

JOURNAL

de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Alain CONNES

L'hyperanneau des classes d'adèles

Tome 23, n° 1 (2011), p. 71-93.

http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2011__23_1_71_0

© Société Arithmétique de Bordeaux, 2011, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://jtnb.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

L'hyperanneau des classes d'adèles

par ALAIN CONNES

RÉSUMÉ. J'exposerai ici quelques résultats récents (obtenus en collaboration avec C. Consani [3], [4], [5], [6]) qui portent sur le cas limite de la "caractéristique 1". Le but principal est de montrer que l'espace des classes d'adèles d'un corps global, qui jusqu'à présent n'a été considéré que comme un espace (non-commutatif), admet en fait une structure algébrique naturelle. Nous verrons également que la construction de l'anneau de Witt d'un anneau de caractéristique $p > 1$ admet un analogue en caractéristique 1 et que la déformation de la structure additive implique de manière cruciale l'entropie.

ABSTRACT. *The hyperring of adèle classes.*

I present here some recent results (obtained in collaboration with C. Consani [3], [4], [5], [6]) about the "characteristic 1" limit case. The main goal is to prove that the adèle class space of a global field, which, up to now, has only been considered as a non-commutative space, has in fact a natural algebraic structure. We will also see that the construction of the Witt ring in characteristic $p > 1$ has a characteristic 1 analogue and that the deformation of the additive structure implies, in a crucial manner, the entropy function.

1. Position du Problème

Un corps global (*i.e.* un corps discret cocompact dans un anneau semi-simple localement compact non-discret) est soit

- (1) Un corps de caractéristique $p > 1$.
- (2) Un corps de nombres algébriques.

La théorie des corps globaux \mathbb{K} de caractéristique $p > 1$, s'appuie sur leur signification géométrique : un tel corps est un "corps de fonctions" sur la courbe projective non-singulière sur le corps de constantes $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{K}$ obtenue en dotant l'espace des valuations de $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$ d'une structure d'espace annelé convenable. L'utilisation de la géométrie permet, dans ce cas, de résoudre nombre de problèmes que l'on ne sait toujours pas aborder pour les corps de nombres.

De plus, bien des formules, comme celles qui donnent la cardinalité des Grassmanniennes sur un corps fini \mathbb{F}_q , sont données par une expression rationnelle qui admet une valeur intéressante pour $q = 1$.

Ces deux indications suggèrent de chercher un objet mathématique qui soit une limite non-triviale des corps de Galois \mathbb{F}_q pour $q = 1$. La terminologie reste floue tant que le but, qui est d'obtenir un analogue de l'outil géométrique en caractéristique $p > 1$ n'est pas atteint. Motivé par ce problème, C. Soulé a associé à toute fonction de dénombrement $N(q)$ une fonction zêta, en suivant les pionniers Steinberg et Tits, *i.e.* en prenant une limite quand $q \rightarrow 1$,

$$(1.1) \quad \zeta_N(s) := \lim_{q \rightarrow 1} Z(q, q^{-s})(q-1)^{N(1)}, \quad s \in \mathbb{R}$$

où $Z(q, q^{-s})$ est la valeur en $T = q^{-s}$ de la fonction de Hasse-Weil

$$(1.2) \quad Z(q, T) := \exp \left(\sum_{r \geq 1} N(q^r) \frac{T^r}{r} \right).$$

Pour que ces formules aient un sens il faut que la fonction $N(q)$ soit définie pour toute valeur $q \geq 1$ et pas seulement sur l'ensemble des puissances d'un nombre premier p comme en caractéristique p . Dans des cas simples de variétés rationnelles comme l'espace projectif \mathbb{P}^n où $N(q) = 1 + q + \dots + q^n$ la fonction $N(q)$ se prolonge sans ambiguïté, $\zeta_N(s)$ est simple à calculer et donne le résultat attendu, par exemple $\frac{1}{s(s-1)}$ pour \mathbb{P}^1 . Ceci est le cas pour les variétés sous-jacentes aux groupes de Chevalley qui doivent donc être définies sur \mathbb{F}_1 . Nous avons montré dans [3] que la notion de variété sur \mathbb{F}_1 introduite par Soulé [33] passe ce premier test de toute théorie de \mathbb{F}_1 .

Mais la "courbe" $C = \overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$ (sur \mathbb{F}_1) dont la compréhension est la vraie motivation arithmétique de cette recherche est beaucoup plus subtile, car par exemple la fonction zêta correspondante doit être la fonction zêta de Riemann (complète)

$$\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s).$$

L'on peut glaner des renseignements précieux sur C en calculant la fonction de dénombrement $N(q)$ telle que les équations (1.1) et (1.2) donnent $\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$ *i.e.* que

$$(1.3) \quad \zeta_N(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s).$$

Dans les exemples simples de variétés rationnelles la valeur $N(1)$ en $q = 1$ de la fonction de dénombrement donne la caractéristique d'Euler. Comme la courbe C doit être de genre infini (car la fonction zêta de Riemann a une infinité de zéros) on doit donc avoir $N(1) = -\infty$ de sorte que (1.1) n'a pas

de sens. Ce problème disparaît quand on remplace la formule limite (1.1) en passant à la dérivée logarithmique ce qui donne l'équation intégrale

$$(1.4) \quad \frac{\partial_s \zeta_N(s)}{\zeta_N(s)} = - \int_1^\infty N(u) u^{-s} d^*u, \quad d^*u = \frac{du}{u}.$$

Les équations (1.3) et (1.4) permettent alors de déterminer la fonction $N(q)$. L'on trouve une *distribution* sur l'intervalle $[1, \infty[$ (vue comme variété à bord). Cette distribution est *positive* à l'intérieur et prend la valeur $-\infty$ au bord $1 \in [1, \infty[$ comme nous l'avons montré dans [4].

Théorème 1.1. *La distribution $N(u)$ telle que*

$$-\frac{\partial_s \zeta_{\mathbb{Q}}(s)}{\zeta_{\mathbb{Q}}(s)} = \int_1^\infty N(u) u^{-s} d^*u,$$

est positive sur $]1, \infty)$ et donnée sur $[1, \infty)$ par

$$(1.5) \quad N(q) = q - \frac{d}{dq} \left(\sum_{\rho \in Z} \text{ordre}(\rho) \frac{q^{\rho+1}}{\rho+1} \right) + 1$$

où Z est l'ensemble des zéros non-triviaux de zêta et la dérivée est prise au sens des distributions.

Ainsi, à une constante additive près, une primitive $J(q)$ de la distribution $N(q)$ est donnée par la fonction mesurable

$$J(u) = \frac{u^2}{2} - \sum_Z \text{ordre}(\rho) \frac{u^{\rho+1}}{\rho+1} + u = \frac{u^2}{2} - \omega(u) + u$$

Ici, $\omega(u)$ est définie comme limite des sommes finies

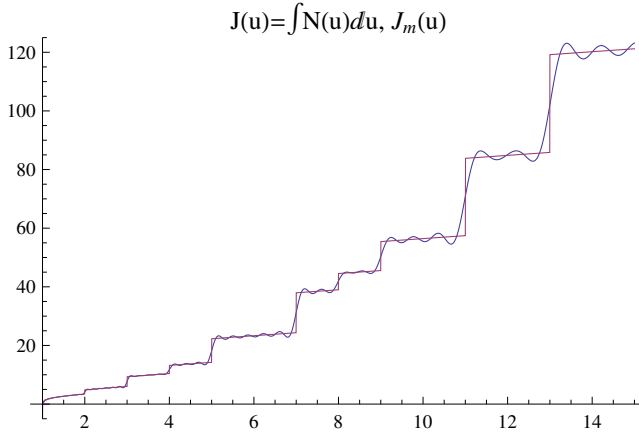
$$\omega(u) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\rho \in Z_m} \text{ordre}(\rho) \frac{u^{\rho+1}}{\rho+1}$$

sur l'ensemble symétrique Z_m des $2m$ premiers zéros. La fonction $J(u)$ est croissante pour $u > 1$ et discontinue en $u = 1$. Sa valeur en 1 est finie alors que $J(u) \rightarrow -\infty$ quand $u \rightarrow 1+$. On a en fait

$$N(1) = 2 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\omega(1+\epsilon) - \omega(1)}{\epsilon} \sim -\frac{1}{2} E \log E, \quad E = \frac{1}{\epsilon}$$

dont le comportement quand $\epsilon \rightarrow 0$ reproduit la répartition des zéros de zêta. On peut réécrire (1.5) en utilisant une limite au sens des distributions, comme

$$(1.6) \quad N(q) = q - \sum_{\rho \in Z} \text{ordre}(\rho) q^\rho + 1$$

FIGURE 1.1. Primitive de $N(u)$ et approximation par

$$J_m(u) = \frac{u^2}{2} - \sum_{Z_m} \text{ordre}(\rho) \frac{u^{\rho+1}}{\rho+1} + u$$

$J(u)$ change de signe pour $u \sim 1.0050692$.

en parfaite analogie avec le cas des corps de fonctions. En effet soit X une courbe lisse sur le corps fini \mathbb{F}_q . Pour tout $q = q_0^\ell$ le nombre de points de X sur \mathbb{F}_q est donné par

$$\#X(\mathbb{F}_q) = N(q) = q - \sum_{\alpha \in Z} \text{ordre}(\alpha) \alpha^\ell + 1, \quad , \forall q = q_0^\ell$$

où les α sont les valeurs propres complexes du polynôme caractéristique de l'action du Frobenius sur la cohomologie de la courbe. Posant $\alpha = q_0^\rho$, $\rho \in Z$, on a donc

$$\#X(\mathbb{F}_q) = N(q) = q - \sum_{\rho \in Z} \text{ordre}(\rho) q^\rho + 1$$

qui est identique à (1.6).

Les résultats ci-dessus montrent la cohérence de la quête d'une théorie géométrique sur \mathbb{F}_1 , mais ils indiquent aussi des nuances importantes avec la géométrie sur un corps fini \mathbb{F}_q . Par exemple la fonction de dénombrement $N(q)$ n'est plus à valeurs entières. De plus dans le cas des corps de fonctions, cette fonction, du fait qu'elle compte le nombre de points de la courbe sur une extension de \mathbb{F}_q vérifie $N(q^k) \leq N(q^\ell)$ quand k divise ℓ . Ceci n'est plus le cas pour la distribution $N(u)$ de (1.6) qui se décompose sous la forme

$$(1.7) \quad \int_1^\infty f(u) N(u) d^*u = \sum \Lambda(n) f(n) + \int_1^\infty f(u) \kappa(u) d^*u$$

où $\Lambda(n)$ est la fonction de von-Mangoldt et la distribution $\kappa(u) = \frac{u^2}{u^2-1}$ est définie comme valeur principale convenable en $u = 1$. Cette fonction décroît vers 1 quand $u \rightarrow \infty$. Ceci montre qu'il serait vain de chercher une interprétation de $N(q)$ en comptant naïvement les points fixes d'un flot. En fait le passage de (1.7) à l'égalité (1.5) est une application typique des formules explicites de Riemann-Weil

$$(1.8) \quad \hat{g}(0) + \hat{g}(1) - \sum_{\rho \in Z} \text{ordre}(\rho) \hat{g}(\rho) = \\ = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \log p g(p^m) + \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\log \pi}{2}\right) g(1) + \int_1^{\infty} \frac{t^2 g(t) - g(1)}{t^2 - 1} d^*t$$

où $\hat{g}(s) = \int_1^{\infty} g(u) u^s d^*u$. Si on l'applique à $g = F_x$ telle que

$$F_x(u) = u \text{ pour } u \in [1, x], \quad F_x(u) = 0 \text{ pour } u > x$$

le terme de gauche donne (à une constante près) la primitive $J(x)$ de la fonction $N(x)$. La dérivée $\partial_x F_x$ est une distribution $g_x(u) = u \delta_x(u)$ caractérisée par

$$\int b(u) g_x(u) d^*u = b(x).$$

Ainsi pour exprimer $N(q)$ comme la trace $\text{Tr}_{\text{distr}}(\vartheta_q)$ *i.e.* comme un nombre d'intersection du graphe d'une représentation ϑ_q avec la diagonale il s'agit d'écrire les formules explicites comme formules de trace. L'interprétation des formules explicites comme formule de trace, initiée dans [2], donne la formule cherchée pour $N(q)$ comme trace d'un flot agissant sur l'espace des classes d'adèles *i.e.* comme une formule de Lefschetz. Cette formule implique un terme nouveau qui mesure la transversalité du flot et rend compte du terme $\kappa(u)$ pour l'orbite périodique associée à la place archimédienne. On notera que ceci n'est possible que parce que l'espace des classes d'adèles ne se réduit pas à la réunion des orbites périodiques comme pour les points de la courbe dans le cas des corps de fonctions. On obtient ainsi, sinon la courbe C elle même, du moins une contrepartie par l'isomorphisme du corps de classes, comme un espace construit en termes adéliques et muni d'une action du groupe $C_{\mathbb{K}}$ des classes d'idèles. On sait depuis Weil que les formules explicites deviennent élégantes sur le groupe des classes d'idèles. Soit \mathbb{K} un corps global, α un caractère nontrivial de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}$ et $\alpha = \prod \alpha_v$ ses facteurs locaux. Soit $h \in \mathcal{S}(C_{\mathbb{K}})$ à support compact. Alors

$$(1.9) \quad \hat{h}(0) + \hat{h}(1) - \sum_{\chi \in \widehat{C_{\mathbb{K},1}}} \sum_{Z_{\tilde{\chi}}} \hat{h}(\tilde{\chi}, \rho) = \sum_v \int'_{\mathbb{K}_v^{\times}} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u$$

où la partie finie \int' est normalisée par α_v et $\hat{h}(\chi, z) = \int h(u) \chi(u) |u|^z d^*u$.

La formule (1.9) devient une formule de traces sur l'espace des classes d'adèles qui est le quotient $M = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^{\times}$. Le groupe $C_{\mathbb{K}}$ des classes d'idèles

agit sur M par multiplication et donne une représentation

$$\vartheta(u)\xi(x) = \xi(u^{-1}x)$$

sur un espace fonctionnel convenable. La partie géométrique de la formule de traces s'écrit

$$(1.10) \quad \mathrm{Tr}_{\mathrm{distr}} \left(\int h(u)\vartheta(u)d^*u \right) = \sum_v \int_{\mathbb{K}_v^\times} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u.$$

Soit $(x, u) \in M \times C_{\mathbb{K}} \mid ux = x$, avec $u \neq 1$. Il existe $v \in \Sigma_{\mathbb{K}}$ tel que

$$x \in \mathfrak{p}_v = \{x \in M \mid x_v = 0\}.$$

Le groupe d'isotropie de tout $x \in \mathfrak{p}_v$ contient

$$\mathbb{K}_v^\times \subset C_{\mathbb{K}}, \quad \mathbb{K}_v^\times = \{(k_w) \mid k_w = 1 \ \forall w \neq v\}.$$

L'espace transverse à $\mathfrak{p}_v \subset M$ est le corps local \mathbb{K}_v . Le groupe d'isotropie $I_v = \mathbb{K}_v^\times$ agit sur l'espace transverse comme \mathbb{K}_v^\times agit sur \mathbb{K}_v par multiplication. Ceci permet de comprendre les termes locaux de la formule de Weil. En effet pour un opérateur de la forme $(T\xi)(x) = \int k(x, y)\xi(y)dy$, la trace au sens des distributions est donnée par $\mathrm{Tr}_{\mathrm{distr}}(T) = \int k(x, x)dx$. Pour l'opérateur $\vartheta(u^{-1})$ on a $k(x, y) = \delta(ux - y)$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{\mathrm{distr}}(\vartheta(u^{-1})) &= \int k(x, x)dx = \int \delta(ux - x)dx \\ &= \frac{1}{|1-u|} \int \delta(z)dz = \frac{1}{|1-u|} \end{aligned}$$

ce qui, après intégration de $h(u^{-1})\vartheta(u^{-1})$, correspond au terme $\int_{\mathbb{K}_v^\times} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u$ de la formule de Weil.

2. Intermède : trois avatars

Revenons à des considérations simples. Comme il est difficile de concevoir un "corps" sans les éléments 0 et 1, il est naturel, dans la recherche d'une limite intéressante des corps \mathbb{F}_q pour $q = 1$, de chercher à compléter par une structure additive convenable la structure du monoïde $\{0, 1\}$ muni de la table de multiplication usuelle $0 \times 0 = 0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$ et $1 \times 1 = 1$. L'addition doit vérifier $0 + x = x + 0 = x$ pour tout x et il ne reste qu'à spécifier $1 + 1$. Il y a 4 cas :

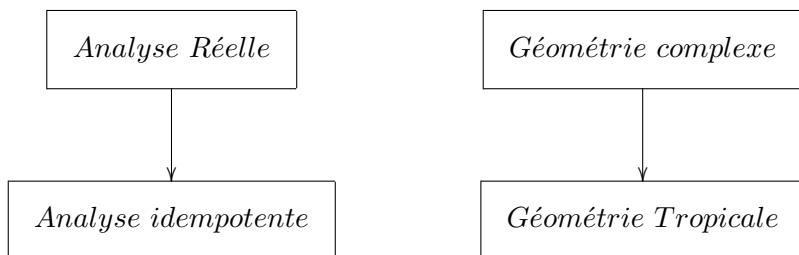
Notation	$1 + 1$	Objet
\mathbb{F}_2	0	Corps
\mathbb{F}_1	\emptyset	Monoïde
\mathbb{B}	1	Semi-corps
\mathbf{K}	$\{0, 1\}$	Hypercorps

Le premier cas est celui de la caractéristique 2, mais de manière surprenante chacun des trois autres fournit un point de vue intéressant.

$\boxed{\mathbb{F}_1}$: Ce premier point de vue est celui de la géométrie des monoïdes initiée par K. Kato en 94 et reprise dans le contexte de \mathbb{F}_1 , dans les années 2000, par A. Deitmar, N. Kurokawa, H. Ochiai, M. Wakayama, B. Töen et M. Vaquié. L'addition n'a de sens que pour $0 + x = x + 0 = x$ ce qui permet tout de même de multiplier des matrices dont chaque ligne a au plus un élément non nul. Nous avons montré dans [4] comment ce point de vue se relie à la notion de variété sur \mathbb{F}_1 développée par C. Soulé [33]. Il conduit (cf. §3) à une compactification naturelle $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1(M)$ de l'espace $M = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^\times$ des classes d'adèles d'un corps global \mathbb{K} en considérant M comme un monoïde et en passant de la droite affine à l'espace projectif de dimension un, en utilisant le \mathbb{F}_1 -schéma $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1$. Nous montrons que la réalisation spectrale des zéros des fonctions L , l'équation fonctionnelle et les formules explicites apparaissent naturellement en calculant la cohomologie des faisceaux de fonctions sur $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1(M)$. Plus précisément, la cohomologie $H^1(\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1, \Omega)$ du faisceau Ω des fonctions complexes sur l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1(M)$ donne la réalisation spectrale des zéros des fonctions L et la symétrie associée à l'équation fonctionnelle.

$\boxed{\mathbb{B}}$: Ce deuxième point de vue est attribué à Zhu par Lescot [26] dans le contexte de \mathbb{F}_1 . Le semi-corps \mathbb{B} est en fait un objet très classique de la théorie des semi-anneaux [16] et il resterait d'un intérêt limité sans l'analyse idempotente. Cette théorie utilise, au lieu du corps \mathbb{R} des nombres réels,

le semi-corps \mathbb{R}_+^{\max} qui est l'extension de \mathbb{B} obtenue en utilisant comme addition dans \mathbb{R}^+ l'opération $\max(x, y)$ alors que la multiplication reste inchangée. Elle fournit un cadre très naturel pour la thermodynamique et l'analogie de la transformation de Fourier est la transformation de Legendre. Un des avantages de la théorie est que l'on peut calculer avec des matrices. De plus on a un résultat au premier abord étonnant : une matrice "générique" *i.e.* dont tout élément est non-nul, admet une et une seule valeur propre. L'analyse idempotente est intimement reliée à la géométrie tropicale. Dans notre contexte elle fournit l'analogie en caractéristique 1 des automorphismes de Frobenius des corps parfaits, ainsi que l'analogie des anneaux de vecteurs de Witt, qui implique l'entropie comme nous le verrons brièvement au §4.



K : Ce troisième point de vue est nouveau. Il est basé sur la notion d'hyperanneau inventée par Krasner dans le contexte de la théorie du corps de classe, pour approximer un corps local de caractéristique non-nulle par des corps locaux de caractéristique zéro. Dans notre contexte il dévoile la vraie nature de l'espace des classes d'adèles, c'est un hyperanneau, extension de l'hypercorps \mathbf{K} . En fait un hyperanneau de la forme R/G (où R est un anneau et $G \subset R^\times$ un sous-groupe du groupe des unités) est une extension de \mathbf{K} si et seulement si $G \cup \{0\}$ est un sous-corps de R . La géométrie algébrique sur \mathbf{K} est duale dans le cas affine d'une catégorie qui contient à la fois celle des algèbres (sur un corps), celle des groupes abéliens et les géométries non arguesiennes homogènes. Nous avons montré que le groupoïde $P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ des éléments premiers de l'hyperanneau $\mathbb{H}_{\mathbb{K}} = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^\times$ sous l'action du groupe $C_{\mathbb{K}} = \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^\times$ des unités, est, en caractéristique $p > 1$, isomorphe de manière équivariante et canonique au groupoïde $\Pi_1^{\text{ab}}(X)' \subset \Pi_1^{\text{ab}}(X)$ des lacets du revêtement $X^{\text{ab}} \rightarrow X$ associé à l'extension abélienne maximale \mathbb{K}^{ab} de \mathbb{K} munie de l'action du groupe de Weil : $\mathcal{W}^{\text{ab}} \subset \text{Gal}(\mathbb{K}^{\text{ab}} : \mathbb{K})$.

3. $\mathfrak{M}\mathfrak{o}$ -schémas

La théorie des $\mathfrak{M}\mathfrak{o}$ -schémas se développe en parallèle avec celle des schémas et remonte à K. Kato, A. Deitmar, N. Kurokawa, H. Ochiai, M. Wakayama, B. Töen et M. Vaquié. On note $\mathfrak{M}\mathfrak{o}$ la catégorie des monoïdes commutatifs M (notés multiplicativement) avec élément neutre 1 et élément absorbant 0 (*i.e.* $0 \cdot x = 0$, $\forall x \in M$). Un homomorphisme $\varphi : M \rightarrow N$ dans $\mathfrak{M}\mathfrak{o}$ est unifié (*i.e.* $\varphi(1) = 1$) et vérifie $\varphi(0) = 0$. Un idéal I d'un monoïde M est un sous-ensemble $I \subset M$ tel que $0 \in I$ et :

$$(3.1) \quad x \in I \implies xy \in I, \forall y \in M.$$

Un idéal $\mathfrak{p} \subset M$ est *premier* ssi son complément $\mathfrak{p}^c \neq \emptyset$ est multiplicatif *i.e.*

$$(3.2) \quad x \notin \mathfrak{p}, y \notin \mathfrak{p} \implies xy \notin \mathfrak{p}.$$

Un espace monoïdal est un couple (X, \mathcal{O}_X) où

- X est un espace topologique
- \mathcal{O}_X est un faisceau de monoïdes.

Les notions de morphismes, de spectre premier $\text{Spec } M$, et de schéma géométrique, s'adaptent directement (*cf.* [12]). La topologie de $\text{Spec } M$ a pour base les ouverts

$$D(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } M \mid f \notin \mathfrak{p}\}.$$

On appelle $\mathfrak{M}\mathfrak{o}$ -foncteur tout foncteur covariant de la catégorie $\mathfrak{M}\mathfrak{o}$ vers la catégorie des ensembles. Un morphisme de $\mathfrak{M}\mathfrak{o}$ -foncteurs, $\phi : X \rightarrow Y$ est une transformation naturelle, *i.e.* une application (ensembliste)

$$\phi_M : X(M) \rightarrow Y(M), \forall M$$

compatible avec les homomorphismes $\rho : M \rightarrow M'$. Tout $\mathfrak{M}\mathfrak{o}$ -foncteur est local, de sorte que la seule condition pour qu'un $\mathfrak{M}\mathfrak{o}$ -foncteur soit un $\mathfrak{M}\mathfrak{o}$ -schéma est qu'il admette un recouvrement par des sous-foncteurs ouverts et affines. Un sous-foncteur Y du $\mathfrak{M}\mathfrak{o}$ -foncteur X , (*i.e.* on a une inclusion $Y(M) \subset X(M)$ pour tout objet M de $\mathfrak{M}\mathfrak{o}$) est ouvert dans X ssi pour tout morphisme $\varphi : \text{Spec}(M) \rightarrow X$ il existe un idéal $I \subset M$ tel que pour tout objet N de $\mathfrak{M}\mathfrak{o}$ et tout $\rho \in \text{Spec}(M)(N) = \text{Hom}_{\mathfrak{M}\mathfrak{o}}(M, N)$ on ait :

$$\varphi(\rho) \in Y(N) \subset X(N) \Leftrightarrow \rho(I)N = N.$$

Soit X un $\mathfrak{M}\mathfrak{o}$ -foncteur. On dit qu'une famille X_α de sous-foncteurs de X recouvre X si pour tout groupe abélien H l'ensemble $X(\mathbb{F}_1[H])$ est la réunion des $X_\alpha(\mathbb{F}_1[H])$.

Théorème 3.1. *Tout $\mathfrak{M}\mathfrak{o}$ -schéma X est associé à un espace spectral (unique) $|X|$*

$$X(M) = \text{Hom}(\text{Spec } M, |X|), \forall M.$$

De plus l'ensemble sous-jacent à $|X|$ s'identifie canoniquement à $X(\mathbb{F}_1)$.

Nous utiliserons la projection canonique $X(M) \rightarrow |X|$ définie pour tout M par

$$(3.3) \quad \pi_M : X(M) \rightarrow |X|, \quad \pi_M(\phi) = \phi(\mathfrak{p}_M), \quad \forall \phi \in \text{Hom}_{\mathfrak{M}\mathfrak{o}}(\text{Spec}(M), X)$$

où \mathfrak{p}_M est l'idéal premier maximal de M . Pour tout ouvert U de $|X|$ on a

$$(3.4) \quad U(M) = \pi_M^{-1}(U) \subset X(M)$$

où U est le sous-foncteur de X associé à U .

3.1. Le $\mathfrak{M}\mathfrak{o}$ -schéma $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1$. On prend le $\mathfrak{M}\mathfrak{o}$ -schéma $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1$. En tant que foncteur il est donné, pour tout monoïde M , en recollant deux copies de M sur M^\times par $x \mapsto x^{-1}$,

$$(3.5) \quad \mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1(M) = M \cup_{M^\times} M.$$

Sa réalisation géométrique (cf. [12], [4]) i.e. l'espace topologique $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1$ a trois points

$$(3.6) \quad \mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1 = \{0, u, \infty\}, \quad \overline{\{0\}} = \{0\}, \quad \overline{\{u\}} = \mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1, \quad \overline{\{\infty\}} = \{\infty\}$$

et trois ouverts U_\pm et $U = U_+ \cap U_-$ dans $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1$

$$(3.7) \quad U_+ = \mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1 \setminus \{\infty\}, \quad U_- = \mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1 \setminus \{0\}, \quad U = U_+ \cap U_-.$$

3.2. Le monoïde $M = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^\times$ des classes d'adèles. Soit \mathbb{K} un corps global. Le produit dans l'anneau des adèles passe au quotient et donne une structure naturelle de monoïde,

$$(3.8) \quad M = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^\times, \quad \mathbb{K}^\times = \text{GL}_1(\mathbb{K}).$$

Le groupe $C_{\mathbb{K}}$ des classes d'idèles est le groupe M^\times des éléments inversibles de M . On peut donc appliquer le foncteur $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1$ et considérer $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1(M) = M \cup_{M^\times} M$. La projection canonique (3.3)

$$(3.9) \quad \pi_M : \mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1(M) = M \cup_{M^\times} M \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1$$

associe $u \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1$ à tout élément de $M^\times = C_{\mathbb{K}}$ et 0 ou ∞ aux autres éléments de $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1(M)$.

3.3. Le Faisceau Ω sur $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1$ des demi-densités sur $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1(M)$. Pour obtenir un espace naturel $\mathcal{S}(M)$ de fonctions sur M on considère l'espace des coinvariants pour l'action de \mathbb{K}^\times donnée par $f_q(x) = f(qx)$ sur l'espace de Bruhat-Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{K}})$ de fonctions à valeurs complexes. Plus précisément on part de la suite exacte

$$(3.10) \quad 0 \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{K}})_0 \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{K}}) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}[1] \rightarrow 0$$

où $\epsilon(f) = (f(0), \int f(x)dx) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}[1]$ est \mathbb{K}^\times -invariante et l'on pose

$$(3.11) \quad \mathcal{S}(M) = \mathcal{S}_0(M) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}[1], \quad \mathcal{S}_0(M) = \mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{K}})_0 / \overline{\{f - f_q\}}$$

où $\overline{\{f - f_q\}}$ est la fermeture du sous-espace engendré par les $f - f_q$, $q \in \mathbb{K}^\times$.

On définit ensuite un faisceau Ω sur $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1$ en posant

$$\begin{aligned}\Gamma(U_+, \Omega) &= \mathcal{S}(M) \\ \Gamma(U_-, \Omega) &= \mathcal{S}(M) \\ \Gamma(U_+ \cap U_-, \Omega) &= \mathcal{S}_\infty(C_{\mathbb{K}})\end{aligned}$$

où $\mathcal{S}_\infty(C_{\mathbb{K}})$ est, pour les corps de nombres

$$(3.12) \quad \mathcal{S}_\infty(C_{\mathbb{K}}) = \bigcap_{\beta \in \mathbb{R}} \mu^\beta \mathcal{S}(C_{\mathbb{K}}) = \{f \in \mathcal{S}(C_{\mathbb{K}}) \mid \mu^\beta f \in \mathcal{S}(C_{\mathbb{K}}), \forall \beta \in \mathbb{R}\},$$

où $\mu \in C(C_{\mathbb{K}})$ est le module $\mu : C_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $\mu^\beta(g) = \mu(g)^\beta$ et $\mathcal{S}(C_{\mathbb{K}})$ l'espace de Bruhat-Schwartz (cf. [10], [31]). Les applications de restriction à $U = U_+ \cap U_-$ sont nulles sur les composantes $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}[1]$ et données par :

$$\begin{aligned}(\text{Res } f)(g) &= \sum_{q \in \mathbb{K}^\times} f(qg), \quad \forall f \in \mathcal{S}_0(M) \subset \Gamma(U_+, \Omega) \\ (\text{Res } h)(g) &= |g|^{-1} \sum_{q \in \mathbb{K}^\times} h(qg^{-1}), \quad \forall h \in \mathcal{S}_0(M) \subset \Gamma(U_-, \Omega).\end{aligned}$$

3.4. Réalisation spectrale sur $H^1(\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1, \Omega)$. Les égalités suivantes définissent une action de $C_{\mathbb{K}}$ sur le faisceau Ω

$$\begin{aligned}\vartheta_+(\lambda)f(x) &= f(\lambda^{-1}x), \quad \forall f \in \Gamma(U_+, \Omega) \\ \vartheta_-(\lambda)f(x) &= |\lambda|f(\lambda x), \quad \forall f \in \Gamma(U_-, \Omega) \\ \vartheta(\lambda)f(x) &= f(\lambda^{-1}x), \quad \forall f \in \Gamma(U_+ \cap U_-, \Omega).\end{aligned}$$

Le générateur $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ du groupe de Weyl W de PGL_2 agit sur $C_{\mathbb{K}}$ par l'automorphisme $g \mapsto g^{-1}$ de ce groupe abélien, ce qui donne un sens au produit semi-direct $N = C_{\mathbb{K}} \rtimes W$. Il agit sur $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1$ en échangeant 0 et ∞ . L'action de w sur le faisceau Ω est donnée par :

$$\begin{aligned}w^\# f &= f \in \Gamma(U_-, \Omega), \quad \forall f \in \Gamma(U_+, \Omega) \\ w^\# f &= f \in \Gamma(U_+, \Omega), \quad \forall f \in \Gamma(U_-, \Omega) \\ w^\# f(g) &= |g|^{-1}f(g^{-1}), \quad \forall f \in \Gamma(U_+ \cap U_-, \Omega)\end{aligned}$$

qui envoie Ω vers $w_*\Omega$.

Proposition 3.1. *Il existe une unique action du produit semi-direct $N = C_{\mathbb{K}} \rtimes W$ sur le faisceau Ω donnée comme ci-dessus sur W et sur $C_{\mathbb{K}}$ par la représentation $\vartheta[-\frac{1}{2}]$ obtenue comme produit tensoriel de ϑ par la représentation $\mu^{-1/2}$ de $C_{\mathbb{K}}$.*

Le complexe de Čech du recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\pm\}$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1$ a deux termes

$$\begin{aligned}C^0 &= \Gamma(U_+, \Omega) \times \Gamma(U_-, \Omega) \\ C^1 &= \Gamma(U_+ \cap U_-, \Omega).\end{aligned}$$

On introduit la notation $\Sigma(f)(x) = \sum_{q \in \mathbb{K}^\times} f(qx)$. Alors, le cobord $\partial : C^0 \rightarrow C^1$ est donné par

$$(3.13) \quad \partial(f, h)(g) = \Sigma(f)(g) - |g|^{-1} \Sigma(h)(g^{-1}) \in C^1.$$

Soit α un caractère nontrivial du groupe additif $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}$. Le réseau $\mathbb{K} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ est son propre dual. La transformation de Fourier

$$(3.14) \quad F(f)(a) = \int f(x) \alpha(ax) dx$$

est définie canoniquement modulo le sous-espace $\{f - f_q\}$, *i.e.* elle ne dépend plus du choix de α .

Théorème 3.2. *Le noyau de $\partial : C^0 \rightarrow C^1$ est le graphe de la transformée de Fourier*

$$(3.15) \quad H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1, \Omega) = \{(f, F(f)) \mid f \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{K}})_0 / \overline{\{f - f_q\}}\} \oplus 2\mathbb{C} \oplus 2\mathbb{C}[1].$$

La représentation $\vartheta[-\frac{1}{2}]$ de $C_{\mathbb{K}}$ sur $H^1(\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}^1, \Omega)$ donne la réalisation spectrale des zéros des fonctions L . Cette représentation est invariante par la symétrie $\chi(g) \mapsto \chi(g^{-1})$ du groupe des Grössencharakter du corps global \mathbb{K} .

4. Caractéristique $p = 1$, entropie et anneau de Witt

Le but de cette section est de présenter l'analogie en caractéristique $p = 1$, développé dans [5], de la construction fonctorielle de Witt. Nous rappelons d'abord brièvement cette construction. Soit p un nombre premier. Soient $S_n \in \mathbb{Z}[x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n]$ les polynômes de Witt définis par

$$(4.1) \quad x_0^{p^n} + px_1^{p^{n-1}} + \dots + p^n x_n + y_0^{p^n} + \dots + p^n y_n = S_0^{p^n} + pS_1^{p^{n-1}} + \dots + p^n S_n.$$

Soit alors R un p -anneau strict, $S = R/pR$ l'anneau résiduel et $\tau : S \rightarrow R$ le relèvement de Teichmüller $\tau(x) = [x]$. Considérons l'anneau $S[[T]]$ des séries formelles en T à coefficients dans S . L'application τ donne une bijection de $S[[T]]$ avec R ,

$$(4.2) \quad \tilde{\tau}(\sum s_n T^n) = \sum \tau(s_n) p^n \in R.$$

Comme S est de caractéristique p , il contient \mathbb{F}_p et on a

$$(4.3) \quad \mathbb{F}_p[[T]] \subset S[[T]].$$

Soit alors

$$(4.4) \quad I_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([0, 1] \cap p^{-n} \mathbb{Z}).$$

Théorème 4.1. *Il existe une application $w_p : I_p \rightarrow \mathbb{F}_p[[T]]$ telle que pour tous $x, y \in S$ on ait*

$$(4.5) \quad \tau(x) + \tau(y) = \tilde{\tau}(\sum_{\alpha \in I_p} w_p(\alpha) x^\alpha y^{1-\alpha}).$$

Ce résultat se généralise et donne une application

$$(4.6) \quad w_p(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{F}_p[[T]] \quad \forall \alpha_j \in I_p, \sum \alpha_j = 1$$

telle que

$$(4.7) \quad \sum_{i=1}^k \tau(z_i) = \tilde{\tau} \left(\sum_{\sum \alpha_j = 1} w_p(\alpha_1, \dots, \alpha_k) z_1^{\alpha_1} \cdots z_k^{\alpha_k} \right).$$

Passons à la caractéristique 1. Un semi-anneau A est un monoïde pour l'addition et la multiplication, avec éléments unité 0 et 1, et la multiplication est distributive par rapport à l'addition. Il est de *caractéristique 1* quand

$$(4.8) \quad x + x = x, \quad \forall x \in A.$$

Un semi-anneau A est *simplifiable* si la multiplication par tout $x \neq 0$ est injective. On a alors ([16])

Proposition 4.1. *Soit A un semi-anneau simplifiable de caractéristique 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, l'application $\vartheta_n(x) = x^n$ est un endomorphisme injectif de A .*

Nous dirons que A est *parfait* quand ϑ_n est surjectif pour tout n . On a alors un groupe à un paramètre $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$ d'automorphismes $\vartheta_\lambda \in \text{Aut}(A)$ tels que

- $\vartheta_n(x) = x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A$.
- $\vartheta_\lambda \circ \vartheta_\mu = \vartheta_{\lambda\mu}$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}_+^*$.
- $\vartheta_\lambda(x)\vartheta_\mu(x) = \vartheta_{\lambda+\mu}(x)$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}_+^*$ et $x \in A$.

Nous utiliserons la notation $\vartheta_\lambda(x) = x^\lambda$. Bien entendu \mathbb{B} est parfait, un autre exemple important est \mathbb{R}_+^{\max} obtenu ainsi. Si l'on transmue les lois d'addition et de multiplication dans le semi-corps \mathbb{R}_+ par l'application bijective $x \mapsto x^p$ (avec $p > 0$) les semi-corps obtenus ont une limite quand $p \rightarrow \infty$. C'est le semi-corps \mathbb{R}_+^{\max} , *i.e.* l'ensemble $[0, \infty)$ muni de la multiplication usuelle et de la nouvelle addition donnée par

$$(4.9) \quad x + y := \max(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Pour obtenir l'analogie de la construction de l'anneau de Witt dans le cadre des semi-anneaux parfaits de caractéristique 1, on recherche les fonctions $w(\alpha) \in A$ définies pour $\alpha \in I = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ qui rendent associative et commutative l'opération

$$(4.10) \quad x +' y = \sum_{\alpha \in I} w(\alpha) x^\alpha y^{1-\alpha}.$$

Outre la condition de symétrie

$$(4.11) \quad w(1 - \alpha) = w(\alpha)$$

on obtient l'équation fonctionnelle

$$(4.12) \quad w(\alpha)w(\beta)^\alpha = w(\alpha\beta)w(\gamma)^{(1-\alpha\beta)}, \quad \gamma = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}.$$

La solution générale de cette équation est donnée par

Proposition 4.2. *Soient G un groupe abélien uniquement divisible et $w : I \rightarrow G$, avec $w(0) = w(1) = 1 \in G$. Pour que w vérifie (4.11) et (4.12), il faut et il suffit qu'il existe un homomorphisme $\chi : \mathbb{Q}_+^\times \rightarrow G$ tel que*

$$(4.13) \quad w(\alpha) = \chi(\alpha)^\alpha \chi(1-\alpha)^{1-\alpha}, \quad \forall \alpha \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}.$$

L'homomorphisme χ est déterminé par les $\chi(p) \in G$ quand p parcourt l'ensemble des nombres premiers. Dans le cas qui nous intéresse le groupe G est le groupe des éléments inversibles d'un semi-anneau de caractéristique 1 parfait. Dans ce cas le groupe est ordonné par la relation $x + y = y$ notée $x \leq y$.

Théorème 4.2. *Soit G un groupe abélien ordonné uniquement divisible et tel que l'action $x \mapsto x^\alpha$ de \mathbb{Q}^\times sur G par divisibilité se prolonge en une action de \mathbb{R}^\times . Soit $w : I \rightarrow G$ une solution de (4.11) et (4.12) telle que*

$$(4.14) \quad w(\alpha) \geq 1, \quad \forall \alpha \in I.$$

Il existe alors $\rho \in G, \rho \geq 1$ tel que

$$(4.15) \quad w(\alpha) = \rho^{-\alpha \log \alpha - (1-\alpha) \log(1-\alpha)}, \quad \forall \alpha \in I.$$

On démontre l'inégalité suivante sur les $\chi(p)$. Pour deux nombres premiers p_j , soit $\frac{n_2}{n_1}$ une approximation diophantienne de $\frac{\log p_1}{\log p_2}$ telle que $\alpha = p_1^{n_1} p_2^{-n_2} < 1$, on a $\chi(p_2) \leq \chi(p_1)^{\frac{n_1}{n_2} \alpha}$.

On reconnaît dans la formule (4.15), l'entropie

$$(4.16) \quad S(\alpha) = -\alpha \log \alpha - (1-\alpha) \log(1-\alpha)$$

qui est une fonction strictement concave de $\alpha \in [0, 1]$ qui joue un rôle fondamental en thermodynamique, dans la théorie de l'information et celle des systèmes dynamiques.

Dans le cadre ci-dessus des semi-anneaux A de caractéristique 1, nous associons à $\rho \in A, \rho \geq 1$, une métrique $d(x, y)$ construite en utilisant la relation $x + y = y$ notée $x \leq y$, et telle que

$$(4.17) \quad d(x, y) = \inf \{ \alpha \mid x \leq y\rho^\alpha, y \leq x\rho^\alpha \}.$$

Elle est finie sur les intervalles $[\rho^{-n}, \rho^n]$. Nous noterons A_ρ la réunion de $\{0\}$ et des séparés complétés des intervalles $[\rho^{-n}, \rho^n]$.

Théorème 4.3. Soit $\rho \in A$, $\rho > 1$ un élément inversible. Alors la formule

$$x +_{\rho} y := \sum_{\alpha \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \rho^{S(\alpha)} x^{\alpha} y^{1-\alpha}, \quad \forall x, y \in A_{\rho}$$

définit une loi associative sur A_{ρ} avec 0 comme élément neutre. La multiplication est distributive pour cette addition et le groupe de Grothendieck du monoïde $(A_{\rho}, +_{\rho})$ est une algèbre normée $W(A, \rho)$ sur \mathbb{R} qui dépend fonctoriellement de (A, ρ) .

Ainsi, après complétion de l'algèbre normée, cet analogue de la construction de Witt en caractéristique 1 donne une algèbre de Banach commutative à laquelle on peut appliquer le Théorème de Gel'fand qui montre qu'elle possède des caractères κ à valeurs dans \mathbb{C} . On démontre que pour tout caractère on a $\kappa(\rho) = e$ où $e = 2.71828 \dots$ est le nombre d'Euler.

5. Arithmétique de l'hyperanneau $\mathbb{H}_{\mathbb{K}} = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^{\times}$ des classes d'adèles

Nous exposons, dans cette section, les résultats de [6] qui montrent que la notion d'hyperanneau introduite par M. Krasner permet de comprendre la structure algébrique de l'espace $\mathbb{H}_{\mathbb{K}} = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^{\times}$ des classes d'adèles d'un corps global \mathbb{K} . Il faut bien entendu commencer par accepter que la loi de groupe additif d'un anneau soit remplacée par une opération $x, y \mapsto x + y \subset \mathbb{H}$ à valeurs dans les sous-ensembles non vides de \mathbb{H} . La notion d'hypergroupe est due à Marty [30] et la commutativité et l'associativité ont le sens usuel. Les deux axiomes qui remplacent l'existence et l'unicité de l'opposé $-x$ de x sont

- (1) $\forall x \in H \quad \exists! y (= -x) \in H \quad \text{t.q.} \quad 0 \in x + y$
- (2) $x \in y + z \implies z \in x - y.$

Dans un hyperanneau \mathbb{H} , la multiplication donne une structure de monoïde (\mathbb{H}, \cdot) et la distributivité s'écrit

- (3) $x(y + z) = xy + xz, \quad \forall x, y, z.$

On vérifie que \mathbf{K} est un hypercorps, *i.e.* un hyperanneau dans lequel tout élément non-nul est inversible. Le quotient R/G d'un anneau commutatif R par un sous-groupe $G \subset R^{\times}$ du groupe multiplicatif des unités de R est un hyperanneau pour l'addition qui à xG et yG associe l'ensemble de classes modulo G d'éléments de $xG + yG$.

Proposition 5.1. Soit R un anneau commutatif et $G \subset R^{\times}$ un sous-groupe $G \neq \{1\}$ du groupe multiplicatif des unités de R . Alors l'hyperanneau R/G contient \mathbf{K} si et seulement si $\{0\} \cup G$ est un sous-corps de R .

Nous montrons que la théorie des hyperanneaux extensions de \mathbf{K} est très structurée grâce à la réciproque ci-dessous (Théorème 5.2) de la Proposition 5.1. Cette réciproque utilise

- Le Théorème de Von Staudt et Hilbert sur les géométries Desargue-siennes.
- La théorie des “Inzidenzgruppen” de E. Ellers et H. Karzel
- La construction de l’hypercorps des fractions [32] d’un hyperanneau intègre.

La classification (Théorème 5.1) des hypercorps extensions finies de \mathbf{K} est directement reliée à une question ouverte sur les géométries non-arguésiennes finies homogènes.

5.1. \mathbf{K} -espaces vectoriels et géométrie projective. Un \mathbf{K} -espace vectoriel est un hypergroupe muni d’une action compatible de \mathbf{K} . Comme \mathbf{K} ne contient que 0 et 1 qui agissent de manière évidente, un \mathbf{K} -espace vectoriel est un hypergroupe tel que

$$(5.1) \quad x + x = \{0, x\}, \quad \forall x \neq 0.$$

Rappelons que les 3 axiomes de la géométrie projective concernent les propriétés d’une famille \mathcal{L} de sous-ensembles $L \subset P$ d’un ensemble P . Les éléments $L \in \mathcal{L}$ sont appelés droites.

\mathbb{P}_1 : Deux points distincts appartiennent à une droite unique.

\mathbb{P}_2 : Si une droite rencontre deux côtés d’un triangle¹ elle rencontre le troisième.

\mathbb{P}'_3 : Toute droite contient au moins quatre points.

Proposition 5.2. *Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel. Soit $\mathcal{P} = E \setminus \{0\}$. L’égalité*

$$(5.2) \quad L(x, y) = (x + y) \cup \{x, y\}, \quad \forall x, y \in \mathcal{P}$$

définit une géométrie sur \mathcal{P} qui vérifie $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}'_3$.

Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ une géométrie vérifiant $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}'_3$. Alors $E = \mathcal{P} \cup \{0\}$ muni de

$$(5.3) \quad x + y = \begin{cases} L(x, y) \setminus \{x, y\}, & \text{si } x \neq y \\ \{0, x\}, & \text{si } x = y \end{cases}$$

est un \mathbf{K} -espace vectoriel.

Notons que la dimension d’un \mathbf{K} -espace vectoriel est $\dim(\mathcal{P}, \mathcal{L}) + 1$, où $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ est la géométrie associée.

5.2. Géométrie algébrique sur \mathbf{K} . La proposition 5.2 relie la théorie des \mathbf{K} -hypercorps à celle des “Inzidenzgruppen” (groupes d’incidence) de [14]. Un groupe d’incidence est un groupe G muni d’une structure d’espace projectif telle que les translations à gauche et à droite soient des automorphismes de l’espace projectif.

1. pas au sommet correspondant

Proposition 5.3. *Soit \mathbb{H} un \mathbf{K} -hypercorps. Alors le groupe multiplicatif \mathbb{H}^\times muni de la géométrie (5.2) est un groupe d'incidence. Réciproquement soit G un groupe d'incidence et munissons $\mathbb{H} = G \cup \{0\}$ de la structure de \mathbf{K} -espace vectoriel donnée par (5.3) et du produit de G (avec $0 \cdot g = g \cdot 0 = 0$). Alors \mathbb{H} est un \mathbf{K} -hypercorps.*

On déduit alors des résultats de [22] que

Théorème 5.1. *Toute extension finie (commutative) \mathbb{H} de \mathbf{K} est d'une des trois formes suivantes*

- (1) $\mathbb{H} = \mathbf{K}[G]$ pour G groupe fini abélien G .
- (2) $\mathbb{H} = \mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q^\times$ où $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}_{q^m}$ sont des corps finis.
- (3) L'extension associée à un plan \mathcal{P} non-arguésien muni d'un groupe fini G , simplement transitif d'automorphismes de \mathcal{P} .

L'on ne sait pas si le cas (3) se produit. La structure géométrique de G dans le cas (3) est entièrement déterminée par un sous-ensemble $D \subset G$ tel que l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ soit une bijection du complément de la diagonale dans $D \times D$ avec le complément de l'élément neutre dans G . L'ordre de G est alors de la forme $n^2 + n + 1$ et les seuls exemples connus sont de la forme (2), pour $n = q$ une puissance d'un nombre premier. Les résultats de M. Hall [18] montrent que si G est cyclique, pour tout diviseur premier $p|n$, l'application $x \mapsto x^p$ définit un automorphisme de l'hypercorps \mathbb{H} qui est un analogue de l'automorphisme de Frobenius.

Théorème 5.2. *Soit \mathbb{H} une \mathbf{K} -algèbre commutative sans diviseur de zéro et telle que $\dim_{\mathbf{K}} \mathbb{H} > 3$. Il existe alors une unique paire (A, L) d'un anneau commutatif intègre A et d'un sous-corps $L \subset A$ tels que*

$$(5.4) \quad \mathbb{H} = A/L^\times.$$

Les notions d'idéal, d'idéal premier, de spectre premier et de schéma se prolongent aux hyperanneaux. La catégorie des \mathbb{Z} -schémas usuels est une sous catégorie pleine de celle des hyperschémas.

Théorème 5.3. *Pour tout \mathbb{Z} -schéma X , on a une identification canonique*

$$X \simeq \text{Hom}(\text{Spec}(\mathbf{K}), X).$$

On considère la droite affine $\mathcal{D} = \text{Spec}(\mathbb{Z}[T])$. Pour un anneau R on a une identification ensembliste $\text{Hom}(\mathbb{Z}[T], R) \simeq R$, mais cette égalité n'est plus vraie dans le cas des hyperanneaux et on définit en général la notion de fonction sur le spectre d'un hyperanneau H comme un élément de $\text{Hom}(\mathbb{Z}[T], R)$.

Théorème 5.4. *Soit $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}$ l'hyperanneau des classes d'adèles sur \mathbb{Q} , et soit $\rho \in \text{Hom}(\mathbb{Z}[T], \mathbb{H}_{\mathbb{Q}})$. Alors ou bien $\rho = \xi_a$*

$$(5.5) \quad \xi_a(P(T)) = P(a)\mathbb{Q}^\times \in \mathbb{H}_{\mathbb{Q}}, \quad \forall P \in \mathbb{Z}[T]$$

pour une unique adèle $a \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$, ou ρ se factorise par $\mathbb{Q}[e_Z]/\mathbb{Q}^{\times}$, où e_Z est l'idempotent de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ associé à un sous-ensemble $Z \subset \Sigma_{\mathbb{Q}}$.

Les deux coproduits $\Delta^+(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T$ et $\Delta^{\times}(T) = T \otimes T$ de l'anneau $\mathbb{Z}[T]$ permettent d'obtenir les opérations élémentaires sur les fonctions (cf. [6]).

5.3. Vers $\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$. Les trois points de vue présentés dans le §2 sont reliés entre eux et à $\text{Spec } \mathbb{Z}$ par le diagramme suivant, où \mathbf{S} désigne l'hypercorps des signes dont les éléments sont 0 et ± 1 et les lois sont données par la règle des signes, évidente pour la multiplication et donnée pour l'addition par

$$1 + 1 = 1, \quad 1 + (-1) = \{-1, 0, 1\}.$$

L'application $n \mapsto \text{signe}(n)$ donne l'unique homomorphisme $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{S}$ et l'application $x \mapsto |x|$ l'unique homomorphisme $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{K}$. Le semi-corps \mathbb{B} est simplement la partie positive $\mathbb{B} = \mathbf{S}^+$ de l'hypercorps \mathbf{S} . Tous ces objets sont des monoïdes et leur spectre est au dessus de $\text{Spec } \mathbb{F}_1$ pour cette raison.

$$(5.6) \quad \begin{array}{ccc} & \text{Spec } \mathbf{S} & \longleftarrow \text{Spec } \mathbf{K} \\ & \swarrow \downarrow \searrow & \\ \text{Spec } \mathbb{Z} & & \text{Spec } \mathbb{B} \\ \downarrow \swarrow & & \\ \text{Spec } \mathbb{F}_1 & & \end{array}$$

Dans ce diagramme $\text{Spec } \mathbf{K}$ est situé au dessus du point générique de $\text{Spec } \mathbb{Z}$ et il est naturel de chercher à relever $\text{Spec } \mathbb{Z}$ au dessus de $\text{Spec } \mathbf{K}$. Pour cela considérons l'anneau $\hat{\mathbb{Z}}$ complétion profinie de l'anneau \mathbb{Z} et le produit tensoriel

$$(5.7) \quad \mathbb{Z}_{\mathbf{S}} = \hat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{S}.$$

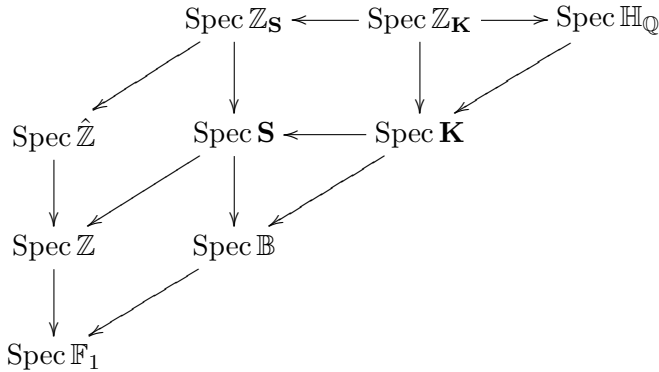
Tout élément de $\hat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{S}$ est de la forme $x \otimes 1$ pour un $x \in \hat{\mathbb{Z}}$ et la règle de simplification dans le produit tensoriel donne la relation d'équivalence

$$(5.8) \quad x \sim y \iff \exists n, m \in \mathbb{N}^{\times}, \quad nx = my.$$

Or cette relation d'équivalence est la relation de commensurabilité pour les \mathbb{Q} -réseaux (cf. [10]) qui définit un espace non-commutatif de type III. Cet espace est le point de départ des relations entre thermodynamique, transitions de phase et théorie des nombres initiée dans [1]. L'algèbre naturelle de fonctions sur l'espace $\mathbb{Z}_{\mathbf{S}}$ est une algèbre de Hecke non-commutative \mathcal{H} . La non-commutativité donne un groupe à un paramètre d'automorphismes $\sigma_t \in \text{Aut}(\mathcal{H})$ et l'étude des états d'équilibre à température inverse $\beta = 1/kT$ montre qu'il y a une transition de phase avec brisure de symétrie spontanée

en $\beta = 1$. A haute température ($\beta \leq 1$) il y a unicité de l'état d'équilibre, mais en dessous de la température critique, les états d'équilibre extrémaux (phases pures) sont paramétrés par les plongements $\mathbb{Q}^{\text{ab}} \rightarrow \mathbb{C}$ de l'extension abélienne maximale \mathbb{Q}^{ab} de \mathbb{Q} dans le corps des complexes. De plus la fonction de partition du système coïncide avec la fonction zêta de Riemann et cette coïncidence est le point de départ de la réalisation des formules explicites comme formule de trace de [2]. La réalisation spectrale des zéros de zêta est obtenue en passant au système dual du système (\mathcal{H}, σ_t) (appelé système BC) et ceci correspond géométriquement à remplacer l'espace $\mathbb{Z}_{\mathbf{S}}$ par l'espace des classes d'adèles sur \mathbb{Q} *i.e.* $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^{\times}$. Cet espace est muni par construction d'une action naturelle du groupe $C_{\mathbb{Q}}$ des classes d'idèles. Nous avons déjà vu dans le §3 que l'on peut mieux comprendre ces constructions grâce à la structure naturelle de monoïde de l'espace des classes d'adèles. Comme nous le verrons ci-dessous la structure d'hyperanneau de cet espace permet d'aller plus loin. En particulier on peut formuler géométriquement les relations entre les divers espaces ci-dessus sous la forme du diagramme suivant qui complète² (5.6) :

(5.9)



Il reste à identifier une structure géométrique utile sur les espaces tels que $\text{Spec } \mathbb{Z}_{\mathbf{S}}$ qui forme la première ligne de ce diagramme. Bien entendu cet espace est le *spectre* de l'hyperanneau $\mathbb{Z}_{\mathbf{S}}$ et n'est pas l'hyperanneau $\mathbb{Z}_{\mathbf{S}}$. Il s'agit donc de faire de la géométrie algébrique sur l'espace $\text{Spec } \mathbb{Z}_{\mathbf{S}}$. La relation avec l'étude de l'espace $\mathbb{Z}_{\mathbf{S}}$ comme espace (non-commutatif) est la même que celle qui relie la géométrie d'une variété V avec la théorie des champs quantiques sur V , ou sous une forme plus rudimentaire la relation entre calcul infinitésimal et calcul variationnel qui est le thème de l'analyse fonctionnelle.

2. $\mathbb{Z}_{\mathbf{K}} = \hat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{K}$

5.4. Le groupoïde $P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$. Nous dirons qu'un élément $p \in \mathbb{H}$ d'un hyperanneau \mathbb{H} est *premier* si l'idéal $p\mathbb{H}$ qu'il engendre est premier (*i.e.* son complémentaire est multiplicatif).

Théorème 5.5. 1) *Tout idéal premier principal de l'hyperanneau $\mathbb{H}_{\mathbb{K}} = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^{\times}$ est de la forme*

$$(5.10) \quad \mathfrak{p}_v = \{x \in \mathbb{H}_{\mathbb{K}} \mid x_v = 0\}$$

où $v \in \Sigma_{\mathbb{K}}$ est une place de \mathbb{K} .

2) *Le groupe $C_{\mathbb{K}} = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{\times}/\mathbb{K}^{\times}$ agit transitivement sur les générateurs de l'idéal premier \mathfrak{p}_w .*

3) *Le groupe d'isotropie de tout générateur de l'idéal premier \mathfrak{p}_w est $\mathbb{K}_w^{\times} \subset C_{\mathbb{K}}$.*

L'espace $P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ des éléments premiers de l'hyperanneau $\mathbb{H}_{\mathbb{K}} = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^{\times}$ a une structure naturelle de groupoïde. L'ensemble des unités est l'ensemble $\Sigma_{\mathbb{K}}$ des places de \mathbb{K} . Le produit de deux éléments premiers est encore premier si ils engendrent le même idéal. Il y a pour chaque place $v \in \Sigma_{\mathbb{K}}$ un unique idempotent $p_v \in \mathbb{H}_{\mathbb{K}}$ qui engendre \mathfrak{p}_v .

5.5. Groupoïde Fondamental. Soit $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement Galoisien de groupe W . Le *groupoïde fondamental* du revêtement est le quotient

$$\Pi_1 = (\tilde{X} \times \tilde{X})/W$$

de $\tilde{X} \times \tilde{X}$ par l'action diagonale de W . C'est un groupoïde dont les applications source s et but r sont données par

$$r(x, y) = \pi(x), \quad s(x, y) = \pi(y), \quad \forall x, y \in \tilde{X},$$

et la loi de composition par

$$(x, y) \circ (y, z) = (x, z), \quad \forall x, y, z \in \tilde{X}.$$

Nous considérons le sous-groupoïde Π'_1 des lacets, défini par

$$\Pi'_1 = \{\gamma \in \Pi_1 \mid r(\gamma) = s(\gamma)\}.$$

Les fibres de la projection $r = s : \Pi'_1 \rightarrow X$ sont des groupes. De plus si W est un groupe abélien, on a une action naturelle de W sur Π'_1 donnée par

$$(5.11) \quad w \cdot (\tilde{x}, \tilde{y}) = (w\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}, w^{-1}\tilde{y}).$$

5.6. L'isomorphisme $\Pi_1^{\text{ab}}(X)' \simeq P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ en caractéristique $p \neq 0$. Soit \mathbb{K} un corps global de caractéristique $p \neq 0$.

Nous appliquons les définitions ci-dessus au revêtement $\pi : X^{\text{ab}} \rightarrow X$, associé à l'extension abélienne maximale K^{ab} de K , de la courbe non-singulière X sur \mathbb{F}_q de corps de fonctions égal à \mathbb{K} . Ce revêtement est ramifié mais le groupoïde Π'_1 des lacets continue à avoir un sens. On identifie

le groupe $C_{\mathbb{K}}$ des classes d'idèles avec le groupe de Weil abélianisé $W \subset \text{Gal}(\mathbb{K}^{\text{ab}} : \mathbb{K})$ par la théorie du corps de classe.

Théorème 5.6. *Soit \mathbb{K} un corps global de caractéristique $p \neq 0$, et X le schéma associé sur \mathbb{F}_q .*

- *Le groupoïde $\Pi_1^{\text{ab}}(X)'$ est canoniquement isomorphe au groupoïde $P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ des éléments premiers de l'hyperanneau des classes d'adèles.*

- *L'isomorphisme $\Pi_1^{\text{ab}}(X)' \simeq P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ est équivariant pour l'action du groupe de Weil (abélianisé) W sur $\Pi_1^{\text{ab}}(X)'$ et l'action de $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^{\times} = C_{\mathbb{K}}$ sur $P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ par multiplication.*

Cet énoncé n'a de sens qu'en caractéristique non nulle. En caractéristique 0, le groupoïde $P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ continue à avoir un sens et donne une première indication sur la relation entre la "courbe" hypothétique C du §1 et l'hyperanneau $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}$. En effet $P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}) \subset \mathbb{H}_{\mathbb{K}}$ est la réunion des orbites périodiques de l'action de $C_{\mathbb{K}}$ sur $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}$ qui contribuent à la formule de trace (1.10).

5.7. La place archimédienne et les hypercorps $\mathbb{R}^{\text{convex}}$ et $\mathcal{T}\mathbb{R}$. Pour terminer cette présentation succincte, nous montrons comment réconcilier les deux points de vue sur la caractéristique 1 des §4 (semi-anneaux) et §5 (hyper-anneaux). En fait la construction de $\mathbb{R}_+^{\text{max}}$ du §4 se prolonge à \mathbb{R} tout entier et on obtient

Théorème 5.7. *Il existe sur \mathbb{R} une unique structure d'hypercorps $\mathbb{R}^{\text{convex}}$ extension de \mathbf{S} , telle que la multiplication soit inchangée et que*

$$x + y = (x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad 0 < x < y$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^$ il existe un unique automorphisme $\vartheta_{\lambda} \in \text{Aut}(\mathbb{R}^{\text{convex}})$ tel que $\vartheta_{\lambda}(x) = x^{\lambda}$ pour tout $x > 0$. De plus tout élément de $\text{Aut}(\mathbb{R}^{\text{convex}})$ est un ϑ_{λ} .*

L'hypercorps $\mathbb{R}^{\text{convex}}$ est une extension de \mathbf{S} au sens strict car il contient \mathbf{S} comme sous ensemble stable pour l'addition et la multiplication. Il y a (cf. [35]) une autre extension naturelle $\mathcal{T}\mathbb{R}$ de \mathbf{S} au sens faible, *i.e.* munie d'un homomorphisme $\mathbf{S} \rightarrow \mathcal{T}\mathbb{R}$. La multiplication dans $\mathcal{T}\mathbb{R}$ est la même que dans \mathbb{R} et l'hyperaddition est donnée par (cf. [35])

$$(5.12) \quad a \smile b = \begin{cases} a, & \text{si } |a| > |b| \text{ ou } a = b; \\ b, & \text{si } |a| < |b| \text{ ou } a = b; \\ [-a, a], & \text{si } b = -a. \end{cases}$$

Comme dans le Théorème 5.7 on a, mais en supposant $\lambda > 0$, un unique automorphisme $\vartheta_{\lambda} \in \text{Aut}(\mathcal{T}\mathbb{R})$ tel que $\vartheta_{\lambda}(x) = x^{\lambda}$ pour tout $x > 0$. Cette extension joue le même rôle que $\mathbb{R}_+^{\text{max}}$ comme extension de $\mathbb{B} = \mathbf{S}^+$, ce que

résume le diagramme

$$(5.13) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\mathcal{T}\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathbf{S}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\mathbb{R}_+^{\max}) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathbb{B}) \end{array}$$

L'hypercorps $\mathcal{T}\mathbb{R}$ extension de \mathbf{S} devrait jouer en caractéristique 1 un rôle analogue à celui des clôtures algébriques $\overline{\mathbb{F}}_p$ des corps finis \mathbb{F}_p de caractéristique p .

Bibliographie

- [1] J.B. BOST, A. CONNES, *Hecke algebras, Type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory*. Selecta Math. (New Series) Vol. **1** (1995) N. 3, 411–457.
- [2] A. CONNES, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*. Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), no. 1, 29–106.
- [3] A. CONNES, C. CONSANI, *On the notion of geometry over \mathbb{F}_1* . To appear in Journal of Algebraic Geometry; arXiv:08092926v2 [mathAG].
- [4] A. CONNES, C. CONSANI, *Schemes over \mathbb{F}_1 and zeta functions*. To appear in Compositio Mathematica; arXiv :0903.2024v3 [mathAG,NT].
- [5] A. CONNES, C. CONSANI, *Characteristic 1, entropy and the absolute point*. ArXiv :0911.3537v1 [mathAG].
- [6] A. CONNES, C. CONSANI, *The hyperring of adèle classes*. ArXiv :1001.4260v2 [mathAG].
- [7] A. CONNES, C. CONSANI, M. MARCOLLI, *Noncommutative geometry and motives : the thermodynamics of endomotives*. Advances in Math. **214** (2) (2007), 761–831.
- [8] A. CONNES, C. CONSANI, M. MARCOLLI, *The Weil proof and the geometry of the adeles class space*. To appear in “Algebra, Arithmetic and Geometry – Manin Festschrift”, Progress in Mathematics, Birkhäuser (2008); arXiv:0703392.
- [9] A. CONNES, C. CONSANI, M. MARCOLLI, *Fun with \mathbb{F}_1* . Journal of Number Theory **129** (2009), 1532–1561.
- [10] A. CONNES, M. MARCOLLI, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives*. Colloquium Publications, Vol. **55**, American Mathematical Society, 2008.
- [11] P. CORSINI, V. LEOREANU, *Applications of hyperstructure theory*. Advances in Mathematics (Dordrecht) **5**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.
- [12] A. DEITMAR, *Schemes over F_1* . In Number Fields and Function Fields Two Parallel Worlds. Ed. by G. van der Geer, B. Moonen, R. Schoof, Progr. in Math, vol. **239**, 2005.
- [13] M. DEMAZURE, P. GABRIEL, *Groupes algébriques*. Masson & CIE, Éditeur Paris 1970.
- [14] E. ELLERS, H. KARZEL, *Involutorische Geometrien*, (German). Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **25** (1961), 93–104.
- [15] A. GATHMANN, *Tropical algebraic geometry*. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **108** (2006), no. 1, 3–32.
- [16] J. GOLAN, *semi-rings and their applications*. Updated and expanded version of The theory of semi-rings, with applications to mathematics and theoretical computer science [Longman Sci. Tech., Harlow, 1992]. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [17] A. GROTHENDIECK, *Sur quelques points d’algèbre homologique*. Tohoku Math. J. **9** (1957), 119–183.
- [18] M. HALL, *Cyclic projective planes*. Duke Math. J. **14** (1947), 1079–1090.
- [19] M. KAPRANOV AND A. SMIRNOV, *Cohomology determinants and reciprocity laws*. Prepublication.
- [20] H. KARZEL, *Ebene Inzidenzgruppen* (German). Arch. Math. (Basel) **15** (1964), 10–17.

- [21] H. KARZEL, *Normale Fastkörper mit kommutativer Inzidenzgruppe* (German). Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **28** (1965), 124–132.
- [22] H. KARZEL, *Bericht über projektive Inzidenzgruppen* (German). Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **67** (1964/1965) Abt. 1, 58–92.
- [23] M. KRASNER, *Approximation des corps valués complets de caractéristique $p \neq 0$ par ceux de caractéristique 0* (French). Colloque d'algèbre supérieure, tenu à Bruxelles du 19 au 22 décembre 1956, pp. 129–206. Centre Belge de Recherches Mathématiques, Établissements Ceuterick, Louvain ; Librairie Gauthier-Villars, Paris, 1957.
- [24] M. KRASNER, *A class of hyperrings and hyperfields*. Internat. J. Math. Math. Sci. **6** (1983), no. 2, 307–311.
- [25] N. KUROKAWA, H. OCHIAI, A. WAKAYAMA, *Absolute Derivations and Zeta Functions*. Documenta Math. Extra Volume : Kazuya Kato's Fiftieth Birthday (2003), 565–584.
- [26] P. LESCOT, *Algèbre absolue*. Ann. Sci. Math. Québec **33** (2009), no. 1, 63–82.
- [27] J. LOPEZ PENA, O. LORSCHIED, *Mapping \mathbb{F}_1 -land : An overview of geometries over the field with one element*. ArXiv :0909.0069.
- [28] LYNDON, R. C., *Relation algebras and projective geometries*. Michigan Math. J. **8** (1961), 21–28.
- [29] Y. I. MANIN, *Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa)*. Columbia University Number-Theory Seminar (1992), Astérisque No. **228** (1995), 4, 121–163.
- [30] F. MARTY, *Sur une généralisation de la notion de groupe*. In Huitième Congrès des Mathématiciens, Stockholm 1934, 45–59.
- [31] R. MEYER, *On a representation of the idele class group related to primes and zeros of L-functions*. Duke Math. J. Vol. **127** (2005), N. 3, 519–595.
- [32] R. PROCESI-CIAMPI, R. ROTA, *The hyperring spectrum*. Riv. Mat. Pura Appl. No. **1** (1987), 71–80.
- [33] C. SOULÉ, *Les variétés sur le corps à un élément*. Mosc. Math. J. **4** (2004), no. 1, 217–244.
- [34] B. TÖEN, M. VAQUIÉ, *Au dessous de Spec(\mathbb{Z})*. K-Theory **3** (2009), no. 3, 437–500.
- [35] O. VIRO *Multifields for tropical geometry I. multifields and dequantization*. ArXiv1006.3034v1.
- [36] A. WEIL, *Sur la théorie du corps de classes*. J. math. Soc. Japan **3** (1951), 1–35.

Alain CONNES
 Collège de France
 3, rue d'Ulm
 Paris, F-75005 France
 I.H.E.S. and Vanderbilt University
 E-mail: alain@connes.org
 URL: <http://www.alainconnes.org/fr/>