Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Bernadette PERRIN-RIOU

Note sur les diviseurs élémentaires du régulateur d'Iwasawa

Tome 33, n[o] 3.2 (2021), p. 1069-1075.

<http://jtnb.centre-mersenne.org/item?id=JTNB_2021__33_3.2_1069_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **33** (2021), 1069–1075

Note sur les diviseurs élémentaires du régulateur d'Iwasawa

par Bernadette PERRIN-RIOU

Résumé. On reprend un résultat de [4, Thm. D] concernant la structure de l'image par l'application régulateur d'Iwasawa du module d'Iwasawa associée à une représentation p-adique semi-stable d'une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ et on en donne une démonstration directe s'appuyant sur les résultats de [7] dans le cas cristallin et de [8] dans le cas semi-stable.

Abstract. The article revisits a result in [4, Thm. D] concerning the structure of the image by the Iwasawa regulator map of the Iwasawa module associated with a semi-stable p-adic representation on an unramified finite extension of $\mathbb{Q}_p$ and gives a direct proof based on the results of [7] in the crystalline case and [8] in the semi-stable case.

Soit p un nombre premier impair, $\mathbb{Q}_{p,n} = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^n})$ le corps de définition sur $\mathbb{Q}_p$ des racines p^n-ièmes de l'unité pour $n \geq 0$, $\mathbb{Q}_{p,\infty} = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ la réunion des $\mathbb{Q}_{p,n}$ et G_∞ le groupe de Galois de $\mathbb{Q}_{p,\infty}/\mathbb{Q}_p$. Rappelons que $G_\infty = \Gamma \times \Delta$ avec Γ isomorphe à $\mathbb{Z}_p$ et Δ d'ordre $p-1$ premier à p. Soit χ le caractère cyclotomique : $G_\infty \to \mathbb{Z}_p^\times$ et ω la projection sur Δ. On fixe un générateur topologique γ de G_∞. En particulier, $\widetilde{\gamma} = \omega(\gamma)^{-1}\gamma$ est un générateur topologique de Γ.

Notons $\mathcal{H}$ l'anneau des séries convergentes sur toute boule $B(\rho) = \{x \in \mathbb{C}_p \text{ tel que } |x|_p \leq \rho\}$ pour $\rho < 1$. Ici, $|\cdot|_p$ est la valeur absolue sur $\mathbb{C}_p$ normalisée par $|p|_p = p^{-1}$. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}^+$, on définit les espaces de fonctions analytiques :

$$\mathcal{H}^I = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n \text{ t.q. } a_n \in \mathbb{Q}_p \text{ et } \lim_{n\to\pm\infty} |a_n| r^n = 0 \text{ pour tout } r \in I \right\}.$$

Pour $f \in \mathcal{H}^I$ et $\rho \in I$, on pose $\|f\|_\rho = \sup_{|x|=\rho}|f(x)| = \sup_n |a_n|\rho^n$. On munit $\mathcal{H}^I$ de la topologie de convergence uniforme sur l'ensemble des x tels que $|x|_p \in J$ pour J sous-ensemble fermé de I. Les espaces $\mathcal{H}^I$ sont complets. La réunion des $\mathcal{H}^{[\rho,1[}$ pour $\rho \in [0,1[$ munie de la topologie de la

Manuscrit reçu le 6 février 2020, révisé le 13 mars 2020, accepté le 25 avril 2020.
Classification Mathématique (2010). 11R23, 11F80.
Mots-clefs. Iwasawa, regulator, cristallin.

limite inductive est l'anneau $\mathcal{R}$ de Robba. L'anneau $\mathcal{B}$ introduit dans [8] est le sous-espace de $\mathcal{R}$ formé des éléments f d'ordre fini, c'est-à-dire tels qu'il existe un entier r tel que $\|p^{rn}f\|_{\rho^{1/p^n}}$ tend vers 0 pour ρ entre 0 et 1 dans le domaine de convergence. On note $\mathfrak{o}(f)$ (resp. $\mathfrak{O}(f)$) la borne inférieure des réels r tels que la suite $\|p^{rn}f\|_{\rho^{1/p^n}}$ tend vers 0 (resp. est bornée) lorsque n tend vers l'infini.

Introduisons comme dans [8] les anneaux des polynômes en $\log x$ à coefficients dans $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{B}$. Ici, $\log x$ est une branche du logarithme, c'est-à-dire n'importe quelle fonction localement analytique sur $\mathbb{C}_p - \{0\}$ vérifiant $\log xy = \log x + \log y$ et dont la dérivée en 1 est 1. On munit ces espaces de la topologie induite par la convergence coefficient par coefficient. Ces espaces sont munis d'un opérateur φ induit par $x \to (1+x)^p - 1$. Soit ψ le pseudo-inverse de φ caractérisé par

$$\varphi \circ \psi(f) = p^{-1} \sum_{\zeta \in \mu_p} f(\zeta(1+x) - 1)\,.$$

L'anneau $\mathcal{H}$ est à diviseurs élémentaires, ce qui signifie que toute matrice admet une réduction diagonale : pour toute matrice A à coefficients dans $\mathcal{H}$, il existe des matrices unimodulaires P et Q telles que $PAQ = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots)$ avec $(d_i) \subset (d_{i+1})$ ([2, 3]). Ainsi, si M est un $\mathcal{H}$-module de type fini et N un sous-$\mathcal{H}$-module de M de type fini, il existe une base $E_1, \dots, E_d$ de M et des éléments $f_1, \dots, f_d$ de $\mathcal{H}$ vérifiant $f_d \mid \cdots \mid f_i \mid \cdots \mid f_1$ et tels que $f_1E_1, \dots, f_dE_d$ soit un système générateur de N. On note $[M : N] = [f_1; \dots; f_d]$, suite des diviseurs élémentaires définis à une unité près.

On note $\mathbb{Z}_p[\![\Gamma]\!]$ (resp. $\mathcal{H}(\Gamma)$, $\mathcal{B}(\Gamma)$) l'image de $\mathbb{Z}_p[\![x]\!]$ (resp. $\mathcal{H}$, $\mathcal{B}$) par l'application $x \mapsto \widetilde{\gamma}-1$ et $\mathbb{Z}_p[\![G_\infty]\!] = \mathbb{Z}_p[\Delta]\otimes\mathbb{Z}_p[\![\Gamma]\!]$, $\mathcal{H}(G_\infty) = \mathbb{Z}_p[\Delta]\otimes\mathcal{H}(\Gamma)$, $\mathcal{B}(G_\infty) = \mathbb{Z}_p[\Delta] \otimes \mathcal{B}(\Gamma)$. La *transformée de Mellin–Amice* induite par $\gamma \mapsto (1+x)^{\chi(\gamma)}$ définit une application $\mathbb{Z}_p[\![G_\infty]\!] \to \mathbb{Z}_p[\![x]\!] : f \mapsto f \cdot (1+x)$ qui se prolonge en un homomorphisme de $\mathcal{H}(G_\infty)$ dans $\mathcal{H}$ dont l'image est $\mathcal{H}^{\psi=0}$. L'image de $\mathcal{H}(\Gamma)$ est égale à $\varphi(\mathcal{H})(1+x)$. Le groupe Δ permute les $\varphi(\mathcal{H})(1+x)^i$. Si M est un $\mathbb{Z}_p[\![G_\infty]\!]$-module et δ un caractère de Δ dans $\mathbb{Z}_p^\times$, M^δ désigne la composante isotypique de M relatif à δ et e_δ le projecteur associé de M dans M^δ.

On pose $\omega_n = (1+x)^{p^n} - 1$ pour $n \geq 0$, $\xi_n = \omega_n/\omega_{n-1} = \sum_{i=0}^{p-1}(1+x)^{ip^{n-1}}$ pour $n \geq 1$. On fixe une unité p-adique $u = \chi(\widetilde{\gamma})$ générateur de $1 + p\mathbb{Z}_p$. Cela induit un unique homomorphisme d'anneaux $\chi_u : \mathbb{Z}_p[\![x]\!] \to \mathbb{Z}_p$ tel que $u = \chi_u(1+x)$. Si j est un entier et si $f \in \mathcal{H}$, on note $Tw_u^{-j}(f) = f(u^{-j}(1+x)-1)$ Ainsi, $Tw_u^{-j}(\omega_n) = u^{-jp^n}(1+x)^{p^n} - 1$. On pose

$$\ell_j = \frac{\log u^{-j}\gamma}{\log u} = \frac{\log \gamma}{\log u} - j \in \mathcal{H}(G_\infty)\,.$$

On a donc $\chi^k(\ell_j) = k - j$, $\chi^j(\ell_j) = 0$. Vu comme élément de $\mathcal{H}$, on a

$$\ell_j = \frac{\log u^{-j}(1+x)}{\log u} = \frac{\log(1+x)}{\log u} - j = Tw_u^{-j}(\log(1+x)) \in \mathcal{H}\,.$$

La restriction $\ell_{j,\rho}$ de ℓ_j à la couronne $C_\rho = \{x \in \mathbb{C}_p \text{ tel que } |x|_p = \rho\}$ est une unité dans $\mathcal{H}^{[\rho,\rho]}$ sauf si ρ est de la forme $p^{-\frac{1}{p^{n-1}(p-1)}}$ avec $n \geq 1$. Dans ce cas, $\ell_{j,\rho}$ est irréductible et égal à une unité près à $Tw_u^{-j}(\xi_n)/p$.

Soit K une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ et σ l'homomorphisme de Frobenius associé agissant sur K. Si $\mathcal{D}$ est un φ-module de dimension finie sur K (c'est-à-dire un espace vectoriel sur K muni d'un opérateur φ σ-linéaire), on choisit une norme sur $\mathcal{D}$; si $g \in \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{D}$, on définit $\mathfrak{o}_\varphi(g)$ (resp. $\mathfrak{O}_\varphi(g)$) comme la borne inférieure des réels r tels que la suite $\|p^{rn}(1\otimes\varphi)^{-n}g\|_{\rho^{1/p^n}}$ tend vers 0 (resp. est bornée) lorsque n tend vers l'infini. Cette définition ne dépend pas de la norme choisie et s'étend à $\mathcal{B}[\log(x)] \otimes \mathcal{D}$ en considérant que $\|(1\otimes\varphi)^{-n}\log(x)\|_{\rho^{1/p^n}} \asymp_{n\to\infty} p^{-n}$.

Soit V une représentation p-adique semi-stable du groupe de Galois absolu de G_K, de dimension finie d et soit $\mathcal{D}$ le (φ, N)-module filtré associé par la théorie de Fontaine : c'est donc un K-espace vectoriel de dimension d muni d'un opérateur φ, d'un opérateur N nilpotent tel que $N\varphi = p\varphi N$ et d'une filtration décroissante exhaustive et séparée $\mathrm{Fil}^\bullet$. Notons r un entier ≥ 1 tel que $\mathcal{D} = \mathrm{Fil}^{-r}\mathcal{D}$ et r^* un entier ≥ 0 tel que $\mathrm{Fil}^{r^*+1}\mathcal{D} = 0$ (si $r^* = 0$, les sauts de la filtration sont donc négatifs ou nuls). Il est naturel de prendre si possible pour r (resp. r^*) le plus petit entier vérifiant $\mathcal{D} = \mathrm{Fil}^{-r}\mathcal{D}$ (resp. $\mathrm{Fil}^{r^*}\mathcal{D} \neq 0$). Notons $-r_d \leq \cdots \leq -r_i \leq \cdots \leq -r_1$ les poids de la filtration $\mathcal{D}$ comptés avec multiplicité : on a $-r \leq -r_d$ et $-r_1 \leq r^*$. Si k est un poids de la filtration ($\mathrm{Fil}^k\mathcal{D} \neq \mathrm{Fil}^{k+1}\mathcal{D}$), la dimension de $\mathrm{Fil}^k\mathcal{D}$ sur K est égale au nombre d'entiers i tels que $k \leq -r_i$ et la dimension de $\mathrm{Fil}^k\mathcal{D}/\mathrm{Fil}^{k+1}\mathcal{D}$ est égale au nombre d'entiers i tels que $k = -r_i$.

Dans [8, §2], sont associés à $\mathcal{D}$ des $\mathcal{H}(G_\infty)$-modules

$$\mathcal{D}_{\infty,e}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}_{\infty,g}(\mathcal{D})$$

contenus dans $(\mathcal{B}[\log x]^{\psi=0} \otimes \mathcal{D})^{N=0}$, de rang d (Δ-composante par Δ-composante) et munis d'une action de φ induite par $1\otimes\varphi$ (le fait que $\mathcal{D}$ est relié à une représentation p-adique ne sert pas dans ces définitions). Lorsque l'opérateur N est nul sur $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D})$ peut simplement être défini comme $\mathcal{H}^{\psi=0}\otimes\mathcal{D}$ et est donc isomorphe à $\mathcal{H}(G_\infty)\otimes\mathcal{D}$ par la transformée de Mellin–Amice. Dans le cas où N est non nul, $\mathcal{D}_{\infty,g}(\mathcal{D})$ est le sous-module des éléments g de $(\mathcal{B}[\log x]^{\psi=0}\otimes\mathcal{D})^{N=0}$ tels qu'il existe $r \in \mathbb{Z}$ pour lequel l'équation $(1-p^r\varphi\otimes\varphi)G = D^r(g)$ a une solution dans $(\mathcal{B}[\log x]\otimes\mathcal{D})^{N=0,\psi=p^r(1\otimes\varphi)}$ (avec D la dérivation $(1+x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$). Sous l'hypothèse qu'aucune valeur propre de φ n'est une puissance de p (voir [8, §2.3.1] pour la définition technique de $\mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D})$ en général), $\mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_{\infty,g}(\mathcal{D})$ et est encore isomorphe à $\mathcal{H}^{\psi=0} \otimes \mathcal{D}$.[1]

Soit $H^1_{Iw}(K,V)$ le module d'Iwasawa associé à V : si T est un réseau de V stable par G_K, $H^1_{Iw}(K,V)$ est la limite projective des groupes de cohomologie $H^1(K(\mu_{p^n}),T)$ tensorisée par $\mathbb{Q}_p$. Le module de torsion de $H^1_{Iw}(K,V)$ est isomorphe à $V^{G_{K_\infty}}$ et $H^2_{Iw}(K,V)$ est isomorphe à $V^*(1)^{G_{K_\infty}}$ par la dualité de Tate. Soit $\Omega_{V,r}$ l'homomorphisme de $\mathcal{H}(G_\infty)$-modules

$$\Omega_{V,r} : \mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D}) \to \mathcal{H}(G_\infty) \otimes H^1_{Iw}(K,V)/V^{G_{\mathbb{Q}_\infty}}$$

défini dans [5] dans le cas cristallin et dans [8] dans le cas semi-stable.

Les deux théorèmes suivants sont une conséquence de la loi de réciprocité démontrée par Colmez ([1], voir aussi [6, §5] dans le cas cristallin et [8, 5.3.6] dans le cas semi-stable) et sont démontrés dans [7, Thm. 2.5.2]) (cas cristallin) et dans [8, Thm. B2 et Prop. 5.4.5]) :

Théorème 1. *Notons $\delta_r(\Omega_V)$ le déterminant de $\Omega_{V,r}$ calculé dans une base du $\mathcal{H}(G_\infty)$-module*

$$\det{}_{\mathcal{H}(G_\infty)} \mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D}) \otimes \left(\det{}_{\mathbb{Q}_p\otimes\Lambda} H^1_{Iw}(K,V)\right)^{-1} \otimes \det{}_{\mathbb{Q}_p\otimes\Lambda} H^2_{Iw}(K,V) \ .$$

Alors

$$\prod_{-r^*\leq j<r} \ell_j^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Fil}^{-j}\mathcal{D}} \delta_r(\Omega_V) = \mathcal{H}(G_\infty) \ .$$

Théorème 2. *Soit $x \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes H^1_{Iw}(K,V)$. Il existe un unique élément $\mathcal{L}_{V,r^*}(x)$ de $\mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D})$ tel que*

$$\Omega_{V,r}\left(\mathcal{L}_{V,r^*}(x)\right) = \prod_{-r^*\leq j<r} \ell_j . x \bmod \mathit{torsion} \tag{0.1}$$

et on a $\mathfrak{o}_\varphi\left(\mathcal{L}_{V,r^*}(x)\right) = \mathfrak{o}(x) + r^*$ et $\mathfrak{O}_\varphi\left(\mathcal{L}_{V,r^*}(x)\right) = \mathfrak{O}(x) + r^*$.

Il est facile de vérifier que $\mathcal{L}_{V,r^*}(x)$ ne dépend pas de r vérifiant $\mathrm{Fil}^{-r}\mathcal{D} = \mathcal{D}$ et que

$$\mathcal{L}_{V,r^*+s}(x) = \prod_{-r^*-s\leq j<-r^*} \ell_j \mathcal{L}_{V,r^*}(x) \ .$$

On a ainsi défini un $\mathcal{H}(G_\infty)$-morphisme

$$\mathcal{L}_{V,r^*} : \mathcal{H}(G_\infty) \otimes H^1_{Iw}(K,V) \to \mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D}) \ .$$

Lorsque $V^{G_{K_\infty}} = 0$, $H^2_{Iw}(K,V)$ est nul car isomorphe à $V^*(1)^{G_{K_\infty}} = 0$ et $H^1_{Iw}(K,V)$ n'a pas de $\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda$-torsion.

[1] Il est démontré dans [8] le résultat suivant que nous énonçons pour simplifier dans le cas où aucune valeur propre de φ n'est une puissance de p. Soit $\Theta_k = \lim_{n\to\infty} p^{kn}\psi^n(\log^k x) \in \mathcal{B}[\log x]$ et soit Θ l'opérateur de $\mathcal{B}[\log x] \otimes \mathcal{D}$ défini par $\Theta = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\Theta_k \cdot (1\otimes N)^k = \lim_{n\to\infty} \psi^n \exp\left(-p^n \log(x) \cdot (1 \otimes N)\right)$. Modulo les identifications du type transformée de Mellin–Amice, $(1-\varphi\otimes\varphi) \circ \Theta \circ (1-\varphi\otimes\varphi)^{-1}$. définit un isomorphisme $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathcal{D} \to \mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D})$.

Proposition 3. *Si $V^{G_{K_\infty}} = 0$, l'annulateur du $\mathcal{H}(G_\infty)$-module*

$$\mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D})/\mathcal{L}_{V,r^*}\Big(\mathcal{H}(G_\infty) \otimes H^1_{Iw}(K,V)\Big)$$

est l'idéal engendré par $\prod_{-r^* \le j < r_d} \ell_j$.

On peut voir cette proposition comme une propriété de « semi-simplicité » de $\mathcal{L}_{V,r^*}$: l'annulateur n'a que des facteurs simples.

Démonstration. On déduit des théorèmes 1 et 2 que si $g \in \mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D})$, $(\prod_{-r^* \le j < r_d} \ell_j)g$ appartient à l'image de $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes H^1_{Iw}(K,V)$ par $\mathcal{L}_{V,r^*}$. En effet, en appliquant Ω_{V,r_d} à l'équation (0.1), on a

$$\Omega_{V,r_d}\left(\mathcal{L}_{V,r^*}(\Omega_{V,r_d}(g))\right) = \left(\prod_{-r^* \le j < r_d} \ell_j\right) \Omega_{V,r_d}(g)\,.$$

L'injectivité de Ω_{V,r_d} qui se déduit du théorème 1 (voir aussi [5, théorème du paragraphe 3.2]), implique que

$$\left(\prod_{-r^* \le j < r_d} \ell_j\right) g = \mathcal{L}_{V,r^*}\left(\Omega_{V,r_d}(g)\right)) \in \mathcal{L}_{V,r^*}\Big(\mathcal{H}(G_\infty) \otimes H^1_{Iw}(K,V)\Big).$$

Ainsi, $\prod_{-r^* \le j < r_d} \ell_j$ annule $\mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D})/\mathcal{L}_{V,r^*}\big(\mathcal{H}(G_\infty) \otimes H^1_{Iw}(K,V)\big)$.

Montrons maintenant que $\prod_{-r^* \le j < r_d} \ell_j$ est l'exposant de

$$\mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D})/\mathcal{L}_{V,r^*}\Big(\mathcal{H}(G_\infty) \otimes H^1_{Iw}(K,V)\Big).$$

Pour cela, on travaille composante par composante de $\mathcal{H}(G_\infty) = \bigoplus_{\delta \in \widehat{\Delta}} e_\delta \mathcal{H}(\Gamma)$. Soit δ un caractère de Δ et soit F un élément de $\mathcal{H}(\Gamma)$ annulant

$$e_\delta\Big(\mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D})/\mathcal{L}_{V,r^*}\Big(\mathcal{H}(G_\infty) \otimes H^1_{Iw}(K,V)\Big)\Big).$$

En prenant le pgcd de F et de $\prod_{-r^* \le j < r_d} \ell_j$ (on utilise une identité de Bezout), on peut supposer que F est un diviseur de $\prod_{-r^* \le j < r_d} \ell_j$. Notons Q le quotient de $\prod_{-r^* \le j < r_d} \ell_j$ par F. Soit y un élément de $e_\delta \mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D})$. Il existe $x \in e_\delta \mathcal{H}(G_\infty) \otimes H^1_{Iw}(K,V)$ tel que $Fy = \mathcal{L}_{V,r^*}(x)$. Par définition de $\mathcal{L}_{V,r^*}$, $F\Omega_{V,r_d}(y) = (\prod_{-r^* \le j < r_d} \ell_j)x$ et $\Omega_{V,r_d}(y) = Qx$. Donc, l'image de $e_\delta \Omega_{V,r_d}$ est contenue dans $Q\mathcal{H}(\Gamma) \otimes e_\delta H^1_{Iw}(K,V)$. On a

$$\begin{aligned} e_\delta \mathcal{H}(G_\infty) &= \prod_{-r^* \le j < r_d} \ell_j^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Fil}^{-j} \mathcal{D}} e_\delta \det \Omega_{V,r} \\ &\subset \prod_{-r^* \le j < r_d} \ell_j^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Fil}^{-j} \mathcal{D}} Q^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{D}} e_\delta \mathcal{H}(G_\infty)\,, \end{aligned}$$

d'où l'inclusion

$$\left(\prod_{-r^*\leq j<r_d} \ell_j^{\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^{-j}\mathcal{D}}\right) e_\delta\mathcal{H}(G_\infty) \subset Q^{\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{D}} e_\delta\mathcal{H}(G_\infty)\,.$$

On en déduit que si R est un diviseur irréductible de Q, donc divisant un des ℓ_j pour un entier j tel que $-r^* \leq j < r_d$, on a nécessairement $\dim \mathrm{Fil}^{-j}\mathcal{D} \geq \dim \mathcal{D}$, ce qui est impossible puisque $\mathrm{Fil}^{-j}\mathcal{D} \neq \mathcal{D}$ pour un tel j. Donc Q est une unité dans $e_\delta\mathcal{H}(G_\infty)$. □

Proposition 4. *Supposons $V^{G_{K_\infty}} = 0$. Le déterminant de $\mathcal{L}_{V,r^*}$ calculé dans des bases de $\mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D})$ et de $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes H^1_{Iw}(K,V)$ est le $\mathcal{H}(G_\infty)$-idéal engendré par*

$$\prod_{-r^*\leq j<r} \ell_j^{[K:\mathbb{Q}_p](\dim\mathcal{D}-\dim \mathrm{Fil}^{-j}\mathcal{D})} = \prod_{-r^*\leq j<r} \ell_j^{[K:\mathbb{Q}_p]\#\{i|j<r_i\}}.$$

Démonstration. Le déterminant de $\mathcal{L}_{V,r^*}$ est égal à $\prod_{-r^*\leq j<r} \ell_j^{\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{D}}\delta_r(\Omega_V)$ et donc par le théorème 1 à

$$\begin{aligned}\prod_{-r^*\leq j<r} \ell_j^{\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{D}} \prod_{-r^*\leq j<r} \ell_j^{-\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^{-j}\mathcal{D}} &= \prod_{-r^*\leq j<r} \ell_j^{[K:\mathbb{Q}_p]\dim\mathcal{D}/\mathrm{Fil}^{-j}\mathcal{D}}\\ &= \prod_{-r^*\leq j<r} \ell_j^{[K:\mathbb{Q}_p]\#\{i|j<r_i\}}.\end{aligned}$$ □

Théorème 5. *On suppose que $\mathcal{D}^{\varphi=p^j} = 0$ pour tout entier $j \in \mathbb{Z}$. La suite des diviseurs élémentaires des $e_\delta\mathcal{H}(G_\infty)$-modules*

$$e_\delta\mathcal{L}_{V,r^*}\Big(\mathcal{H}(G_\infty)\otimes H^1_{Iw}(K,V)\Big) \subset e_\delta\mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D})$$

est

$$\left[\prod_{-r^*\leq j<r_d}\ell_j\ ;\ \dots\ ;\ \prod_{-r^*\leq j<r_i}\ell_j\ ;\ \dots\ ;\ \prod_{-r^*\leq j<r_1}\ell_j\right],$$

chaque terme étant répété $[K:\mathbb{Q}_p]$ fois.

Démonstration. Vérifions que le résultat est compatible avec la valeur du déterminant. Le produit des $\prod_{-r^*\leq j<r_i}\ell_j$ est égal à

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{d}\prod_{-r^*\leq j<r_i}\ell_j = \prod_{-r^*\leq j<r_d}\ell_j^{\#\{i|j<r_i\}} &= \prod_{-r^*\leq j<r_d}\ell_j^{\dim\mathcal{D}/\mathrm{Fil}^{-j}\mathcal{D}}\\ &= \prod_{-r^*\leq j}\ell_j^{\dim\mathcal{D}/\mathrm{Fil}^{-j}\mathcal{D}},\end{aligned}$$

et $\prod_{i=1}^d(\prod_{-r^*\leq j<r_i}\ell_j)^{[K:\mathbb{Q}_p]}$ est bien égal au déterminant de $\mathcal{L}_{V,r^*}$. Posons $\tilde{d} = [K:\mathbb{Q}_p]d$. Notons $[f_1;\dots;f_{\tilde{d}}]$ la suite des diviseurs élémentaires de

$e_\delta\mathcal{L}_{V,r^*}(\mathcal{H}(G_\infty)\otimes H^1_{Iw}(K,V))\subset e_\delta\mathcal{D}_{\infty,f}(\mathcal{D})$. Le générateur $\prod_{-r^*\leq j<r_d}\ell_j$ de son exposant est égal à f_1. Soit $0\leq\rho<1$. Comme les f_i divisent f_1, on peut écrire dans la couronne C_ρ

$$f_{1,\rho}=u_1\prod_{-r^*\leq j<r_d}\ell_{j,\rho}^{\alpha_{j,1,\rho}}\quad,\ldots,\quad f_{\tilde{d},\rho}=u_{\tilde{d}}\prod_{-r^*\leq j<r_d}\ell_{j,\rho}^{\alpha_{j,r,\rho}}$$

avec $(\alpha_{j,s,\rho})_s$ des suites décroissantes d'entiers égaux à 0 ou 1 et u_s des unités dans C_ρ. Les $\ell_{j,\rho}$ sont des unités sur C_ρ sauf si $\rho=p^{-\frac{1}{(p-1)p^{n-1}}}$ pour un entier $n\geq 1$; dans ce cas, $\ell_{j,\rho}$ est égal à une unité près à $\xi_n(u^{-j}(1+x)-1)$ qui est ρ-dominant (les zéros sont les $u^j\zeta-1$ pour ζ racine de l'unité d'ordre p^n). Le nombre $n_{j,\rho}$ d'entiers s tels que $\alpha_{j,s,\rho}=1$ suffit à déterminer les $\alpha_{j,1,\rho},\ldots,\alpha_{j,r,\rho}$. En comparant à la valeur du déterminant, on a (à une unité près)

$$\prod_{s=1}^{\tilde{d}}f_{s,\rho}\sim\prod_{-r^*\leq j<r_d}\ell_{j,\rho}^{n_{j,\rho}}\sim\prod_{-r^*\leq j<r_d}\ell_{j,\rho}^{\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{D}/\operatorname{Fil}^{-j}\mathcal{D}}.$$

Les $n_{j,\rho}$ sont donc bien déterminés : $n_{j,\rho}=\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{D}/\operatorname{Fil}^{-j}\mathcal{D}$, ainsi que les $\alpha_{j,s,\rho}$ (en particulier, ils ne dépendent pas de ρ). On en déduit le théorème. $\square$

Bibliographie

[1] P. Colmez, « Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham », *Ann. Math.* **148** (1998), n° 2, p. 485-571.

[2] I. Kaplansky, « Elementary divisors and modules », *Trans. Am. Math. Soc.* **66** (1949), p. 464-491.

[3] M. Larsen, W. Lewis & T. Shores, « Elementary divisor rings and finitely presented modules », *Trans. Am. Math. Soc.* **187** (1974), p. 231-248.

[4] A. Lei, D. Loeffler & S. L. Zerbes, « Coleman maps and the p-adic regulator », *Algebra Number Theory* **5** (2011), n° 8, p. 1095-1131.

[5] B. Perrin-Riou, « Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local », *Invent. Math.* **115** (1994), n° 1, p. 81-150, avec un appendice de J.-M. Fontaine.

[6] ———, « Théorie d'Iwasawa et loi explicite de réciprocité : un remake d'un article de P. Colmez », *Doc. Math.* **4** (1999), p. 215-269.

[7] ———, « Représentations p-adiques et normes universelles : I. le cas cristallin », *J. Am. Math. Soc.* **13** (2000), n° 3, p. 533-551.

[8] ———, *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques semi-stables*, Mémoires de la Société Mathématique de France, vol. 84, Société Mathématique de France, 2001, vi+111 pages.

Bernadette Perrin-Riou
Université Paris-Saclay, CNRS
Laboratoire de mathématiques d'Orsay
91405, Orsay, France
E-mail: bernadette.perrin-riou@universite-paris-saclay.fr