive

$$\theta_0(x) = \mathcal{E}(\rho_0(x), \cdot)^{-1}\Big(\Big\{G_0(x)/\rho_0(x)\Big\}\Big) \geq 0 \ \text{ p.p. sur } \{x \in \Omega \,/\, \rho_0(x) \neq 0\}. \tag{12}$$

Le papier est constitué de trois parties. Dans la première partie, nous présentons les résultats d'existence globale de solutions faibles tout d'abord pour les fluides compressibles barotropes puis pour les fluides conducteurs de chaleur. La deuxième partie sera consacrée au seul résultat, à notre connaissance, sur l'existence globale d'une solution forte en dimension deux d'espace et la dernière partie présentera les contre-exemples dûs à Vaigant, Desjardins et Xin sur l'existence globale de solutions classiques. Malheureusement ces contre-exemples utilisent soit une densité initiale à support compact, soit une force extérieure singulière pour faire exploser la solution en temps fini. La question de l'existence globale d'un solution classique globale reste donc encore ouverte pour une densité initiale loin du vide et une force extérieure régulière. Nous ne donnerons aucun résultat sur des systèmes couplant les équations de Navier–Stokes compressibles avec évolution d'un champ magnétique, présence de réactions chimiques, etc....

2. Solutions faibles

2.1. Equations de Navier–Stokes pour un fluide compressible barotrope

Lorsque l'écoulement est compressible et barotrope (c'est à dire que sa loi de pression ne dépend que de la densité), même l'existence globale de solutions en dimension d'espace supérieure ou égale à deux est longtemps restée sans réponse. Il existe une vaste littérature sur cette question dans laquelle de nombreux auteurs, A. Matsumura et T. Nishida, D. Hoff, D. Serre, A.V. Weigant, A. Kazhikhov, V. V. Shelukhin et R. Danchin pour n'en citer que quelques uns, ont apporté des réponses partielles sous diverses contraintes plus ou moins restrictives sur les données initiales (régularité, petitesse) ou sur les coefficients de viscosité (dépendance très particulière de λ par rapport à la densité et μ constant).

Le cas des viscosités constantes. La première approche rigoureuse de ce problème dans toute sa généralité est due en 1993 à Pierre–Louis Lions (1956–..) dans le cas des équations de Navier-Stokes compressibles en régime isentropique (*i.e.* lorsque la loi d'état du fluide reliant la pression p à la densité ρ est du type $p = a\rho^\gamma$ où a est une constante strictement positive et γ est la constante obtenue par le rapport entre la chaleur spécifique à pression constante et la chaleur spécifique à volume constant, constante dite adiabatique). Dans ses travaux, Pierre–Louis Lions a présenté une théorie complète permettant d'obtenir des résultats d'existence de solutions faibles globales en dimension d'espace supérieure ou égale à 2, et ce pour des données initiales générales. On parle alors de solutions à La Leray comme extension au cas compressible de solutions construites pour la première fois par J. Leray en 1933 pour les équations de Navier-Stokes incompressible. Notons que les ingrédients de P.–L. Lions puisent leurs sources dans les travaux de D. Hoff ([25]) et D. Serre [44] sur l'importance du flux visqueux effectif sur la stabilité, les travaux de R. Coifman, Y. Meyer (*cf* [13]) pour les propriétés de régularité liés aux commutateurs et les travaux de R.J. Di-Perna et P.-L. Lions (*cf.* [17]) sur les propriétés de l'équation de transport linéaire. En ce qui concerne l'importance du flux effectif en mécanique des fluides, le lecteur est également renvoyé à [18], [45].

Nous allons ici nous inspirer de [41] pour présenter dans une approche heuristique les arguments de compacité de P.–L. Lions et les comparer à ceux d'E. Feireisl qui a amélioré les puissances γ considérées dans ces résultats d'existence. Notons que pour la construction des solutions approchées, une régularisation parabolique de l'équation de la masse et un rajout de terme de pression sont effectués. Nous en esquisserons le système régularisé en fin de sous-section.

Les équations de Navier—Stokes, modélisant l'évolution de la densité ρ et de la vitesse u d'un fluide compressible en régime barotrope occupant une région bornée tridimensionnelle Ω, s'écrivent

$$\partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0, \tag{13}$$

$$\partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) - \mu\Delta u - (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div} u + a\nabla\rho^\gamma = \rho f. \tag{14}$$

La première équation (13), communément appelée équation de continuité, provient du principe de conservation de la masse, tandis que la deuxième équation (13), communément appelée équation de quantité de mouvement, provient à elle, du principe de conservation de la quantité de mouvement.

Lorsque ρ et u sont régulières et satisfont l'équation de continuité, pour toute fonction $b \in \mathcal{C}^1([0,\infty))$, il est clair qu'elles sont également solutions de l'équation de continuité dite "renormalisée", cette terminologie provenant de la théorie du transport de R.J. DIPERNA et P.–L. LIONS. Cette équation s'écrit

$$\partial_t b(\rho) + \mathrm{div}(b(\rho)u) + (b'(\rho)\rho - b(\rho))\mathrm{div}u = 0. \tag{15}$$

Pour un temps $T \in (0,\infty)$, des forces f et des données initiales ρ_0 et m_0 satisfaisant certaines hypothèses techniques, on dira que le couple de fonctions (ρ, u) est une solution faible renormalisée à énergie bornée des équations s'il possède les propriété suivantes : $\rho \in L^\infty(0,T;L^\gamma(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0([0,T], L^\gamma_{\text{faible}}(\Omega))$, $\rho \geq 0$ p.p. dans Ω, $\rho|_{t=0} = \rho_0$ p.p. dans Ω, $u \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$, $\rho|u|^2 \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ et $\rho u \in \mathcal{C}^0([0,T];L^{2\gamma/(\gamma+1)}(\Omega)_{\text{faible}})$ et $(\rho u)|_{t=0} = m_0$ p.p. dans Ω ; si le prolongement par zéro de (ρ,u) dans $(0,T)\times\mathbb{R}^3\backslash\Omega$ est solution dans $\mathcal{D}'((0,T)\times\Omega)$; si p.p. $\tau \in (0,T)$, (ρ,u) satisfait l'inégalité d'énergie

$$E(\rho,u)(\tau) + \int_0^\tau \int_\Omega (\mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|\mathrm{div}u|^2) \leq E_0 + \int_0^\tau \int_\Omega \rho f \cdot u$$

et $b(\rho)$ satisfait (15) pour b avec certaines propriétés de croissance. Dans cette inégalité,

$$E(\rho,u)(\tau) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \frac{a\rho^\gamma}{\gamma-1}\right)(\tau)$$

désigne l'énergie totale au temps τ et

$$E_0 = \int_\Omega \left(\frac{|m_0|^2}{2\rho_0} + \frac{a\rho_0^\gamma}{\gamma-1}\right)$$

désigne l'énergie totale initiale.

La théorie développée par P.–L. LIONS pour démontrer l'existence de solutions faibles renormalisées à énergie bornée fait apparaître une limitation sur les valeurs autorisées pour la constante adiabatique γ, à savoir $\gamma \geq 9/5$ en dimension 3. Récemment E. FEIREISL a généralisé cette approche pour pouvoir traiter les valeurs $\gamma > 3/2$ en dimension 3 et plus généralement $\gamma > d/2$ où d désigne la dimension d'espace. Nous allons ici nous borner à faire comprendre les différentes lignes.

La technique est de construire une suite de solutions approchées sur un système proche de celui considéré par théorèmes de point fixe, approximations de type Faedo-Galerkin. Ceci se fait en introduisant un, voir plusieurs paramètres, puis en modifiant le système d'origine de telle sorte que les solutions approchées du système obtenu tendent vers une solution du système d'origine lorsque le, voire les paramètres en question tendent vers leur valeur critique. Cette méthode fait continuellement apparaître le problème de compacité d'un ensemble borné de solutions approchées.

Notons qu'avec un bon choix de multiplicateur, que pour $\gamma > d/2$, il est possible d'établir l'estimation clef suivante sur la densité

$$\int_0^\infty dt \int_\Omega \rho^q \leq C(R,T) \text{ pour } q = \left(1+\frac{2}{d}\right)\gamma - 1.$$

Théorème 2.1. *Si $\gamma > d/2$, si $\rho_0 \in L^\gamma(\Omega)$ et $|m_0|^2/\rho_0 \in L^1(\Omega)$ alors il existe une solution globale faible (ρ,u) des équations de Navier–Stokes compressibles barotropes.*

Le couple (ρ^n, u^n) satisfaisant l'estimation

$$\rho^n \to \rho \text{ dans } L^\gamma \text{ faible}, \qquad u^n \to u \text{ dans } L^2(0,T;H^1_0(\Omega)) \text{ faible}.$$

La présence de la viscosité $-\nu\Delta u-(\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div} u$ implique de la régularité en espace sur la vitesse. En fait, il n'y a donc plus de phénomène de compactification et (ρ, u) peut ne pas être solution. La viscosité régularise la vitesse et donc empêche les chocs et donc préserve les oscillations en densité qui peuvent se propager. Malgré tout, si $\rho_0^n \to \rho_0$ dans $L^1(\Omega)$ alors

$$\rho^n \to \rho \text{ dans } \mathcal{C}([0,T]; L^1(\Omega)) \text{ pour tout } T \in (0, \infty).$$

On peux montrer que la différence entre convergence forte et convergence faible décroit en temps.

$$\beta(\rho^n)[(\lambda+2\mu)\mathrm{div} u^n - a(\rho^n)^\gamma] \to \overline{\beta}[(\lambda+2\mu)\mathrm{div} u - a\overline{\rho^\gamma}]$$

et β est une fonction $\mathcal{C}^0$ arbitraire sur $[0,\infty)$ avec une croissance à l'infini suffisamment faible.

Tout d'abord, de l'inégalité d'énergie dans laquelle ρ_n, u_n, $E_{0,n}$ et 0 remplacent ρ, u, E_0 et f et g, il résulte que

$$\|\rho_n\|_{L^\infty(0,T;L^\gamma(\Omega))} + \|u_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\rho_n|u_n|^2\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leq c(T, E_{0,n}).$$

En accord avec ces bornes, il existe des fonctions ρ et u telles que, modulo l'extraction de sous-suites et lorque $n \to +\infty$, on a

$$\rho_n \to \rho \text{ dans } L^\infty(0,T; L^\gamma(\Omega)) \text{ faible}*, \quad u_n \to u \text{ dans } L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible.}$$

Ceci rend possible le passage à la limite $n \to +\infty$ dans l'équation de continuité et dans tous les termes qui apparaîssent dans l'équation de quantité mouvement, excepté dans le terme de pression $p(\rho_n) = a\rho_n^\gamma$. En effet, pour s'assurer que celui-ci converge vers $p(\rho) = a\rho^\gamma$, il est nécessaire d'avoir plus d'informations, comme par exemple la convergence $\rho_n \to \rho$ dans $L^1((0,T)\times\Omega)$.

Dans un premier temps, pour éviter que la limite de la suite $a\rho_n^\gamma$ ne soit une mesure, il est intéressant de posséder davantage d'information sur ρ_n. Pour cela on teste formellement l'équation de quantité de mouvement par

$$\varphi = \mathcal{B}\left(\rho_n^\theta - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \rho_n^\theta\right),$$

où $\mathcal{B}$ est l'opérateur de Bogovskii sur Ω (un inverse de l'opérateur de divergence) et $0<\theta<\gamma$. Après calculs, on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega \rho_n^{\gamma+\theta} \leq C(T, \Omega, E_{0,n}), \qquad \theta = \frac{2}{3}\gamma - 1. \tag{16}$$

Cette observation est due à P.–L. Lions qui l'a obtenue d'une autre manière. Il faut noter que pour la démontrer, on a besoin de savoir que (ρ_n, u_n) est une solution de l'équation de continuité renormalisée dans laquelle $b(s) = s^\theta$.

Observons également que l'hypothèse de régularité du domaine Ω est étroitement liée à l'utilisation de l'opérateur de Bogovskii qui n'est pas défini si Ω ne possède pas la régularité minimale d'avoir une frontière Lipschitzienne. Le lecture est renvoyé à [2] et [23] pour propriétés de l'opérateur $\mathcal{B}$. Évidemment, une estimation locale du type précédent suffit á assurer que la pression limite n'est pas une mesure. À l'aide de (16), il est alors possible de préciser certaines convergences, notamment que modulo l'extraction de sous-suites et lorsque $n \to +\infty$, on a

$$\rho_n \to \rho \text{ dans } \mathcal{C}^0([0,T], L^\gamma_{\text{faible}}(\Omega)), \tag{17}$$

$$\rho_n^\gamma \to \overline{\rho^\gamma} \text{ dans } L^{(\gamma+\theta)/\gamma}((0,T)\times\Omega) \text{ faible}, \tag{18}$$

$$\rho_n u_n \to \rho u \text{ dans } (\mathcal{C}^0([0,T]; L^{2\gamma/(\gamma+1)}_{\text{faible}}(\Omega)), \tag{19}$$

$$\rho_n u_n^i u_n^j \to \rho u^i u^j \text{ dans } \mathcal{D}'((0,T)\times\Omega), \quad i,j = 1,2,3. \tag{20}$$

Notons la convergence des termes non linéaires qui proviennent de la convergence forte de ρ_n déduite notamment de l'estimation uniforme sur $\partial_t \rho_n$ donnée par l'équation de la masse et de la convergence forte de $\sqrt{\rho_n} u_n$ déduite notamment de l'estimation uniforme sur $\partial_t(\rho_n u_n)$ donnée par l'équation de quantité de mouvement. En conséquence, les prolongements par zéro dans $(0,T)\times\mathbb{R}^3/\Omega$ des fonctions ρ, u et $\overline{\rho^\gamma}$ encore notées ρ, u et $\overline{\rho^\gamma}$ satisfont les équations

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) + 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^3), \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u \\ + a\nabla\overline{\rho^\gamma} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'((0,T)\times\Omega).\end{aligned} \tag{22}$$

La difficulté qui consiste à prouver que (ρ, u) est une solution faible renormalisée à énergie bornée reste entière et réside principalement dans la démonstration de $\overline{\rho^\gamma} = \rho^\gamma$ p.p. dans $(0,T)\times\Omega)$. Ceci recquiert une forme de compacité de la suite des densités $\{\rho_n\}_{n\in N^*}$ qui n'est pas disponible au vu des seules estimations. C'est une observation de P.–L. Lions qui va combler cette lacune. Celle-ci fait état de la chose suivante : la suite des quantités $\{a\rho_n^\gamma - (\lambda+2\mu)\operatorname{div} u_n\}_{n\in N^*}$, couramment appelée suite des flux visqueux effectifs ou suite des pressions effectives, possède une certaine forme de compacité faible : propriété identifiée antérieurement en dimension 1 par D. Hoff et D. Serre.

Plus exactement, on a le théorème suivant

Théorème 2.2. *Pour toute fonction $b \in \mathcal{C}^1([0,\infty))$ satisfaisant certaines conditions de croissance à l'infini, on a*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_0^T\int_\Omega (a\rho_n^\gamma & - (2\mu+\lambda)\operatorname{div} u_n) b(\rho_n)\varphi\, dxdt \\ &= \int_0^T\int_\Omega (a\overline{\rho^\gamma} - (2\mu+\lambda)\operatorname{div} u)\overline{b(\rho)}\varphi\, dxdt\end{aligned} \tag{23}$$

où les quantités surmontées d'une barre désignent les limites faibles des suites correspondantes.

Jusque là, rien ne différencie réellement les approches de P.–L. Lions et E. Feireisl. En effet, ce dernier aura besoin d'une version semblable au théorème précédent

Théorème 2.3. *Pour toute fonction $b \in \mathcal{C}^1([0,\infty))$ et tout $k > 0$, si l'on note b_k la fonction définie par $b_k(s) = b(s)$ si $s \in [0,k)$ et $b_k(s) = b(k)$ si $s \in [k,+\infty)$, alors*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_\Omega & (a\rho_n^\gamma - (\lambda+2\mu)\operatorname{div} u_n) b_k(\rho_n)\varphi\, dxdt \\ &= \int_0^T\int_\Omega (a\overline{\rho^\gamma} - (\lambda+2\mu)\operatorname{div} u)\overline{b_k(\rho)}\varphi\, dxdt\end{aligned} \tag{24}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}((0,T)\times\Omega)$.

Que ce soit P.–L. Lions ou E. Feireisl, tous deux ont ensuite respectivement utilisé cette compacité faible avec $b(s) = s$. En réalité, le premier a avoir fait cette observation, à l'aide d'une écriture de chaque intégrale faisant apparaître des commutateurs, est D. Serre en dimension un d'espace. En dimension supérieure d'espace, la preuve de P.–L. Lions est basée sur des résultats d'analyse harmonique de R. Coifman et Y. Meyer et tient compte des observations de D. Serre. La preuve de E. Feireisl est, quant à elle, basée sur le lemme div-rot de la théorie de la compacité par compensation introduite par F. Murat et L. Tartar (voir [39] et [48]) et sur l'écriture de chaque intégrale faisant apparaître un autre commutateur.

Voyons tout d'abord comment P.–L. Lions a conclu à la convergence forte de la suite des densités $\{\rho_n\}_{n\in N^*}$ vers ρ. Pour somplifier la présentation, supposons $s(\gamma) > \gamma + 1$ c'est-à-dire $\gamma > 3$. Au vu de l'estimation sur ρ, il est clair que $\rho \in L^2((0,T) \times \Omega)$ si $\gamma \geq 9/5$. Dans ce cas, la théorie du transport de R.J. DiPerna et P.–L. Lions s'applique à l'équation de continuité pour garantir la validité de l'équation renormalisée. Alors si $b(s) = s \ln s$, le passage à la limite $n \to +\infty$ dans l'équation satisfaite par ρ_n, u_n, l'équation renormalisée et l'identité de compacité faible permettent l'obtention d'une équation d'évolution pour l'amplitude des oscillations de la suite des densités mesurées par $\{\overline{\rho \ln \rho} - \rho \ln \rho\}$. Celle-ci s'écrit

$$\begin{aligned} \partial_t(\overline{\rho \ln \rho} - \rho \ln \rho) \qquad &+\mathrm{div}((\overline{\rho \ln \rho} - \rho \ln \rho)u) \\ &= \frac{a}{2\mu + \lambda}(\overline{\rho^\gamma}\rho - \overline{\rho^{\gamma+1}}) \text{ dans } \mathcal{D}'((0,T) \times \mathbb{R}^3). \end{aligned} \tag{25}$$

L'intégration formelle de cette équation sur $(0,T)\times\Omega$, la monotonie de la pression $p(\rho) = a\rho^\gamma$ et la convexité de la fonction $s \mapsto s \ln s$, $s \geq 0$, impliquent que $\overline{\rho \ln \rho} = \rho \ln \rho$ p.p. dans $(0,T) \times \Omega$. Autrement dit, la convergence faible commute avec la fonction strictement convexe, ce qui est totalement équivalent à la convergence forte de la suite des densités $\{\rho_n\}_{n\in N^*}$ vers ρ dans $L^1((0,T) \times \Omega)$ et achève la preuve du théorème dans le cas $\gamma > 3$.

Précisons dans ce qui suit où résident les améliorations apportées par E. Feireisl, permettant de traiter les valeurs γ pour lesquelles $\gamma < s(\gamma) \leq \gamma + 1$, *i.e.* $\gamma \in (3/2, 3]$. Pour cet intervalle de valeurs, on n'est pas toujours assuré que ρ soit de carré intégrable. En conséquence, il n'est pas possible d'appliquer directement la théorie du transport de R.J. DiPerna et P.–L. Lions. Ce manque d'information a été comblé par E. Feireisl en remarquant qu'il était possible de contrôler l'amplitude des oscillations de densité pour une norme L^p, avec p supérieur à 2, par le résultat suivant

Théorème 2.4. *Considérons $\{\rho_n\}_{n\in N}$ la suite de solutions approchées et ρ une limite faible alors*

$$\mathrm{osc}_{\gamma+1}[\rho_n - \rho] = \sup_{k>0} \limsup_{n\to+\infty} \|T_k(\rho_n) - T_k(\rho)\|_{L^{\gamma+1}(\Omega)} \leq c(T, \Omega, E_{0,n})$$

où $T_k(z) = kT(z/k)$ pour $k \geq 1$ avec $T \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ une fonction paire telle que $T(z) = z$ pour $0 \leq z \leq 1$, $T(z) = 2$ pour $z \geq 3$ et T concave sur $[0, \infty)$.

La démonstration de ce résultat utilise le théorème de compacité faible. Noter également que celle-ci ne nécessite en aucun cas l'estimation sur les densités. Ce résultat doit être perçu de la manière suivante : bien que les valeurs γ appartiennent à $(3/2, 9/5)$, même si la suite des densités $\{\rho_n\}_{n\in N^*}$ est seulement bornée dans

$L^{\gamma+\theta}((0,T)\times\Omega)$, l'amplitude de ses oscillations, mesurée par le membre de gauche du théorème précédent l'est toujours dans un espace meilleur que $L^2((0,T)\times\Omega)$. Cette propriété va ensuite se substituer à l'information manquante $\rho\in L^2((0,T)\times\Omega)$ et permettre de démontrer, en particulier, que, pour les valeurs $\gamma\in(3/2,9/5)$, le couple (ρ,u) est une solution de l'équation renormalisée sur la masse.

Pour conclure E. FEIREISL a adapté les arguments de la fin d'approche de P.–L. LIONS présentée plus haut. Disons simplement qu'il a utilisé une fonction $b(s) = L_k(s)$ telle que $sL_k'(s) - L_k(s) = T_k(s)$ et $L_k(s)\to s\ln s$ quand $k\to\infty$ à la place de $b(s) = s\ln s$ pour récupérer $\overline{\rho\ln\rho} = \rho\ln\rho$ p.p. dans $(0,T)\times\Omega$. D'où la fin de la preuve.

Donnons maintenant à titre indicatif le modèle approché nécessaire à la construction de la suite de solutions. Il s'écrit ainsi :

$$\partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho u) - \varepsilon\Delta\rho = 0, \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u\otimes u) - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla\mathrm{div}u&\\ +a\nabla\rho^\gamma + \delta\nabla\rho^\beta + \varepsilon\nabla\rho\cdot\nabla u = \rho f.&\end{aligned} \tag{27}$$

avec un paramètre β suffisamment grand, et avec comme condition aux bords supplémentaire $\partial_n\rho = 0$ sur la densité.

Les étapes de démonstration sont alors les suivantes : existence globale de solutions faibles sur le modèle ci-dessus par méthode de Galerkin, passage à la limite quand ε tend vers 0 puis passage à la limite quand δ tend vers 0. Notons que l'on a ajouté le terme $a\nabla\rho^\beta$, pour β grand, dans le système approché pour effectuer le passage à la limite dans le terme $\varepsilon\nabla\rho\cdot\nabla u$ dans l'approximation de Galerkin. Le premier passage à la limite $\varepsilon\to 0$ utilisera les arguments de P.–L. LIONS car la densité sera alors suffisamment intégrable alors que la dernière étape nécessitera le travail d'E. FEIREISL dans le cas où $3/2<\gamma<9/5$.

Remarquons que la construction de solutions faibles pour Navier-Stokes compressible barotrope utilise fortement l'approximation par une suite de solutions telles que $(\rho_n, m_n)|_{t=0} = (\rho_0^n, m_0^n)$. La suite de densité initiale $\{\rho_0^n\}_n$ est construite telle qu'elle converge fortement dans $L^1(\Omega)$ vers la donnée initiale de départ ρ_0.

Il est important de savoir qu'une suite de solutions pour lesquelles les densités oscilleraient de plus en plus fort pourraît converger vers une paire (ρ,u) qui ne soit pas solution des équations de Navier-Stokes compressibles classiques. L'étude des effets d'oscillations en densité a, par exemple, été étudié rigoureusement par D. SERRE, *cf.* [43], dans le cas unidimensionnel. Le cas multidimensionnel ayant été étudié formellement. À la lumière des travaux de P.–L. LIONS et E. FEIREISL, M. HILLAIRET, *cf.* [24], a récemment donné une preuve rigoureuse à ces calculs formels multidimensionnels en étudiant le problème de Cauchy associé au système homogénéisé qui en résulte.

Pour finir cette section, nous indiquons de nouveau le très bon livre de A. NOVOTNY et I. STRASKARBA, *cf.* [41] pour un exposé assez complet sur la théorie mathématique des écoulements compressibles dans le cas isentropique. On y trouvera notamment énormément de résultats originaux dus à l'école tchèque : cas stationnaire, cas non borné, domaines extérieurs, conditions aux bords de type entrée-sortie, *etc...*

Le cas de viscosités anisotropes ou non constantes. Il est important de remarquer que les deux démonstrations de P.–L. LIONS et d'E. FEIREISL utilisent fortement que les viscosités μ et λ sont constantes. Elle utilise également fortement une diffusion isotrope dans toutes les directions en espace.

Que se passe-t-il, par exemple, si les viscosités dépendent de la densité ? C'est-à-dire si l'on considère un opérateur de diffusion du type

$$-2\mathrm{div}(\mu(\rho)D(u)) - \nabla(\lambda(\rho)\mathrm{div}u),$$

avec $D(u) = (\nabla u + {}^t\nabla u)/2$?

Que se passe-t-il également si l'on considère une viscosité anisotrope comme cela est fait par exemple en océanographie sur les équations de Navier-Stokes incompressible ? C'est-à dire avec un opérateur du type

$$-\Delta_\mu u - \widetilde{\lambda}\nabla\mathrm{div}u,$$

où $\nabla_\mu = (\mu\partial_x, \mu\partial_y, \mu_z\partial_z)$, $\mu_z \neq \mu$ et $\widetilde{\lambda} \geq -\min(\mu, \mu_z)$.

Concernant la dépendance des viscosités par rapport à la densité, nous y reviendrons en fin de cette section. Un résultat d'existence globale de solutions faibles dans le cas anisotrope semble quant à lui loin d'être obtenu. Une tentative, infructueuse, a pourtant été menée par les auteurs en collaboration avec D. Gérard-Varet, *cf.* [9]. La ligne d'échec est en particulier la suivante. Si l'on essaie de suivre la démonstration de P.–L. Lions, on est alors amené à l'égalité suivante

$$\overline{\rho\mathrm{div}u} = \overline{\rho}\mathrm{div}\overline{u} + \overline{\rho(A_\mu\Delta)\rho^\gamma} - \overline{\rho}\overline{(A_\mu\Delta)\rho^\gamma}$$

avec $A_\mu = (\Delta_\mu + \widetilde{\lambda}\Delta)^{-1}$ au lieu de

$$\overline{\rho\mathrm{div}u} = \overline{\rho}\mathrm{div}\overline{u} + \overline{\rho^{\gamma+1}} - \overline{\rho}\overline{\rho^\gamma}$$

comme c'est le cas normalement. Dans le dernier cas, on peut alors utiliser la convexité de $x \mapsto x^{\gamma+1}$ pour conclure que $\overline{\rho\mathrm{div}u} \geq \overline{\rho}\mathrm{div}\overline{u}$. Dans le premier cas, le dernier terme du membre de droite ne semble pas avoir de signe. Il ne semble donc pas possible de conclure.

Pour finir, dans le même ordre d'idée, on peut également se poser la question naturelle suivante : pour quelles équations de type fluides compressibles non newtoniens est-il possible d'établir un résultat d'existence globale de solutions faibles ? La réponse ne semble pas triviale, tout au moins pour les auteurs. Il existe pourtant des résultats sur certaines fluides compressibles non-newtoniens. Dans les fluides multipolaires, le tenseur des contraintes dépend du gradient de la vitesse mais également des gradients d'ordre supérieur jusqu'à l'ordre $2k-1$. On parle alors de fluides k polaires. On peut alors utiliser les informations de régularité *a priori* supplémentaires obtenues sur la vitesse pour obtenir un résultat d'existence globale de solutions faibles. Le lecteur intéressé est par exemple renvoyé aux travaux de S. Matusu-Necasova, M. Medvidova-Lukacova pour les fluides bipolaires, *cf.* [38]. On consultera également les travaux de A. Mamontov sur les fluides de type puissance dans [34], [35]. On trouvera également un résultat sur les équations de Navier-Stokes sans pression avec un tenseur de diffusion de la forme puissance par le même auteur. D'autres travaux ont été réalisés récemment sur les fluides compressibles de type Bingham en dimension 1 par I. Basov et V. Shelukhin, *cf.* [1]. Une étude en dimension supérieure serait intéressante car il s'agit là d'un fluide à seuil.

Le cas de viscosités dépendant de la densité. Dans [5], une nouvelle entropie mathématique, que l'on nommera BD entropie, a été découverte dans le cas d'un domaine périodique et d'un domaine entier. Plus précisemment, on montre que si

$$\lambda(\rho) = 2(\mu'(\rho)\rho - \mu(\rho)) \tag{28}$$

alors l'égalité suivante est satisfaite

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\rho|u + 2\nabla\varphi(\rho)|^2 + 2\pi(\rho)) + \int_\Omega \frac{p'(\rho)\mu'(\rho)}{\rho}|\nabla\rho|^2 + \int_\Omega \mu(\rho)|A(u)|^2 = 0,$$

où $A(u) = (\nabla u - {}^t\nabla u)/2$ et $\rho\varphi'(\rho) = \mu'(\rho)$. Pour le lecteur, nous rappelons ici une démonstration simple donnée dans [10]. Cette nouvelle égalité sera la clef pour une démonstration d'existence globale de solutions faibles constituée des deux étapes standarts : stabilité et contruction de solutions régulières approchées.

Preuve de la BD entropie. En utilisant l'équation de la masse on sait que pour toute fonction régulière $\xi(\cdot)$

$$\partial_t\nabla\xi(\rho) + u\cdot\nabla\nabla\xi(\rho) + \nabla u\cdot\nabla\xi(\rho) + \nabla(\rho\xi'(\rho)\mathrm{div}u) = 0.$$

Alors, en utilisant de nouveau l'équation de la masse, on voit que $v = \nabla\xi(\rho)$ satisfait :

$$\partial_t(\rho v) + \mathrm{div}(\rho u\otimes v) + \rho\nabla u\cdot\nabla\xi(\rho) + \rho\nabla(\rho\xi'(\rho)\mathrm{div}u) = 0$$

qui donne, en utilisant l'équation de conservation de la quantité de mouvement,

$$\begin{aligned}\partial_t(\rho(u+v)) + \mathrm{div}\,(\rho u\otimes(u+v)) - \mathrm{div}\,(2\mu(\rho)D(u)) - \nabla(\lambda(\rho)\mathrm{div}\,u)\\ +\nabla p(\rho) + \rho\nabla u\cdot\nabla\xi(\rho) + \rho\nabla(\rho\xi'(\rho)\mathrm{div}\,u) = 0\end{aligned}$$

On écrit ensuite le terme diffusif sous la forme :

$$-2\mathrm{div}(\mu(\rho)D(u)) = -2\mathrm{div}(\mu A(u)) - 2\nabla u\cdot\nabla\mu - 2\nabla(\mu\mathrm{div}u) + 2\nabla\mu\mathrm{divu}$$

où $A(u) = (\nabla u - {}^t\nabla u)/2$. Dès lors, l'équation sur $u+v$ s'écrit

$$\begin{aligned}\partial_t(\rho(u+v)) + \mathrm{div}(\rho u\otimes(u+v)) - 2\mathrm{div}(\mu(\rho)A(u))\\ -2\mu'(\rho)\nabla u\cdot\nabla\rho - 2\nabla(\mu(\rho)\mathrm{div}u) + 2\mu'(\rho)\nabla\rho\mathrm{div}u + \nabla p(\rho)\\ -\nabla(\lambda(\rho)\mathrm{div}u) + \rho\xi'(\rho)\nabla u\cdot\nabla\rho\\ +\nabla(\rho^2\xi'(\rho)\mathrm{div}u) - \rho\xi'(\rho)\nabla\rho\mathrm{div}u = 0.\end{aligned} \tag{29}$$

Cette équation peut être simplifiée sous la forme

$$\begin{aligned}\partial_t(\rho(u+v)) + \mathrm{div}(\rho u\otimes(u+v)) - 2\mathrm{div}(\mu(\rho)A(u)) + \nabla p(\rho)\\ +\nabla((\rho^2\xi'(\rho) - 2\mu - \lambda)\mathrm{div}u) + (\rho\xi'(\rho) - 2\mu'(\rho))\nabla u\cdot\nabla\rho\\ +(2\mu'(\rho) - \rho\xi'(\rho))\nabla\rho\,\mathrm{div}u = 0\end{aligned} \tag{30}$$

Si l'on choisit ξ tel que $2\mu'(\rho) = \xi'(\rho)\rho$, alors $\lambda = \xi'(\rho)\rho^2 - 2\mu$ et les trois derniers termes s'annulent en donnant :

$$\partial_t(\rho(u+v)) + div(\rho u\otimes(u+v)) - \mathrm{div}(\mu(\rho)A(u)) + \nabla p(\rho) = 0.$$

En multipliant cette équation par $(u+v)$ et l'équation de la masse par $|u+v|^2/2$ et en additionnant les résultats, on obtient facilement la BD entropie. On a juste à observer que

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\mu(\rho)A(u))\cdot v = 0$$

car v est un gradient. Le terme $\nabla p(\rho)$ donne

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla p(\rho)\cdot(u+v) &= \int_\Omega \rho\nabla\pi'(\rho)\cdot u + \int_\Omega \frac{p'(\rho)\mu'(\rho)}{\rho}|\nabla\rho|^2 \\ &= \frac{d}{dt}\int_\Omega \pi(\rho) + \int_\Omega \frac{p'(\rho)\mu'(\rho)}{\rho}|\nabla\rho|^2 \end{aligned} \tag{31}$$

où $\pi(\rho) = \rho\int_{\overline{\rho}}^{\rho} p(s)/s^2 ds$ avec $\overline{\rho}$ une densité constante de référence.

On remarque que la nouvelle entropie mathématique donne plusieurs informations supplémentaires sur ρ, à savoir

$$\mu'(\rho)\nabla\rho/\sqrt{\rho} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \qquad \sqrt{\frac{p'(\rho)\mu'(\rho)}{\rho}}\nabla\rho \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

en supposant une pression croissante et $\mu'(\rho_0)\nabla\rho_0/\sqrt{\rho_0} \in L^2(\Omega)$ initialement.

Remarque. Supposons que la viscosité μ soit donnée par $\mu(\rho) = \nu\rho$. La quantité $\nu\nabla\rho/\rho$ joue alors un rôle important pour l'obtention de la BD entropie. Cette quantité est connue, depuis A. Einstein, comme étant la vitesse qui est requis pour contre-balancer les effets osmotiques. Le lecteur est renvoyé à [40] page 16 et chapitre 13.

Contrainte de dégénerescence sur les viscosités. Rappelons que l'égalité formelle d'énergie est donnée par

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega(\rho|u|^2 + 2\pi(\rho)) + 2\int_\Omega \mu(\rho)|D(u)|^2 + \int_\Omega \lambda(\rho)|\mathrm{div}u|^2 = 0.$$

On ne peut supposer que $\mu \in \mathcal{C}^1(0,+\infty)$ strictement croissant et

$$\mu(s) \geq 0, \qquad \lambda(s) \geq 0$$

avec la relation algébrique (28). En effet ceci donne On écrit alors

$$\mu(\rho)|D(u)|^2 + \lambda(\rho)|\mathrm{div}u|^2 = \mu(\rho)|D(u) - (\mathrm{div}u/d)\mathrm{Id}|^2 + (\lambda(\rho + 2\mu(\rho)/2)|\mathrm{div}u|^2.$$

On demande alors à μ et λ de satisfaire

$$\lambda(\rho) + 2\mu(\rho)/2 \geq 0, \qquad \mu(\rho) \geq 0.$$

Remarquons que si $\mu(\rho) = \rho^\alpha$, alors

$$d\lambda(\rho) + 2\mu(\rho) = 2(d\alpha - d + 1)\rho^\alpha$$

et donc, on obtient la contrainte

$$\alpha \geq (d-1)/d.$$

Stabilité. Notons que la BD entropie donne beaucoup plus d'information sur ρ, que dans le cas de viscosités constantes, mais moins d'information sur u de par la dégénerescence de $\mu(\rho)$. Il va donc falloir montrer que l'on gagne beaucoup plus que l'on ne perd. En fait, il semble nécessaire tout de même de considérer soit un terme de pression raide au voisinage de zéro, soit un terme de traînée supplémentaire commr $\rho|u|u$ pour pouvoir conclure à la stabilité et pouvoir également construire une suite de solutions régulières approchées.

Notons l'article récent de A. Mellet et A. Vasseur, [37], où un résultat de stabilité concernant les écoulements barotropes est obtenu pour $\gamma > 1$ et en toute dimension d'espace entre 1 et 3. Ce résultat utilise d'une part la nouvelle entropie mathématique découverte dans [5] mais également un multiplicateur adéquat pour mieux contrôler $\sqrt{\rho}u$ et pouvoir passer à la limite sans avoir recours aux termes de traînée utilisés dans [4] par exemple. Le problème est qu'il ne semble pas possible de construire une suite de solutions régulières approchées satisfaisant ces estimations.

Donnons à titre d'indication le système approché proposé dans [7] qui utilise fortement l'effet régularisant d'un terme de capillairité. Ce terme ne semble pas compatible avec le multiplicateur proposé dans [37].

Construction d'une suite de solutions régulières. La BD entropie est assez sensible à toute perturbation notamment sur l'équation de conservation de la masse. On ne peut pas, *a priori*, utiliser la perturbation habituelle de l'équation de conservation de la masse

$$\partial_t \rho_\epsilon + \mathrm{div}(\rho_\epsilon u_\epsilon) - \epsilon \Delta \rho_\epsilon = 0.$$

Nous allons alors utiliser une régularisation sur l'équation des moments en utilisant des termes de capillarité. Plus précisemment, on utilise le systèm approché suivant

$$\partial_t \rho_{\epsilon,\eta} + \mathrm{div}(\rho_{\epsilon,\eta}) = 0, \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\partial_t \rho_{\epsilon,\eta} &+ \mathrm{div}(\rho_{\epsilon,\eta} u_{\epsilon,\eta} \otimes u_{\epsilon,\eta}) + \nabla p(\rho_{\epsilon,\eta}) + \epsilon \nabla p(\rho_{\epsilon,\eta}) + \epsilon \rho_{\epsilon,\eta} \nabla \Delta^{2s+1} \rho_{\epsilon,\eta} \\ &+ \eta \Delta^2 u_{\epsilon,\eta} - 2\mathrm{div}(\mu(\rho_{\epsilon,\eta}) D(u_{\epsilon,\eta})) - \nabla(\lambda(\rho_{\epsilon,\eta}) \mathrm{div} u_{\epsilon,\eta}) = 0\end{aligned} \tag{33}$$

Cas d'un domaine borné. Notons qu'un domaine borné peut être considéré avec de bonnes conditions aux bords pour étendre les résultats de [4] et ainsi utiliser une variante adéquate de la BD entropie. Le lecteur est renvoyé à [9] pour plus de détail. Les conditions aux bords considérés sont de deux types :

– Condition de type Dirichlet :

$$\rho u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \mu(\rho) \nabla \varphi(\rho) \times n|_{\partial\Omega} = 0,$$

– Condition de type Navier :

$$\rho u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \;\; \mu(\rho)\Big(D(u)n\Big)_{\mathrm{tang}}|_{\partial\Omega} = -\alpha \mu(\rho) u_{\mathrm{tan}}|_{\partial\Omega}, \;\; \mu(\rho) \nabla \varphi(\rho) \times n|_{\partial\Omega} = 0,$$

où g_{tang} désigne la composante tangentielle d'un champ de vecteurs g au bord de Ω.

2.2. Navier–Stokes compressible avec température

Depuis les travaux fondateurs de P.–L. Lions sur les équations de Navier–Stokes compressibles avec coefficients de viscosité constants, les modèles compressibles barotropes ont été abondamment étudiés. L'amélioration principale sur l'existence de solutions faibles a d'ailleurs été celle de E. Feireisl concernant les coefficients de γ et les classes de pression considérées. La compréhension des modèles compressibles complets avec équation d'évolution sur la température, elle, est nettement moins avancée.

La principale difficulté dans la construction de solutions globales faibles "à la Leray" de ce système fortement non linéaire provient du manque d'estimations *a priori*. En effet, dans le cas par exemple du gaz parfait, les seules estimations a priori disponibles semblent être : ρ, $\rho|u|^2$, $\rho\theta$ et $\rho \log \rho$ bornés dans $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ et $\kappa(\rho, \theta)\theta^{-2}|\nabla\theta|^2$ et $|D(u)|^2/\theta$ bornés dans $L^1((0, T) \times \Omega)$. Ces bornes ne sont pas suffisantes pour construire des solutions faibles et, en fait, elles ne sont même pas suffisantes pour donner un sens à l'équation d'énergie elle-même car $u(\rho|u|^2/2+\rho e+p) = u(\rho|u|^2/2(r+C_v)\rho\theta)$ ne semble alors pas être intégrable.

La question du caractère globalement bien posé du système précédent est l'un des grands défis depuis la fin de siècle dernier. L'existence locale de solution régulière et forte a été obtenu par V.A. Solonnikov, et A. Tani. L'existence globale pour données proche de l'équilibre a, elle, été obtenu pour la première fois par A. Matsumura et T. Nishida (voir [36]), amélioré ensuite par D. Hoff, *cf.* [28] en considérant des données initiales discontinues et étendu récemment à des données dans des espaces critiques par R. Danchin dans [15]. Concernant l'existence globale, dans le cas général, seuls des résultats partiels sont disponibles, voir [19] et [20], [4]. Nous allons dans les trois parties suivantes présenter les démonstrations et points techniques de ces approches.

Viscosités constantes. Dans ce papier remarquable, l'existence de "solutions variationnelles" est obtenue pour des lois de pression particulières, données par $p(\rho,\theta) = p_e(\rho)+\theta p_\theta(\rho)$ avec un comportement spécifique à l'infini pour p_e, et des restrictions sur la croissance de p_θ, qui doit croître plus lentement que la pression à "température zéro" p_e. Cette relation constitutive implique que l'énergie interne spécifique e peut être décomposé comme une somme $e = e_c(\rho)+e(\theta)$. Remarquons que la loi de pression pour les gaz parfaits ne satisfait pas les conditions données par les auteurs, même pour des densités grandes. En fait, la méthode utilisée dans [19], [20] exploite fortement le rôle dominant de la pression barotrope p_c, même loin du vide, pour obtenir un résultat d'existence. Cette hypothèse restrictive empêche de traiter les situations communément rencontrées dans les applications pratiques. De plus, dans [19], l'équation d'énergie est satisfaite seulement comme une inégalité (ce qui justifie la notion de "solutions variationnelles") ce qui ne semble pas satisfaisant d'un point de vue physique, même si le second principe de la Thermodynamique est préservé.

Donnons le résultat d'E. Feireisl. Supposons $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2,3$ un domaine borné de classe $\mathcal{C}^{2+\varepsilon}$. Supposons que la pression est formée de deux parties comme indiqué pécédemment avec

$$\begin{aligned}
&p_e(0) = 0, \quad p_e'(\rho) \geq a_1\rho^{\gamma-1} - b \text{ pour } \rho > 0, && (34)\\
&p_e(\rho) \leq a_2\rho^\gamma + b \text{ pour } \rho \geq 0, && (35)\\
&p_\theta(0) = 0, \quad p_\theta'(\rho) \geq 0 \text{ pour } \rho > 0, && (36)\\
&p_\theta(\rho) \leq c(1+\rho^\beta),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
&\gamma > \frac{d}{2}, && (37)\\
&\beta < \frac{\gamma}{2} \text{ pour } d = 2, \quad \beta = \frac{\gamma}{3} \text{ pour } d = 3,
\end{aligned}$$

et a_1, a_2, b, c sont des constantes. On suppose également le coefficient de condutivité $\kappa(\theta)$ de la forme

$$\underline{\kappa}(1+\theta^\alpha) \leq \kappa(\theta) \leq \overline{\kappa}(1+\theta^\alpha), \quad \underline{\kappa} > 0,$$

avec $\alpha \geq 2$. On suppose d'autre part que les coefficients de viscosité μ et λ sont continuement différentiable en θ avec les conditions suivantes

$$0 < \underline{\mu} \leq \mu(\theta) \leq \overline{\mu}, \quad |\lambda(\theta)| \leq \overline{\lambda}, \quad \lambda,\mu \text{ globalement Lipschitz sur } [0,\infty).$$

On suppose enfin qu'il existe deux constantes $\underline{c_v}$ et $\overline{c_v}$ telles que

$$0 < \underline{c_v} \leq e'(\theta) \leq \overline{c_v}.$$

Théorème 2.5. *Supposons que les données initiales* (ρ_0, m_0, G_0) *satisfont* (10) *et* (11) *Alors le problème possède au moins un solution variationnelle* ρ, u, θ *sur* $(0,T)$ *telle que*

$$\rho \in L^\infty(0,T; L^\gamma(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T]; L^1(\Omega)), \tag{38}$$

$$u \in L^2(0,T; (W^{1,2}(\Omega)^d), \quad \rho u \in \mathcal{C}([0,T]; L^{2\gamma/(\gamma+1)}_{\text{faible}}(\Omega)) \tag{39}$$

$$D(u) \in L^2(0,T; (L^2(\Omega))^{d\times d}), \tag{40}$$

$$\theta \in L^{\alpha+1}((0,T)\times\Omega), \rho e(\theta) \in L^\infty(0,T; L^1(\Omega)),$$

et

$$\theta p_\theta(\theta) \in L^2((0,T)\times\Omega), \quad \rho e(\theta) u \in L^1((0,T)\times\Omega).$$

Estimations a priori. On montre que $\rho \geq 0$ comme limite de solution régulière et méthode des caractéristiques sur équation de conservation de la masse. On montre que $\theta \geq 0$ par principe du maximum. La conservation de l'énergie totale donne

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e(\rho)\right) dx.$$

Ce contrôle donne les informations suivantes : $\rho \in L^\infty(0,T; L^\gamma)$, $\quad \sqrt{\rho} u \in L^\infty(0,T; L^2)$ et $\rho Q(\theta) \in L^\infty L^1$. et $\rho u \in L^\infty(0,T; L^{2\gamma/(\gamma+1)}(\Omega))$. Notons que la pression froide $p_c(\rho)$ est dominé par $\rho e_c(\rho)$ par propriété de des fonctions qui satisfont la Δ_2 condition. Ceci donne le contrôle de ρ dans L^γ.

La caractéristique des fluides avec conductivité de chaleur est léchange entre l'énergie cinétique et lénergie interne. on obtient alors peu d'information de l'inégalité sur l'énergie totale. Il faut alors rechercher plus d'informations notamment via l'entropie. Plus précisemment, on a

$$\int_0^\tau \int_\Omega \left(\frac{S:\nabla u}{\theta} + \frac{\kappa(\theta)|\nabla\theta|^2}{\theta^2}\right) = \int_\Omega \rho(\tau)s(\tau) - \int_\Omega \rho(0)s(0).$$

On utilise alors

$$|\rho p_\theta(\rho)| \leq c(1 + \rho P_e(\rho)) \text{ pour } c > 0.$$

Multipliant par $\theta^{-\omega}$ avec $0 < \omega \leq 1$, on obtient

$$\log\theta \in L^2((0,T)\times\Omega), \qquad \theta^{\frac{(\alpha+1-\omega)}{2}} \in L^2(0,T; L^2(\Omega)), \quad e(\theta) \in L^\infty(0,T; L^1(\Omega)).$$

Ces bornes *a priori* conduisent au fait que $\theta p_\theta(\rho)$ est borné dans $L^2(Q_T)$. Il reste à examiner $p_e(\rho)$, que l'on décompose en deux parties, l'une convexe avec p_c, òu $p_c(\rho) \geq a\rho^\gamma$ et l'autre croissante, p_m. Alors,

$$\mathrm{Osc}_{\gamma+1}[\rho_n \to \rho](O) \leq C(|O|) < +\infty$$

pour tout borné $O \subset Q_T$.

Pour la consruction d'une suite de solutions régulière approchée, on utilise le méthode de type Faedo Galerkin sur le système suivant

$$\partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho u) - \varepsilon\Delta\rho = 0, \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u\otimes u) - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla\mathrm{div}u \\ +a\nabla\rho^\gamma + \delta\nabla\rho^\beta + \varepsilon\nabla\rho\cdot\nabla u = \rho f\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\partial_t((\rho+\delta)e(\theta)) + \mathrm{div}(\rho e(\theta)u) - \Delta\kappa(\theta) + \delta\theta^{\alpha+1} \\ = (1-\delta)S:\nabla u - \theta p_\theta \mathrm{div}u\end{aligned} \tag{43}$$

avec

$$\rho|_{t=0} = \rho_0, \quad (\rho u)|_{t=0} = m_0, \quad (\delta+\rho)e(\theta)|_{t=0} = (\delta+\rho_0)e(\theta_{0,\delta}) \tag{44}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \nabla\rho\cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \quad \nabla\theta\cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{45}$$

On procède ensuite au passage à la limite sur la viscosité artificielle ($\epsilon \to 0$) et ensuite au passage à la limite sur le coefficient devant la pression artificielle ($\delta \to 0$). Remarquons qu'une inégalité sur l'énergie est seulement obtenue car on ne possède qu'un convergence faible sur la température.

Viscosités dépendant de la température. Il y a eu très récemment une extension récente, très interessante, obtenue dans [20], où le cas de viscosités dépendant de la température est considéré. Ce travail est le seul résultat avec une telle dépendance importante pour les applications physiques. Nous avons vu dans les cas de coefficients constants qu'une quantité qui joue un rôle très important pour montrer que si initiialement la densité ne comporte pas d'oscillations, il en sera de même pour tout temps est le flux effectif

$$F = (\lambda+2\mu)\mathrm{div}u - p.$$

L'astuce revient alors formellement à prendre la divergence de l'équation qui fait apparaître ΔF et ensuite donc d'inverser le laplacien pour obtenir un certaine compacité faible. Si les coefficients sont variables, alors les choses se compliquent fortement car pour pouvoir faire apparaître ΔF, il va falloir estimer les commutateurs. Si les coefficients dépendent seulement de la température, on peut espérer contrôler ces termes de part la propriété de conduction de chaleur. S'ils dépendent de la densité et surtout si μ dépends de la densité alors les démonstrations de type P.–L. Lions, E. Feireisl semblent inopérantes. Nous verrons dans la prochaine section, que le cas de viscosités dépendant seulement de la densité a trouvé une réponse dans des travaux récents des auteurs. Une compatibilité algébrique sera pourtant demandée entre les coefficients λ et μ et une nouvelle entropie mathématique sera alors nécessaire.

Pour le lecteur rappelons, une variante du lemme de commutation de Coifman et Meyer [13] qui est utilisé dans [20] pour permettre aux coefficients de viscosité de dépendre de la température. On notera $\mathcal{R}_{i,j}$ l'opérateur de Riesz standart

$$\mathcal{R}_{i,j} = \partial_i\mathcal{A}_j$$

où

$$\mathcal{A}_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad j=1,2,3, \quad \mathcal{A}_j(g) = -\mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{i\xi_j}{|\xi|^2}\mathcal{F}(g)\Big]$$

où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier et $\mathcal{F}^{-1}$ son inverse. On a la propriété suivante

Lemme 2.6. *Soit*

$$V \in L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d), \quad w \in W^{1,r}(\mathbb{R}^d), \quad r > \frac{2d}{d+2}.$$

Alors il existe des constantes $c = c(r) > 0$, $\omega = \omega(r) \in (0, +\infty)$, $\quad p = p(r) > 1$ telles que

$$\|\mathcal{R}_{i,j}[wV_j] - w\mathcal{R}_{i,j}[V_j]\|_{W^{\omega,p}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)} \leq c\|w\|_{W^{1,r}(\mathbb{R}^d)}\|V\|_{L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)}, \quad i = 1, ..., d.$$

Il est alors possible de montrer que

$$\mathcal{R}_{i,j}[\varphi\mu(\theta^\epsilon)\partial_j u_i^\epsilon] - \varphi\mu(\theta^\epsilon)\mathcal{R}_{i,j}[\partial_j u_i^\epsilon] \\ \to \mathcal{R}_{i,j}[\varphi\mu(\theta)\partial_j u_i^\epsilon] - \varphi\mu(\theta)\mathcal{R}_{i,j}[\partial_j u_i]$$

faiblement dans $L^p(0, T; W^{\omega,p}(\Omega))$ pour un certain $\omega > 1$ et $p > 1$. C'est ce résultat qui va permettre d'étendre le résultat d'existence globale à viscosités constantes décrit dans la section précédente au cas de viscosités dépendant seulement de la température. Une dépendance en densité n'est pas possible par le même procédé par manque d'information sur la densité.

Viscosités dépendant de la densité.
Cette partie correspond à une note aux comptes rendus de l'Académie des Sciences et à un papier écrit par les auteurs *cf.* [6]. On présente un résultat de stabilité de solutions régulière approchées. Nous renvoyons le lecteur à [4] pour le détail de preuve. Le schéma de construction des suites de solutions régulières approchées est donnée dans [7]. Le lecteur est renvoyé au cas barotrope pour voir le type de système régularisé considéré. Grâce à cette construction, nous obtenons le premier résultat d'existence globale de solutions faibles sur le modèle complet de Navier–Stokes. Dans le cas d'un domaine entier ou périodique, des travaux récents, *cf.* [4], ont, pourtant, permis de montrer qu'il est possible d'obtenir l'analogue de la théorie de Pierre–Louis Lions pour les équations de Navier–Stokes compressible complètes avec conduction de chaleur sous des hypothèses de compatibilité entre les viscosités λ et μ. Cette hypothèse de compatibilité permet, notamment, d'obtenir l'information manquante sur ρ, u, θ pour conclure à l'intégrabilité de chaque terme non linéaire de l'équation d'énergie.

Ce résultat d'existence globale de solutions "à la Leray" peut être vu comme une première réponse partielle à un problème complètement ouvert, sur les équations de Navier–Stokes compressible complètes, décrit dans le livre de P.–L. Lions [31].

Dans le résultat de [4], des solutions faibles classiques "à la Leray" sont obtenues (des solutions des équations de Navier–Stokes au sens des distributions). Pour cela, les coefficients de viscosité λ et μ sont supposés être respectivement des fonctions $C^0(\mathbb{R}_+^*)$ and $C^0(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\mathbb{R}_+^*)$ de la densité seulement, telles que les contraintes suivantes sont satisfaites pour toute densité positive ρ : Il existe trois constantes positives c_0, c_1, A, tels que, pour tout $\tau > 0$,

$$\lambda(\tau) = 2(\tau\mu'(\tau) - \mu(\tau)), \tag{46}$$

$$\forall \tau < A, \quad \mu(\tau) \geq c_0\tau^n \text{ et } 3\lambda(\tau) + 2\mu(\tau) \geq c_0\tau^n, \tag{47}$$

$$\forall \tau \geq A, \quad c_1\tau^m \leq \mu(\tau) \leq \frac{\tau^m}{c_1} \text{ et } c_1\tau^m \leq 3\lambda(\tau) + 2\mu(\tau) \leq \frac{\tau^m}{c_1} \tag{48}$$

avec $n \in (2/3, 1)$ et $m > 1$. Rappelons que l'hypothèse (46) a été introduite dans [5] dans le cadre de fluides barotropes. L'extension à des coefficients de viscosité dépendant de la densité et de la température, qui permettrait par exemple de couvrir le cas de la loi de Sutherland malheureusement reste hors de portée des résultats présentés. On remarque également que l'hypothèse faite sur les coefficients ne couvrent ni le cas des coefficients constants, ni celui découvert par V.A. VEIGANT et A.V. KAZHIKHOV dont nous parlerons dans la partie solution forte. Dans le cas de viscosités constantes, il est important de remarquer que l'on obtient aucun caractère diffusif du système de part le signe opposé de μ et λ.

On suppose également que le coefficient de conductivité thermique κ satisfait

$$\kappa(\rho, \theta) = \kappa_0(\rho, \theta)(\rho + 1)(\theta^a + 1), \tag{49}$$

avec $a \geq 2$ où κ_0 est une fonction $C^0(\mathbb{R}_+^2)$ telle que pour toute densité positive ρ

$$c_3 \leq \kappa_0(\rho, \theta) \leq \frac{1}{c_3}, \tag{50}$$

pour une constante positive c_3.

On suppose également que l'équation d'état est celle d'un gaz parfait polytropique du type :

$$p = r\rho\theta + p_c(\rho), \qquad e = C_v\theta + e_c(\rho), \tag{51}$$

où r et C_v sont des coefficients strictement positifs. De plus la pression additionnelle p_c et l'énergie interne e_c sont associés à "l'isotherme de zéro Kelvin". On demande que e_c soit une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ positive de R_+^* telle que

$$p_c(\rho) = \rho^2 \frac{de_c}{d\rho}(\rho).$$

On requiert également qu'il existe $\rho_* > 0$, $\tau_* > 0$, $k > 1$, $\ell > 1$, $C_* > 1$, $C'_* > 0$, $C_{**} > 0$, $C'_{**} > 0$ tels que pour tout $\rho \in (0, \rho_*)$,

$$\frac{\rho^{-\ell-1}}{C_*} \leq p'_c(\rho) \leq C_*\rho^{-\ell-1}, \qquad \frac{\rho^{-\ell-1}}{C'_*} \leq e_c(\rho) \leq C'_*\rho^{-\ell-1},$$

où $\ell \geq \dfrac{2n(3m-2)}{m-1} - 1$ et pour tout $\rho > \rho_*$

$$-\frac{1}{\tau_*}\mu'(\rho) \leq p'_c(\rho) \leq C_{**}\rho^{k-1}, \qquad 0 \leq e_c(\rho) \leq C'_{**}\rho^{k-1},$$

où $k \leq (m - \dfrac{1}{2})\dfrac{5(\ell+1) - 6n}{\ell + 1 - n}$. Remarquons que la composante froide de la pression et de l'énergie interne peut s'annuler pour ρ suffisamment grand. On retrouve ainsi l'équation d'état d'un gaz parfait loin du vide.

Definition de solutions faibles. On dira que (ρ, u, θ) est une solution faible sur $(0, T)$ de (1)–(9) si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- Les propriétés de régularité suivantes sont satisfaites

$$\rho e \;\text{ et }\; \rho|u|^2 \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)), \quad \frac{\nabla\mu(\rho)}{\sqrt{\rho}} \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3), \tag{52}$$

$$(\rho^{n/2} + \rho^{m/2})\nabla u \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^9), \tag{53}$$

$$(1 + \sqrt{\rho})\nabla(\theta^{a/2} + \log\theta) \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3), \tag{54}$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned}&\rho \in C([0,T];H^{-s}(\Omega)),\\ &\rho u \in C([0,T];H^{-s}(\Omega)^3), \quad \rho E \in C([0,T];H^{-s}(\Omega)),\end{aligned} \tag{55}$$

avec s une constante positive.

- La condition initiale (9) est satisfaite dans $D'(\Omega)$.
- Les équations (1)–(3) sont satisfaites dans $(D'((0,T)\times\Omega))$.

On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 2.7. *Supposons* (46)–(50) *satisfaits et que les données initiales* (ρ_0, m_0, G_0) *satisfont* (10) *et* (11), *et sont prises telles que*

$$H(0) = \int_\Omega \left(G_0 + \frac{|m_0|^2}{2\rho_0}\right) dx < +\infty, \tag{56}$$

que la densité initiale ρ_0 *et l'entropie initiale* s_0 *satisfont*

$$\rho_0 - \rho_\infty \in L^1(\Omega), \quad \rho_0 \log\frac{\rho_\infty}{\rho_0} \in L^1(\Omega), \quad \rho_0 e_c(\rho_0) \in L^1(\Omega), \tag{57}$$

$$\frac{\nabla\mu(\rho_0)}{\sqrt{\rho_0}} \in (L^2(\Omega))^3, \quad \rho_0 s_0 \in L^1(\Omega) \tag{58}$$

Alors, pour un gaz satisfaisant (51) *où* $s_0 = C_v \log(\theta_0/\rho_0^\Gamma)$ *avec* C_v *et* Γ *constantes liées au gaz, il existe une solution globale faible de* (1)–(9).

La preuve d'un tel résultat repose sur des résultats de compacité pour des suites de solutions approchées.

Notons que des lois d'état plus générales peuvent être considérées. De tels résultats de compacité sont obtenus grâce aux relations suivantes mises en évidence formellement dans le cas barotrope dans [6]. Pour les équations avec température, ces égalités s'écrivent

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho|u|^2 + \int_\Omega 2\mu(\rho)D(u):D(u) + \int_\Omega \lambda(\rho)|\mathrm{div} u|^2 = \int_\Omega p(\rho,\theta)\,\mathrm{div} u \tag{59}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho|u+2\nabla\varphi(\rho)|^2 + \int_\Omega 2\mu(\rho)A(u):A(u)&\\ = \int_\Omega p(\rho,\theta)\mathrm{div} u - 2\nabla p(\rho,\theta)\cdot\nabla\varphi(\rho),&\end{aligned} \tag{60}$$

où $A(u) = (\nabla u - {}^t\nabla u)/2$ représente la partie antisymétrique de ∇u, et φ est défini à une constante près par $\varphi'(\tau) = \mu'(\tau)/\tau$ $(\tau > 0)$. Cette relation va permettre de contrôler ρ proche et loin du vide. La pression froide aidant l'information proche du vide. On utilise également la forme du coefficient de conductivité choisie avec l'inégalité d'entropie

$$\int_\Omega \frac{1}{\theta}(2\mu|D(u)|^2 + \lambda|\mathrm{div} u|^2) + \int_\Omega \frac{\kappa}{\theta^2}|\nabla\theta|^2 \le \frac{d}{dt}\int_\Omega \rho s \tag{61}$$

et une information supplémentaire sur $(1+\sqrt{\rho})\nabla\theta^{(a-c+1)/2}$ obtenue en multipliant formellement l'équation de température

$$C_v(\partial_t(\rho\theta) + \mathrm{div}\,(\rho\theta u) + \Gamma\rho\theta\mathrm{div}\, u) = 2\mu D(u):D(u) + \lambda|\mathrm{div}\, u|^2 + \mathrm{div}\,(\kappa\nabla\theta)$$

par $1/(C_v\theta^c)$ pour c approprié avec $0 < c < 1$.

3. Solution forte.

L'article de A. Kazhikhov et A. Weigant est un papier très intéressant qui n'a jamais trouvé d'amélioration, depuis 1995. Il constitue le seul résultat d'existence globale de solution forte, sans rectriction sur les données, pour des fluides gouvernés par les équations de Navier-Stokes compressible barotrope :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \tag{62}$$

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - 2\operatorname{div}(\mu(\rho) D(u)) - \nabla(\lambda(\rho)\operatorname{div} u) + \nabla p(\rho) = 0, \tag{63}$$

où

$$\mu = \text{constante} = 1, \quad \lambda(\rho) = \rho^\beta, \quad \beta = \text{cte} \geq 3, \quad p(\rho) = \rho^\gamma, \quad 1 \leq \gamma < +\infty.$$

Par souci de simplicté, les auteurs se sont placés dans le cas d'un écoulement périodique où le domaine Ω est défini par

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1\}.$$

Les conditions initiales sont

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0 \geq m = \text{cte} > 0.$$

Remarque. Le résultat reste également valable dans le cas borné pour les conditions aux limites suivantes

$$u \cdot n = 0, \quad \omega = \operatorname{rot} u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Nous renvoyons également le lecteur aux articles de A. Matsumura et T. Nishida [36], D. Hoff [28], R. Danchin [14], [15] pour des résultats d'existence globale de solutions proche de l'équilibre respectivement pour des données régulières, pour des données avec discontinuités, pour des données dans des espaces critiques. Nous mentionnerons également les résultats de M. Padula [42] et A. Kahzkhov dans [30].

On désigne par $A = \operatorname{rot} u$ la vorticité liée au flot et par $B = (2 + \lambda(\rho))\operatorname{div} u - p(\rho)$ la pression effective. On introduit alors les deux fonctions auxiliaires ξ et η comme solutions des problèmes elliptiques suivants

$$\Delta\xi = \operatorname{div}(\rho u), \qquad \int_\Omega \xi = 0,$$

et

$$\Delta\eta = \operatorname{div}\Big(\operatorname{div}(\rho u \otimes u)\Big), \qquad \int_\Omega \eta = 0.$$

Une nouvelle fonction est ensuite définie

$$\theta(\rho) = \int_1^\rho \frac{2 + \lambda(s)}{s} ds = 2\ln\rho + \frac{\rho^\beta - 1}{\beta}.$$

On peut écrire une équation sur ξ et θ qui s'écrit

$$\partial_t(\xi + \theta) + u \cdot \nabla(\xi + \theta) + p = u \cdot \nabla\xi - \eta - \overline{B}$$

avec $\overline{B} = \int_\Omega B$. Cette équation servira pour contrôler la densité dans de bonnes normes.

On écrit ensuite les équations sur le flux effectif et la vorticité. On démontre l'égalité suivante

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (A^2+\nu B^2) + \int_\Omega \frac{1}{\rho}|\nabla B + \hat{\nabla} A|^2 \\ +\frac{1}{2}\int_\Omega [A^2+(\nu-\rho\nu')B^2]\mathrm{div}u + 2\int_\Omega B(\partial_y U\partial_x V - \partial_x U\partial_y V) \\ + \int_\Omega B(p_0-\rho_0')\mathrm{div}u = 0,\end{aligned} \tag{64}$$

où $\hat{\nabla} A = (\partial_y A, -\partial_x A)$ et $u=(U,V)$. La condition sur β va servir à obtenir l'information suivante

$$(\int_0^T \|B\|^2_{2m,\Omega} dt)^{1/2} \le cm^{(\beta+1)/2(\beta-1)}.$$

avec un exposant inférieur strictement à 1 et va permettre d'obtenir sur $z(t) = 1+\int_\Omega (A^2+\nu B^2)$ l'inéquation différentielle suivante

$$\frac{d}{dt}z \le c\lambda(t)z(t)[1+\ln(z(t)+1)].$$

Cette inégalité permettra d'appliquer le lemme de Gronwall. On démontre alors le lemme suivant

Lemme 3.1. *Il existe une constante positive c dépendant de $\|\rho_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ et $\|u_0\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ seulement et telle que les solutions du problème de Navier-Stokes satisfont*

$$\sup_{0<t<T}\int_\Omega (A^2+\nu B^2) \le c,$$

$$\int_0^T\int_\Omega \frac{1}{\rho}|\nabla B+\hat{\nabla}A|^2 \le c,$$

$$\int_0^T (\|\nabla A\|^2_{2m/(m+1)} + \|\nabla B\|^2_{2m/(m+1)} \le cm^{2/(\beta-1)}), \quad \forall m>1.$$

On recherche ensuite des estimations sur les dérivées d'ordres supérieurs. On écrit alors les équations sur F et G où

$$F=\frac{1}{\rho}(\partial_x B+\partial_y A), \qquad G=\frac{1}{\rho}(\partial_y B-\partial_x A).$$

On peut alors montrer le lemme suivant

Lemme 3.2. *Il existe un constante dépendant seulement de $\|u_0\|_{W^{2,2}(\Omega)}$, $\|\rho_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ et $\|\rho_0\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ telle que*

$$\sup_{0<t<T}\int_\Omega \rho(F^2+G^2)\le c,$$

$$\int_0^T\int_\Omega [(2+\lambda)[\partial_x F+\partial_y G)^2 + (\partial_y F-\partial_x G)^2] \le c.$$

En utilisant les lemmes ci-dessus et l'équation sur $\xi+\theta$, on montre alors que la densité est minorée et majorée par des constantes strictement positives. On contrôle également les premières dérivées par rapport au temps et aux variables d'espace de la densité. Ces estimations uniformes permettent alors de conclure à l'existence locale en temps puis globale.

Théorème 3.3. *Si $\rho_0 \in W^{1,q}(\Omega)$, $u_0 \in W^{2,q}(\Omega)$ avec $q > 2$. Il existe une unique solution forte du problème avec*

$$\begin{aligned} &\rho \in L^\infty((0,T)\times\Omega), \quad \partial_t\rho, \nabla\rho \in (W^{1,q}(\Omega))^2, \\ &u \in (L^q((0,T)\times\Omega))^2 \cap L^q(0,T;(W^{2,q}(\Omega))^2). \end{aligned}$$

4. Phénomène d'explosion.

Donnons dans cette partie divers résultats d'explosion liés aux équations de Navier-Stokes compressibles. Nous commencerons par un résultat établi dans [16] qui est basé sur le travail d'A. VAIGANT , *cf.* [49]

Proposition 4.1. *Soit $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^d$ une boule et une loi de pression p satisfaisant $p(\rho) = a\rho^\gamma$ avec $a > 0$, $\gamma \geq 1$ et $1 < \gamma \leq 3$. Soit $q > ((3d+2)\gamma - d)/2d$. Alors il existe ρ_0, u_0 et f satisfaisant*

$$\rho_0 \in L^1(\Omega)\cap L^\gamma(\Omega), \quad \rho_0 \geq 0, \quad f \in L^1(0,T;L^{2\gamma/(\gamma-1)}(\Omega)) \textit{ pour tout } T > 0,$$

$$m_0 \in L^{2\gamma/(\gamma+1)}(\Omega), \quad |m_0|^2/\rho_0 \in L^1(\Omega)$$

et une solution faible globale ρ, u telle que $\rho \in L^r_{\mathrm{loc}}([0,+\infty)\times B)$ for tout $r < q$ et

$$\int_0^T dt \int_{B(0,1/2)} |\rho(t,x)|^q dx = +\infty.$$

Pour le lecteur, rappelons le résultat de A. VAIGANT sur lequel est basé le résultat précédent. On commence par le résultat de V. SOLONNIKOV sur l'existence locale en temps de solution forte suivant : si l'on suppose $f \in L^q((0,T)\times\Omega)$ avec $q > d$, $u_0 \in W^{2-2/q,q}(\Omega)$, $\nabla\rho_0 \in L^q(\Omega)$, $0 < m \leq \rho_0(x) \leq M < +\infty$ alors il existe $T_0 \in (0,T)$ tel que pour tout $0 < t_0 < T_0$, il existe une unique solution généralisée sur $(0,t_0)\times\Omega$. Cette solution satisfait

$$\begin{aligned} &u \in L^q(0,t_0;W^{2,q}(\Omega)), \quad \partial_t u \in L^q((0,t_0)\times\Omega), \\ &\rho \in L^\infty(0,t_0;W^{1,q}(\Omega)), \quad \partial_t\rho \in L^\infty(0,t_0;L^q(\Omega)) \end{aligned}$$

avec $0 < m_1 \leq \rho(x,t) \leq M_1 < +\infty$. Il écrit ensuite le résultat suivant

Théorème 4.2. *Si $0 \leq \gamma < 1 + \frac{1}{d-1}$, alors ils existe u_0, ρ_0 et f satisfaisant les hypothèses de l'existence locale précédente telle que la solution correspondante ne peut pas être prolongé sur $(0,T)\times\Omega$.*

Pour obtenir ce résultat, il considère le cas analytique suivant où l'on cherche des solutions à symétrie sphérique dans $B(0,1)$

$$\begin{aligned} u_j(x,t) = \tfrac{1}{r}x_j u(r,t), \quad u_{0j} = \frac{1}{r}x_j u_0(r), \quad f_j(x,t) = \frac{1}{r}x_j f(r,t), \\ \rho(x,t) = \rho(r,t), \qquad \rho_0(x) = \rho_0(r), \qquad 1 \leq j \leq 2. \end{aligned}$$

où la soluion analytique $(u(r,t), \rho(r,t), f(r,t))$ est la suivante

$$u(r,t) = -\frac{2\alpha rs(1-t)^{2s-1}(1-r^{2l})}{[1+(1-t)^{2s})][(d-2\alpha l)r^{2l}+d(1-t)^{2s}]} \tag{65}$$

$$\rho(r,t) = \frac{[1+(1-t)^{2s}]^{\alpha}[(d-2\alpha l)r^{2l}+d(1-t)^{2s}]}{[r^{2l}+(1-t)^{2s}]^{\alpha+1}}, \tag{66}$$

$$f(r,t) = \partial_t u + u\partial_r u + \frac{\partial_r p}{\rho} - \frac{\mu}{\rho}\partial_r\Big(\frac{1}{r^{d-1}}\partial_r(r^{d-1}u)\Big) \tag{67}$$

$$u_0(r) = u(r,0), \quad \rho_0(r) = \rho(r,0) \tag{68}$$

avec $p = a\rho^{\gamma}$, l, s deux entiers naturels et α satisfait l'inégalité $0 > 2\alpha l < d$. Cet exemple est construit tel que $\rho(r,t) \to +\infty$ quand $t \to 1$ et $r \to 0$.

Dans [51], un résultat de type explosion est obtenu, par Z.P. Xin, pour une densité initiale à support compact sur le modèle de Navier-Stokes compressible avec équation de température sans conductivité de chaleur. Plus précisément, le résultat suivant est donné

Théorème 4.3. *Considérons le système de Navier–Stokes compressibles avec équation sur la température mais sans conduction thermique et sans force extérieure* ($f \equiv 0$)*. Supposons*

$$\begin{array}{lll} p(\rho,\theta) = R\rho\theta, & e = c\theta, & p = Ae^{S/c}\rho^{\gamma}, \\ \mu > 0, & 2\mu + d\lambda > 0, & \kappa \approx 0 \end{array}$$

où $A > 0$ est une constante, $\gamma > 1$, S est l'entropie et $c = R/(\gamma-1)$. Supposons également

$$\rho_0, \quad u_0, \quad S_0 \in H^m(\mathbb{R}^d) \text{ avec } m > [d/2]+2,$$

avec $\theta_0 \geq \underline{\theta} > 0$. Alors il n'existe pas de solution dans $\mathcal{C}^1([0,+\infty); H^m(\mathbb{R}^d))$ si ρ_0 a un support compact.

Ce résultat semble être étendu au cas $\kappa > 0$ dans [12] par Y. Cho et B.J. Jin.

Conclusion. Nous avons présenté quelques résultats mathématiques autour des équations de Navier-Stokes compressibles sans aucune intention d'exhaustivité (cela n'aurait d'ailleurs pas été possible). Nous renvoyons le lecteur aux références que l'on trouvera dans les ouvrages mentionnés pour d'autres résultats mathématiques intéressants : cas stationnaire, cas non borné, domaines extérieurs, analyse asymptotique, conditions aux bords de type entrée-sortie, *etc*....

Remerciements. Le premier auteur est partiellement financé par l'"ACI jeunes chercheurs 2004" du ministère de la Recherche "Études mathématiques de paramétrisations en océanographie". Les deux auteurs tiennent à remercier Cédric Villani pour leur avoir indiqué le livre de E. Nelson où l'on trouve quelques commentaires sur la vitesse qui contre-balance les effets osmotiques : vitesse qui joue, notamment, un rôle prépondérant dans leurs travaux récents sur les équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible conducteur de chaleur.

Références

[1] I. Basov, V. Shelukhin. Generalized solutions to the equations of Bingham. compressible flows, *Z. Angew. Math. Mech.,* 78, 1-8, (1998).

[2] W. Borchers, H. Sohr. On the equation rot$v = g$ and div$u = f$ with zero boundary conditions. *Hokkaido Math J.,* 19 : 67–87, (1990).

[3] D. Bresch, B. Desjardins. Stabilité de solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes compressibles avec conductivité de chaleur. *C.R. Acad. Sciences Paris,* Section Mathématiques, vol. 343, Issue 3, 219–224, (2006).

[4] D. Bresch, B. Desjardins. Existence of global weak solutions for a 2D viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model. *Commun. Math. Phys.,* **238**, 1-2, (2003), p. 211–223.

[5] D. Bresch, B. Desjardins. Some diffusive capillary models of Korteweg type. *C. R. Acad. Sciences,* Paris, Section Mécanique. Vol **332** no 11 (2004), p 881–886.

[6] D. Bresch, B. Desjardins. On the existence of global weak solutions to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids. *J. Maths. Pures et Appliquées,* (2007)).

[7] D. Bresch, B. Desjardins On the construction of approximate solutions for the 2D viscous shallow water model and for compressible Navier-Stokes models. *J. Maths. Pures et Appliquées,* 86, 4, 362-368, (2006).

[8] D. Bresch, B. Desjardins, D. Gérard-Varet. Rotating fluids in a cylinder. numéro spécial "Some Evolution Equations and their Qualitative Properties", Série DCDS Série A, Vol. 11, Number 1, 47–82, (2004).

[9] D. Bresch, B. Desjardins, D. Gérard-Varet. On compressible Navier–Stokes equations with density dependent viscosities in bounded domains. *J. Maths Pures et Appliquées,* (2007).

[10] D. Bresch, B. Desjardins, J.–M. Ghidaglia, E. Grenier. Mathematical properties of the basic two fluid model. En préparation (2007).

[11] D. Bresch, B. Desjardins, C.K. Lin. On some compressible fluid models : Korteweg, lubrication and shallow water systems. *Comm. Part. Diff. Eqs.* **28**, 3–4, (2003), p. 1009–1037.

[12] Y. Cho, B.J. Jin. Blow up the viscous heat-conducting compressible flows. *J. Math. Anal.* 320, (2006), 819–826.

[13] R.R. Coifman, Y. Meyer. On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.,* **212**, (1975), 315–331.

[14] R. Danchin. Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations, *Inventiones Mathematicae,* 141, pages 579-614 (2000).

[15] R. Danchin. Global existence in critical spaces for compressible viscous and heat conductive gases, *Arch. Rat. Mech. Anal.,* 160, 1-39 (2001).

[16] B. Desjardins. On weak solutions of the compressible isentropic Navier-Stokes equations. *Appl. Math. Letters,* **12**, 107–111, (1999).

[17] R.J. DiPerna, P.–L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Invent. Math.,* **98**, (1989), 511–547.

[18] P. Duhem. Recherches sur l'hydrodynamique. *Ann. Toulouse* 2 (1901-02).

[19] E. Feireisl. On the motion of a viscous, compressible and heat conducting fluid. *Indiana Univ. Math. J.* 53 (2004), no. 6, 1705–1738.

[20] E. Feireisl, A. Novotny, H., Petzeltova. On the existence of globally defined weak solutions to the Navier–Stokes equations of compressible isentropic fluids. *J. Math. Fluid. Dynam.,* **3**, (2001), p. 358–392.

[21] E. Feireisl. *Dynamics of viscous compressible fluids.* Oxford Science Publication, Oxford, (2004).

[22] E. Feireisl. Compressible Navier-Stokes equations with a non-monotone pressure law. *J. Diff. Eqs,* **184**, 97-108, (2002).

[23] G.P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations,* Volume I. Springer-Verlag, New York, (1994).

[24] M. Hillairet. Propagation of density-oscillations in solutions to barotropic compressible Navier-Stokes system. A paraître dans *J.. Math. Fluid. Mech.,* (2007).

[25] D. Hoff. Global solutions of the Navier-Stokes equations for multidimensional compressible flow with discontinuous initial data. *J. Diff. Eqs,* **120**, (1995), 215–254.

[26] D. Hoff. Strong convergence to global solutions for multidimensional flows of compressible, viscous fluids with polytropic equations of state and discontinuous initial data. *Arch. Rational Mech. Anal.* 132 (1995), no. 1, 1–14.

[27] D. Hoff. Uniqueness of Weak Solutions of the Navier–Stokes Equations of Multidimensional, Compressible Flow *Siam J. Math. Anal.* **37**, 6, (2006), 1742–1760.

[28] D. Hoff. Discontinuous solutions of the Navier-Stokes equations for multidimensional heat-conducting flows. *Arch. Rational Mech. Anal.* **139**, (1997), 303-354.

[29] D. Hoff, D. Serre. The failure of continuous dependence on initial data for the Navier-Stokes equations of compressible flow. *SIAM J. Appl. Math.,* 51, (1991), 887–898.

[30] A.V. Kazhikhov. The equations of potential flow of compressible viscous fluid at low Reynolds number. *Acta Appl. Math.* **37**, (1994), 77–81.

[31] P.–L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics : compressible models : vol. 2.* Oxford University press, (1998).

[32] P.–L. Lions. Compacité des solutions des équations de Navier-Stokes compressibles isentropiques. *C. R. Acad. Sciences, Paris, section Mathématique.* **317**, 1, (1993), 115–120.

[33] J. Málek, J. Necas, M. Rokyta, M. Ruzicka. *Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs.* Applied Mathematics and Mathematical Computation 13, Chapman el Hall, (1996).

[34] A. Mamontov. Global solvability of the multidimensional Navier-Stokes equations of a compressible fluid with nonlinear viscosity, I. *Siberian Math. J.,* 40, 352-362, (1999).

[35] A. Mamontov. Global solvability of the multidimensional Navier-Stokes equations of a compressible fluid with nonlinear viscosity, II. *Siberian Math. J.,* 40, 541-555, (1999).

[36] A. Matsumura, T. Nishida. The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases. *J. Math. Kyoto Univ.,* **20**, (1980), 67–104.

[37] A. Mellet, A. Vasseur. On the barotropic compressible Navier-Stokes equations. À paraître dans *Comm. Partial Diff. Equations* (2006).

[38] S. Matusu-Necasova, M. Medvidova-Lukacova. Bipolar barotropic non-newtonian compressible fluids. *Modél. math. anal. numér.,* vol. 34, no5, 923-934, (2000).

[39] F. Murat. Compacité par compensation. *Annali della scuola normale superiore,* 5, 487–507, (1978).

[40] E. Nelson. *Dynamical theories of brownian motion.* Mathematical Notes, Princeton Univ. Press., (1967).

[41] A. Novotny, I. Straskraba. *Introduction to the mathematical theory of compressible flow.* Oxford lecture series in Mathematics and its applications, (2004).

[42] M. Padula. Existence of global solutions for two-dimensional viscous compressible flows. *J. Funct. Anal.,* (69), (1986), 1-20.

[43] D. Serre. Solutions faibles globales des équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible. *C. R. Acad. Sci.* Paris Sér. I Math. 303 (1986), no. 13, 639–642.

[44] D. Serre. Variations de grande amplitude pour la densité d'un fluide visqueux compressible. *Phys. D* 48 (1991), no. 1, 113–128.

[45] J. Serrin. *Mathematical principles of classical fluid mechanics,* in Handbuch der Physik VIII, Springer-Verlage, 1959.

[46] V.A. Solonnikov. Solvability of initial boundary value problem for the equation of motion of viscous compressible fluid. *Steklov Inst. Seminars in Math.,* **56**, (1976), 128–142.

[47] A. Tani. On the first initial boundary value problem of compressible viscous fluid motion. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.,* **13**, (1977), 193–253.

[48] L. Tartar. Compensated compactness and applications to partial differential equation. In *Nonlin. Anal. and Mech.* (ed. L. Knopps), Res. Notes in Math. 39, Boston, 136–211, Heriot-Watt Sympos, Pitman.

[49] V.A. Vaĭgant. An example of the nonexistence with respect to time of the global solution of Navier-Stokes equations for a compressible viscous barotropic fluid. *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.* 50 (1995), no. 3, 397–399.

[50] V.A. Weigant, A.V. Kazhikhov. On the existence of global solutions to two-dimensional Navier-Stokes equations of compressible viscous fluids. *Siberian Math. J.,* **36**, (1995).

[51] Z.P. Xin. Blowup of smooth solutions to the compressible Navier-Stokes equation with compact density. *Comm. Pure Appl. Math.* 51 (1998), no. 3, 229–240. (1995), 1108–1141.

[52] V.I. Youdovitch. Two dimensional nonstationary problem on flow of ideal compressible fluid through the given domain. *Mat. Sbornik,* **64**, (1994), 562–588.

Laboratoire de Mathématiques, UMR 5127 CNRS, Université de Savoie, 73376 Le Bourget du Lac cedex, France
didier.bresch@univ-savoie.fr
Benoit.Desjardins@ens.fr