Journées

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Évian-les-Bains, 5 juin–9 juin 2006

Tristan Rivière

Lois de conservation pour les problèmes invariants conformes et les equations de Schrödinger à potentiels antisymetriques

J. É. D. P. (2006), Exposé n° IX, 14 p.

<http://jedp.cedram.org/item?id=JEDP_2006____A9_0>

Journées *Équations aux dérivées partielles*
Évian-les-Bains, 5 juin–9 juin 2006
GDR 2434 (CNRS)

Lois de conservation pour les problèmes invariants conformes et les equations de Schrödinger à potentiels antisymetriques

Tristan Rivière

I. La conjecture de Hildebrandt sur les points critiques des problèmes invariants conformes.

I.1. Les lagrangiens invariants conformes, coercifs et quadratiques de la dimension 2.

Dès les années 50 l'analyse des points critiques des lagrangiens invariants conformes, en particulier sous l'impulsion de C.B. Morrey, ont suscité un intérêt spécial, du, entre autres, au rôle important qu'ils jouent en physique comme en géométrie. Du fait de la richesse particulière de son groupe conforme, la dimension 2 doit être regardée de près.

On considère tout d'abord des applications u d'un domaine bidimensionel ω de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ points critiques de l'énergie de Dirichlet

$$L(u) := \int_\omega |\nabla u|^2(x,y)\ dx\wedge dy\ ,$$

pour toutes les perturbations de la forme $u+t\chi$ ou χ est une fontion quelconque de $C^\infty_0(\omega,\mathbb{R})$. Ce lagrangien est l'exemple le plus élémentaire de lagrangien invariant conforme en dimension 2. Précisemment on considère une application conforme quelconque ϕ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ c'est à dire satisfaisant

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right| = \left|\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\right|\ ,\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = 0\ ,\\ det\nabla\phi\ge 0\qquad\text{and}\qquad \nabla\phi\ne 0\end{array}\right. \tag{I.1}$$

en d'autres termes ϕ est une fonction holomorphe. On a alors pour tout u dans $W^{1,2}(\omega,\mathbb{R})$

$$L(u) = L(u\circ\phi) = \int_{\phi^{-1}(\omega)} |\nabla(u\circ\phi)|^2(x,y)\ dx\wedge dy\ . \tag{I.2}$$

Les points critiques de cette fonctionelle sont les fonctions harmoniques satisfaisant l'équation d'Euler Lagrange

$$\Delta u = 0 \quad \text{ dans } \omega \ . \tag{I.3}$$

Les questions d'analyse relatives à des points critiques de telles fonctionnelles sont : la régularité, l'unicité pour des données au bord fixées, la symmétrie lorsque le domaine en a...etc. L'ensemble de ces questions sont résolues à l'aide du principe du maximum dans ce cas.

Le problème précédent se généralise de la façon suivante : On peut tout d'abord regarder des applications u de ω dans un espace euclidien quelconque $\mathbb{R}^n$ et considérer le lagrangien

$$L(u) := \int_\omega |\nabla u|^2(x,y)\ dx\wedge dy = \int_\omega \sum_i |\nabla u^i|^2\ dx\wedge dy\ .$$

où u_i sont les coordonnées de u. Ce lagrangien est à nouveau invariant conforme (satisfait (I.2)) et son étude se ramène à celle de l'énergie de Dirichlet pour chaque composante u_i.

Considérons désormais une métrique $g(X) = (g_{ij}(X))_{1\le i,j\le n}$ sur $\mathbb{R}^n$ dont la norme C^1 est supposée bornée ($\|g\|_{C^1(\mathbb{R}^n)} < +\infty$). Le lagrangien de Dirichlet relative à cette métrique pour des applications de ω dans $(\mathbb{R}^n, g)$ s'écrit

$$L_g(u) := \int_\omega |\nabla u|^2_g(x,y)\ dx\wedge dy = \int_\omega \sum_{i,j} g_{ij}(u(x,y))\nabla u^i(x,y)\cdot\nabla u^j(x,y)\ dx\wedge dy\ .$$

Il n'est pas difficile de voir que ce lagrangien est aussi invariant conforme. Les points critiques de ce lagrangien pour les perturbations de la forme $u + t\psi$ où ψ est une application quelconque de $C^\infty_0(\omega, \mathbb{R}^n)$ satisfont l'équation d'Euler Lagrange

$$\Delta u^i + \Gamma^i_{kj}(u)\nabla u^k\cdot\nabla u^j = 0\ , \tag{I.4}$$

où $\Gamma^i_{jk}(X)$ sont les symboles de Christoffel de la métrique g au point $X = (x^1\cdots x^n) \in \mathbb{R}^n$: $\Gamma^i_{jk}(X) = 1/2\ g^{il}(\partial_{x^k} g_{jl} + \partial_{x^j} g_{kl} - \partial_{x^l} g_{jk})$ où (g^{ij}) est la matrice inverse de g_{ij}. Cette équation est donc la généralisation de l'équation de Laplace (I.3) lorsque l'on considère des application à valeur dans la variété riemannienne $(\mathbb{R}^n, g)$ pour une métrique g non nécessairement triviale. Cette équation est l'équation des *applications harmoniques* de ω dans $(\mathbb{R}^n, g)$. Elle admet l'interprétation géométrique suivante : si u est solution de (I.4) et est en plus une immersion conforme alors u est une immersion *minimale* de ω dans la variété $(\mathbb{R}^n, g)$ (la courbure moyenne de $u(\omega)$ dans $(\mathbb{R}^n, g)$ est nulle).

Les questions d'analyses sur les solutions de (I.4) sont toujours des questions de régularité, d'unicité, de symmétrie...etc comme pour les solutions de (I.2) ou (I.3) mais, du fait de la non-linéarité de l'équation (I.4), on ne peux plus étudier le système coordonnée par coordonnée et le principe du maximum ne s'applique plus à priori. (I.4) appartient à la famille des systèmes elliptiques à *croissance quadratique*, dits aussi à *croissance naturelle*, de la forme

$$\Delta u = f(u, \nabla u)\ , \tag{I.5}$$

où $f(X,p)$ est une fonction quelconque continue pour laquelle il existe $c_0 > 0$ et $c_1 > 0$ satisfaisant

$$\forall X\in\mathbb{R}^n \quad \forall p\in\mathbb{R}^n\otimes\mathbb{R}^2 \qquad f(X,p) \le c_1|p|^2 + c_0\ . \tag{I.6}$$

Cette équation est *critique* en dimension 2 pour la norme $W^{1,2}$: en effet, sous cette hypothèse on a le fait que la non-linéarité $f(u,\nabla u)$ est dans $L^1(\omega)$, ce qui, en injectant cette information dans (I.5), nous donne en retour que u est dans $W^{1,p}_{loc}$ pour tous les $p<2$. On retombe ainsi "presque sur nos pieds" et l'on retrouve "presque" l'hypothèse de départ $W^{1,2}$. D'où la dénomination *critique* (un gain d'information par injection de l'hypothèse de départ dans la non-linéarité $f(u,\nabla u)$ rend l'équation *sous-critique* pour cette hypothèse, alors qu'une perte "substancielle" d'information rend l'équation *sur-critique* pour l'hypothèse de départ).

Un autre exemple de lagrangien invariant conforme en dimension 2 est le suivant : Étant donnée une 2-forme $\Lambda=\Lambda_{ij}(X)\ dx^i\wedge dx^j$ dans $\mathbb{R}^n$ de norme C^1 bornée $\|\Lambda\|_{C^1(\mathbb{R}^n)}<+\infty$, pour toute application $W^{1,2}$ du domaine bi-dimensionnel ω dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ on introduit le lagrangien

$$L^\Lambda(u):=\int_\omega |\nabla u|^2(x,y)\ dx\wedge dy+u^*\Lambda\ , \tag{I.7}$$

où $u^*\Lambda$ désigne le *tiré-en-arrière* de Λ par u dont l'expression explicite est $u^*\Lambda=\sum_{ij}\Lambda_{ij}(u)\ (\partial_x u^i\partial_y u^j-\partial_y u^i\partial_x u^j)\ dx\wedge dy$. Les points critiques de L^Λ pour les perturbations mentionnées précédemment satisfont l'équation d'Euler Lagrange

$$\forall i=1\cdots n\qquad \Delta u^i=2H^i(u)(\partial_x u,\partial_y u)\ , \tag{I.8}$$

où H^i sont les 2-formes sur $\mathbb{R}^n$ satisfaisant

$$\forall X\in\mathbb{R}^n\quad \forall\, U,V,W\in\mathbb{R}^n\quad d\Lambda(X)(U,V,W)=4\sum_{i=1}^n U^i\, H^i(X)(V,W)\ . \tag{I.9}$$

Pour $n=3$ en particulier il existe une fonction continue H telle que $d\Lambda(X)=4H(X)\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$. L'équation (I.8) devient alors

$$\Delta u=2H(u)\ \partial_x u\wedge\partial_y u\ . \tag{I.10}$$

A nouveau, si u est une immersion conforme, l'équation (I.10) admet l'interprétation suivante : $u(\omega)$ est une surface dont la courbure moyenne en $u(x,y)$ est $H(u(x,y))$. Pour cette raison (I.10) est appelée l'équation des *surfaces à courbure moyenne prescrite.* On observera que sous l'hypothèse que la norme C^1 de Λ est finie, l'équation des *surfaces à courbure moyenne prescrite* est à nouveau de la forme (I.5)-(I.6), c'est à dire à *croissance quadratique.*

Finallement en combinant L_g et L^Λ, pour toute donnée d'une metrique g sur $\mathbb{R}^n$ et d'une 2-forme Λ sur $\mathbb{R}^n$ toutes deux bornées dans $C^1(\mathbb{R}^n)$, on obtient un lagrangien invariant conforme généralisé (qui contient tous les cas précédents). Précisemment, pour toute application u d'un ouvert ω de $\mathbb{R}^2$ dans $(\mathbb{R}^n,g)$, on introduit la quantité

$$L^\Lambda_g(u):=\int_\omega g_{ij}\nabla u^i\cdot\nabla u^j\ dx\wedge dy+u^*\Lambda\ . \tag{I.11}$$

Les points critiques de L^Λ_g satisfont léquation d'Euler Lagrange

$$\forall i=1\cdots n\qquad \Delta u^i+\Gamma^i_{jk}\nabla u^j\cdot\nabla u^k=2H^i(u)(\partial_x u,\partial_y u) \tag{I.12}$$

dite équation des *surfaces à courbure moyenne prescrite dans* $(\mathbb{R}^n,g)$, où H^i sont les 2-formes sur $\mathbb{R}^n$ satisfaisant

$$\forall X\in\mathbb{R}^n\quad \forall\, U,V,W\in\mathbb{R}^n\quad d\Lambda(X)(U,V,W)=4\sum_{i,j=1}^n g_{ij}U^i\, H^j(X)(V,W)\ . \tag{I.13}$$

Les lagrangiens L_g^Λ décrivent en fait tous les lagrangiens invariants conforme coercifs possibles ayant une croissance quadratique. Précisemment nous avons le résultat suivant démontré par M. Grüter (voir aussi [Kp]) :

Theorem I.1. [Gr1] *Soit $l(X,p)$ une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que l est C^1 par rapport à la première variable et C^2 par rapport à la deuxième. On suppose par ailleurs que l satisfait l'hypothèse de coercivité et de croissance quadratique suivante :*

$$\exists C > 0 \quad t.q. \quad \forall X \in \mathbb{R}^n \quad \forall p \in \mathbb{R}^{2n} \qquad C^{-1}|p|^2 \leq l(X,p) \leq C|p|^2 \ . \tag{I.14}$$

Soit $\mathcal{L}$ le lagrangien de densité l pour les applications u $W^{1,2}$ d'un domaine ω de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{L}(u) = \int_\omega l(u, \nabla u)(x,y)\ dx \wedge dy \ . \tag{I.15}$$

On suppose enfin que $\mathcal{L}$ est invariant conforme : pour toute application conforme ϕ positive de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (c.a.d. ϕ satisfait (I.1)) on a

$$\mathcal{L}(u \circ \phi) = \int_{\phi^{-1}(\omega)} l(u \circ \phi, \nabla(u \circ \phi))(x,y)\ dx \wedge dy = \mathcal{L}(u) \ . \tag{I.16}$$

Alors il existe une metrique g C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et une 2-forme Λ C^1 de $\mathbb{R}^n$ telles que

$$\mathcal{L} = L_g^\Lambda \ . \tag{I.17}$$

Jusqu'à présent nous nous sommes restreints à des applications d'un domaine de $\mathbb{C}$ dans une variété ne possédant qu'une seule carte : $(\mathbb{R}^n, g)$. Plus généralement il est possible de considérer l'espace de Sobolev $W^{1,2}$ d'un domaine ω dans une variété riemannienne (N^n, g) quelconque. Lorsqu'elle est compacte et sans bord (ce que nous supposons à partir de maintenant pour simplifier la présentation), grace au théorème de Nash, cette variété peut être plongée isométriquement dans un espace euclidien $\mathbb{R}^K$. L'espace $W^{1,2}(\omega, N^n)$ est alors le sous espace des applications u de $W^{1,2}(\omega, \mathbb{R}^K)$ à valeur dans la sous-variété N^n presque partout (p.p. $(x,y) \in \omega$ $u(x,y) \in N^n$). Etant donnée une 2-forme Λ C^1 sur N^n, on peut considérer pour les u dans $W^{1,2}(\omega, \mathbb{R}^K)$ le lagrangien

$$L^\Lambda(u) = \int_\omega |\nabla u|^2(x,y)\ dx \wedge dy + u^*\Lambda \ . \tag{I.18}$$

Les points critiques de L^Λ dans $W^{1,2}(\omega, N^n)$ sont définis de la façon suivante : Soit π_N la projection orthogonale sur N^n qui à chaque point d'un voisinage de N (choisit suffisamment proche de N^n) associe le point de N^n le plus proche. Pour un voisinage suffisamment proche de N^n π_N est une application régulière. On dit alors que u dans $W^{1,2}(\omega, N^n)$ est un point critique de L^λ si pour toute application χ dans $C_0^\infty(\omega, \mathbb{R}^K)$ on a

$$\frac{d}{dt} L^\Lambda(\pi_N(u + t\chi))_{t=0} = 0 \ . \tag{I.19}$$

La condition (I.19) est satisfaite pour tout χ dans $C_0^\infty(\omega, \mathbb{R}^K)$ si et seulement si u est solution de l'équation d'Euler Lagrange

$$\Delta u + A(u)(\nabla u, \nabla u) = H(u)(\nabla^\perp u, \nabla u) \tag{I.20}$$

où nous utilisons les notations suivantes : $A(X)$ est la deuxième forme fondamentale au point X de N^n du plongement de N^n dans $\mathbb{R}^K$ qui a une paire de vecteur de

T_XN^n associe un vecteur perpendiculaire à T_XN^n. $A(u)(\nabla u, \nabla u)$ au point (x, y) de ω est précisement le vecteur de $\mathbb{R}^K$ donné par

$$A(u)(\nabla u, \nabla u)(x, y) := A(u(x, y))(\partial_x u, \partial_x u) + A(u(x, y))(\partial_y u, \partial_y u) .$$

$\nabla^\perp u$ est la rotation de $\pi/2$ du gradient de u, c'est à dire $\nabla^\perp u = (-\partial_y u, \partial_x u)$. $H(u)(\nabla^\perp u, \nabla u)$ au point (x, y) de ω est donc le vecteur suivant de $\mathbb{R}^K$:

$$\begin{aligned} H(u)(\nabla^\perp u, \nabla u)(x, y) &:= H(u(x, y))(\partial_x u, \partial_y u) - H(u(x, y))(\partial_y u, \partial_x u) \\ &= 2H(u(x, y))(\partial_x u, \partial_y u) , \end{aligned}$$

où $H(X)$ est la 2-forme alternée de T_XN^n à valeurs dans T_XN^n donnée par

$$\forall\, U, V, W \ \in T_XN^n \qquad d\Lambda(U, V, W) := \langle U, H(X)(V, W)\rangle \ .$$

($<\ ,\ >$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^K$. Dans le cas particulier où $\Lambda = 0$ l'équation se réduit à

$$\Delta u + A(u)(\nabla u, \nabla u) = 0 , \tag{I.21}$$

Cette équation est appelée *équation des applications harmoniques* à valeur dans N.

On observe à nouveau que ces équations d'Euler Lagrange (I.20) font partie de la famille des systèmes elliptiques à croissance quadratique donnée par (I.5)-(I.6).

I.2. Les questions de régularité des points critiques de Lagrangiens invariants conformes.

Ainsi que nous l'avons établi dans la section précédente, l'ensemble des équations d'Euler Lagrange des lagrangiens invariants conformes, coercifs à croissance quadratique en dimension 2 sont des systèmes elliptiques de la forme (I.5)-(I.6). Les solutions $W^{1,2}$ des systèmes (I.5)-(I.6) en dimension 2 ne sont pas nécéssairement régulières comme le montre l'exemple suivant :

$$u(x, y) = \log\log\frac{1}{|(x, y)|} \in W^{1,2}(\omega, \mathbb{R}) , \tag{I.22}$$

est solution de

$$-\,\Delta u = |\nabla u|^2 , \tag{I.23}$$

où ω est dans ce cas le disque centré en 0 de rayon $1/2$. Il a été par ailleurs démontré par Frehse, [Fre], que cette équation est aussi variationnelle et correspond à l'équation d'Euler du lagrangien (non invariant conforme)

$$L(u) = \int_\omega \left(1 + \frac{1}{1 + e^{12\,u}\ (\log 1/|(x, y)|)^{-12}}\right)\ |\nabla u|^2(x, y)\ dx \wedge dy\ . \tag{I.24}$$

Si par contre on se restreint a des solutions $W^{1,2}$ et bornées d'equations **scalaires** de la forme (I.5)-(I.6) un résultat de Ladyzenskaya et Uraltseva nous assure la régularité de ces solutions : elles sont Hölder continues $C^{0,\alpha}$ pour un exposant $\alpha > 0$ dépendant à priori de f. Ce résultat ne s'étend pas aux solutions $W^{1,2}$ et bornées de systèmes de la forme (I.5)-(I.6) comme le montre l'exemple suivant du à Frehse [Fre] :

$$u(x, y) = \left(\sin\log\log\frac{1}{|(x, y)|}, \cos\log\log\frac{1}{|(x, y)|}\right) \in W^{1,2}(\omega, \mathbb{R}^2) \cap L^\infty\ , \tag{I.25}$$

est une solution non continue du système elliptique à croissance quadratique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u^1 = (u^1 + u^2)\ |\nabla u|^2 \\ \\ -\Delta u^2 = (u^2 - u^1)\ |\nabla u|^2 \end{array} \right. \tag{I.26}$$

Lorsque le système a la propriété d'être invariant conforme néanmoins S. Hildebrandt formula dans [Hil] et [Hil2] la conjecture suivante que l'on retrouve aussi dans les travaux de E. Heinz dans le cas particulier de l'équation à courbure moyenne prescrite (voir [Hei1], [Hei2] et [Hei3])

Conjecture 1. *Les applications d'un domaine de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n$, points critiques d'énergie bornée de fonctionnelles continuement différentiables, invariantes conforme, coercives à croissance quadratique sont continus.*

La continuité de ces points critiques implique par ailleurs en appliquant des résultats de Hildebrandt-Widman [HiW] et Jost-Karcher [JoK], qu'ils sont en fait $C^{1,\alpha}$, pour tout $1 > \alpha > 0$. Des hypothèses plus fortes sur la régularité de la fonctionelle impliquent alors par des arguments de *bootstrap* classiques une régularité plus élevée de ses points critiques une fois que la régularité $C^{1,\alpha}$ est établie.

En d'autres termes, cette conjecture affirme que les points critiques dans $W^{1,2}(\omega, \mathbb{R}^n)$ du lagrangien L_g^Λ, pour un choix quelconque de metrique et 2-forme g et Λ C^1, sont continus. Nous démontrons dans [Ri1] cette conjecture et nous étendons ce résultat aux points critiques de fonctionnelles d'applications d'un domaine de $\mathbb{R}^2$ à valeur dans une sous variété quelconque de l'espace euclidien $\mathbb{R}^K$. Nous déduisons en fait ce résultat d'un résultat de régularité encore plus général pour les solutions d'équations de Schrödinger à potentiels antisymétriques comme cela est décrit dans la partie suivante.

II. Lois de conservations pour les solutions d'équations de Schrödinger à potentiels antisymétriques

Comme nous l'expliquions plus haut le principe du maximum ne peut s'appliquer séparemment aux différentes composantes u^i de la solution u du système elliptique invariant conforme considéré, étant donné la structure essentiellement vectorielle du problème. Les progrès dans la recherche de la démonstration de la conjecture 1 ont été lents et ont abouti dans [Ri1] par la mise en évidence de lois de conservations jusque là inconnues, qui permettent d'écrire les équations (I.20) sous forme divergence.

Le premier résultat qui vient renforcer la conjecture 1 est celui de C.B. Morrey qui démontre dans [Mo] que les minimums des fonctionelles L_g^Λ sont réguliers. Puis, au début des années 80, M. Grüter démontre que les solutions de (I.10) qui sont en plus conformes (pour lesquels la différentielle de Hopf est identiquement nulle $\Phi(u) = |\partial_x u|^2 - |\partial_y u|^2 - 2i\partial_x u \cdot \partial_y u \equiv 0$) sont continues. Dans [Sc1] R. Schoen démontre que les applications d'un domaine de $\mathbb{R}^2$ dans N, une sous variété C^2 de $\mathbb{R}^n$, qui sont points critiques de L^Λ pour un choix quelconque de 2-forme Λ, bornée dans $C^1(N)$, et qui sont en plus *stationaires* (la différentielle de Hopf Φ est holomorphe) sont continues. Au début des années 90 F. Hélein utilise des lois de conservation pour démontrer que les applications harmoniques d'un domaine de R^2 dans la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ sont régulières (analytiques réelles). F. Bethuel et J.M.

Ghidaglia démontrent dans [Bet1], [BeG1], [BeG2] que les solutions à valeur dans $\mathbb{R}^3$ de (I.10) sont continues moyennant diverses hypothèses "fortes" sur la donnée H (norme lipschitz de H bornée, H ne dépend que de 2 coordonées de $\mathbb{R}^3$...etc) Au moyen de l'introduction d'une technique dite de *repères mobiles* F. Hélein réussit en 1991 à démontrer la continuité des applications harmoniques d'un domaine de $\mathbb{R}^2$ dans une sous variété C^2 fermée quelconque de $\mathbb{R}^K$. Cette technique, à laquelle une partie importante du livre [Hel] est consacrée, consiste à associer à l'application harmonique u dans N^n un relèvement bien choisi sous fome d'une section du fibré en repère associé au fibré vectoriel faible *tiré en arrière* du tangent à N^n par u : $u^{-1}TN$. La réécriture de l'équation relative à ce champs de repère permet, après un travail d'analyse fin, de déduire la régularité des applications harmoniques. En combinant cette approche et des arguments de [Bet1] P. Choné démontre finalement la continuité des solutions de (I.20) sous l'hypothèse que la variété N est suffisament régulière et que la 2-forme Λ est $W^{2,\infty}$. Le passage de l'hypothése $\Lambda \in W^{2,\infty}$ à l'hypothèse $\Lambda \in C^1$ conjecturé par Hildebrandt où même $\Lambda \in W^{1,\infty}$ considérée plus bas se heurtait à une difficulté fondamentale : sous l'hypothèse $\Lambda \in W^{2,\infty}$ l'application $H \circ u$ est dans l'espace $W^{1,2} \cap L^\infty$, comme u lui même, alors que sous l'hypothèse $\Lambda \in W^{1,\infty}$ l'application $H \circ u$ est a-priori juste bornée dans L^∞ mais n'est a-priori plus dans $W^{1,2}$.

L'approche introduite par F.Hélein pour démontrer la régularité des applications harmoniques d'un domaine ω de $\mathbb{R}^2$ dans la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ est la suivante. Dans ce cas particulier l'équation d'Euler Lagrange associée à l'énergie L s'écrit

$$\Delta u + u|\nabla u|^2 = 0 \tag{II.27}$$

(lorsque u est régulière elle est aussi équivalente au fait que Δu est paralèlle à u et que $|u| \equiv 1$). Il a été observé par J. Shatah que si u est une solution $W^{1,2}$ de (II.27) alors pour toute paire $1 \le i, j \le n+1$ on a

$$div\left(u^i \nabla u_j - u_j \nabla u^i\right) = 0 \ . \tag{II.28}$$

En utilisant la décomposition de Hodge dans $L^2(\omega)$ on met donc en évidence une fonction B^i_j telle que

$$\nabla^\perp B^i_j = u^i \nabla u_j - u_j \nabla u^i \tag{II.29}$$

On réécrit alors l'équation (II.27) de la façon suivante : pour tout $1 \le i \le n$

$$\begin{aligned} -\Delta u^i &= \sum_{j=1}^{n+1} u^i \nabla u_j \cdot \nabla u^j \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \left[u^i \nabla u_j - u_j \nabla u^i\right] \cdot \nabla u^j = \sum_{j=1}^{n+1} \nabla^\perp B^i_j \cdot \nabla u^j \end{aligned} \tag{II.30}$$

En introduisant la notation $\nabla^\perp B$ pour le champs de vecteur à valeur dans les matrices donné par $\nabla^\perp B := (\nabla^\perp B^i_j)$, (II.27) devient finalement équivalent à

$$\Delta u = \nabla^\perp B \cdot \nabla u \ . \tag{II.31}$$

On observe alors que la non-linéarité dans le membre de droite de (II.31) a une structure particulière : elle s'écrit sous forme de jacobiens

$$\nabla^\perp B^i_j \cdot \nabla u^j = \partial_x u^j \partial_y B^i_j - \partial_y u^j \partial_x B^i_j \ .$$

Comme u et B sont a-priori dans $W^{1,2}$ seulement, ces jacobiens sont dans $L^1(\omega)$. Cependant, du fait de leur structure algébrique particulière, ces quantités "réagissent" un peu mieux que les fonctions L^1 sous l'action des opérateurs de Caldéron-Zygmund. Ce phénomène à été pour la première fois mis en évidence par H.Wente [We] qui, en étudiant les surfaces à courbure moyenne constante c'est à dire les solutions de (I.10) où H est une fonction constante, observait, au moyen d'une intégration par partie, que l'action de l'inverse du laplacien sur $\mathbb{R}^2$ sur de tels jacobiens engendrait des fonctions uniformément bornées (alors que l'action de l'inverse du laplacien sur une fonction L^1 en dimension 2 engendre des fonctions qui ne sont qu'à variation bornées a priori). L.Tartar donne une nouvelle démonstration de ce résultat dans [Ta1] : au moyen de la transformée de Fourier il établit que le gradient de l'inverse par le laplacien d'un tel jacobien est dans l'espace de Lorentz $L^{2,1}$, dual de l'espace Marcinkiewicz $L^{2,\infty}$ (ou L^2-faible) ce qui, par injection continue, assure que cet inverse est continu. Finallement, suite au travail de S.Müller [Mu] qui mettait en evidence que les jacobiens positifs de fonctions $W^{1,2}$ sont dans l'espace de Orlicz $L\log(L+1)$, R.Coifman, P.L.Lions, Y.Meyer et S.Semmes démontrent que les jacobiens de fonctions $W^{1,2}$ en dimension 2 sont dans l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1$ et que donc, par definition, l'inverse par le laplacien de tels jacobiens génère des fonctions $W^{2,1}$ et donc continues en dimension 2. Précisemment nous avons dans le cas d'un domaine borné par exemple :

Theorem II.2. [We], [Ta1], [CLMS] *Soit ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^2$, a et b deux fonctions sur ω de gradients dans $L^2(\omega)$ alors il existe une unique solution φ, bornée dans $L^\infty(\omega)$, du problème*

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta\varphi = \partial_x a\partial_y b - \partial_y a\partial_x b \quad \text{dans } \omega \\ \\ \varphi = 0 \qquad \text{sur } \partial\omega \end{array}\right. \tag{II.32}$$

Par ailleurs il existe une constante $C(\omega)$ ne dépendant que de ω telle que

$$\|\varphi\|_\infty + \|\varphi\|_{W^{1,2}} + \|\varphi\|_{W^{2,1}} \le C(\omega)\ \|\nabla a\|_{L^2}\ \|\nabla b\|_{L^2}\ . \tag{II.33}$$

et en particulier φ est continue sur ω.

On peut alors appliquer le théorème précédent à u, solution de (II.31), et obtenir ainsi la continuité de u ce qui démontre le résultat de F.Hélein.

Lorsque l'on déforme cette sphère, même "légèrement", et que l'on cherche à démontrer la continuité des applications harmonique d'un domaine bidimensionnel dans cette sphère déformée, la structure de la preuve précédente semble complètement disparaître. F.Hélein introduisit alors la technique des *repères mobiles*. Le désavantage de cette technique est que, en plus d'être assez indirecte, elle ne délivre pas d'éstimée $W^{2,1}$ de la solution (ce genre d'éstimée peut s'avérer en particulier très utile dans l'analyse de la perte de compacité des solutions de l'équation des applications harmoniques - voir [LiR]). Il paraîssait assez peu naturel à l'auteur que cette éstimée disparaîsse instantanément dès lors que l'on déforme la sphère. Par ailleurs il est légitime de se demander ce qu'il reste de cette structure algébrique particulière (II.31) de la non-linéarité de l'équation des applications harmoniques (I.21) lorsque l'on est plus à valeurs dans une sphère ronde.

On considère tout d'abord le cas où N^n est une hypersurface orientée de $\mathbb{R}^K$ (c.a.d. $K = n+1$). L'équation des applications harmoniques à valeur dans N^n (I.21) s'écrit dans ce cas particulier

$$\Delta u + \nu \ \nabla\nu \cdot \nabla u = 0 \ , \tag{II.34}$$

où ν désigne la composition de u avec le vecteur normal unité. En coordonnées (II.34) signifie

$$\forall i = 1 \cdots n+1 \qquad \Delta u^i + \sum_{j=1}^{n+1} \nu^i \ \nabla\nu_j \cdot \nabla\nu^j = 0 \ . \tag{II.35}$$

Inspiré par l'approche décrite plus haut dans le cas de la sphère, il est tentant de soustraire à $\nu^i \ \nabla\nu_j$ la quantité $\nu_j \nabla\nu^i$. C'est en fait possible car les sommes $\sum_{j=1} \nu_j \partial_x u_j$ et $\sum_{j=1} \nu_j \partial_y u_j$ sont toutes les 2 nulles : le vecteur ν est normal à l'espace tangent à l'hypersurface N^n tandis que $\partial_x u$ et $\partial_y u$ sont tous deux tangents à N^n. On a donc finalement une équation dont la structure rappelle fortement celle de (II.30) :

$$\forall i = 1 \cdots n+1 \qquad -\Delta u^i = \sum_{j=1}^{n+1} \left[\nu^i \ \nabla\nu_j - \nu_j \ \nabla\nu^i\right] \cdot \nabla\nu^j \ . \tag{II.36}$$

Cependant il n'y a aucune raison que la divergence du champs de vecteur $\nu^i \ \nabla\nu_j - \nu_j \nabla\nu^i$ soit nulle et il ne semble pas possible a-priori d'identifier le membre de droite de (II.36) comme étant une combinaison linéaire de jacobiens.

La contribution principale de [Ri1] est d'avoir observé que ce n'est pas tant le fait que $div(u^i \ \nabla u_j - u_j \ \nabla u^i)$ soit nul dans le cas de la sphère qui assure la continuité de u mais que cette continuité est d'abord due au caractère antisymétrique de la matrice $(u^i \ \nabla u_j - u_j \ \nabla u^i)_{ij}$ que l'on retrouve dans le cas des hypersurfaces quelconques avec $(\nu^i \ \nabla\nu_j - \nu_j \ \nabla\nu^i)_{ij}$. Cette antisymmétrie dans la non-linéarité est bien plus robuste que la structure "rot-grad". Précisemment nous démontrons dans [Ri1] le résultat suivant :

Theorem II.3. [Ri1] *Soit ω un domaine de $\mathbb{R}^2$, soit u une application de $W^{1,2}(\omega, \mathbb{R}^K)$ et $\Omega = (\Omega^i_j)_{1\le i,j\le K}$ un champs de vecteur dans $L^2(\omega)$ à valeur dans les matrices anti-symétriques (c.a.d. $\Omega \in L^2(\omega, so(K) \otimes \wedge^1\mathbb{R}^2)$). On suppose que u satisfait le système elliptique linéaire*

$$-\Delta u = \Omega \cdot \nabla u \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\omega) \ , \tag{II.37}$$

où en coordonnées (II.37) sécrit $-\Delta u^i = \sum_{j=1}^K \Omega^i_j \cdot \nabla u^j$, alors u est continue sur ω.

Ce résultat s'applique à (II.34) en prenant $\Omega^i_j = \nu^i \ \nabla\nu_j - \nu_j \ \nabla\nu^i$. Il s'applique en fait à toutes les équation d'Euler Lagrange des lagrangiens invariants conforme coercifs à croissance quadratique. Précisemment nous avons

Theorem II.4. *Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, soit N^n une sous variété C^2 orientable fermée de $\mathbb{R}^K$, soit Λ une 2-forme C^1 sur N^n et soit u une application dans $W^{1,2}(\omega, N^n)$ point critique de L^Λ (satisfaisant l'équation (I.20)), alors il existe un champ de vecteur sur ω à valeur dans les matrices antisymétriques d'ordre K, $\Omega \in L^2(\omega, so(K) \otimes \wedge^1\mathbb{R}^2)$ tel que u satisfait (II.37). u est donc une application continue sur ω.*

Ceci démontre la conjecture de Hildebrandt. Par exemple étant donné H une fonction uniformément bornée de $\mathbb{R}^3$ et u une solution de (I.10). On introduit le champs de vecteur suivant à valeur dans les matrices antisymétriques d'ordre 3

$$\Omega := H(u) \begin{pmatrix} 0 & \nabla^\perp u^3 & -\nabla^\perp u^2 \\ -\nabla u^3 & 0 & \nabla^\perp u^1 \\ \nabla^\perp u^2 & -\nabla^\perp u^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{II.38}$$

et on vérifie que u satisfait (II.37) et donc que u est continue.

Une approche naive pour résoudre le théorème II.3 consiste à procéder à la décomposition de Hodge L^2 de Ω et d'obtenir l'existence de fonctions P et ξ dans $W^{1,2}_{loc}(\omega, M_K(\mathbb{R}))$ satisfaisant

$$\Omega = \nabla P + \nabla^\perp \xi \quad \text{dans } \omega\ . \tag{II.39}$$

(II.37) devient alors $-\Delta u = \nabla P \cdot \nabla u + \nabla^\perp \xi \cdot \nabla u$. La quantité $\nabla^\perp \xi \cdot \nabla u$ est combinaison linéaires de jacobien de fonctions dans $W^{1,2}$. Cette quantité est donc favorable, au vue du théorème II.2, pour obtenir la continuité de u. Au contraire il est difficile d'exploiter directement la quantité $\nabla P \cdot \nabla u$, produit scalaires de gradients, dans ce but. L'idée est alors de remplacer la **décomposition de Hodge linéaire** de Ω par la **décomposition de Hodge nonlinéaire** suivante issue de la théorie de Jauge : on cherche P dans $W^{1,2}_{loc}(\omega, SO(K))$ et ξ dans $W^{1,2}_{loc}(\omega, so(K))$ tels que

$$\Omega = P^{-1}\nabla P + P^{-1}\nabla^\perp \xi P \quad \text{dans } \omega \tag{II.40}$$

Ω est alors interprétée comme l'expression d'une connection d'un fibré en $SO(K)$ au dessus de ω relative à une trivialisation et $\nabla^\perp \xi$ est alors l'expression de cette même connection relative à $P-$fois la trivialisation d'origine. La forme particulière de $\nabla^\perp \xi$, rotation de $\pi/2$ d'un gradient, est appelée *jauge de Coulomb* de la connection donnée par Ω. L'avantage substantiel de (II.40) par rapport à (II.39), qui compense son caractère nonlinéaire, est que la structure antisymétrique de Ω est expoitée et "intégrée" pour générer une application P à valeur dans les <u>rotations</u>. Le fait que dans (II.40) P soit à valeur dans les rotations donne "gratuitement" une estimée L^∞ sur P qui ne pouvait provenir du fait que P est dans $W^{1,2}_{loc}$ (qui ne donne à priori qu'une estimée BMO sur P). Ce "petit gain" est expoité de façon fondamentale dans [Ri1] pour démontrer le théorème II.3. L'existence de P et ξ satisfaisant la décomposition de Hodge nonlinéaire (II.40) dans les espaces fonctionnels ad-hoc est donnée par le travail de K.Uhlenbeck [Uhl] sous l'hypothèse que la norme L^2 de Ω est suffisamment petite.

Le deuxième ingrédient de la preuve du théorème II.3 est la découverte de loi de conservations associées à l'équation (II.37) qui permettent d'écrire cette équation sous forme divergence. Précisémment nous avons le théorème suivant dont la démonstration consiste en quelques lignes de calculs.

Theorem II.5. *Soit ω un domaine de $\mathbb{R}^2$, soit $\Omega = (\Omega^i_j)_{1\le i,j\le K}$ un champs de vecteur dans $L^2(\omega)$ à valeur dans les matrices antisymétriques (c.a.d. $\Omega \in L^2(\omega, so(K) \otimes \wedge^1\mathbb{R}^2)$) et soient A et B respectivement dans $W^{1,2}(\omega, Gl_K(\mathbb{R}))$ et $W^{1,2}(\omega, M_K(\mathbb{R})$ ($Gl(K)$ désigne le groupe des matrices réelles inversibles d'ordre K). On suppose que A, B et Ω vérifient l'équation*

$$\nabla A - A\Omega = \nabla^\perp B \tag{II.41}$$

où $A\Omega$ désigne la multiplication matricielle. Alors u dans $W^{1,2}(\omega, \mathbb{R}^K)$ est solution de (II.37) si et seulement si

$$div(A\nabla u + B\nabla^{\perp} u) = 0 \ . \tag{II.42}$$

Par exemple dans le cas des applications harmoniques à valeur dans la sphère S^{K-1}, (II.31) est équivalent à (II.42) en prenant

$$\begin{cases} A = id_K = (\delta^i_j)_{1\le i,j\le K} \\ \\ \nabla^{\perp} B^i_j = u^i \nabla u_j - u_j \nabla u^i \end{cases} \tag{II.43}$$

Dans le cas général, l'existence locale de A et B respectivement dans $W^{1,2}(\omega, Gl_K(\mathbb{R}))\cap L^\infty$ et $W^{1,2}(\omega, M_K(\mathbb{R}))$ est établie dans [Ri1] au moyen de la décomposition de Hodge nonlinéaire de Ω donnée par (II.40). On obtient aussi que A^{-1} est dans $W^{1,2}\cap L^\infty$. La preuve du théorème II.3 se conclut alors ainsi : on a

$$\begin{cases} div(A\nabla u) = \nabla^{\perp} B \cdot \nabla u \\ \\ rot(A\nabla u) = \nabla^{\perp} A \cdot \nabla u \end{cases} \tag{II.44}$$

On observe que les 2 membres de droite des 2 équations de (II.44) sont des jacobiens de fonctions $W^{1,2}$ et nous pouvons alors appliquer le théorème II.2 qui nous dit que $A\nabla u$ est dans $W^{1,1}$. Comme A^{-1} est dans $W^{1,2}\cap L^\infty$ on en déduit que ∇u est dans $W^{1,1}$ ce qui, par injection continue, nous donne la continuité de u.

Depuis la soumission de [Ri1] il a été démontré par M.Struwe et l'auteur que le théorème II.3 se généralise naturellement en dimension plus grande (voir [StR]). Par ailleurs, dans [LaR], T.Lamm et l'auteur ont démontré la continuité des solutions de systèmes linéaires à potentiels antisymmétriques d'ordre m en dimension m : par exemple en dimension 4 les solutions $W^{2,2}$ des équations de la forme

$$\Delta^2 u + \Delta(V\cdot\nabla u) + div(v\ \nabla u) + \Omega\cdot\nabla u = 0$$

où V, v et Ω sont respectivement dans $W^{1,2}$, L^2 et $W^{-1,2}$ et où Ω est supposée antisymétrique sont continues.

Il serait intérressant de voir si le théorème II.3 s'étend aux opérateurs elliptiques dégénérés : soit u une solution $W^{1,m}$ en dimension m à valeur dans $\mathbb{R}^K$ du système

$$-\,div(|\nabla u|^{m-2}\nabla u) = \Omega\cdot|\nabla u|^{m-2}\nabla u \ . \tag{II.45}$$

Sous l'hypothèse que $\Omega\in L^m$ est antisymétrique a-t-on que u est continue ?

Enfin il serait aussi intérréssant d'étudier la propriété de *continuation unique* de l'équation (II.37) sous l'hypothèse que Ω est antisymmétrique : soit u solution $W^{1,2}$ de (II.37) satisfaisant en un point x_0 de ω

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad \exists C_k>0 \quad \text{t.q.} \qquad \int_{B_r(x_0)\cap\omega}|u|^2 \le C_k\ r^k$$

a-t-on $u\equiv 0$ sur la composante connexe de x_0 dans ω ?

Références

[Bet1] Bethuel, Fabrice "Un résultat de régularité pour les solutions de l'équation de surfaces à courbure moyenne prescrite". (French) [A regularity result for solutions to the equation of surfaces of prescribed mean curvature] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 314 (1992), no. 13, 1003–1007.

[BeG1] Bethuel, F. ; Ghidaglia, J.-M. Improved regularity of solutions to elliptic equations involving Jacobians and applications. J. Math. Pures Appl. (9) 72 (1993), no. 5, 441–474.

[BeG2] Bethuel, Fabrice ; Ghidaglia, Jean-Michel "Some applications of the coarea formula to partial differential equations". Geometry in partial differential equations, 1–17, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1994.

[BrC] Brézis, Haim ; Coron, Jean-Michel "Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture". Comm. Pure Appl. Math. 37 (1984), no. 2, 149–187.

[CLMS] Coifman, R. ; Lions, P.-L. ; Meyer, Y. ; Semmes, S. "Compensated compactness and Hardy spaces". J. Math. Pures Appl. (9) 72 (1993), no. 3, 247–286.

[Ev] Evans Craig "Partial regularity for stationary harmonic maps into spheres" Arch. Rat. Mech. Anal. 116 (1991), 101-113.

[Fre] Frehse, Jens "A discontinuous solution of a midly nonlinear elliptic system". Math. Z. 134 (1973), 229-230.

[FMS] Freire Alexandre, Müller Stefan and Struwe Michael "Weak compactness of wave maps and harmonic maps" Ann. Inst. Henri Poincaré 15 (1998), no. 6, 725-754.

[Gr1] Grüter, Michael "Conformally invariant variational integrals and the removability of isolated singularities." Manuscripta Math. 47 (1984), no. 1-3, 85–104.

[Gr2] Grüter, Michael "Regularity of weak H-surfaces". J. Reine Angew. Math. 329 (1981), 1–15.

[HiW] Hildebrandt, Stefan ; Widman, Kjell-Ove "Some regularity results for quasilinear elliptic systems of second order." Math. Z. 142 (1975), 67–86.

[Hei1] Heinz, Erhard "Ein Regularitätssatz für schwache Lösungen nichtlinearer elliptischer Systeme". (German) Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II 1975, no. 1, 1–13.

[Hei2] Heinz, Erhard "Über die Regularität der Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen". (German) Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II 1975, no. 2, 15–26

[Hei3] Heinz, Erhard "Über die Regularität schwacher Lösungen nichtlinearer elliptischer Systeme". (German) [On the regularity of weak solutions of nonlinear elliptic systems] Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II 1986, no. 1, 1–15.

[Hel] Hélein, Frédéric "Harmonic maps, conservation laws and moving frames". Cambridge Tracts in Mathematics, 150. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Hil] Hildebrandt, S. "Nonlinear elliptic systems and harmonic mappings." Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, vol 1,2,3 (Beijing, 1980), 481-615, Science Press, Beijing, 1982.

[Hil2] Hildebrandt, S. "Quasilinear elliptic systems in diagonal form". Systems of nonlinear partial differential equations (Oxford, 1982), 173-217, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 111, Reidel, Dordrecht, 1983.

[JoK] Jost, J ; Karcher, H "Geometrische Methoden zur Gewinnung von a-priori-Schranken für harmonische Abbildungen" Manuscripta Math. 40 (1982), 27-77.x

[Kp] Kilpeläinen, T "Homogeneous and conformally invariant variational integrals" Ann. Acad. Sci. Fenn. A, I. Mat. Diss. 57, (1985).

[LaU] Ladyzhenskaya, Olga A. ; Ural'tseva, Nina N. "Linear and quasilinear elliptic equations". Academic Press, New York-London 1968.

[LaR] Lamm, Tobias ; Rivière, Tristan "Conservation laws for fourth order systems in four dimensions" preprint (2006).

[LiR] Lin, Fang-Hua ; Rivière, Tristan "Energy quantization for harmonic maps". Duke Math. J. 111 (2002), no. 1, 177–193.

[Mo] Morrey, Charles B., Jr. "Multiple integrals in the calculus of variations". Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 130 Springer-Verlag New York, Inc., New York 1966

[Mu] Müller, Stefan "Higher integrability of determinants and weak convergence in L^1". J. Reine Angew. Math. 412 (1990), 20–34.

[Ri1] Rivière, Tristan "Conservation laws for conformally invariant variational problems" preprint (2006).

[Sc1] Schoen, Richard "Analytic aspects of the harmonic map problem" Math. Sci. Res. Inst. Publ. 2 (Seminar on nonlinear partial differential equations, Berkeley, CA, 1983), ed. S.S.Chern, Springer, New-York, 1984, 321-358.

[Sha] Shatah, Jalal Weak solutions and development of singularities of the SU(2) σ-model. Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), no. 4, 459–469.

[StR] Struwe, Michael ; Rivière Tristan "Partial regularity for Harmonic Maps revisited" preprint (2006).

[Ta1] Tartar, Luc "Remarks on oscillations and Stokes' equation. Macroscopic modelling of turbulent flows" (Nice, 1984), 24–31, Lecture Notes in Phys., 230, Springer, Berlin, 1985

[Uhl] Uhlenbeck, Karen K. "Connections with L^p bounds on curvature." Comm. Math. Phys. 83 (1982), no. 1, 31–42.

[We] Wente, Henry C. "An existence theorem for surfaces of constant mean curvature". J. Math. Anal. Appl. 26 1969 318–344.

Department of Mathematics, ETH Zentrum, CH-8093 Zürich, Switzerland.
riviere@math.ethz.ch