

---

# INVARIANTS COHOMOLOGIQUES : DES FORMES QUADRATIQUES AUX ALGÈBRES À INVOLUTION

*par*

Anne Quéguiner-Mathieu

---

**Résumé.** — Les invariants classiques des formes quadratiques ont des analogues dans le cadre des algèbres à involution de type orthogonal. Ceci permet d'étendre à ce cadre les invariants cohomologiques  $e_0$  (dimension modulo 2),  $e_1$  (discriminant) et  $e_2$  (invariant de Clifford). Nous montrons ici qu'il est en revanche impossible de définir un invariant cohomologique qui généralise l'invariant  $e_3$ .

Une algèbre centrale simple à involution orthogonale correspond, après une extension des scalaires que l'on peut choisir galoisienne, à la donnée d'un espace quadratique à similitude près. De ce fait, la théorie algébrique des formes quadratiques constitue une source d'inspiration importante dans l'étude des algèbres à involution. Citons, à titre d'exemple, les travaux de Jacobson, puis Tits, qui ont étendu à ce cadre les notions de discriminant et d'algèbre de Clifford des formes quadratiques (voir § 2), ou encore la notion d'involution hyperbolique, due à Bayer, Shapiro et Tignol [BFST93].

Compte-tenu du rôle primordial que les formes de Pfister ont joué dans le développement de la théorie algébrique des formes quadratiques, il est naturel de leur chercher un analogue dans le cadre des algèbres à involution. Cette question a été posée par Tao [Tao], et plus récemment par Bayer et Parimala [BP]. Les invariants cohomologiques sont un outil naturel pour l'aborder. Ainsi, Bayer et Parimala montrent notamment que l'on peut définir, dans le cadre des algèbres à involution, un invariant qui généralise l'invariant  $e_2$  des formes quadratiques. Nous montrons ici qu'il est impossible d'étendre de même l'invariant  $e_3$ .

Ce texte est basé sur un mini-cours présenté à Besançon en mars 2002 dans le cadre du colloque 'Jeunes chercheurs en théorie des nombres', et il correspond au dernier exposé. Les deux autres exposés ont été consacrés à des rappels sur la théorie des formes quadratiques et sur les algèbres centrales simples à involution. Ces théories sont présentées dans de nombreux livres. Nous nous limiterons donc ici à ce qui semble essentiel à la compréhension du texte, et nous renvoyons le lecteur désireux d'approfondir ces questions aux livres de Lam [Lam73], Scharlau [Sch85] et Kahn [Kah] pour les

formes quadratiques, ainsi qu'à celui de Knus, Merkurjev, Rost et Tignol [KMRT98] pour les algèbres à involution.

Dans tout ce qui suit, on se place sur un corps  $F$  de caractéristique différente de 2. Les formes quadratiques sont supposées non dégénérées, et les algèbres considérées sont de dimension finie. Si  $A$  est une  $F$ -algèbre centrale simple, on note  $[A]$  sa classe dans le groupe de Brauer de  $F$ . L'ordre de cette classe dans le groupe de Brauer s'appelle l'exposant de  $A$ . De plus,  $\text{Nrd}_A$  et  $\text{Trd}_A$  désignent respectivement la norme réduite et la trace réduite de  $A$ , qui coïncident avec le déterminant et la trace usuelle si  $A$  est l'algèbre de matrices  $M_n(F)$ .

Pour tout entier  $i$ , on note  $H^i(F, \mu_2)$  le groupe de cohomologie galoisienne  $H^i(\text{Gal}(F_s/F), \mu_2)$ , où  $F_s$  désigne une clôture séparable de  $F$ . Rappelons que  $H^0(F, \mu_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $H^1(F, \mu_2) = F^\times/F^{\times 2}$  et  $H^2(F, \mu_2) = \text{Br}_2(F)$  où  $\text{Br}_2(F)$  est la 2-partie du groupe de Brauer de  $F$  (voir par exemple [KMRT98, §30]).

### 1. Invariants des formes quadratiques

A une forme quadratique  $q : V \rightarrow F$  on peut associer un certain nombre d'invariants dits classiques. En particulier, on appelle dimension de  $q$  la dimension  $\dim(q)$  de l'espace vectoriel sous-jacent  $V$ , et discriminant de  $q$  la classe  $\text{disc}(q) \in F^\times/F^{\times 2}$  du déterminant de n'importe quelle matrice représentant  $q$ .

On associe également à  $q$  une algèbre, appelée algèbre de Clifford et notée  $C(q)$ , qui est le quotient de l'algèbre tensorielle  $T(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$  par l'idéal engendré par les éléments de la forme  $v \otimes v - q(v)$ , pour  $v \in V$ . C'est une  $F$ -algèbre de dimension finie, munie d'une  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduation induite par la  $\mathbb{Z}$ -graduation naturelle de  $T(V)$ . On appelle algèbre de Clifford paire, et on note  $C_0(q)$  la partie paire de  $C(q)$  pour cette graduation. On dispose pour  $C(q)$  et  $C_0(q)$  de théorèmes de structure, en fonction de la parité de la dimension et de la valeur du discriminant de  $q$  (voir par exemple [Lam73, 5, §2] ou [Sch85, 9(2.10)]). Notons en particulier que  $C(q)$  (resp.  $C_0(q)$ ) est une  $F$ -algèbre centrale simple si la dimension de  $q$  est paire (resp. impaire). Ainsi, on dispose dans tous les cas d'une  $F$ -algèbre centrale simple dont on peut montrer qu'elle est d'exposant 2. On appelle invariant de Clifford de  $q$  la classe de cette algèbre dans la 2-partie du groupe de Brauer de  $F$ , soit

$$c(q) = \begin{cases} [C(q)] & \text{si } \dim(q) \text{ est paire;} \\ [C_0(q)] & \text{si } \dim(q) \text{ est impaire.} \end{cases}$$

De plus, quand  $q$  est de dimension paire,  $\dim(q) = 2m$ , le centre de  $C_0(q)$  est l'extension quadratique étale  $F[X]/(X^2 - (-1)^m \text{disc}(q))$  de  $F$ . Si de plus le discriminant de  $q$  vaut  $(-1)^m$ , de sorte que cette extension est l'extension déployée  $F \times F$ , on peut trouver une représentation de  $C(q)$  comme une algèbre de matrices  $C(q) = M_2(B)$ , à coefficients dans une  $F$ -algèbre centrale simple  $B$ , et la partie paire  $C_0(q)$  correspond alors aux matrices diagonales,  $C_0(q) = B \times B$ .

Une forme quadratique se décompose de manière unique en une somme orthogonale d'une forme quadratique anisotrope  $q_{\text{an}}$  appelée partie anisotrope de  $q$  et d'une forme hyperbolique  $i\mathbb{H}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , où  $\mathbb{H} = \langle 1, -1 \rangle$ . On dit que deux formes sont Witt équivalentes si leurs parties anisotropes sont isométriques, et on montre que l'ensemble des classes d'équivalence de formes quadratiques pour cette relation est muni d'une structure d'anneau pour les lois induites par la somme directe et le produit tensoriel. Cet anneau s'appelle l'anneau de Witt de  $F$ .

On peut modifier les invariants classiques ci-dessus, de façon à en faire des invariants à équivalence de Witt près. Il suffit pour cela de remplacer la dimension de  $q$  par sa classe dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et le discriminant de  $q$  par le discriminant à signe  $d_{\pm}(q) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{disc}(q)$ , où  $n = \dim(q)$ . Ces invariants s'interprètent alors comme des applications de l'anneau de Witt dans les groupes de cohomologie modulo 2 :

$$\begin{aligned} e_0 : q &\mapsto \overline{\dim(q)} \in H^0(F, \mu_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ e_1 : q &\mapsto d_{\pm}(q) \in H^1(F, \mu_2) = F^{\times}/F^{\times 2}, \\ e_2 : q &\mapsto c(q) \in H^2(F, \mu_2) = \text{Br}_2(F). \end{aligned}$$

Au rang suivant, on dispose d'un invariant  $e_3$ , mais qui n'est défini que sur un sous-ensemble de l'anneau de Witt, à savoir la 3ième puissance de l'idéal fondamental de  $W(F)$ , qui est aussi, par un théorème de Merkurjev [Mer81], l'ensemble des classes de Witt de formes quadratiques pour lesquelles les trois invariants précédents  $e_0$ ,  $e_1$  et  $e_2$  s'annulent. Le lecteur pourra par exemple consulter [Kah, chap.6] pour une définition de cet invariant.

## 2. Invariants classiques pour les involutions orthogonales

On considère une  $F$ -algèbre centrale simple  $A$  munie d'une involution de première espèce, c'est-à-dire d'un anti-automorphisme  $F$ -linéaire  $\sigma$  d'ordre 2. Par un théorème d'Albert [KMRT98, (3.1)], ceci revient à considérer une algèbre  $A$  d'exposant 2. On note  $n$  son degré,  $n := \sqrt{\dim_F(A)}$ , et on suppose dans ce paragraphe que  $n$  est pair,  $n = 2m$ . L'algèbre  $A$  est dite déployée si c'est l'algèbre des endomorphismes sur  $F$  d'un certain espace vectoriel  $V$ ,  $A = \text{End}_F(V)$ . Si l'algèbre est non déployée, elle le devient après extension des scalaires du corps de base  $F$  à un corps  $K$  que l'on peut choisir galoisien sur  $F$  (voir [Sch85, 8(5.5)]).

Dans le cas déployé,  $A = \text{End}_F(V)$ , la donnée d'une involution revient en fait à la donnée d'une forme bilinéaire symétrique ou antisymétrique  $b : V \times V \rightarrow F$  à similitude près. En effet, une telle forme définit de manière unique une involution  $\text{ad}_b$  de  $\text{End}_F(V)$ , qu'on appelle l'involution adjointe à  $b$ , par l'égalité

$$b(f(x), y) = b(x, \sigma(f)(y))$$

pour tous  $x, y \in V$  et  $f \in \text{End}_F(V)$ . Ceci découle par exemple du fait que l'égalité ci-dessus est matriciellement équivalente à  $\sigma(A) = B^{-1} {}^t AB$ , où  $A$  (resp.  $B$ ) désigne

la matrice représentant  $f$  (resp.  $b$ ) dans une base fixée de  $V$ . De plus, il est clair que pour tout  $\lambda \in F^\times$ , les formes  $b$  et  $\lambda b$  définissent la même involution. Réciproquement, on montre que toute involution  $F$ -linéaire de  $\text{End}_F(V)$  est l'adjointe d'une forme bilinéaire symétrique ou anti-symétrique, déterminée de manière unique à multiplication par un scalaire près. L'involution est dite de type orthogonal si la forme est symétrique et de type symplectique dans le cas contraire. Quand l'involution est de type orthogonal on dit aussi qu'elle est adjointe à la forme quadratique  $q$  définie par  $q(x) = b(x, x)$ , et on note  $\sigma = \text{ad}_q$ .

Supposons dorénavant que  $\sigma$  est de type orthogonal,  $\sigma = \text{ad}_q$ . La donnée de l'involution  $\sigma$  détermine la forme quadratique  $q$  à similitude près. Ceux des invariants de  $q$  qui sont des invariants à similitude près peuvent donc être considérés comme des invariants de l'algèbre à involution déployée  $(\text{End}_F(V), \text{ad}_q)$ . C'est le cas du discriminant  $d_\pm(q)$  et de la partie paire  $C_0(q)$  de l'algèbre de Clifford de  $q$ , car  $q$  est de dimension paire, puisqu'on a supposé  $A$  de degré pair.

Considérons maintenant le cas d'une algèbre  $A$  non nécessairement déployée. On peut définir des invariants analogues par descente galoisienne. Pour cela, étendons les scalaires à un corps de déploiement  $K$  de  $A$  qui est une extension galoisienne de  $F$ . L'algèbre  $A_K = A \otimes_F K$  étant déployée, l'involution  $\sigma \otimes \text{Id}$  est l'adjointe d'une forme quadratique  $q_\sigma$  définie sur  $K$ . Jacobson a montré que l'algèbre de Clifford paire  $C_0(q_\sigma)$  provient d'une  $F$ -algèbre que l'on note  $C(A, \sigma)$  et qu'on appelle l'algèbre de Clifford de  $(A, \sigma)$  [Jac64]. On peut alors définir le discriminant de  $\sigma$  comme étant la classe  $d(\sigma) \in F^\times / F^{\times 2}$  d'un générateur du centre de  $C(A, \sigma)$ , qui, comme dans le cas déployé, est une extension quadratique du corps de base  $F$ . On dispose également d'une construction rationnelle de l'algèbre de Clifford, due à Tits (voir [KMRT98, 8.B]), ainsi que de la définition explicite suivante du discriminant :

**Définition 2.1 (Knus, Parimala et Sridharan [KPS91])**

Soit  $A$  une algèbre de degré  $2m$  à involution  $\sigma$  de type orthogonal. Le discriminant de  $\sigma$  est la classe dans  $F^\times / F^{\times 2}$  de  $(-1)^m \text{Nrd}_A(a) \in F^\times$ , où  $a$  est un élément inversible  $\sigma$ -antisymétrique quelconque de  $A$ .

Il découle du théorème de structure des algèbres de Clifford de formes quadratiques un théorème analogue dans le cas non déployé [KMRT98, (8.10)]. En particulier, l'algèbre de Clifford de  $(A, \sigma)$  est centrale simple sur  $F[X]/(X^2 - d(\sigma))$  si  $d(\sigma)$  est non trivial; dans le cas contraire, elle est isomorphe à un produit de deux  $F$ -algèbres centrales simples  $C(A, \sigma) = C^+ \times C^-$ .

Nous n'avons pas considéré dans ce paragraphe le cas des algèbres de degré impair. Notons ici que cette hypothèse n'est pas vraiment restrictive : on peut en effet montrer qu'une algèbre de degré impair et d'exposant 2 est nécessairement déployée. La théorie des algèbres à involution n'est donc pas plus riche que celle des formes bilinéaires dans ce cas précis.

### 3. Une version cohomologique

A l'aide de ces invariants, on peut étendre au cadre des algèbres à involution la définition des invariants cohomologiques  $e_i$  pour  $i = 0, 1$  et  $2$ . La définition des invariants  $e_0$  et  $e_1$  est la suivante :

**Définition 3.1.** — Soit  $(A, \sigma)$  une  $F$ -algèbre centrale simple à involution orthogonale.

On définit  $e_0(A, \sigma) = \overline{\deg(A)} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq H^0(F, \mu_2)$  ;

Si  $e_0(A, \sigma) = 0$ , on pose  $e_1(A, \sigma) = d(\sigma) \in F^\times/F^{\times 2} \simeq H^1(F, \mu_2)$ .

Ces invariants sont des généralisations des invariants analogues pour les formes quadratiques au sens suivant :

**Proposition 3.2.** — *Considérons une algèbre centrale simple déployée à involution orthogonale  $(\text{End}_F(V), \text{ad}_q)$ . On a  $e_0(\text{End}_F(V), \text{ad}_q) = e_0(q)$ . Si de plus  $e_0(\text{End}_F(V), \text{ad}_q) = 0$ , alors  $e_1(\text{End}_F(V), \text{ad}_q) = e_1(q)$ .*

**Remarque 3.3.** — Notons que, contrairement à ce qui se passe dans le cas des formes quadratiques, l'invariant  $e_1$  n'est défini pour une algèbre à involution orthogonale que si  $e_0$  s'annule. En particulier, dans le cas déployé de degré impair,  $e_1(q)$  n'est pas un invariant à similitude près de la forme quadratique  $q$  et ne peut donc pas être considéré comme un invariant de l'involution  $\text{ad}_q$ .

La définition de l'invariant  $e_2$  est plus délicate. Considérons une algèbre centrale simple à involution orthogonale  $(A, \sigma)$  telle que  $e_0(A, \sigma) = 0$  et  $e_1(A, \sigma) = 0$ . L'algèbre est donc de degré pair, et l'involution de discriminant trivial. Par le théorème de structure mentionné ci-dessus, l'algèbre de Clifford de  $(A, \sigma)$  est un produit de deux  $F$ -algèbres centrales simples,  $C(A, \sigma) = C^+ \times C^-$ . On dispose donc non pas d'une, mais de deux classes dans  $\text{Br}_2(F) = H^2(F, \mu_2)$ , à savoir la classe de  $C^+$  et celle de  $C^-$ , dont on sait qu'elles sont en général distinctes. La définition de  $e_2$  repose sur le résultat suivant [KMRT98, (9.12)]:

**Proposition 3.4.** — *Dans  $\text{Br}_2(F)$ ,  $[C^+] + [C^-] \in \{0, [A]\}$ .*

En effet, ceci implique que les classes de  $C^+$  et de  $C^-$ , qui sont d'ordre 2, coïncident dans le quotient de  $\text{Br}_2(F)$  par le sous-groupe  $\{0, [A]\}$ . D'où la définition de  $e_2$  :

**Définition 3.5 (Bayer et Parimala [BP]).** — Soit  $(A, \sigma)$  une algèbre de degré pair à involution orthogonale de discriminant trivial. On pose

$$e_2(A, \sigma) = [C_+] = [C_-] \in \text{Br}_2(F)/[A],$$

où  $\text{Br}_2(F)/[A]$  désigne le quotient de  $\text{Br}_2(F)$  par le sous groupe  $\{0, [A]\}$ .

Notons que si l'algèbre est déployée, alors l'invariant  $e_2$  est à valeurs dans  $\text{Br}_2(F)$ . De plus, on a comme pour  $e_0$  et  $e_1$ :

**Proposition 3.6.** — Soit  $(\text{End}_F(V), \text{ad}_q)$  une algèbre centrale simple déployée à involution orthogonale, telle que  $e_0(\text{End}_F(V), \text{ad}_q) = e_1(\text{End}_F(V), \text{ad}_q) = 0$ . On a  $e_2(\text{End}_F(V), \text{ad}_q) = e_2(q) \in \text{Br}_2(F)$ .

*Démonstration.* — Dans la situation considérée ici, on peut écrire  $C(q) = M_2(B)$  et  $C_0(q) = B \times B$  pour une certaine  $F$ -algèbre centrale simple  $B$  (cf. §1). D'où  $e_2(\text{End}_F(V), \text{ad}_q) = [B] = [C(q)] = e_2(q)$ .  $\square$

#### 4. Application à l'étude des algèbres de degré 2, 4 et 8

Une algèbre centrale simple de degré 2 s'appelle une algèbre de quaternions. Elle est toujours d'exposant 2, et donc munie d'involutions orthogonales (voir § 2). On appelle algèbre de biquaternions une algèbre de degré 4 et d'exposant 2. Par un théorème classique d'Albert [KMRT98, (16.1)], une telle algèbre est isomorphe à un produit de deux algèbres de quaternions.

**4.1. Invariant  $e_1$  et algèbres de quaternions.** — Deux formes quadratiques de dimension 2 sont semblables si et seulement si elles ont même discriminant. En effet, si  $ab = cd$ , alors  $\langle c, d \rangle \simeq \langle \frac{ab}{d}, d \rangle \simeq \frac{b}{d} \langle a, \frac{d^2}{b} \rangle \simeq \frac{b}{d} \langle a, b \rangle$ .

Pour les involutions orthogonales des algèbres de quaternions, on a le résultat analogue suivant:

**Proposition 4.1.** — Soit  $Q$  une  $F$ -algèbre de quaternions. L'invariant  $e_1$  classifie les involutions orthogonales de  $Q$ .

*Démonstration.* — Voir [KMRT98, (7.4)].  $\square$

**Remarque 4.2.** — Toutes les valeurs sont atteintes par le discriminant pour les formes quadratiques de dimension 2. Dans le cas plus général d'une algèbre de quaternions  $Q = (a, b)$ , le discriminant des involutions orthogonales prend l'ensemble des valeurs représentées par la forme quadratique  $\langle a, b, -ab \rangle$  [KMRT98, exercice 4 p.146]. Cet ensemble ne coïncide avec  $F^\times / F^{\times 2}$  que si l'algèbre  $(a, b)$  est déployée. En particulier, il n'existe pas d'involution orthogonale de discriminant 1 sur une algèbre de quaternions non déployée [KMRT98, (7.4)].

Pour une algèbre  $A$  de degré  $2m$  avec  $m > 1$ , l'ensemble des valeurs atteintes par le discriminant des involutions orthogonales est  $(-1)^m \text{Nrd}(A^\times)$  [PSS93].

**4.2. Invariant  $e_2$  et algèbres de biquaternions.** — Considérons une algèbre de biquaternions  $A$ , munie d'une involution orthogonale  $\sigma$ . L'algèbre  $A$  admet en général plusieurs décompositions comme un produit de deux algèbres de quaternions, mais il n'existe pas toujours de décomposition dans laquelle chacune des algèbres de quaternions est stable sous  $\sigma$ . L'invariant  $e_1$  nous permet de savoir quand cela se produit :

**Théorème 4.3 (Knus, Parimala, Sridharan).** — Soit  $(A, \sigma)$  une algèbre de bi-quaternions à involution. Elle admet une décomposition en un produit tensoriel de deux algèbres de quaternions à involution,  $A = Q_1 \otimes_F Q_2$ ,  $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2$  si et seulement si  $e_1(\sigma) = 0$ .

*Démonstration.* — Voir [KMRT98, (7.3)&(15.12)] □

**Remarque 4.4.** — Quand une telle décomposition existe, elle n'est en général pas unique. Ceci permet de voir que, contrairement à ce qui se passe dans le cas des formes quadratiques, on ne peut pas interpréter l'invariant  $e_2$  comme un cup-produit de deux invariants  $e_1$ . En effet, si l'on considère une algèbre à involution orthogonale  $(A, \sigma)$  qui se décompose en un produit de deux algèbres de quaternions à involution orthogonale  $(A, \sigma) = (Q_1, \sigma_1) \otimes (Q_2, \sigma_2)$ , le cup-produit des discriminants de  $\sigma_1$  et de  $\sigma_2$  dépend de la décomposition choisie. Regardons par exemple  $(A, \sigma) = (Q, \sigma_Q) \otimes (Q, \sigma_Q)$ , où  $Q$  est l'algèbre de quaternions  $(a, b)_F$  et  $\sigma_Q$  son involution de discriminant  $a$  (voir [KMRT98, (7.4)] pour la définition de  $\sigma_Q$ ). D'après [KMRT98, (11.1)], via l'isomorphisme  $Q \otimes Q \simeq \text{End}_F(Q)$ ,  $a \otimes b \mapsto (x \mapsto ax\sigma(b))$ , l'involution  $\sigma = \sigma_Q \otimes \sigma_Q$  est adjointe à la forme trace tordue  $T_{\sigma_Q} : x \in Q \mapsto \text{Trd}_Q(\sigma_Q(x)x)$ , qui est ici semblable à  $\langle 1, -a \rangle \otimes \langle 1, b \rangle$  [Que97, 2.1.2]. On a donc deux décompositions

$$(A, \sigma) = (Q, \sigma_Q) \otimes (Q, \sigma_Q) = (M_2(F), \text{ad}_{\langle 1, -a \rangle}) \otimes (M_2(F), \text{ad}_{\langle 1, b \rangle}),$$

qui correspondent à deux cup-produits  $(a, a)$  et  $(a, -b)$ , qui sont en général distincts.

Soit maintenant  $(A, \sigma)$  une algèbre de biquaternions à involution orthogonale de discriminant trivial. Comme on vient de le voir, elle ne se décompose pas de façon unique comme un produit de deux algèbres de quaternions à involution. En revanche, il existe une unique décomposition de  $A$  pour laquelle la restriction de  $\sigma$  à chacun des deux facteurs correspond à son involution canonique, i.e.  $(A, \sigma) = (H_1, \gamma_1) \otimes (H_2, \gamma_2)$  où  $\gamma_i$  est l'involution canonique de  $Q_i$  définie par  $\gamma_i(x) = \text{Trd}_{Q_i}(x) - x$  (cf. [KMRT98, (15.12)]). De plus, l'invariant  $e_2$  vérifie alors  $e_2(A, \sigma) = [H_1] = [H_2] \in \text{Br}_2(F)/[A]$ . De ceci, on déduit facilement le résultat suivant :

**Théorème 4.5.** — Soit  $A$  une algèbre de biquaternions. L'invariant  $e_2$  est un invariant complet pour les involutions orthogonales de discriminant trivial de  $A$ .

**4.3. Algèbres de degré 8.** — La structure des algèbres de degré 8 et d'exposant 2 n'est pas aussi simple que celle des algèbres de biquaternions. Comme l'ont montré Amitsur, Rowen et Tignol [ART79], il en existe qui ne se décomposent pas comme un produit de deux sous-algèbres, et donc a fortiori pas comme un produit de trois sous-algèbres de quaternions. On sait en revanche exactement quand l'algèbre à involution se décompose comme un produit de trois sous-algèbres de quaternions à involution :

**Théorème 4.6 (Knus, Merkurjev, Rost et Tignol).** — Soit  $A$  une algèbre de degré 8 à involution orthogonale  $\sigma$ . Elle admet une décomposition en un produit de

trois algèbres de quaternions à involution  $A = Q_1 \otimes Q_2 \otimes Q_3$ ,  $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3$  si et seulement si  $e_1(\sigma) = 0$  et  $e_2(\sigma) = 0$ .

*Démonstration.* — Voir [KMRT98, (42.11)] □

**4.4. Théorème d'Arason-Pfister.** — Le théorème d'Arason-Pfister affirme qu'une forme quadratique anisotrope qui appartient à la  $n$ ème puissance de l'idéal fondamental de l'anneau de Witt est de dimension au moins  $2^n$ . Ceci permet notamment de montrer que l'intersection de toutes les puissances de  $I$  est vide, et donc que l'on peut décrire l'anneau de Witt en étudiant les quotients successifs  $I^n/I^{n+1}$ .

Les notions d'isotropie et d'hyperbolicité s'étendent facilement au cadre des algèbres à involution [KMRT98, §6.A& 6.B]. On déduit des résultats qui précèdent l'analogie suivant en petit degré :

**Théorème 4.7.** — *Soit  $(A, \sigma)$  une algèbre à involution anisotrope.*

*Si  $e_0(\sigma) = e_1(\sigma) = 0$ , alors  $\deg(A) \geq 4$ ;*

*si  $e_0(\sigma) = e_1(\sigma) = e_2(\sigma) = 0$ , alors  $\deg(A) \geq 8$ .*

*Idée de la preuve.* — On raisonne par contraposée. Soit  $A$  une algèbre de degré 2 et  $\sigma$  une involution de  $A$  de discriminant trivial. D'après 4.2, l'algèbre  $A$  est nécessairement déployée. De plus,  $\sigma$  est l'involution adjointe à une forme quadratique de dimension 2 et de discriminant trivial, à savoir la forme hyperbolique  $\langle 1, -1 \rangle$ . Ceci prouve la première partie du théorème.

Soit maintenant une algèbre de biquaternions  $A$  munie d'une involution  $\sigma$  vérifiant  $e_1(\sigma) = e_2(\sigma) = 0$ . D'après § 4.2,  $(A, \sigma)$  se décompose en  $(M_2(F), \gamma) \otimes (Q, \gamma_Q)$ , pour une certaine algèbre de quaternions  $Q$ , où  $\gamma$  et  $\gamma_Q$  sont les involutions canoniques de  $M_2(F)$  et  $Q$ . Or l'involution canonique de  $M_2(F)$  est hyperbolique. L'algèbre  $(A, \sigma)$  est donc également hyperbolique. Ceci découle par exemple de la caractérisation (4) des involutions hyperboliques de [KMRT98, (6.7)].

Reste à traiter le cas des algèbres de degré 6, ce que l'on peut faire facilement à l'aide de [KMRT98, §15.D]. □

## 5. Le cas de $e_3$

Avant d'étudier le cas de l'invariant  $e_3$ , commençons par donner une autre interprétation du groupe dans lequel  $e_2$  prend ses valeurs. Pour cela, notons  $X_A$  la variété de Severi-Brauer de  $A$ . Pour toute extension  $K/F$ , les  $K$ -points de  $X_A$  sont les idéaux à droite de dimension  $n$  de l'algèbre  $A_K$  (cf. [KMRT98, §1.C]). Or, un tel idéal existe si et seulement si l'algèbre est déployée. Ainsi, le corps de fonctions  $F(X_A)$  de  $X_A$  est un corps de déploiement générique de  $A$ . Notons  $E_i(A)$  le noyau de la restriction  $\text{res}_{F/F(X_A)}^i : H^i(F, \mu_2) \rightarrow H^i(F(X_A), \mu_2)$ . On a alors (voir par exemple [MT95, cor 2.7]) :



**Proposition 5.1.** — *Le noyau de  $\text{res}_{F/F(X_A)}^2$  est le sous-groupe  $E_2(A) = \{0, [A]\}$  de  $H^2(F, \mu_2) = \text{Br}_2(F)$ .*

Ainsi, l'invariant  $e_2$  est à valeurs dans  $H^2(F, \mu_2)/E_2(A)$ . De plus, comme  $F(X_A)$  déploie  $A$ , l'involution  $\sigma \otimes \text{Id}$  de  $A_{F(X_A)}$  est l'adjointe d'une forme quadratique sur  $F(X_A)$  que l'on note  $q_\sigma$ . Du fait de sa définition, l'invariant  $e_2$  commute à l'extension des scalaires, et en combinant avec la proposition 3.6 on en déduit que pour toute algèbre  $A$  de degré pair à involution orthogonale  $\sigma$  de discriminant trivial, on a :

$$\begin{aligned} H^2(F, \mu_2)/E_2(A) &\hookrightarrow H^2(F(X_A), \mu_2), \\ e_2(A, \sigma) &\mapsto e_2(q_\sigma). \end{aligned}$$

On peut maintenant formuler la question de l'extension de l'invariant  $e_3$  au cadre des algèbres à involution de la manière suivante : peut-on associer aux algèbres à involution de type orthogonal  $(A, \sigma)$  telles que  $e_0(A, \sigma) = e_1(A, \sigma) = e_2(A, \sigma) = 0$  un invariant  $e_3(A, \sigma) \in H^3(F, \mu_2)/E_3(A)$  ayant les deux propriétés suivantes :

1.  $e_3$  commute à l'extension des scalaires;
2. pour toute algèbre à involution déployée  $(A, \sigma) = (\text{End}_F(V), \text{ad}_q)$ , on a  $e_3(A, \sigma) = e_3(q)$  ?

Si un tel invariant existait, on aurait en particulier, comme ci-dessus,

$$\begin{aligned} H^3(F, \mu_2)/E_3(A) &\hookrightarrow H^3(F(X_A), \mu_2), \\ e_3(A, \sigma) &\mapsto e_3(q_\sigma). \end{aligned}$$

Or dans [Mer92, proof of thm 4], Merkurjev construit une algèbre à division  $A$  qui est un produit de trois algèbres de quaternions  $A = Q_1 \otimes Q_2 \otimes Q_3$  et dont le centre est un corps  $F$  de dimension cohomologique au plus 2. Il vérifie donc, en particulier,  $H^3(F, \mu_2) = 0$ . Soit  $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3$  une involution orthogonale de  $A$ . D'après 4.6, on a  $e_0(A, \sigma) = e_1(A, \sigma) = e_2(A, \sigma) = 0$ . De plus, par un résultat de Karpenko [Kar00, thm 5.3], l'involution  $\sigma$  reste anisotrope après extension des scalaires au corps  $F(X_A)$ . La forme  $q_\sigma$  est donc une forme anisotrope de  $I^3(F(X_A))$ . Comme elle est de dimension 8, elle n'appartient pas à  $I^4(F(X_A))$  par le théorème d'Arason-Pfister (voir section 4.4). Or, selon le théorème de Merkurjev-Suslin [MS90],  $I^4(F(X_A))$  est le noyau du morphisme  $e_3 : I^3(F(X_A)) \rightarrow H^3(F(X_A), \mu_2)$ . On a donc  $e_3(q_\sigma) \neq 0$ , et le diagramme ci-dessus s'écrit :

$$\begin{aligned} H^3(F, \mu_2)/E_3(A) = \{0\} &\hookrightarrow H^3(F(X_A), \mu_2), \\ e_3(q_\sigma) &\neq 0. \end{aligned}$$

Ceci prouve qu'un tel invariant  $e_3$  n'existe pas.

### Références

- [ART79] S. AMITSUR, L. ROWEN & J.-P. TIGNOL – “Division algebras of degree 4 and 8 with involution”, *Israel J. Math.* **33** (1979), p. 133–148.

- [BFST93] E. BAYER-FLUCKIGER, D. SHAPIRO & J.-P. TIGNOL – “Hyperbolic involutions”, *Math. Z.* **214** (1993), no. 3, p. 461–476.
- [BP] E. BAYER & R. PARIMALA – “Pfister involutions”, en préparation.
- [Jac64] N. JACOBSON – “Clifford algebras for algebras with involution of type d”, *J. Algebra* **1** (1964), p. 288–300.
- [Kah] B. KAHN – “Formes quadratiques sur un corps”, livre en préparation.
- [Kar00] N. A. KARPENKO – “On anisotropy of orthogonal involutions”, *J. Ramanujan Math. Soc.* **15** (2000), no. 1, p. 1–22.
- [KMRT98] M.-A. KNUS, S. A. MERKURJEV, M. ROST & J.-P. TIGNOL – *The book of involutions*, Colloquium Publ., vol. 44, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [KPS91] M.-A. KNUS, R. PARIMALA & R. SRIDHARAN – “On the discriminant of an involution”, *Bull. Soc. Math. Belg. Sér. A* **43** (1991), no. 1-2, p. 89–98.
- [Lam73] T. LAM – *The algebraic theory of quadratic forms*, Mathematics Lecture Note Series, W. A. Benjamin Inc., Reading, Mass., 1973.
- [Mer81] A. MERKURJEV – “Sur le symbole de reste normique de degré 2 (en russe)”, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **261** (1981), no. 3, p. 542–547, Traduction anglaise: *Soviet Math. Dokl.* **24** (1981), 546–551.
- [Mer92] ———, “Simple algebras and quadratic forms”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **55** (1992), no. 1, p. 218–224, Traduction anglaise: *Math. USSR-Izv.* **38** (1992), no. 1, 215–221.
- [MS90] A. MERKURJEV & A. SUSLIN – “Norm residue homomorphism of degree three (en russe)”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **54** (1990), no. 2, p. 339–356, Traduction anglaise: *Math. USSR-Izv.* **36** (1991), no. 2, 349–367.
- [MT95] A. MERKURJEV & J.-P. TIGNOL – “The multipliers of similitudes and the brauer group of homogeneous varieties”, *J. reine angew Math.* **461** (1995), p. 13–47.
- [PSS93] R. PARIMALA, R. SRIDHARAN & V. SURESH – “A question on the discriminants of involutions of central division algebras”, *Math. Ann.* **297** (1993), no. 4, p. 575–580.
- [Que97] A. QUEGUINER – “Cohomological invariants of algebras with involution”, *J. Algebra* **194** (1997), p. 299–330.
- [Sch85] W. SCHARLAU – *Quadratic and hermitian forms*, Springer, Berlin, 1985.
- [Tao] D. TAO – “Pfister-form-like behavior of algebras with involution”, document non publié.

---

*Juillet 2002*

A. QUÉGUINER-MATHIEU, Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539, Institut Galilée, Université Paris 13, F-93430 Villetaneuse, France • *E-mail* : [queguin@math.univ-paris13.fr](mailto:queguin@math.univ-paris13.fr)  
*Url* : <http://zeus.math.univ-paris13.fr/~queguin/>