

THEORIE DES NOMBRES  
BESANÇON

Années 1979-1980  
et 1980-1981

SUR LA  $\ell$ -STRUCTURE GALOÏSIENNE DES IDEAUX AMBIGES  
DANS UNE EXTENSION METACYCLIQUE DE DEGRE  $n\ell$   
SUR LE CORPS DES RATIONNELS

Jean-François JAULENT

SUR LA  $\ell$ -STRUCTURE GALOISIENNE DES IDEAUX AMBIGES  
DANS UNE EXTENSION METACYCLIQUE DE DEGRE  $n\ell$   
SUR LE CORPS DES RATIONNELS

---

Par Jean-François JAULENT

**RESUME.** Nous étudions la  $\ell$ -structure galoisienne des idéaux ambiges de l'anneau des entiers  $A_N$  d'une extension métacyclique de degré  $n\ell$  sur le corps des rationnels. Et nous montrons en particulier que l'anneau  $A_N$  est localement libre sur l'ordre qui lui est associé dans l'algèbre du groupe de Galois, indépendamment de la ramification.

INTRODUCTION

Etant donné une extension normale  $N$  du corps des rationnels, le groupe de Galois  $G = \text{Gal}(N/\mathbb{Q})$  opère sur l'anneau de ses entiers  $A_N$ , qui est, de ce fait, un  $\mathbb{Z}[G]$ -module de rang 1. Et il est bien connu, depuis E. Noether [11], que  $A_N$  est localement libre sur  $\mathbb{Z}[G]$  si et seulement si la ramification est modérée.

Une façon d'éliminer l'hypothèse de modération consiste à introduire l'ordre  $\mathfrak{O}_N = \{\lambda \in \mathbb{Q}[G] \mid \lambda A_N \subset A_N\}$  des éléments de  $\mathbb{Q}[G]$  qui opèrent sur  $A_N$ . C'est ainsi que lorsque  $G$  est abélien, on sait par un résultat de Leopoldt [9] que  $A_N$  est libre sur  $\mathfrak{O}_N$ , et que ce dernier est engendré sur l'algèbre  $\mathbb{Z}[G]$  par les idempotents correspondant aux sous-groupes supérieurs de ramification des idéaux premiers de  $N$ .

Dans le cas général, la situation est, bien entendu, moins simple. Par exemple, si  $G$  est un groupe métacyclique d'ordre  $n\ell$ , produit semi-direct de centre trivial d'un groupe cyclique  $S$  d'ordre premier impair  $\ell$  par un groupe cyclique  $T$ , l'anneau  $A_N$  est bien libre sur  $\mathbb{Z}[G]$  lorsque la ramification est modérée, d'après un théorème de Fröhlich [6]; mais il existe des extensions galoisiennes de degré  $23 \times 47$ , sauvagement ramifiées sur  $\mathbb{Q}$ , et telles que le produit  $\mathfrak{m} \cdot A_N$  de l'anneau  $A_N$  par un ordre maximal  $\mathfrak{m}$  de l'algèbre  $\mathbb{Q}[G]$  ne soit pas  $\mathfrak{m}$ -stablement libre (cf [2]).

Nous nous proposons, dans ce travail, de préciser quelque peu la  $\ell$ -structure galoisienne de l'anneau  $A_N$  et, plus généralement, celle de ses idéaux ambiges, en particulier lorsque l'extension  $N/\mathbb{Q}$  est sauvagement ramifiée en  $\ell$ . Nous nous appuyons pour cela sur une classification des  $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -modules noethériens sans  $\mathbb{Z}_\ell$ -torsion, que nous exposons dans une première partie, et qui ramène l'étude de la structure d'un module  $M$  à des calculs de caractères de groupes de cohomologie, c'est-à-dire, dans le cas que nous considérons ici, à des calculs de trace dans une extension cyclique. Et nous déterminons explicitement ceux des idéaux ambiges de  $A_N$  qui sont localement libres sur leur ordre associé dans l'algèbre  $\mathbb{Q}_\ell[G]$ .

# 1. DESCRIPTION DE L'ALGÈBRE DU GROUPE SUR L'ANNEAU $\mathbb{Z}_\ell$

Dans tout ce qui suit, nous nous donnons  $\ell$  un nombre premier impair, et  $n$  un entier non nul. Par groupe métacyclique d'ordre  $n\ell$  nous entendons tout produit semi-direct  $G$  de centre trivial d'un groupe cyclique  $S$  d'ordre  $\ell$ , par un groupe  $T$ , cyclique d'ordre  $n$ .

Si  $G$  est un tel groupe, l'entier  $n$  divise  $(\ell-1)$  et l'application de  $T$  dans le groupe  $\text{Aut } S$  des automorphismes de  $S$ , qui définit le produit semi-direct, se factorise par un caractère  $\ell$ -adique primitif du groupe  $T$ , conformément à l'identité :

$$\tau \eta \tau^{-1} = \eta^{\chi(\tau)}, \text{ pour tous } \tau \text{ de } T \text{ et } \eta \text{ de } S.$$

Plus généralement, puisque l'anneau  $\mathbb{Z}_\ell$  contient les racines  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité, les représentations de  $T$  sont réalisables sur  $\mathbb{Q}_\ell$ . Cela étant, à tout caractère  $\ell$ -adique  $\varphi$  irréductible du groupe  $T$  correspond un idempotent  $e_\varphi$  de l'algèbre  $\mathbb{Z}_\ell[T]$ , défini par :

$$e_\varphi = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in T} \varphi^{-1}(\tau) \tau,$$

et caractérisé par l'identité :

$$\tau e_\varphi = \varphi(\tau) e_\varphi, \text{ pour tout } \tau \text{ de } T.$$

Il est bien connu que les  $(e_\varphi)_{\varphi \in T}^*$  constituent un système complet d'idempotents orthogonaux de l'algèbre semi-locale  $\mathbb{Z}_\ell[T]$ , indexé sur le groupe  $T^*$  des caractères  $\ell$ -adiques irréductibles de  $T$ .

Proposition 1. Les homothéties à droite associées aux idempotents irréductibles  $e_\varphi$  de  $\mathbb{Z}_\ell[T]$  sont des projecteurs orthogonaux pour la structure de  $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module de l'algèbre  $\mathbb{Z}_\ell[G]$  ; ce qui s'écrit :

$$\mathbb{Z}_\ell[G] = \bigoplus_{\varphi \in T^*} \mathbb{Z}_\ell[S] e_\varphi.$$

Faisons choix maintenant d'un générateur  $\sigma$  du groupe  $S$  ; posons  $\delta = \sigma^{-1}$ , et considérons l'élément  $\vartheta = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in T} \chi^{-1}(\tau) \sigma^{\chi(\tau)}$ .

Nous obtenons :

**Proposition 2.** La résolvente  $\vartheta$  est le générateur de l'idéal d'augmentation de l'algèbre  $\mathbb{Z}_\ell[S]$  qui satisfait à la congruence  $\vartheta \equiv \delta \pmod{\delta^2 \mathbb{Z}_\ell[S]}$ , ainsi qu'aux relations de décalage  $e_\varphi^\vartheta = \vartheta e_{\varphi\chi^{-1}}$ , pour tout  $\varphi$  de  $T^*$ .

Démonstration : Notons  $\nu = 1 + \sigma + \dots + \sigma^{\ell-1}$  l'opérateur trace, et remarquons que nous pouvons écrire :

$$\delta^{\ell-1} = \nu - \ell(1 + \delta\lambda) \quad \text{puis} \quad \delta^\ell = -\ell\delta(1 + \delta\lambda),$$

pour un  $\lambda$  convenable de  $\mathbb{Z}_\ell[S]$  ; cela nous prouve que l'élément  $\delta$  est un nilpotent topologique de l'algèbre  $\mathbb{Z}_\ell[S]$ , donc que la quantité  $(1 + \delta\lambda)$  est inversible dans  $\mathbb{Z}_\ell[S]$ , et, par suite, que  $\ell\delta$  appartient à la puissance  $\ell^{\text{ième}}$  de l'idéal d'augmentation.

Introduisons alors une section  $\bar{\chi}$  du caractère  $\chi$ , à valeurs dans  $\{1, 2, \dots, \ell-1\}$ .

De l'égalité :

$$\vartheta = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in T} \chi^{-1}(\tau) \sigma^{\chi(\tau)} = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in T} \chi^{-1}(\tau) [\sigma^{\chi(\tau)} - 1] = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in T} \chi^{-1}(\tau) [1 + \sigma + \dots + \sigma^{\bar{\chi}(\tau)-1}],$$

nous déduisons la congruence :

$$\vartheta = \frac{\delta}{n} \sum_{\tau \in T} \chi^{-1}(\tau) \bar{\chi}(\tau) \equiv \delta \pmod{\delta^2 \mathbb{Z}_\ell[S]}, \text{ qui nous prouve que}$$

$\vartheta$  engendre l'idéal d'augmentation  $\delta \mathbb{Z}_\ell[S]$ . Et l'identité  $e_\varphi^\vartheta = \vartheta e_{\varphi\chi^{-1}}$  résulte immédiatement de la relation de commutation :  $\tau\vartheta = \chi(\tau)\vartheta\tau$ .

**Corollaire.** Le centre de l'algèbre  $\mathbb{Z}_\ell[G]$  est la sous algèbre  $C = \mathbb{Z}_\ell[\vartheta^n] + \nu \mathbb{Z}_\ell[T]$ .

Démonstration : Remarquons d'abord qu'en vertu de la congruence :

$$\vartheta^{\ell-1} \equiv \delta^{\ell-1} \equiv \nu - \ell \pmod{\ell\delta \mathbb{Z}_\ell[S]},$$

l'algèbre  $\mathbb{Z}_\ell[S]$  s'écrit, comme somme directe de  $\mathbb{Z}_\ell$ -modules :  $\bigoplus_{i=0}^{\ell-2} \mathbb{Z}_\ell \vartheta^i \oplus \mathbb{Z}_\ell \nu$ .

$$\text{Ecrivons donc } x = \sum_{i=0}^{\ell-2} \sum_{j=0}^{n-1} x_{ij} \vartheta^i e_{\chi^j} + \sum_{j=0}^{n-1} y_j \nu e_{\chi^j} \text{ un élément de } \mathbb{Z}_\ell[G],$$

et supposons le central.

D'après la proposition précédente, l'identité  $\tau x = x\tau$ , pour tout  $\tau$  de  $T$ , s'écrit  $\chi^1(\tau)x_{ij} = x_{ij}$ , ce qui nous prouve que les  $x_{ij}$  sont nuls pour  $i \not\equiv 0 \pmod{n}$ ; tandis que l'égalité  $\theta x = x\theta$  nous montre que  $x_{ij}$  est indépendant de  $j$ .

Le corollaire en résulte, l'élément  $\theta^n$  étant clairement dans le centre de  $\mathbb{Z}_\ell[G]$ .

## 2. ETUDE DES $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -MODULES INDECOMPOSABLES

La classification des représentations entières d'un groupe métacyclique d'ordre  $n\ell$  a fait l'objet d'un travail de Lena Chang Pu, dans le cas où  $n$  est premier [8]. Nous précisons ce point lorsque l'anneau d'entiers est celui des nombres  $\ell$ -adiques.

Considérons pour cela un  $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module noethérien, sans  $\mathbb{Z}_\ell$ -torsion, et effectuons son dévissage à l'aide de l'application trace  $v = 1 + \sigma + \dots + \sigma^{\ell-1}$ . Dans la suite exacte :

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow M \xrightarrow{v} Q \longrightarrow 0,$$

l'image  $Q$  est un  $\mathbb{Z}_\ell[T]$ -module sur lequel  $S$  opère trivialement, donc somme directe de modules indécomposables  $\mathbb{Z}_\ell e_\varphi$ ; tandis que le noyau  $P$  est de façon naturelle un module sur l'anneau quotient  $\mathbb{Z}_\ell[G]/v\mathbb{Z}_\ell[T]$ , lequel est isomorphe à l'algèbre à produit croisé  $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[\zeta \circ T]$  engendrée sur l'anneau cyclotomique  $\mathbb{Z}_\ell[\zeta]$  par le sous-groupe d'ordre  $n$  de son groupe de Galois, pour l'action de  $T$  sur les racines  $\ell^{\text{ièmes}}$  de l'unité définie par le caractère  $\chi$ .

De plus, l'image  $Q$  étant  $\mathbb{Z}_\ell[T]$ -projective,  $M$  s'identifie en tant que  $\mathbb{Z}_\ell[T]$ -module, à la somme directe  $P \oplus Q$ . L'action de  $\mathbb{Z}_\ell[G]$  sur  $M$  peut alors être décrite par les relations :  $\theta(x, y) = (\theta x + f_\theta y, \theta y)$ , pour tout  $\theta$  de  $\mathbb{Z}_\ell[G]$ , où  $f$  désigne une application de  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell[T]}[\mathbb{Z}_\ell[G], \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(Q, P)]$  satisfaisant aux conditions :

$$f_{\alpha\beta} = \alpha f_\beta + f_\alpha \beta, \text{ pour tous } \alpha, \beta \text{ de } \mathbb{Z}_\ell[G].$$

Et la  $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -structure de  $M$  est donc caractérisée, à isomorphisme près, par la classe du cocycle  $f$  dans le groupe  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}_\ell[G]}^1(Q, P)$ .

Cela étant, nous obtenons :

**Theoreme 1.** Si  $G$  est un groupe métacyclique d'ordre  $n\ell$ , tout  $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module de type fini et sans  $\mathbb{Z}_\ell$ -torsion s'écrit comme somme directe essentiellement unique d'exemplaires des  $3n$  modules indécomposables non isomorphes suivants :

$$\Gamma_\varphi = \mathbb{Z}_\ell e_\varphi \qquad \Lambda_\varphi = \mathbb{Z}_\ell[\zeta] e_\varphi \qquad \Xi_\varphi = \mathbb{Z}_\ell[S] e_\varphi \quad ;$$

où l'indice  $\varphi$  parcourt le groupe  $T^*$  des caractères  $\ell$ -adiques irréductibles de  $T$ .

Avant d'établir le théorème, remarquons que les modules  $\Gamma_\varphi$  sont précisément ceux indécomposables sur lesquels le groupe  $S$  opère trivialement ; tandis que les modules  $\Lambda_\varphi$ , qui sont annihilés par l'opérateur trace, correspondent aux idéaux  $\mathfrak{L}^i$  de l'anneau cyclotomique  $\mathbb{Z}_\rho[\zeta]$  : en effet, si  $\omega = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in T} \chi^{-1}(\tau) \zeta^{\chi(\tau)}$  désigne l'image de la résolvante  $\vartheta$  dans  $\mathbb{Z}_\rho[\zeta]$ , l'application  $\omega^i P(\zeta) \mapsto P(\zeta) e_{\chi^i}$  est un isomorphisme de  $\mathfrak{L}^i$  sur  $\Lambda_{\chi^i}$ .

Comme, d'après les travaux de Rosen [13], tout  $\Lambda$ -module  $P$  est somme directe de tels idéaux, il suit que dans le dévissage :

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow M \xrightarrow{\nu} Q \longrightarrow 0,$$

d'un  $\mathbb{Z}_\rho[G]$ -module  $M$ , le noyau  $P$  est somme directe d'exemplaires de modules  $\Lambda_\varphi$ , et l'image de modules  $\Gamma_\varphi$ . Le foncteur  $\text{Ext}$  étant additif, il suffit donc pour déterminer  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}_\rho[G]}^1(Q, P)$ , d'explicitier celui-ci lorsque  $P$  et  $Q$  sont indécomposables. Convenons, pour simplifier, d'écrire  $\text{Hom}$  pour  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\rho[G]}$  et  $\text{Ext}$  pour  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}_\rho[G]}^1$ .

Cela étant, nous avons :

**Lemme 1.** Désignons par  $\mathfrak{L}_0$  l'unique idéal maximal du sous-anneau  $\mathfrak{B}_0$  d'indice  $n$  dans l'anneau cyclotomique  $\mathfrak{B} = \mathbb{Z}_\rho[\zeta]$  ; par  $\varphi$  et  $\psi$  deux caractères irréductibles de  $T$ . Nous obtenons :

- (i)  $\text{Hom}(\Gamma_\varphi, \Lambda_\psi) = \text{Hom}(\Lambda_\varphi, \Gamma_\psi) = 0$  ;
- (ii)  $\text{Hom}(\Xi_\varphi, \Lambda_\psi) = \text{Hom}(\Lambda_\varphi, \Lambda_\psi) = \mathfrak{L}_0^{\rho(\varphi, \psi)}$  ;
- (iii)  $\text{Hom}(\Xi_\varphi, \Gamma_\psi) = \text{Hom}(\Gamma_\varphi, \Gamma_\psi) = \langle \varphi, \psi \rangle \mathbb{Z}_\rho$  ;

où  $\rho(\varphi, \psi)$  est donné par  $\rho(\varphi, \psi) = [(t+n-1)/n]$ , si  $t$  est l'entier de  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  qui vérifie  $\psi \varphi^{-1} = \chi^t$ .

Démonstration : (i) Soit, en effet, un  $\mathbb{Z}_\rho[G]$ -morphisme  $f$  de  $\Gamma_\varphi$  dans  $\Lambda_\psi$ . Par action de l'opérateur trace  $\nu$ , il vient :  $0 = \nu f = f \nu = f \ell$  ; soit  $\ell f = 0$ , puis  $f = 0$ . Un résultat analogue vaut pour  $\text{Hom}(\Lambda_\varphi, \Gamma_\psi)$ .

(ii) Supposons maintenant  $f \in \text{Hom}(\Xi_\varphi, \Lambda_\psi)$ . De l'égalité  $f \nu = \nu f = 0$ , nous concluons que  $f$  se factorise par le quotient  $\Xi_\varphi / \nu \Xi_\varphi$  isomorphe à  $\Lambda_\varphi$  ; et un  $\mathbb{Z}_\rho[G]$ -morphisme de  $\Lambda_\varphi$  dans  $\Lambda_\psi$  n'est autre qu'une homothétie de rapport dans  $\mathfrak{B}_0$ .

(iii) Enfin, si  $f$  appartient à  $\text{Hom}(\Xi_\varphi, \Gamma_\psi)$  ; l'identité  $f \vartheta = \vartheta f = 0$  montre que  $f$  se factorise par le quotient  $\Xi_\varphi / \vartheta \Xi_\varphi$  isomorphe à  $\Gamma_\varphi$  ; ce qui achève la démonstration.

Lemme 2. Sous les mêmes hypothèses, il suit :

$$\text{Ext}(\Gamma_{\varphi}, \Lambda_{\psi}) = \langle \psi, \varphi \chi \rangle \mathbb{F}_{\ell}, \quad \text{et} \quad \text{Ext}(\Lambda_{\varphi}, \Gamma_{\psi}) = \langle \varphi, \psi \rangle \mathbb{F}_{\ell}.$$

Démonstration : Dans le dévissage canonique du module  $\Xi_{\varphi} = \mathbb{Z}_{\ell}[S] e_{\varphi}$ , l'image  $\text{Im } \nu$ , égale à  $\nu \mathbb{Z}_{\ell} e_{\varphi}$ , est isomorphe à  $\Gamma_{\varphi}$  ; et le noyau  $\text{Ker } \nu$ , égal à  $\vartheta \mathbb{Z}_{\ell}[S] e_{\varphi}$  s'identifie à  $\Lambda_{\varphi \chi} = \mathbb{Z}_{\ell}[\zeta] e_{\varphi \chi}$ , en vertu de la relation de décalage donnée à la proposition 2.

Ainsi, de la suite exacte de  $\mathbb{Z}_{\ell}[G]$ -modules :

$$0 \longrightarrow \Lambda_{\varphi \chi} \longrightarrow \Xi_{\varphi} \longrightarrow \Gamma_{\varphi} \longrightarrow 0,$$

nous déduisons la suite exacte de groupe :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\Gamma_{\varphi}, \Lambda_{\psi}) \longrightarrow \text{Hom}(\Xi_{\varphi}, \Lambda_{\psi}) \longrightarrow \text{Hom}(\Lambda_{\varphi \chi}, \Lambda_{\psi}) \longrightarrow \text{Ext}(\Gamma_{\varphi}, \Lambda_{\psi}) \longrightarrow 0,$$

qui nous donne immédiatement :

$$\text{Ext}(\Gamma_{\varphi}, \Lambda_{\psi}) = \text{Hom}(\Lambda_{\varphi \chi}, \Lambda_{\psi}) / \text{Hom}(\Lambda_{\varphi}, \Lambda_{\psi}) = \langle \varphi \chi, \psi \rangle \mathbb{F}_{\ell}.$$

De façon semblable, de la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \nu \Gamma_{\psi} \longrightarrow \Xi_{\psi} \longrightarrow \Lambda_{\psi} \longrightarrow 0,$$

nous déduisons la suite exacte de groupes :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\Lambda_{\psi}, \Gamma_{\varphi}) \longrightarrow \text{Hom}(\Xi_{\psi}, \Gamma_{\varphi}) \xrightarrow{\ell} \text{Hom}(\Gamma_{\psi}, \Gamma_{\varphi}) \longrightarrow \text{Ext}(\Lambda_{\psi}, \Gamma_{\varphi}) \longrightarrow 0,$$

qui nous donne l'isomorphisme :

$$\text{Ext}(\Lambda_{\psi}, \Gamma_{\varphi}) = \text{Hom}(\Gamma_{\psi}, \Gamma_{\varphi}) / \ell \text{ Hom}(\Gamma_{\psi}, \Gamma_{\varphi}) = \langle \psi, \varphi \rangle \mathbb{F}_{\ell}.$$

Démonstration du théorème : Considérons un  $\mathbb{Z}_{\ell}[G]$ -module indécomposable  $M$  et dévissions le par action de la trace  $\nu$ . Posons  $P = \text{Ker } \nu$  et  $Q = \text{Im } \nu$  ; puis notons  $f$  l'élément du groupe  $\text{Ext}(Q, P)$  qui définit la structure de  $M$ .

Supposons d'abord  $P$  et  $Q$  indécomposables, ce que nous pouvons écrire  $P = \Lambda_{\psi}$  et  $Q = \Gamma_{\varphi}$ . Le module  $M$  étant lui-même indécomposable, nous avons  $\psi = \varphi \chi$  d'après le lemme 2 ; et  $f$  est uniquement déterminé par la classe  $f(1)$  dans le quotient  $\Lambda_{\psi} / \omega \Lambda_{\psi}$ . Or, celle-ci pouvant être prise arbitrairement par  $\mathbb{Z}_{\ell}[G]$ -automorphisme de  $P$ , il existe donc à isomorphisme près, et sous la condition nécessaire  $\psi = \varphi \chi$ , une et une seule extension indécomposable de  $\Lambda_{\psi}$  par  $\Gamma_{\varphi}$  : c'est  $\Xi_{\varphi}$ .

Dans l'hypothèse où  $P$  et  $Q$  ne seraient pas indécomposables, écrivons les comme sommes de modules isotypiques  $P = \bigoplus_{\varphi \in P} P_{\varphi}$  et  $Q = \bigoplus_{\psi \in Q} Q_{\psi}$ . Par additivité du foncteur  $\text{Ext}$ , nous obtenons :  $\text{Ext}(Q, P) = \bigoplus_{\varphi, \psi} \text{Ext}(Q_{\psi}, P_{\varphi}) = \bigoplus_{\varphi} \text{Ext}(Q_{\varphi\chi}, P_{\varphi\chi})$  et  $M$  est décomposé dès que l'un ou l'autre de  $P$  ou de  $Q$  n'est pas isotypique. Ecrivons donc :  $P = \bigoplus_{i \in I} \Lambda_{\varphi\chi}$  et  $Q = \bigoplus_{j \in J} \Gamma_{\varphi}$  comme sommes directes d'indécomposables du même type. Nous pouvons représenter  $f$  matriciellement sous la forme  $f = [f_{ij}]$  avec  $f_{ij} \in \text{Ext}(\Gamma_{\varphi}, \Lambda_{\varphi\chi})$ , et il suffit de diagonaliser  $f$  par automorphismes de  $P$  et  $Q$  pour constater que  $M$  est décomposé avec l'un ou l'autre de  $P$  ou  $Q$ .

Ainsi, les seuls  $\mathbb{Z}_{\ell}[G]$ -modules indécomposables sont bien les  $3n$  modules proposés ; ceci achève la démonstration, puisque l'unicité de la décomposition résulte du théorème de Krull-Schmidt.

Scolie. Etant donné un module  $M$  sur l'algèbre  $\mathbb{Z}_{\ell}[G]$ , les groupes de cohomologie  $H^0(S, M) = \text{Ker } \theta$ , puis  $H^1(S, M) = \text{Ker } \nu / \text{Im } \theta$  et  $H^2(S, M) = \text{Ker } \theta / \text{Im } \nu$  sont, de façon naturelle, des  $\mathbb{Z}_{\ell}[G]$ -modules sur lesquels  $S$  opère trivialement. En particulier :

- (i)  $H^0(S, \Xi_{\varphi}) = \Gamma_{\varphi}$  ,  $H^1(S, \Xi_{\varphi}) = 0$  ;  $H^2(S, \Xi_{\varphi}) = 0$  ;
- (ii)  $H^0(S, \Gamma_{\varphi}) = \Gamma_{\varphi}$  ,  $H^1(S, \Gamma_{\varphi}) = 0$  ;  $H^2(S, \Gamma_{\varphi}) = \mathbb{F}_{\ell} e_{\varphi}$  ;
- (iii)  $H^0(S, \Lambda_{\varphi}) = 0$  ,  $H^1(S, \Lambda_{\varphi}) = \mathbb{F}_{\ell} e_{\varphi}$  ;  $H^2(S, \Lambda_{\varphi}) = 0$  .

Il suit que la  $G$ -structure d'un module  $M$ , noethérien et sans  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -torsion, est uniquement déterminée par l'action de  $T$  sur les groupes de cohomologie associés à  $S$ .

### 3. ORDRES DANS $\mathbb{Q}_{\ell}[G]$

Nous appliquons les résultats qui précèdent à la description des ordres de  $\mathbb{Q}_{\ell}[G]$  qui contiennent  $\mathbb{Z}_{\ell}[G]$ .

Précisons en premier lieu la décomposition semi-simple de l'algèbre  $\mathbb{Q}_{\ell}[G]$ .

Proposition 3. Les idempotents  $\frac{\nu}{\ell} e_{\varphi}$  attachés aux caractères irréductibles du groupe  $T$  et l'élément  $\frac{\ell-\nu}{\ell}$  constituent un système complet d'idempotents centraux de l'algèbre semi-simple  $\mathbb{Q}_{\ell}[G]$ . En particulier, dans l'isomorphisme :

$$\mathbb{Q}_{\ell}[G] = \left( \bigoplus_{\varphi \in T} \mathbb{Q}_{\ell} \frac{\nu}{\ell} e_{\varphi} \right) \oplus \mathbb{Q}_{\ell}[G] \frac{\ell-\nu}{\ell} ,$$

le facteur  $\mathbb{Q}_{\ell}[G] \frac{\ell-\nu}{\ell}$  est isomorphe à l'algèbre simple  $\mathbb{Q}_{\ell}[\zeta \circ T]$  engendrée sur le



le corps cyclotomique  $\mathbb{Q}_\ell[\zeta]$  par le sous-groupe d'ordre  $n$  de son groupe de Galois.

**Corollaire.** La sous-algèbre  $\mathfrak{M}$  de  $\mathbb{Q}_\ell[G]$ , engendrée sur  $\mathbb{Z}_\ell[G]$  par les idempotents centraux  $\frac{\nu}{\ell} e_\varphi$  attachés aux caractères irréductibles de  $T$ , est un ordre héréditaire qui admet la décomposition directe :

$$\mathfrak{M} = \left( \bigoplus_{\varphi \in T} \mathbb{Z}_\ell \frac{\nu}{\ell} e_\varphi \right) \oplus \mathbb{Z}_\ell[G] \frac{\ell-\nu}{\ell}, \text{ dans laquelle le facteur}$$

$\mathbb{Z}_\ell[G] \frac{\ell-\nu}{\ell}$  est isomorphe à l'algèbre héréditaire  $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[\zeta \circ T]$ .

De plus, tout  $\mathfrak{M}$  module noëthérien et sans  $\mathbb{Z}_\ell$ -torsion s'écrit de façon essentiellement unique comme somme directe d'exemplaires des  $2n$  modules :

$\Gamma_\varphi$  et  $\Lambda_\varphi$ , où  $\varphi$  parcourt le groupe des caractères irréductibles de  $T$ .

Démonstration : La décomposition semi-simple de l'algèbre  $\mathbb{Q}_\ell[G]$  est immédiate. Cela étant, le sous anneau  $\mathfrak{M}$  de  $\mathbb{Q}_\ell[G]$  engendré sur  $\mathbb{Z}_\ell[G]$  par les idempotents centraux, est évidemment un ordre de  $\mathbb{Q}_\ell[G]$ . Il est héréditaire comme composé direct d'algèbres héréditaires ; et les seuls  $\mathfrak{M}$ -modules noëthériens sans  $\mathbb{Z}_\ell$ -torsion, qui sont indécomposables, sont bien les modules  $\Gamma_\varphi$  et  $\Lambda_\varphi$ , conformément aux décompositions :

$$\mathfrak{M}\Gamma_\varphi = \Gamma_\varphi \quad ; \quad \mathfrak{M}\Lambda_\varphi = \Lambda_\varphi \quad ; \quad \text{et } \mathfrak{M}\Xi_\varphi \simeq \Gamma_\varphi \oplus \Lambda_\varphi.$$

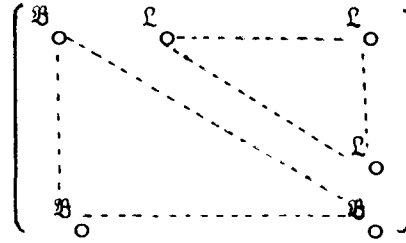
Nous pouvons dès lors décrire les ordres maximaux de l'algèbre  $\mathbb{Q}_\ell[G]$  qui contiennent  $\mathbb{Z}_\ell[G]$ . En effet, si  $\mathcal{O}$  est un tel ordre, il contient les idempotents centraux de  $\mathbb{Q}_\ell[G]$  et, par suite, l'ordre  $\mathfrak{M}$ . Par la décomposition directe :

$$\mathcal{O} = \left( \frac{\nu-\ell}{\ell} \right) \mathcal{O} \oplus \left( \bigoplus_{\varphi \in T} \mathbb{Z}_\ell \frac{\nu}{\ell} e_\varphi \mathcal{O} \right),$$

nous sommes ainsi ramenés à déterminer les ordres maximaux de l'algèbre  $\mathbb{Q}_\ell[\zeta \circ T]$  qui contiennent  $\mathbb{Z}_\ell[\zeta \circ T]$ .

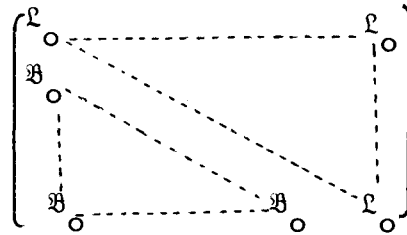
Cela étant,  $\mathbb{Q}_\ell[\zeta \circ T]$  est une algèbre simple centrale sur le sous corps  $\mathbb{Q}_0$  d'indice  $n$  dans le corps cyclotomique  $\mathbb{Q}_\ell[\zeta]$ , de sorte que, conformément aux résultats de Reiner ([12], th. 39.14), l'algèbre héréditaire  $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[\zeta \circ T]$  admet (avec les notations du lemme 1) une description matricielle dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Q}_0)$ , de la forme :

$$\Lambda = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathfrak{L}^i =$$



Dans cet isomorphisme, le radical  $\mathfrak{R} = \mathfrak{J} \Lambda$  s'écrit :

$$\mathfrak{R} = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{L}^i =$$



Tandis que les ordres maximaux  $\mathfrak{O}_{\chi^i}$  de  $\mathbb{O}_\ell[\zeta \circ T]$  s'obtiennent respectivement, à partir de l'anneau cyclotomique  $\mathfrak{B} = \mathbb{Z}_\ell[\zeta] = \bigoplus_{j=0}^{n-1} \mathfrak{B}_\circ \omega^j$ , comme ordres associés aux  $n$  modules  $\mathfrak{R}^i \mathfrak{B}$ , pour  $i = 0, \dots, n-1$  ([12], th. 39.23).

Autrement dit, nous avons  $\mathfrak{O}_{\chi^i} = \{x \in \mathbb{O}_\ell[\zeta \circ T] \mid x \mathfrak{R}^i \mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}^i \mathfrak{B}\}$ .

Ainsi, de la décomposition directe  $\mathfrak{R}^i \mathfrak{B} = \bigoplus_{j=0}^{n-1} \mathfrak{B}_\circ \omega^{i+j}$ , nous déduisons immédiatement la description matricielle :

$$\mathfrak{O}_{\chi^i} = \bigoplus_{j=0}^{i-1} \mathfrak{L}^{i-n} \bigoplus_{j=i}^{n-1} \mathfrak{L}^i =$$

En particulier le  $\mathfrak{O}_{\chi^i}$ -module  $\mathfrak{R}^i \mathfrak{B} = \mathfrak{L}^i$  est, à isomorphisme près, le seul qui soit indécomposable.

Récapitulant ces résultats, nous obtenons :

**Theoreme 2.** Etant donné un groupe métacyclique  $G$ , d'ordre  $n\ell$ , il existe exactement  $n$  ordres maximaux  $\mathfrak{M}_\varphi$  dans l'algèbre  $\mathbb{O}_\ell[G]$ , qui contiennent  $\mathbb{Z}_\ell[G]$ . Plus précisément, pour tout caractère  $\ell$ -adique irréductible  $\varphi$  du groupe  $T$ , l'ordre  $\mathfrak{M}_\varphi$ , qui est associé au module  $\Lambda_\varphi$ , est engendré sur  $\mathbb{Z}_\ell[G]$  par le nilpotent  $e_\varphi \frac{\vartheta^{\ell-n}}{\ell}$ .

Sa décomposition indécomposable sur l'algèbre  $\mathbb{Z}_\ell[G]$  est ainsi :

$$\mathfrak{M}_\varphi \simeq \left( \bigoplus_{j=0}^{n-1} \Lambda_\varphi \right) \oplus \left( \bigoplus_{\psi \in T^*} \Gamma_\psi \right).$$

Démonstration : Il suffit de vérifier que les éléments  $e_{\varphi\chi^j} \frac{\vartheta^{i+j}}{\ell}$  qui opèrent sur  $\Lambda_\varphi$  sont ceux pour lesquels  $i$  est supérieur à  $\ell-n$ , lorsque  $j$  décrit  $0, \dots, n-1$ ; et qu'ils s'obtiennent tous à partir de  $e_\varphi \frac{\vartheta^{\ell-1}}{\ell}$  par multiplication par une puissance de  $\vartheta$ . En particulier,  $\mathfrak{M}_\varphi$  contient les éléments  $e_\psi \frac{\vartheta^{\ell-1}}{\ell}$  et donc les idempotents centraux  $\frac{\vartheta}{\ell} e_\psi$ .

**Corollaire.** Pour tout caractère  $\ell$ -adique irréductible  $\varphi$  du groupe  $T$ , l'ordre  $\mathfrak{M}_\varphi$ , associé au module  $\Xi_\varphi$ , est engendré sur  $\mathbb{Z}_\ell[G]$  par le nilpotent  $\vartheta e_\varphi \frac{\vartheta^{\ell-n}}{\ell}$ . Il contient  $\vartheta \mathfrak{M}_\varphi$ , ainsi que les idempotents centraux  $\frac{\vartheta}{\ell} e_\psi$ , pour  $\psi \neq \varphi$ ; sa décomposition s'écrit :

$$\mathfrak{M}_\varphi \simeq \mathfrak{M}_\varphi \oplus \left( \bigoplus_{j=1}^{n-1} \Lambda_{\varphi\chi^j} \right) \oplus \left( \bigoplus_{\psi \neq \varphi} \Gamma_\psi \right).$$

Cela étant, l'ordre associé à un  $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module de rang 1, s'obtient immédiatement comme intersection des ordres associés à ses composantes. C'est ainsi que l'ordre  $\mathfrak{M}$  est l'intersection des  $\mathfrak{M}_\varphi$ , et  $\mathbb{Z}_\ell[G]$  celle des  $\mathfrak{M}_\varphi$ .

#### 4. APPLICATION AUX ENTIERS D'UN CORPS LOCAL

Dans ce paragraphe  $N$  désigne une extension métacyclique de degré  $n\ell$ , sauvagement ramifiée sur le corps  $\mathbb{O}_\ell$  des nombres  $\ell$ -adiques,  $\mathfrak{A}$  l'anneau de ses entiers et  $\mathfrak{P}$  son idéal maximal. Nous notons  $G$  le groupe de Galois,  $S$  le sous-groupe dérivé,  $T$  un relèvement de  $G/S$  en un sous-groupe de  $G$ , et  $\chi$  le caractère de l'action de  $T$  sur  $S$ .

Le sous-corps  $K$  des invariants de  $S$  est une extension cyclique, modérément ramifiée, de degré  $n$  sur  $\mathbb{O}_\ell$ , et dont le groupe de Galois est isomorphe à  $T$ . L'anneau de ses entiers  $\mathfrak{a}$  est donc libre sur l'algèbre  $\mathbb{Z}_\ell[T]$  :

$$\mathfrak{a} \simeq \mathbb{Z}_\ell[T] = \bigoplus_{\varphi \in T} \Gamma_\varphi ;$$

tandis que si  $f$  désigne l'indice d'inertie de  $\ell$  dans  $K$ , le quotient de  $\mathfrak{a}$  par son

idéal maximal  $\mathfrak{p}$ , qui s'identifie au corps  $F_{\ell^f}$ , est isomorphe, comme  $\mathbb{Z}_{\ell}[T]$ -module, à l'algèbre  $F_{\ell}[T/I]$  du quotient de  $T$  par le sous-groupe d'inertie de  $\ell$  dans  $K$  :

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{p} \simeq F_{\ell}[T/I] = \bigoplus_{\varphi \in (T/I)^*} F_{\varphi}, \text{ où nous avons écrit } F_{\varphi} \text{ pour } \Gamma_{\varphi}/\ell\Gamma_{\varphi}.$$

Introduisons l'indice de ramification  $e$  de  $\ell$  dans  $K$ , puis  $t$  le saut de ramification sauvage ; et, puisque le corps  $\mathbb{Q}_{\ell}$  contient les racines  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité, faisons choix dans  $\mathfrak{A}$  d'une uniformisante  $\pi$  dont la puissance  $n^{\text{ième}}$  soit invariante par  $T$ . Notons  $\rho = \pi^{\vee}$  sa norme sur  $K$  et  $\psi$  le caractère de  $T$  défini par l'identité :

$$\pi^{\tau-1} = \psi(\tau), \text{ pour tout } \tau \text{ de } T.$$

**Lemme 3.** Le saut de ramification  $t$  est lié à l'indice  $e$  par la relation :  $t \leq \left[ \frac{e\ell}{\ell-1} \right] \leq \ell$  ; et l'égalité  $t = \ell$  n'a lieu que pour  $e = n = \ell - 1$ .

Démonstration : Voir [10] lemme III.1 .

**Lemme 4.** Le caractère  $\chi \psi^{-t}$  est trivial sur le sous-groupe d'inertie  $I$ .

Démonstration : D'après ce qui précède, nous pouvons écrire

$$\vartheta \pi \equiv a \pi^{t+1} [\text{mod } \mathfrak{P}^{t+2}], \text{ pour un } a \text{ de } \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p} \text{ fixé par } I.$$

De l'identité  $\tau \vartheta = \chi(\tau) \vartheta \tau$  donnée par la proposition 2, nous déduisons immédiatement :

$$\psi^{t+1}(\tau) a^{\tau} \pi^{t+1} \equiv \chi(\tau) \psi(\tau) a \pi^{t+1} [\text{mod } \mathfrak{P}^{t+2}], \text{ soit } a^{\tau} \equiv \chi \psi^{-t}(\tau) a [\text{mod } \mathfrak{P}];$$

ce qui nous prouve que  $\chi \psi^{-t}(\tau)$  vaut 1, pour tout  $\tau$  de  $I$ .

En particulier, l'élément  $\pi^{-1-t} \vartheta \pi$  est invariant par le groupe d'inertie  $I$ , de sorte que nous avons en fait l'égalité :

$$\vartheta \pi = a \pi^{1+t}, \text{ pour un choix convenable de } a \text{ dans le sous-corps}$$

d'inertie ; et, bien sûr :  $\vartheta \pi^k \equiv k a \pi^{k+t} [\text{mod } \mathfrak{P}^{k+t+1}]$ , pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ .

Cela étant :

Proposition 4. Pour tout entier relatif  $s$ , l'idéal fractionnaire  $\mathfrak{P}^s$  s'écrit comme somme directe de  $\mathbb{Z}_\ell [T]$ -modules sous la forme :

$$\mathfrak{P}^s = \mathfrak{a} \pi^{t+\ell u} \oplus \vartheta(\mathfrak{P}^{s-t}), \quad \text{avec } u = 1 + \left[ \frac{s-t-1}{\ell} \right]$$

Démonstration (d'après J. Cougnard [3]) : Il suffit d'écrire :

$$\mathfrak{P}^s = \bigoplus_{k=s}^{s+(\ell-1)} \mathfrak{a} \pi^k = \mathfrak{a} \pi^{t+\ell u} + \sum_{\substack{k=s \\ \ell \nmid (k-t)}}^{s+(\ell-1)} \mathfrak{a} \pi^k \subset \mathfrak{a} \pi^{t+\ell u} + \vartheta \left( \sum_{k=s-t}^{s-t+(\ell-1)} \mathfrak{a} \pi^k \right),$$

en vertu des congruences qui précèdent ; puis de vérifier que la somme est directe, par exemple en appliquant l'opérateur trace  $\nu$ .

Corollaire 1. Pour tout  $s$  de  $\mathbb{Z}$ , le noyau, dans l'idéal fractionnaire  $\mathfrak{P}^s$ , de l'opérateur trace  $\nu$  est le sous-module :  $\mathfrak{P}^{s*} = \vartheta(\mathfrak{P}^{s-t})$  ; tandis que l'image de  $\nu$  est l'idéal fractionnaire :

$$\nu(\mathfrak{P}^s) = \mathfrak{p}^v, \quad \text{avec } v = \left[ \frac{s+(t+1)(\ell-1)}{\ell} \right].$$

Démonstration : la première partie résulte de la proposition ; la seconde de [14] (Ch. V, § 3, lemme 4).

Corollaire 2. Pour tout  $s$  de  $\mathbb{Z}$ , les groupes de cohomologie attachés à l'idéal fractionnaire  $\mathfrak{P}^s$  sont donnés par les  $\mathbb{F}_\ell [T]$ -isomorphismes :

$$H^1(S, \mathfrak{P}^s) \simeq (\mathfrak{P}^s / \mathfrak{P}^{s+t}) / (\mathfrak{p}^v / \mathfrak{p}^{w+t}) ;$$

$$H^2(S, \mathfrak{P}^s) \simeq \mathfrak{p}^w / \mathfrak{p}^v ; \quad \text{avec } v = t + 1 + \left[ \frac{s-t-1}{\ell} \right] \text{ et } w = 1 + \left[ \frac{s-1}{\ell} \right].$$

Ils ont même ordre  $\ell^{(t-1) + \left[ \frac{s-1+(\ell-t)}{\ell} \right] - \left[ \frac{s-1}{\ell} \right]}$  et s'annulent simultanément pour tous les  $s$ , en ramification modérée ; et pour tous les seuls  $s \equiv 1 \pmod{\ell}$ , lorsque  $t$  vaut 1.

Démonstration : Puisque le corps  $N$  est un  $K[S]$ -module libre, il existe dans  $\mathfrak{P}^s$  un sous-module ouvert, qui est libre sur  $\mathfrak{a}[S]$ . Le quotient de Herbrand de  $\mathfrak{P}^s$  est donc trivial, et les groupes  $H^i(S, \mathfrak{P}^s)$  ont ainsi le même ordre.

Maintenant, d'après le corollaire 1, le premier groupe de cohomologie est donné par la formule :  $H^1(S, \mathfrak{P}^S) = \vartheta(\mathfrak{P}^{S-t})/\vartheta(\mathfrak{P}^S)$  ; et ce dernier quotient est l'image par l'opérateur  $\vartheta\pi^{-t}$  du groupe  $\mathfrak{P}^S/(\mathfrak{P}^{S+t} + (K \cap \mathfrak{P}^{S-t})\pi^t)$ , que nous pouvons encore écrire  $(\mathfrak{P}^S/\mathfrak{P}^{S+t})/\pi^t((K \cap \mathfrak{P}^{S-t})/(K \cap \mathfrak{P}^S))$ . Sous cette forme, le dénominateur s'écrit  $\pi^t[\mathfrak{p}^{v-t}/\mathfrak{p}^w]$  ; et il est donc isomorphe à  $\mathfrak{p}^v/\mathfrak{p}^{w+t}$ .

Cela étant, convenons, pour tout caractère irréductible  $\varphi$  de  $T$ , de noter  $\Phi$  le caractère de degré  $f$  défini par la formule  $\Phi = \sum_{\theta \in (T/I)^*} \theta \varphi$ . Le lemme 4 nous prouve que l'image bijective par l'opérateur  $\vartheta\pi^{-t}$  d'un  $\mathbb{F}_\ell[T]$ -module de caractère  $\Phi$  est un  $\mathbb{F}_\ell[T]$ -module de même caractère. Comme les quotients  $\mathfrak{P}^S/\mathfrak{P}^{S+t}$  et  $\mathfrak{p}^S/\mathfrak{p}^{w+t}$  sont sommes de tels modules, la première partie du corollaire se trouve ainsi établie.

Quant au second groupe de cohomologie, il s'écrit immédiatement :

$$H^2(S, \mathfrak{P}^S) = \mathfrak{p}^w/\mathfrak{p}^v ; \text{ ce qui achève la démonstration.}$$

D'après le scolie au théorème 1, le corollaire 2 ci-dessus détermine complètement la structure galoisienne de l'idéal  $\mathfrak{P}^S$ . En effet, si nous convenons d'écrire  $\Psi^k$  pour  $\Phi$  lorsque  $\varphi$  est égal à  $\psi^k$ , le caractère du  $\mathbb{F}_\ell[T]$ -module  $H^1(S, \mathfrak{P}^S)$  est exactement :

$$\Phi_1 = \Psi^S + \Psi^{S+1} + \dots + \Psi^{S+t-1} - \left( \left[ \frac{S-1}{\ell} \right] - \left[ \frac{S-t-1}{\ell} \right] \right) \Psi^v ;$$

tandis que le caractère de  $H^2(S, \mathfrak{P}^S)$  s'écrit :

$$\Phi_2 = \Psi^w + \Psi^{w+1} + \dots + \Psi^{v-1} .$$

La  $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -structure de l'idéal  $\mathfrak{P}^S$  est donc donnée par la formule :

$$\mathfrak{P}^S \simeq \left[ \bigoplus_{\varphi|\Phi_1} \Lambda_\varphi \right] \oplus \left[ \bigoplus_{\varphi|\Phi_2} \Gamma_\varphi \right] \oplus \left[ \bigoplus_{\varphi|\Phi_2} \Xi_\varphi \right] ; \text{ conformément à l'iso-}$$

morphisme :

$$\mathfrak{p}^w \simeq \left[ \bigoplus_{\varphi|\Phi_2} \Gamma_\varphi \right] \oplus \left[ \bigoplus_{\varphi|\Phi_2} \Gamma_\varphi \right] = \mathbb{Z}_\ell[T].$$

Tandis que son ordre associé  $\mathcal{O}^S$  n'est autre que l'intersection :

$$\mathcal{O}^S = \left( \bigcap_{\varphi|\Phi_1} \mathfrak{M}_\varphi \right) \cap \left( \bigcap_{\varphi|\Phi_2} \mathfrak{M}_\varphi \right).$$

**Theoreme 3.** Pour tout entier relatif  $s$ , le quotient  $\mathbb{P}^s / \text{Tr}_{N/K}(\mathbb{P}^s)$  est libre sur l'algèbre  $\Lambda$  si et seulement si les groupes de cohomologie de l'idéal  $\mathbb{P}^s$  relativement au groupe  $S$  ont même caractère  $\Phi$ ; ce qui a lieu exactement dans les cas suivants :

en ramification modérée, pour toute valeur de  $s$  ;

en ramification sauvage, pour tous les  $s$  de  $r + \ell\mathbb{Z}$ , si  $r$  est un entier de  $[1, \ell]$  qui vérifie la congruence  $r \equiv 1 \pmod{\ell}$ .

Lorsque c'est le cas, l'idéal  $\mathbb{P}^s$  est libre sur son ordre associé  $\mathcal{O}^s$ , qui est engendré sur  $\mathbb{Z}_\ell[G]$  par les idempotents  $e_\varphi \frac{\nu}{\ell}$ , pour les  $\varphi$  divisant  $\Phi$ .

Démonstration : D'après ce qui précède, la  $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -structure du quotient  $\mathbb{P}^s / \text{Tr}_{N/K}(\mathbb{P}^s)$  est donnée par l'isomorphisme :

$$\mathbb{P}^s / \text{Tr}_{N/K}(\mathbb{P}^s) \simeq \left( \bigoplus_{\varphi | \Phi_1} \Lambda_\varphi \right) \oplus \left( \bigoplus_{\varphi | \Phi_2} \Lambda_\varphi \right).$$

L'égalité  $\Phi_1 = \Phi_2$  caractérise donc ceux de ces quotients qui sont libres sur  $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[\zeta \circ \tau]$ .

Lorsqu'elle a lieu, le module  $\pi\mathbb{P}^s$  s'écrit comme somme directe :

$$\pi\mathbb{P}^s \simeq \left( \bigoplus_{\varphi | \Phi} \Lambda_\varphi \right) \oplus \left( \bigoplus_{\varphi \nmid \Phi} \Lambda_\varphi \right) \oplus \mathbb{Z}_\ell[\tau] \simeq \pi;$$

de sorte que l'ordre  $\mathcal{O}^s$  associé à  $\mathbb{P}^s$  est contenu dans  $\pi$ . Un calcul immédiat montre qu'il est engendré sur  $\mathbb{Z}_\ell[G]$  par les idempotents centraux attachés aux  $\varphi$  divisant  $\Phi$ .

**Corollaire.** L'anneau  $\mathfrak{A}$  et l'idéal  $\mathbb{P}$  sont libres sur leurs ordres respectifs dans

l'algèbre  $\mathcal{O}_\ell[G]$ . L'ordre  $\mathcal{O}(\mathbb{P})$  est engendré sur  $\mathbb{Z}_\ell[G]$  par les idempotents  $\frac{\nu}{\ell} e_{\theta\psi^k}$ , pour  $\theta \in (T/I)^*$  et  $k = 1, \dots, t-1$ ; et l'ordre  $\mathcal{O}(\mathfrak{A})$  contient en outre les idempotents correspondant à  $k = 0$ .

En tant que  $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module, l'anneau des entiers  $\mathfrak{A}$  s'écrit comme somme directe :

$$\mathfrak{A} \simeq \bigoplus_{\theta \in (T/I)^*} \left[ \left( \bigoplus_{\substack{k=0 \\ k \neq e}}^{t-1} \left( \Gamma_{\theta\psi^k} \oplus \Lambda_{\theta\psi^k} \right) \right) \oplus \left( \bigoplus_{k=t}^{e-1} \Xi_{\theta\psi^k} \right) \right],$$

Et, dans cet isomorphisme, l'idéal maximal  $\mathbb{P}$  est représenté par le sous-module :

$$\mathbb{P} \simeq \bigoplus_{\theta \in (T/I)^*} \left[ \ell \Xi_{\theta\psi^0} \oplus \left( \bigoplus_{k=1}^{t-1} \left( \Gamma_{\theta\psi^k} \oplus \Lambda_{\theta\psi^k} \right) \right) \oplus \left( \bigoplus_{k=t}^{e-1} \Xi_{\theta\psi^k} \right) \right],$$

lorsque le saut de ramification est strictement inférieur à  $\ell$  ;

$$\mathbb{P} \simeq \bigoplus_{\theta \in (T/I)^*} \left[ \left( \ell \Gamma_{\theta\psi^0} \oplus \Lambda_{\theta\psi^0} \right) \oplus \left( \bigoplus_{k=1}^{\ell-2} \left( \Gamma_{\theta\psi^k} \oplus \Lambda_{\theta\psi^k} \right) \right) \right] \simeq \mathfrak{A},$$

sinon.

## 5. EXTENSION AUX ENTIERS D'UN CORPS GLOBAL

Etudions maintenant le cas d'une extension globale  $N$ , métacyclique de degré  $n\ell$  sur le corps des rationnels, sauvagement ramifiée au-dessus de  $\ell$ .

Comme plus haut, notons  $G$  le groupe de Galois  $\text{Gal}(N/\mathbb{Q})$ , puis  $S$  le sous-groupe dérivé,  $T$  un relèvement du quotient  $G/S$  en un sous-groupe de  $G$ , et  $\chi$  le caractère définissant l'action de  $T$  sur  $S$ .

Introduisons le sous-corps  $K$  des invariants de  $S$ , qui est une extension cyclique de degré  $n$  sur  $\mathbb{Q}$  et dont le groupe de Galois est isomorphe à  $T$ ; puis désignons par  $D$  le sous-groupe de décomposition de  $\ell$  dans  $K$ , par  $I$  le sous-groupe d'inertie, et par  $H$  le sous-groupe métacyclique de  $G$ , produit semi-direct de  $S$  et de  $D$ . Notons enfin :

$A_N$  l'anneau des entiers de  $N$ ; et  $\mathfrak{P}$  l'idéal ambigue maximal au dessus de  $\ell$ ;  
 $\mathfrak{A}$  le complété de  $A_N$  en  $\mathfrak{P}$ , et  $\mathfrak{p}$  son idéal maximal ;  
 $\mathfrak{G}$  le tensorisé  $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} A_N$ , et  $\mathfrak{P} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{P}$ ;

puis, de façon semblable :

$A_K$  l'anneau des entiers de  $K$ ; et  $\mathfrak{p}$  la trace de  $\mathfrak{P}$  sur  $A_K$  ;  
 $\mathfrak{a}$  le complété de  $A_K$  en  $\mathfrak{p}$ , et  $\mathfrak{p}$  son idéal maximal ;  
 $\mathfrak{a}$  le tensorisé  $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} A_K$ , et  $\mathfrak{p} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{p}$ .

A l'anneau  $\mathfrak{A}$  qui est métacyclique de degré  $m\ell$  (divisant  $n\ell$ ) sur  $\mathbb{Z}$ , et dont le groupe de Galois s'identifie à  $H$ , nous pouvons appliquer les résultats de l'étude précédente. C'est ainsi que nous avons les isomorphismes de  $\mathbb{Z}_\ell[D]$ -modules :

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{p} \simeq \mathbb{F}_\ell[D/I] \quad \text{et} \quad \mathfrak{a} \simeq \mathbb{F}_\ell[D] ;$$

puis par passage à la représentation induite :

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{p} \simeq \mathbb{F}_\ell[T/I] \quad \text{et} \quad \mathfrak{a} \simeq \mathbb{F}_\ell[T].$$

Il est bien connu en effet que l'anneau  $\mathfrak{G} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} A_N$  s'obtient par induction à partir de  $\mathfrak{A}$  ; autrement dit que l'on a :



$$\mathcal{G} = \mathbb{Z}_\ell[G] \otimes_{\mathbb{Z}_\ell[H]} \mathbb{Z}_\ell^2$$

En particulier nous obtenons immédiatement à partir du théorème 3 :

**Théorème 4.** Etant donnée une extension métacyclique de degré  $n \ell$  sur le corps des rationnels, le tensorisé  $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} A_N$  de l'anneau de ses entiers s'écrit comme somme directe de  $\mathbb{Z}_\ell[G]$  modules :

$$\mathcal{G} \simeq \bigoplus_{\theta \in (D/I)^*} \left[ \left( \bigoplus_{k=0}^{t-1} \left( \Gamma_{\Theta \Psi^k} \oplus \Lambda_{\Theta \Psi^k} \right) \right) \oplus \left( \bigoplus_{k=t}^{e-1} \mathbb{H}_{\Theta \Psi^k} \right) \right]$$

lorsque le saut de ramification est strictement inférieur à  $\ell$  ; l'écriture  $\Theta \Psi^k$  représentant l'induit dans  $T$  du caractère  $\theta \Psi^k$  du sous-groupe de décomposition  $D$  :

$$\mathcal{G} \simeq \bigoplus_{\theta \in T^*} \left( \Gamma_\theta \oplus \Lambda_\theta \right) \text{ sinon.}$$

En particulier  $\mathcal{G}$  est toujours libre sur son ordre associé dans  $\mathbb{Z}_\ell[G]$ .

Démonstration : Le cas sauvage s'obtient par induction ; tandis que le cas modéré résulte de la surjectivité de l'application trace  $\nu = \text{Tr}_{N/K}$  qui entraîne  $\mathcal{G} \simeq \mathbb{Z}_\ell[G]$ .

Tout comme dans le cas local, nous obtenons ainsi :

**Corollaire 1.** Le quotient  $\mathcal{G}/\mathfrak{a}$  est isomorphe à l'algèbre héréditaire  $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[\zeta \circ T]$ .

Ce qui est une version affaiblie d'un résultat plus général, puisqu'on peut montrer que le quotient  $A_N/A_K$  est en fait libre sur  $\mathbb{Z}[\zeta \circ T]$  (cf [4]).

**Corollaire 2.** L'ordre  $\mathcal{O}(\mathcal{G})$  est engendré sur  $\mathbb{Z}_\ell[G]$  par les idempotents  $\frac{\nu}{\ell} e_\varphi$  associés aux facteurs irréductibles  $\varphi$  des caractères induits  $\Theta \Psi^k$  par les  $\theta \Psi^k$  lorsque  $\theta$  décrit le groupe  $(T/I)^*$  et  $k$  le segment  $0, 1, \dots, (t-1)$ .

**Corollaire 3.** L'anneau des entiers d'une extension métacyclique de degré  $n \ell$  sur le corps des rationnels est localement libre sur son ordre associé dans l'algèbre du groupe de Galois.

Démonstration : Compte tenu du théorème, il suffit de regarder  $\mathcal{G}_\mathfrak{q} = \mathbb{Z}_\mathfrak{q} \otimes_{\mathbb{Z}} A_N$ , pour les  $\mathfrak{q}$  différents de  $\ell$ . Or, pour un tel premier  $\mathfrak{q}$ , le tensorisé  $\mathcal{G}_\mathfrak{q}$  se scinde en deux termes :

$$\mathcal{G}_\mathfrak{q} = \left( \frac{\nu - \ell}{\ell} \right) \mathcal{G}_\mathfrak{q} \oplus \frac{\nu}{\ell} \mathcal{G}_\mathfrak{q}.$$

Le premier terme s'identifie au produit tensoriel  $\mathbb{Z}_\mathfrak{q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta \circ T]$  ; et le

second,  $\mathbb{Z}_q \otimes_{\mathbb{Z}} A_K$  est bien libre sur son ordre associé dans  $\mathbb{Z}_q[T]$ , d'après le résultat de Leopoldt.

Rappelons que pour  $n = 2$  ce dernier corollaire entraîne que l'anneau  $A_N$  est en fait libre sur son ordre associé dans  $\mathbb{Q}[G]$  (cf. [1]).

Pour illustrer les résultats qui précèdent, considérons le cas des extensions kummeriennes de degré  $\ell$  sur le corps cyclotomique  $\mathbb{Q}[\zeta]$ , qui sont non ramifiées en dehors de  $\ell$ .

Supposons, pour simplifier,  $\ell$  régulier et notons  $K$  le corps cyclotomique  $\mathbb{Q}[\zeta]$ ,  $T = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  son groupe de Galois,  $T/T_0$  celui de son sous-corps réel maximal et  $\omega$  le caractère de l'action de  $T$  sur le groupe des racines  $\ell^{\text{ièmes}}$  de l'unité. Cela étant, pour tout caractère pair  $\varphi = \omega^{2h}$  de  $T$ , faisons choix d'une section  $\bar{\varphi}$  modulo  $\ell$ , à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , et telle que la somme  $\sum_{\tau \in T} \bar{\varphi}(\tau)$  soit nulle.

Définissons alors  $N_{\varphi}$  par  $K[\sqrt[\ell]{\epsilon_{\bar{\varphi}}}]$  en prenant pour  $\epsilon_{\bar{\varphi}}$

- l'entier  $\ell$  si  $\varphi$  est le caractère unité,

- l'unité cyclotomique  $\prod_{\tau \in T} (\zeta^{\omega(\tau)} - \zeta^{-\omega(\tau)})^{\bar{\varphi}(\tau^{-1})}$  sinon.

Il est bien connu que les  $\frac{\ell-1}{2}$  corps  $N_{\varphi}$  ainsi définis engendrent, avec le corps cyclotomique  $\mathbb{Q}[\zeta_2]$ , la  $\ell$ -extension abélienne maximale  $\ell$ -ramifiée de  $\mathbb{Q}[\zeta]$ .

Cela étant, la congruence :

$$\epsilon_{\bar{\varphi}}^{\tau} \equiv \epsilon_{\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi}(\tau)} \pmod{E_K^{\ell}}$$

dans le groupe des unités  $E_K$ , nous prouve

que le corps  $K_{\varphi}$  est une extension normale de degré  $\ell(\ell-1)$  sur  $\mathbb{Q}$ , qui est métacyclique, de caractère :

$$\chi = \omega \varphi^{-1} = \omega^{\ell-2h}.$$

Or, puisque  $N_{\varphi}$  est totalement et sauvagement ramifiée sur  $\mathbb{Q}$ , son complété  $\ell$ -adique est une extension métacyclique de degré  $\ell(\ell-1)$  sur  $\mathbb{Q}_{\ell}$ . D'après le lemme 4, la relation précédente nous assure que le saut de ramification  $t$  est égal à  $\ell-2h$ .

La structure de l'anneau des entiers est donc donnée par l'isomorphisme :

$$\mathfrak{A} \simeq (\Gamma_{\omega_0} \oplus \Lambda_{\omega_0}) \oplus (\Gamma_{\omega} \oplus \Lambda_{\omega}) \oplus \dots \oplus (\Gamma_{\omega^{\ell-1}} \oplus \Lambda_{\omega^{\ell-1}}) \oplus \mathfrak{H}_{\omega^{\ell-1}} \oplus \dots \oplus \mathfrak{H}_{\omega^{\ell-2}};$$

tandis que celle de l'idéal maximal s'écrit :

$$\mathfrak{P} \simeq \mathfrak{H}_{\omega_0} \oplus (\Gamma_{\omega} \oplus \Lambda_{\omega}) \oplus \dots \oplus (\Gamma_{\omega^{\ell-1}} \oplus \Lambda_{\omega^{\ell-1}}) \oplus \mathfrak{H}_{\omega^{\ell-1}} \oplus \dots \oplus \mathfrak{H}_{\omega^{\ell-2}}.$$

BIBLIOGRAPHIE

=====

- [ 1 ] A.-M. BERGE  
Sur l'arithmétique d'une extension diédrale.  
Ann. Sc. Inst. Fourier, 22 (1972), p. 31-59.
  
- [ 2 ] J. COUGNARD  
Un contre exemple à une conjecture de J. Martinet.  
Algebraic Number Fields, Academic Press, London (1977), p. 539-560.
  
- [ 3 ] J. COUGNARD  
Une propriété de l'anneau des entiers des extensions galoisiennes non abéliennes de degré  $pq$  des rationnels.  
Comp. Mathematica (à paraître).
  
- [ 4 ] J. COUGNARD  
Remarques sur l'arithmétique de certaines extensions métacycliques.  
(à paraître).
  
- [ 5 ] M.-J. FERTON  
Sur les idéaux d'une extension cyclique de degré premier d'un corps local.  
Sém. Th. Nombres, Grenoble (1972-1973).
  
- [ 6 ] A. FROHLICH  
A normal integral basis theorem.  
J. of Alg., 39 (1976), p. 131-137.
  
- [ 7 ] J.-F. JAULENT  
Remarques sur la structure galoisienne des entiers d'une extension métacyclique de  $\mathbb{Q}$ .  
C.R. Acad. Sc. Paris.
  
- [ 8 ] LENA CHANG PU  
Integral representations of non abelian groups of order  $pq$ .  
Mich. math. J., 15 (1975).

- [ 9 ] H. - W. LEOPOLDT  
Über die Hauptordnung der ganzen Elementen eines abelschen Zahlkörpers.  
J. für die reine und angew. Math., 201 (1959), p. 119-149.
- [ 10 ] J. MARTINET  
Sur l'arithmétique des extensions galoisiennes à groupe de Galois diédral  
d'ordre 2p.  
Ann. Sc. Inst. Fourier, 19 (1969), p. 1-80.
- [ 11 ] E. NOETHER  
Normalbasis bei Körpern ohne höhere Verzweigung.  
J. für die reine und angew. Math., 167 (1931), p. 147-152.
- [ 12 ] I. REINER  
Maximal orders.  
Academic Press, London (1975).
- [ 13 ] M. ROSEN  
Representations of twisted group rings.  
Ph. D. Thesis, Princeton (1963).
- [ 14 ] J. - P. SERRE  
Corps locaux.  
Hermann, Paris (1968).
- [ 15 ] S. ULLOM  
Integral normal basis in Galois extensions of local fields.  
Nagoya Math. J., 39 (1970), p. 141-148.

Jean-François JAULENT  
E. R. A. n°070654  
Université de Franche-Comté  
Faculté des Sciences - Mathématiques  
Route de Gray - La Bouloie  
25030 BESANCON CEDEX