THEORIE DES NOMBRES
BESANÇON

Années 1979-1980
et 1980-1981

SUR LA THEORIE DES GENRES DANS UNE EXTENSION CYCLIQUE DE DEGRE ℓ^m D'UN CORPS DE NOMBRES METABELIENNE SUR UN SOUS-CORPS

Jean-François JAULENT

SUR LA THEORIE DES GENRES

DANS UNE EXTENSION CYCLIQUE DE DEGRE ℓ^m

D'UN CORPS DE NOMBRES

METABELIENNE SUR UN SOUS-CORPS

par Jean-François JAULENT

RESUME : Soit N une ℓ-extension cyclique de degré impair sur un corps de nombres K. Nous supposons que N est métabélienne sur un sous-corps H, d'indice n dans K, pour un n étranger à ℓ.

Etant donné un diviseur entier $\mathfrak{s}$ dans H, nous étudions la structure galoisienne du ℓ-groupe $\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}}$ des classes d'idéaux de N en dehors de $\mathfrak{s}$, que nous regardons comme quotient du ℓ-groupe des classes au sens ordinaire. Pour tout caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe de Galois Gal (K/H), nous déterminons le nombre de φ-classes ambiges, ainsi que la φ-partie du nombre de genres dans l'extension cyclique N/K. Les expressions que nous obtenons, se conjuguent en une formule des classes, qui met en rapport les diverses composantes du groupe $\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}}$, et fait intervenir la ℓ-structure galoisienne du groupe des $\mathfrak{s}$-unités de N.

1 - INTRODUCTION

Ce travail est le prolongement naturel de notre étude de [6] consacrée aux classes d'idéaux dans les extensions métabéliennes de degré $n\ell^s$ sur un corps de nombres algébriques : Ici comme là, ce sont des techniques bien particulières d'algèbres de groupe, que nous mettons en oeuvre pour étudier, via la théorie du corps de classes global, certains sous-groupes ou quotients privilégiés du ℓ-groupe des classes d'une ℓ-extension cyclique d'un corps de nombres.

Plus précisément, nous considérons une extension cyclique N de degré ℓ^m sur un corps de nombres K, métabélienne sur un sous-corps H, conformément à la convention suivante (moins restrictive que celle de [6]) :

Definition. Etant donnés un nombre premier impair ℓ, un entier naturel non nul m, et un naturel n étranger à ℓ, nous entendons par groupe métabélien d'ordre $n\ell^m$, tout produit semi-direct G d'un groupe cyclique S, d'ordre ℓ^m, par un groupe abélien Δ, d'ordre n.

Si G est un tel groupe, l'action de Δ sur S, qui définit le produit semi-direct, se factorise par un caractère ℓ-adique χ du groupe Δ, défini par l'identité :

$$\tau\eta\tau^{-1} = \eta^{\chi(\tau)}, \text{ pour tous } \tau \text{ de } \Delta \text{ et } \eta \text{ de } S.$$

Le groupe G est abélien lorsque χ est trivial ; métacyclique lorsque χ est le caractère d'une représentation fidèle de Δ.

Faisant choix ensuite d'un idéal entier $\mathfrak{s}$ du corps H, nous nous proposons de préciser la structure galoisienne du groupe $\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}}$ des ℓ-classes d'idéaux du corps N, en dehors de $\mathfrak{s}$:

Définition. Soit $\mathfrak{H}$ le ℓ-groupe des classes d'idéaux du corps N. Pour tout idéal entier $\mathfrak{s}$ dans H, nous notons $\mathfrak{H}_{\mathfrak{s}}$ le sous-groupe de $\mathfrak{H}$ engendré par les classes des idéaux entiers de N qui divisent $\mathfrak{s}$, et nous disons que le quotient $\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}} = \mathfrak{H}/\mathfrak{H}_{\mathfrak{s}}$ est le ℓ-groupe des classes de N en dehors de $\mathfrak{s}$.

L'idéal $\mathfrak{s}$ étant invariant par G, le groupe $\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}}$ est, en effet, un $\mathbb{Z}_\ell[G]$-module fini. Pour l'étudier, nous portons plus particulièrement notre attention sur deux groupes remarquables construits à partir de $\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}}$: le sous-groupe ambige $\mathfrak{A}^{\mathfrak{s}} = H^o\left(S, \mathfrak{H}^{\mathfrak{s}}\right)$ d'abord, et le quotient des genres $\mathfrak{G}^{\mathfrak{s}} = H_o\left(S, \mathfrak{H}^{\mathfrak{s}}\right)$ ensuite, qui présentent un double intérêt ; d'une part parce que leur nullité caractérise celle de $\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}}$, d'autre part parce que leur confrontation apporte des informations précieuses sur la structure de $\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}}$.

Précisons ce dernier point :
A tout caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, correspond un idempotent e_φ de l'algèbre semi-locale $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$, défini par la formule $e_\varphi = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in \Delta} \varphi\left(\tau^{-1}\right)\tau$, et caractérisé par l'identité : $\tau e_\varphi = \varphi(\tau)\, e_\varphi$, pour tout τ de Δ. Par ailleurs, si σ désigne un générateur arbitraire du groupe cyclique S, un calcul facile (cf. [6], prop. 2) montre que la résolvante associée $\vartheta = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in \Delta} \chi\left(\tau^{-1}\right)\left(\sigma^{\chi(\tau)} - 1\right)$ engendre l'idéal d'augmentation de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[S]$ et satisfait aux relations de commutation :

$$e_{\varphi\chi}\, \vartheta = \vartheta\, e_\varphi, \text{ pour tout caractère } \ell\text{-adique } \varphi \text{ de } \Delta.$$

En particulier, comme ϑ est un nilpotent topologique de $\mathbb{Z}_\ell[S]$, donc substituable dans toute série formelle, nous obtenons :

Proposition 0. L'algèbre du groupe de Galois $\mathbb{Z}_\ell[G]$ s'identifie, comme $\mathbb{Z}_\ell$-algèbre compacte, à l'algèbre à produit croisé $\Theta = \mathbb{Z}_\ell[[\vartheta]] \circ [\Delta]$ du groupe abélien Δ sur $\mathbb{Z}_\ell[[\vartheta]]$, avec les relations :

$$\sigma^{\ell^m} = 1, \text{ et } \tau\vartheta\tau^{-1} = \chi(\tau)\vartheta, \text{ pour tout } \tau \text{ de } \Delta.$$

Les homothéties à droite associées aux idempotents irréductibles e_φ de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$, forment un système complet de projecteurs orthogonaux de l'algèbre Θ, qui s'écrit ainsi :

$$\Theta = \bigoplus_{\varphi \in \Delta^*} \mathbb{Z}_\ell[[\vartheta]] \circ [\Delta] e_\varphi ,$$

comme somme directe de Θ-modules à gauche, indexés par le groupe Δ^* des caractères ℓ-adiques irréductibles de Δ.

A la lumière de cette description, où l'opérateur ϑ tient un rôle primordial, on ne s'étonnera pas que le sous-groupe ambige $\mathfrak{A}^{\mathfrak{S}}$ et le quotient des genres $\mathfrak{G}^{\mathfrak{S}}$, qui s'interprètent respectivement comme noyau et conoyau dans l'action de ϑ sur le ℓ-groupe de classes $\mathfrak{H}^{\mathfrak{S}}$, aient une importance essentielle dans l'étude de $\mathfrak{H}^{\mathfrak{S}}$.

2 - CONVENTIONS ET NOTATIONS

Conformément à l'usage, nous notons multiplicativement les groupes de classes et d'unités, en faisant opérer exponentiellement les groupes de Galois, avec la convention :

$$\left(\mathfrak{a}^{\tau}\right)^{\eta} = \mathfrak{a}^{\tau\eta}.$$

Nous désignons par σ un générateur du groupe cyclique S ; par $\delta = (\sigma - 1)$ le générateur correspondant de l'idéal d'augmentation de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[S]$; et par $\vartheta = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in \Delta} \chi\left(\tau^{-1}\right)\left(\sigma^{\chi(\tau)} - 1\right)$ la résolvante associée. Nous écrivons $\nu = \sum_{\eta \in S} \eta$ l'élément de $\mathbb{Z}_\ell[S]$ qui correspond à l'opérateur norme $N_{N/K}$. Et, pour tout caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe abélien Δ, nous notons $e_\varphi = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in \Delta} \varphi\left(\tau^{-1}\right) \tau$ l'idempotent de l'algèbre semi-locale $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$, qui lui est attaché.

Pour plus de clarté, nous adoptons dans ce qui suit les conventions suivantes :

- l'indice o repère une quantité attachée au corps K, l'indice 1 une quantité ambige (i. e. invariante par S), et l'indice $*$ une quantité annulée par ν ;
- l'indice $\mathfrak{s}$ en position inférieure repère la $\mathfrak{s}$-partie d'une quantité, et, en position supérieure, la partie en dehors de $\mathfrak{s}$ d'une quantité ;
- enfin, l'extension des scalaires à l'anneau $\mathbb{Z}_\ell$ des entiers ℓ-adiques est symbolisée par le passage d'un caractère rond au caractère gothique majuscule correspondant.

C'est ainsi que nous notons :

$\mathfrak{D}$ le tensorisé du groupe des idéaux de N, puis $\mathfrak{D}_{\mathfrak{s}}$ le sous-module engendré par les idéaux divisant $\mathfrak{s}$, et $\mathfrak{D}^{\mathfrak{s}}$ le sous-module engendré par les idéaux étrangers à $\mathfrak{s}$, qui s'identifie canoniquement au quotient $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_{\mathfrak{s}}$;

$\mathfrak{D}_o$ le tensorisé du groupe des idéaux étendus de K, puis $\mathfrak{D}^o_{\mathfrak{s}}$ le sous-module engendré par les idéaux étendus de K divisant $\mathfrak{s}$, et $\mathfrak{D}^{\mathfrak{s}}_o$ le sous-module engendré par les idéaux étendus de K étrangers à $\mathfrak{s}$, qui s'identifie canoniquement au quotient $\mathfrak{D}_o/\mathfrak{D}^o_{\mathfrak{s}}$;

$\mathfrak{D}_1$ le sous-module de $\mathfrak{D}$ fixé par S, puis $\mathfrak{D}^1_{\mathfrak{s}} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{s}} \cap \mathfrak{D}_1$ et $\mathfrak{D}^{\mathfrak{s}}_1 = \mathfrak{D}^{\mathfrak{s}} \cap \mathfrak{D}_1$;

$\mathfrak{P}$ le tensorisé du groupe des idéaux principaux de N, puis $\mathfrak{P}_{\mathfrak{s}} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{s}} \cap \mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^{\mathfrak{s}} = \mathfrak{D}^{\mathfrak{s}} \cap \mathfrak{P}\mathfrak{D}_{\mathfrak{s}}$;

$\mathfrak{P}_o$ le tensorisé du groupe des idéaux étendus des principaux de K, puis $\mathfrak{P}^o_{\mathfrak{s}} = \mathfrak{D}^o_{\mathfrak{s}} \cap \mathfrak{P}_o$ et $\mathfrak{P}^{\mathfrak{s}}_o = \mathfrak{D}^{\mathfrak{s}}_o \cap \mathfrak{P}_o\mathfrak{D}^o_{\mathfrak{s}}$;

$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}_o \cap \mathfrak{P}$ le tensorisé du groupe des idéaux principaux étendus de K (la capitulation), puis $\mathfrak{C}_{\mathfrak{s}} = \mathfrak{D}_o \cap \mathfrak{P}_{\mathfrak{s}}$ et $\mathfrak{C}^{\mathfrak{s}} = \mathfrak{D}_o \cap \mathfrak{P}^{\mathfrak{s}}$;

$\mathfrak{P}_1$ le sous-module de $\mathfrak{P}$ fixé par S, puis $\mathfrak{P}^1_{\mathfrak{s}} = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{P}_{\mathfrak{s}}$ et $\mathfrak{P}^{\mathfrak{s}}_1 = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{P}^{\mathfrak{s}}$;

$\mathfrak{H} = \mathfrak{D}/\mathfrak{P}$ le ℓ-groupe des classes d'idéaux de N, puis $\mathfrak{H}_{\mathfrak{s}} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{s}}/\mathfrak{P}_{\mathfrak{s}}$ le sous-groupe engendré par les classes des idéaux divisant $\mathfrak{s}$, et $\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}} \approx \mathfrak{D}^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{P}^{\mathfrak{s}}$ le quotient $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_{\mathfrak{s}}$;

$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}/\mathfrak{H}^{\vartheta}$ le ℓ-groupe des genres, puis $\mathfrak{G}^{\mathfrak{s}} = \mathfrak{H}^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}\,\vartheta}$ le ℓ-groupe des genres en dehors de $\mathfrak{s}$;

$\mathfrak{A} = \mathfrak{H}_1$ le ℓ-groupe des classes ambiges dans N/K, puis $\mathfrak{A}^{\mathfrak{s}} = \mathfrak{H}^{\mathfrak{s}}_1$ le ℓ-groupe des classes ambiges en dehors de $\mathfrak{s}$;

μ le groupe des racines $\ell^{\text{ièmes}}$ de l'unité contenues dans N, puis μ_o le sous-groupe engendré par celles qui sont dans K, et μ^*_o le noyau de ν dans μ_o ;

$\mathfrak{E}$ le tensorisé du groupe des unités de N, puis $\mathfrak{E}^*$ le sous-module engendré par les unités de norme 1 sur K, et $\mathfrak{E}^o$ celui des unités de K ;

$\mathfrak{E}^{\mathfrak{s}}$ le tensorisé du groupe des $\mathfrak{s}$-unités de N (i.e. des unités en dehors de $\mathfrak{s}$), puis $\mathfrak{E}^{\mathfrak{s}}_*$ le sous-module engendré par celles de norme 1 sur K, et $\mathfrak{E}^{\mathfrak{s}}_o$ celui des $\mathfrak{s}$-unités de K ;

$\mathfrak{N} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} N_{N/K}\left(N^*\right)$ le tensorisé du groupe des normes.

Enfin, pour mesurer les ℓ-valuations des quotients que nous considérons, nous utilisons des caractères droits pour les groupes de classes d'idéaux, italiques pour ceux d'unités ; et nous repérons la φ-partie d'une quantité en l'affectant d'un indice grec en position inférieure. En particulier, nous notons :

h la ℓ-valuation du groupe des classes d'idéaux de N $\left(\text{i. e. } |\mathfrak{H}^{e_\varphi}| = \ell^{h_\varphi}\right)$, puis $h^{\mathfrak{S}}$ celle de $\mathfrak{H}^{\mathfrak{S}}$, et s celle de $\mathfrak{H}_{\mathfrak{S}}$;

k la ℓ-valuation du groupe des classes $\mathfrak{H}_o$ de K, et $k^{\mathfrak{S}}$ celle de $\mathfrak{H}_o^{\mathfrak{S}}$;

a la ℓ-valuation du ℓ-groupe ambige $\mathfrak{A}$, et $a^{\mathfrak{S}}$ celle de $\mathfrak{A}^{\mathfrak{S}}$;

g la ℓ-valuation du ℓ-groupe des genres $\mathfrak{G}$, et $g^{\mathfrak{S}}$ celle de $\mathfrak{G}^{\mathfrak{S}}$;

c la ℓ-valuation du quotient $\mathfrak{C}/\mathfrak{P}_o$, et $c^{\mathfrak{S}}$ celle de $\mathfrak{C}^{\mathfrak{S}}/\mathfrak{P}_o^{\mathfrak{S}}$;

$d^{\mathfrak{S}}$ la ℓ-valuation du quotient $\mathfrak{D}^1_{\mathfrak{S}}/\mathfrak{D}^{\nu}_{\mathfrak{S}}$;

r la ℓ-valuation du quotient $\mathfrak{D}_1/\mathfrak{D}_o$, et $r^{\mathfrak{S}}$ celle de $\mathfrak{D}_1^{\mathfrak{S}}/\mathfrak{D}_o^{\mathfrak{S}}$;

m la ℓ-valuation du quotient $\mathcal{E}/\mathcal{E}_o\,\mathcal{E}^{\vartheta}$, et $m^{\mathfrak{S}}$ celle de $\mathcal{E}^{\mathfrak{S}}/\mathcal{E}_o^{\mathfrak{S}}\,\mathcal{E}^{\mathfrak{S}\vartheta}$;

n la ℓ-valuation du quotient $\mathcal{E}_o/\mathcal{E}_o \cap \mathfrak{N}$, et $n^{\mathfrak{S}}$ celle de $\mathcal{E}_o^{\mathfrak{S}}/\mathcal{E}_o^{\mathfrak{S}} \cap \mathfrak{N}$;

p la ℓ-valuation du groupe $H^2(S, \mathcal{E}) = \mathcal{E}_o/\mathcal{E}^{\nu}$, et $p^{\mathfrak{S}}$ celle de $H^2\left(S, \mathcal{E}^{\mathfrak{S}}\right) = \mathcal{E}_o^{\mathfrak{S}}/\mathcal{E}^{\mathfrak{S}\nu}$;

q la ℓ-valuation du groupe $H^1(S, \mathcal{E}) = \mathcal{E}^*/\mathcal{E}^{\vartheta}$, et $q^{\mathfrak{S}}$ celle de $H^1\left(S, \mathcal{E}^{\mathfrak{S}}\right) = \mathcal{E}_*^{\mathfrak{S}}/\mathcal{E}^{\mathfrak{S}\vartheta}$;

r le rang essentiel du groupe $\mathcal{E}$, et $r^{\mathfrak{S}}$ celui du groupe $\mathcal{E}^{\mathfrak{S}}$;

u la ℓ-valuation du groupe $\mu_o \cap \mathcal{E}^{\vartheta}$, et $u^{\mathfrak{S}}$ celle de $\mu_o \cap \mathcal{E}^{\mathfrak{S}\vartheta}$.

3 - SUITE EXACTE DES CLASSES AMBIGES EN DEHORS DE $\mathfrak{s}$

Nous nous proposons d'évaluer, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe T, l'ordre de la φ-composante du ℓ-groupe $\mathfrak{A}^{\mathfrak{s}}$ des classes ambiges en dehors de $\mathfrak{s}$, dans l'extension cyclique N/K.

Nous reprenons, pour cela, la méthode inaugurée par C. Chevalley ([1] p. 402-408) qui consiste à atteindre le groupe $\mathfrak{A}^{\mathfrak{s}}$ par une succession de suites exactes mettant en oeuvre groupes de classes et d'unités. Diverses généralisations en ont déjà été données, notamment par R. Gillard [2] et par G. Gras [3] dans le cas abélien, par nous-mêmes [6] dans le cas métabélien, sous l'hypothèse $\mathfrak{s} = (1)$ cependant pour ces deux derniers articles.

Notre résultat le plus général est le suivant :

Théorème 1 (Suite exacte des classes ambiges). Soient N une ℓ-extension cyclique de degré impair sur un corps de nombres K, métabélienne sur un sous-corps H, et $\mathfrak{s}$ un idéal entier de H. Pour tout caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe de Galois $\Delta = \mathrm{Gal}(K/H)$, la φ-composante du ℓ-groupe $\mathfrak{A}^{\mathfrak{s}}$ des classes ambiges en dehors de $\mathfrak{s}$ dans l'extension N/K, est donnée par la suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell$-modules :

$$1 \to \left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{P}_o^{\mathfrak{s}}\right)^{e_\varphi} \to \left(\mathfrak{P}_1^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{P}_o^{\mathfrak{s}}\right)^{e_\varphi} \to \left(\mathfrak{D}_1^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{D}_o^{\mathfrak{s}}\right)^{e_\varphi} \to \left(\mathfrak{A}^{\mathfrak{s}}/j(\mathfrak{H}_o^{\mathfrak{s}})\right)^{e_\varphi} \to \left(\mathfrak{E}_o^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{E}^{\mathfrak{s}\nu}\right)^{e_{\varphi\chi}} \to \left(\mathfrak{E}_o^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{E}_o^{\mathfrak{s}} \cap \mathfrak{N}\right)^{e_{\varphi\chi}} \to 1 .$$

Dans celle-ci, l'application j est induite par l'extension des idéaux, et le quotient $\left(\mathfrak{P}_1^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{P}_o^{\mathfrak{s}}\right)^{e_\varphi}$ s'identifie au groupe de cohomologie $\left(\mathfrak{E}_*^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{E}^{\mathfrak{s}\,\vartheta}\right)^{e_{\varphi\chi}}$.

Corollaire 1 (Formule des classes ambiges). Sous les hypothèses du théorème, l'ordre de la φ-composante du ℓ-groupe des classes ambiges en dehors de $\mathfrak{s}$, est donné par l'identité :

$$|\mathfrak{A}^{\mathfrak{S}\, e_\varphi}| = |\mathfrak{H}_o^{\mathfrak{S}\, e_\varphi}| \, \frac{|(\mathfrak{D}_1^{\mathfrak{S}}/\mathfrak{D}_o^{\mathfrak{S}})^{e_\varphi}|}{|(\mathfrak{E}_o^{\mathfrak{S}}/\mathfrak{E}_o^{\mathfrak{S}} \cap \mathfrak{N})^{e_{\varphi\chi}}|} \, \frac{|H^2(s, \mathfrak{E}^{\mathfrak{S}})^{e_{\varphi\chi}}|}{|H^1(s, \mathfrak{E}^{\mathfrak{S}})^{e_{\varphi\chi}}|} \; ;$$

et sa ℓ-valuation est ainsi : $a_\varphi^{\mathfrak{S}} = k_\varphi^{\mathfrak{S}} + r_\varphi^{\mathfrak{S}} - n_{\varphi\chi}^{\mathfrak{S}} + p_{\varphi\chi}^{\mathfrak{S}} - q_{\varphi\chi}^{\mathfrak{S}}$.

Démonstration du théorème : La première étape consiste à comparer le ℓ-groupe $\mathfrak{A}^{\mathfrak{S}}$ au sous-groupe $\mathfrak{D}_1^{\mathfrak{S}}/\mathfrak{P}_1^{\mathfrak{S}}$ des classes des idéaux ambiges en dehors de $\mathfrak{S}$.

Pour cela, remarquons que si $\mathfrak{a}$ est un idéal appartenant à une classe de $\mathfrak{A}^{\mathfrak{S}}$, son image par la résolvante ϑ s'écrit, en tant qu'élément de $\mathfrak{P}^{\mathfrak{S}}$, comme produit d'un idéal principal par un idéal de $\mathfrak{D}_{\mathfrak{S}}$. De la relation $\mathfrak{a}^{\vartheta} = \alpha\mathfrak{B}$, nous déduisons, en prenant la norme, l'identité $(1) = \alpha^{\nu}\mathfrak{B}^{\nu}$, qui nous prouve que $\varepsilon = \alpha^{\nu}$ est une $\mathfrak{S}$-unité. Comme l'élément α est défini modulo une $\mathfrak{S}$-unité, il est clair que nous sommes ainsi en mesure de construire une application f de $\mathfrak{A}^{\mathfrak{S}}$ dans le quotient $\mathfrak{E}_o^{\mathfrak{S}} \cap \mathfrak{N}/\mathfrak{E}^{\mathfrak{S}\,\nu}$. Maintenant : si $\varepsilon = \alpha^{\nu}$ est une $\mathfrak{S}$-unité qui est norme, nous pouvons toujours écrire $(\alpha) = \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ comme produit d'un idéal de $\mathfrak{D}_{\mathfrak{S}}$ par un idéal étranger à $\mathfrak{S}$, qui est alors nécessairement de norme unité. La surjectivité de f résulte donc du théorème 90 de Hilbert pour les idéaux qui nous assure l'existence d'un idéal $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{D}$ vérifiant $\mathfrak{a}^{\vartheta} = \mathfrak{c}$. Enfin, si ε est norme d'une $\mathfrak{S}$-unité β, et si $\mathfrak{a}$ représente un antécédent de ε, nous avons simultanément $\mathfrak{a}^{\vartheta} = \alpha\mathfrak{H}$ pour un $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{D}_{\mathfrak{S}}$ et $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$, c'est-à-dire, toujours en vertu du théorème 90 de Hilbert, $\alpha = \beta\gamma^{\vartheta}$ pour un γ de $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} N^*$; et la classe de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{H}^{\mathfrak{S}}$ est ainsi représentée par l'idéal $\mathfrak{a}\gamma^{-1}$ dont l'image par ϑ tombe dans $\mathfrak{D}_{\mathfrak{S}}$.

Autrement dit, nous obtenons une suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow \mathfrak{D}_1^{\mathfrak{S}}/\mathfrak{P}_1^{\mathfrak{S}} \longrightarrow \mathfrak{A}^{\mathfrak{S}} \xrightarrow{f} (\mathfrak{E}_o^{\mathfrak{S}} \cap \mathfrak{N})/\mathfrak{E}^{\mathfrak{S}\,\nu} \longrightarrow 1.$$

Cela étant, la première partie du théorème s'obtient immédiatement en formant la suite exacte du serpent associée au diagramme commutatif exact :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 \longrightarrow & \mathfrak{P}_o^{\mathfrak{s}} & \longrightarrow & \mathfrak{D}_o^{\mathfrak{s}} & \longrightarrow & \mathfrak{H}_o^{\mathfrak{s}} & \longrightarrow 1 & & & & \\
& \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow j & & & & & \\
1 \longrightarrow & \mathfrak{P}_1^{\mathfrak{s}} & \longrightarrow & \mathfrak{D}_1^{\mathfrak{s}} & \longrightarrow & \mathfrak{A}^{\mathfrak{s}} & \longrightarrow & \mathfrak{E}_o^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{E}^{\mathfrak{s}\,\nu} & \longrightarrow & \mathfrak{E}_o^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{E}_o^{\mathfrak{s}} \cap \mathfrak{N} & \longrightarrow 1
\end{array}$$

et en tenant compte du décalage des idempotents par l'application f, qui résulte de l'identité $e_{\varphi\chi}\,\vartheta = \vartheta\, e_{\varphi}$.

Quant à l'isomorphisme $\mathfrak{P}_1^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{P}_o^{\mathfrak{s}} \simeq \mathfrak{E}_*^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{E}^{\mathfrak{s}\,\vartheta}$, il s'obtient de la façon suivante : Pour tout idéal $\mathfrak{a} = \alpha\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{P}_1^{\mathfrak{s}} = \mathfrak{D}_1^{\mathfrak{s}} \cap \mathfrak{P}\mathfrak{D}_{\mathfrak{s}}$, la relation $(1) = \mathfrak{a}^{\vartheta} = \alpha^{\vartheta}\mathfrak{b}^{\vartheta}$ nous montre que l'élément α^{ϑ} est un $\mathfrak{s}$-unité. Et réciproquement, le théorème 90 de Hilbert nous assure que toute $\mathfrak{s}$-unité ε de norme 1 s'écrit $\varepsilon = \alpha^{\vartheta}$ pour un idéal (α) de $\mathfrak{P}$ que nous pouvons toujours décomposer comme quotient $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ d'un idéal étranger à $\mathfrak{s}$ par un idéal de $\mathfrak{D}_{\mathfrak{s}}$; l'identité $\mathfrak{a}^{\vartheta} = \varepsilon\,\mathfrak{b}^{\vartheta}$ entraînant immédiatement $\mathfrak{a}^{\vartheta} = (1)$. D'où il suit que le groupe $\mathfrak{P}_1^{\mathfrak{s}}$ s'envoie surjectivement sur le quotient $\mathfrak{E}_*^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{E}^{\mathfrak{s}\,\vartheta}$. Enfin, si ε s'écrit β^{ϑ} pour une $\mathfrak{s}$-unité β et si $\mathfrak{a} = \alpha\mathfrak{b}$ désigne un antécédent de ε, l'identité $\alpha^{\vartheta} = \beta^{\vartheta}$ nous permet d'écrire $\alpha = \beta\gamma$ pour un γ de $\mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} K^*$, et $\mathfrak{a} = \gamma(\beta\mathfrak{b})$ est bien étendu d'un idéal de K. L'isomorphisme annoncé en résulte, avec, comme plus haut, un décalage des idempotents.

La formule du corollaire se déduit alors sans peine de la suite exacte proposée, le noyau dans le groupe $\mathfrak{H}_o^{\mathfrak{s}}$ de l'application j étant précisément le sous-groupe $\mathfrak{C}^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{P}_o^{\mathfrak{s}}$.

<u>Corollaire 2</u>. Sous les hypothèses du théorème, et lorsque $\mathfrak{s}$ est le diviseur unité, la suite exacte des classes ambiges prend la forme :

$$1 \to (\mathfrak{C}/\mathfrak{P}_o)^{e_\varphi} \to (\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_o)^{e_\varphi} \to (\mathfrak{D}_1/\mathfrak{D}_o)^{e_\varphi} \to (\mathfrak{A}/j(\mathfrak{H}_o))^{e_\varphi} \to (\mathfrak{E}^o/\mathfrak{E}^{\nu})^{e_{\varphi\chi}} \to (\mathfrak{E}^o/\mathfrak{E}^o \cap \mathfrak{N})^{e_{\varphi\chi}} \to 1.$$

En particulier, l'ordre de la φ-composante du ℓ-groupe des classes ambiges est donné par l'identité :

$$|\mathfrak{A}^{e_\varphi}| = |\mathfrak{H}_o^{e_\varphi}| \, \frac{|(\mathfrak{D}_1/\mathfrak{D}_o)^{e_\varphi}|}{|(\mathfrak{E}^o/\mathfrak{E}^o \cap \mathfrak{N})^{e_{\varphi\chi}}|} \, \frac{|H^2(S,\mathfrak{E})^{e_{\varphi\chi}}|}{|H^1(S,\mathfrak{E})^{e_{\varphi\chi}}|} \; ;$$

et sa ℓ-valuation est ainsi : $a_\varphi = k_\varphi + r_\varphi - n_{\varphi\chi} + p_{\varphi\chi} - q_{\varphi\chi}$.

C'est là essentiellement notre résultat de [6] (§2, th. 2).

Corollaire 3. Sous les mêmes hypothèses, mais lorsque les places divisant $\mathfrak{s}$ sont exactement les places ramifiées dans l'extension N/K, nous obtenons, en notant $\mathfrak{f}$ le conducteur de N/K :

$$1 \to (\mathfrak{C}^{\mathfrak{f}}/\mathfrak{P}_o^{\mathfrak{f}})^{e_\varphi} \to (\mathfrak{P}_1^{\mathfrak{f}}/\mathfrak{P}_o^{\mathfrak{f}})^{e_\varphi} \to 1 \to (\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}}/j(\mathfrak{S}_o^{\mathfrak{f}}))^{e_\varphi} \to (\mathfrak{E}_o^{\mathfrak{f}}/\mathfrak{E}^{\mathfrak{f}\,\nu})^{e_{\varphi\chi}} \to (\mathfrak{E}_o^{\mathfrak{f}}/\mathfrak{E}_o^{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{N})^{e_{\varphi\chi}} \to 1.$$

En particulier, l'ordre de la φ-composante du ℓ-groupe des classes ambiges en dehors de $\mathfrak{f}$, est donné par l'identité :

$$|\mathfrak{A}^{\mathfrak{f}\,e_\varphi}| = \frac{|\mathfrak{S}_o^{\mathfrak{f}\,e_\varphi}|}{|(\mathfrak{E}^{\mathfrak{f}}/\mathfrak{E}^{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{N})^{e_{\varphi\chi}}|} \; \frac{|H^2(S,\mathfrak{E}^{\mathfrak{f}})^{e_{\varphi\chi}}|}{|H^1(S,\mathfrak{E}^{\mathfrak{f}})^{e_{\varphi\chi}}|},$$

$$\text{avec } |H^1(S,\mathfrak{E}^{\mathfrak{f}})^{e_{\varphi\chi}}| = |(\mathfrak{C}^{\mathfrak{f}}/\mathfrak{P}_o^{\mathfrak{f}})^{e_\varphi}| \; ;$$

et sa ℓ-valuation est ainsi : $a_\varphi^{\mathfrak{f}} = (k_\varphi^{\mathfrak{f}} - c_\varphi^{\mathfrak{f}}) + (p_{\varphi\chi}^{\mathfrak{f}} - n_{\varphi\chi}^{\mathfrak{f}})$; avec $c_\varphi^{\mathfrak{f}} = q_{\varphi\chi}^{\mathfrak{f}}$.

Démonstration : Il suffit de remarquer que le groupe $\mathfrak{D}_1$ des idéaux ambiges du corps N est engendré par le sous-groupe $\mathfrak{D}_o$ des idéaux étendus de K, et par les produits $\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathfrak{P}$, lorsque $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers de K qui se ramifient dans N/K ; de sorte que le groupe $\mathfrak{D}_1^{\mathfrak{s}}$ se réduit à $\mathfrak{D}_o^{\mathfrak{s}}$ dès que $\mathfrak{s}$ est divisible par le produit des ramifiés.

Plus précisément, nous avons (cf. [6], §2, prop. 6 ; et aussi [3], II, §3) :

Proposition 1. Soient $\mathfrak{f}$ le conducteur de l'extension N/K, puis, pour chaque idéal premier $\mathfrak{P}$ de H qui se ramifie, $e_{\mathfrak{P}}$ la ℓ-valuation de son indice de ramification dans N/K, et $\chi_{\mathfrak{P}}$ l'induit du caractère de la représentation unité de son sous-groupe de décomposition $\Delta_{\mathfrak{P}}$ dans K/H. Pour tout diviseur $\mathfrak{s}$ de K, stable par Δ, le quotient $\mathfrak{D}_1^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{D}_o^{\mathfrak{s}}$ s'écrit, comme $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module :

$$\mathfrak{D}_1^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{D}_o^{\mathfrak{s}} \simeq \bigoplus_{\mathfrak{P}\nmid\mathfrak{s}} e_{\chi_{\mathfrak{P}}}(\mathbb{Z}_\ell/\ell^{e_{\mathfrak{P}}}\mathbb{Z}_\ell)[\Delta] \; ;$$

et la ℓ-valuation de son ordre est donnée par l'identité :

$$r_{\varphi}^{\mathfrak{s}} = \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{s}} \langle \varphi, \chi_{\mathfrak{p}} \rangle e_{\mathfrak{p}}.$$

Et, de façon semblable :

Proposition 2. Sous les mêmes hypothèses, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de H, notons $f_{\mathfrak{p}}$ la valuation de son degré d'inertie dans l'extension N/K. Le quotient $\mathfrak{D}_{\mathfrak{s}}^{o}/\mathfrak{D}_{\mathfrak{s}}^{\nu}$ s'écrit alors, comme $\mathbb{Z}_{\ell}[\Delta]$-module :

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{s}}^{o}/\mathfrak{D}_{\mathfrak{s}}^{\nu} \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p} | \mathfrak{s}} e_{\chi_{\mathfrak{p}}}\left(\mathbb{Z}_{\ell}/\ell^{e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}}\mathbb{Z}_{\ell}\right)[\Delta] \ ;$$

et la ℓ-valuation de son ordre est donnée par l'identité :

$$d_{\mathfrak{s}}^{\varphi} = \sum_{\mathfrak{p} | \mathfrak{s}} \langle \varphi, \chi_{\mathfrak{p}} \rangle e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}.$$

Démonstrations : Pour chacun des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de H, le quotient de Δ par le sous-groupe de décomposition $\Delta_{\mathfrak{p}}$ agit fidèlement sur les places de K au-dessus de $\mathfrak{p}$; et l'algèbre $\mathbb{Z}_{\ell}[\Delta/\Delta_{\mathfrak{p}}]$ s'identifie à l'image de $\mathbb{Z}_{\ell}[\Delta]$ par l'idempotent $e_{\chi_{\mathfrak{p}}}$.

Portant notre attention sur la formule des classes ambiges, nous voyons ainsi qu'elle fait intervenir des termes de nature essentiellement différente : un terme de classes du corps K, supposé connu en pratique ; un terme de ramification dans l'extension N/K, parfaitement explicite ; un terme normique ensuite, qui relève de calculs locaux, et que nous précisons plus loin (cf. prop. 3) ; un pseudo-quotient de Herbrand enfin, qui est plus difficile à maîtriser, et sur lequel nous revenons à propos de la formule des classes (cf. prop. 4). C'est d'ailleurs la présence de ce terme profondément arithmétique, qui interdit, dans le cas général, tout espoir d'écrire $a_{\varphi}^{\mathfrak{s}}$ comme somme de $k_{\varphi}^{\mathfrak{s}}$ et d'indices locaux ; la seule décomposition évidente de $a_{\varphi}^{\mathfrak{s}}$, comme somme d'entiers naturels, étant :

Proposition 3. Sous les hypothèses du théorème, la ℓ-valuation $a_{\varphi}^{\mathfrak{s}}$ de la φ-composante du groupe $\mathfrak{A}^{\mathfrak{s}}$ est donnée comme somme d'entiers par la relation :

$$a_\varphi^{\mathfrak{s}} = \left(k_\varphi^{\mathfrak{s}} - c_\varphi^{\mathfrak{s}}\right) + \left(c_\varphi^{\mathfrak{s}} + r_\varphi^{\mathfrak{s}} - q_{\varphi\chi}^{\mathfrak{s}}\right) + \left(p_{\varphi\chi}^{\mathfrak{s}} - n_{\varphi\chi}^{\mathfrak{s}}\right).$$

En particulier, lorsque N/K est une extension cyclique de degré premier impair, totalement ramifiée, le rang de la φ-composante du groupe $\mathfrak{A}^{\mathfrak{s}}$ vérifie l'inégalité :

$$\mathrm{rg}\left(\mathfrak{A}^{\mathfrak{s}\,e_\varphi}\right) \geq \left(c_\varphi^{\mathfrak{s}} + r_\varphi^{\mathfrak{s}} - q_{\varphi\chi}^{\mathfrak{s}}\right) + \left(p_{\varphi\chi}^{\mathfrak{s}} - n_{\varphi\chi}^{\mathfrak{s}}\right).$$

Démonstration : Dans la décomposition annoncée, la quantité $\left(k_\varphi^{\mathfrak{s}} - c_\varphi^{\mathfrak{s}}\right)$ mesure la φ-partie du sous-groupe $\mathfrak{D}_o^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{C}^{\mathfrak{s}}$ engendré par les classes des idéaux étendus de K ; et la quantité $\left(k_\varphi^{\mathfrak{s}} - c_\varphi^{\mathfrak{s}}\right) + \left(c_\varphi^{\mathfrak{s}} + r_\varphi^{\mathfrak{s}} - q_{\varphi\chi}^{\mathfrak{s}}\right)$, la φ-partie du sous-groupe $\mathfrak{D}_1^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{P}_1^{\mathfrak{s}}$ engendré par les classes des idéaux ambiges dans N/K ; enfin, l'application norme $N_{N/K}$ envoyant $\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}}$ sur $\mathfrak{H}_o^{\mathfrak{s}}$ en ramification totale, la quantité $\left(c_\varphi^{\mathfrak{s}} + r_\varphi^{\mathfrak{s}} - q_{\varphi\chi}^{\mathfrak{s}}\right) + \left(p_{\varphi\chi} - n_{\varphi\chi}\right)$ mesure dans ce cas la φ-partie du quotient $\mathfrak{A}^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}\,\nu}$; d'où la minoration du rang, lorsque m vaut 1. L'hypothèse N/K totalement ramifiée peut d'ailleurs être sensiblement affaiblie, pour tenir compte de $\mathfrak{s}$ (cf. prop. 5).

Bien entendu, la capitulation en dehors de $\mathfrak{s}$ demeure, dans la pratique, un terme difficile à mesurer. Signalons cependant un cas particulier dans lequel la nullité de $c_\varphi^{\mathfrak{s}}$ accompagne celle de c_φ :

Scolie. Conservons les notations du théorème, et faisons les deux hypothèses suivantes :

(i) les places divisant $\mathfrak{s}$ ne se décomposent pas dans N/K ;

(ii) le premier groupe de cohomologie $H^1(S, \mathfrak{E})^{e_{\varphi\chi}}$ est nul.

Alors la capitulation $\mathfrak{C}^{\mathfrak{s}\,e_\varphi}$ se réduit à $\mathfrak{P}_o^{\mathfrak{s}\,e_\varphi}$; et nous avons en outre $H^1(S, \mathfrak{E}^{\mathfrak{s}})^{e_{\varphi\chi}} = 1$, si toutes les places ramifiées dans N/K apparaissent dans $\mathfrak{s}$.

Démonstration : D'après le théorème, la condition (ii) exprime que, pour le caractère φ, les idéaux principaux ambiges dans N/K proviennent, par extension des scalaires, des idéaux principaux de K ; ce qui s'écrit $(\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_o)^{e_\varphi} = 1$. En particulier, il n'y a donc pas de capitulation en φ, i.e. $c_\varphi = 0$. Maintenant, par la condition (i) les idéaux de $\mathfrak{D}_{\mathfrak{g}}$ sont des idéaux ambiges, ce qui nous donne : $\mathfrak{C}^{\mathfrak{g}} = \mathfrak{D}_o \cap \mathfrak{P}\mathfrak{D}_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{D}_o \cap \mathfrak{P}_1\mathfrak{D}_{\mathfrak{g}}$; puis : $(\mathfrak{C}^{\mathfrak{g}})^{e_\varphi} = (\mathfrak{D}_o \cap \mathfrak{P}_o\mathfrak{D}_{\mathfrak{g}})^{e_\varphi} = (\mathfrak{D}_o \cap \mathfrak{P}_o\mathfrak{D}_{\mathfrak{g}}^o)^{e_\varphi} = (\mathfrak{P}_o^{\mathfrak{g}})^{e_\varphi}$; ce qui est notre première assertion. La seconde résulte alors de l'égalité $\mathfrak{C}^{\mathfrak{g}} = \mathfrak{P}_1^{\mathfrak{g}}$, donnée par le corollaire 3.

4 - SUITE EXACTE DES GENRES EN DEHORS DE $\mathfrak{s}$

Portons maintenant notre attention sur le ℓ-groupe des genres $\mathfrak{G}^{\mathfrak{s}}$. Introduisons le ℓ-corps de classes de Hilbert $\hat{K}$ de K, puis celui $\hat{N}$ de N : Par l'isomorphisme de réciprocité, le ℓ-groupe des classes $\mathfrak{H}$ s'identifie au groupe de Galois $\mathrm{Gal}\,(\hat{N}/N)$; son quotient $\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}}$ au groupe de Galois $\mathrm{Gal}\left(\hat{N}^{\mathfrak{s}}/N\right)$ de la sous-extension maximale de $\hat{N}$, où les places au-dessus de $\mathfrak{s}$ se décomposent complètement ; et le groupe $\mathfrak{G}^{\mathfrak{s}} = \mathfrak{H}^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}\,\theta}$ au groupe de Galois $\mathrm{Gal}\left(\tilde{N}^{\mathfrak{s}}/N\right)$ de la sous-extension maximale de $\hat{N}^{\mathfrak{s}}$, qui est abélienne sur K.

En particulier, d'après la suite exacte courte canonique de $\mathbb{Z}_\ell[G]$-modules :

$$1 \longrightarrow \mathfrak{G}^{\mathfrak{s}} \longrightarrow \mathrm{Gal}\left(\tilde{N}^{\mathfrak{s}}/K\right) \longrightarrow S \longrightarrow 1,$$

la détermination de $g^{\mathfrak{s}}$ se ramène ainsi à celle de l'ordre du groupe $\mathrm{Gal}\left(\tilde{N}^{\mathfrak{s}}/K\right)$.

__Théorème 2__ (Suite exacte des genres). Soient N une ℓ-extension cyclique de degré impair ℓ^m sur un corps de nombres K, métabélienne sur un sous-corps H ; puis $\mathfrak{f}$ le conducteur de N/K, et $\mathfrak{s}$ un idéal entier de H. Désignons par $\tilde{N}^{\mathfrak{s}}$ la ℓ-extension abélienne maximale de K, qui est non ramifiée sur N, et où les places au-dessus de $\mathfrak{s}$ se décomposent complètement ; puis, pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$ de K, notons $D_{\mathfrak{p}}$ son groupe de décomposition dans $\tilde{N}^{\mathfrak{s}}/K$ et $I_{\mathfrak{p}}$ son sous-groupe d'inertie. Les symboles de Hasse attachés aux places divisant $\mathfrak{f}\mathfrak{s}$ donnent lieu alors à une suite exacte canonique de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules :

$$1 \longrightarrow \mathfrak{E}_o^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{E}_o^{\mathfrak{s}} \cap \mathfrak{N} \xrightarrow{\mathfrak{h}} \Big(\bigoplus_{\mathfrak{p}|\mathfrak{s}} D_{\mathfrak{p}}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{s}} I_{\mathfrak{p}}\Big) \xrightarrow{\text{pr.}} \mathrm{Gal}\left(\tilde{N}^{\mathfrak{s}}/K\right) \xrightarrow{\text{res.}} \mathfrak{H}_o^{\mathfrak{s}} \longrightarrow 1.$$

<u>Corollaire 1</u> (Formule des genres). Sous les hypothèses du théorème, pour tout caractère ℓ-adique irréductible φ de Δ, l'ordre de la φ-composante du ℓ-groupe $\mathfrak{G}^{\mathfrak{s}}$ des genres en dehors de $\mathfrak{s}$, est donnée par l'identité :

$$|\mathfrak{G}^{\mathfrak{s}\,e_\varphi}| = |\mathfrak{H}_o^{\mathfrak{s}\,e_\varphi}| \frac{\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{s}} |D_{\mathfrak{p}}|^{\langle \varphi, \chi\chi_{\mathfrak{p}} \rangle} \prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{s}} |I_{\mathfrak{p}}|^{\langle \varphi, \chi\chi_{\mathfrak{p}} \rangle}}{|(\mathcal{E}_o^{\mathfrak{s}}/\mathcal{E}_o^{\mathfrak{s}} \cap \mathfrak{N})^{e_{\varphi\chi}}|} \ell^{-m\langle \varphi, \chi \rangle},$$

où $\chi_{\mathfrak{p}}$ désigne l'induit du caractère de la représentation unité du sous-groupe de décomposition de l'idéal premier $\mathfrak{p}$ dans l'extension K/H.

Autrement dit, il vient : $g_\varphi^{\mathfrak{s}} = k_\varphi^{\mathfrak{s}} + r^{\mathfrak{s}}_{\varphi\chi^{-1}} + d^{\mathfrak{s}}_{\varphi\chi^{-1}} - n_\varphi^{\mathfrak{s}} - m\langle \varphi, \chi \rangle$.

Démonstration : L'application $\mathfrak{h}$ est obtenue en associant à toute $\mathfrak{s}$-unité ε, les symboles de Hasse $\left(\frac{\varepsilon\,,\,\tilde{N}^{\mathfrak{s}}/K}{\mathfrak{p}}\right)_{\mathfrak{p}}$ relatifs aux diviseurs premiers de $\mathfrak{s}$ et de $\mathfrak{f}$: lorsque ε est une $\mathfrak{p}$-unité, le symbole $\left(\frac{\varepsilon\,,\,\tilde{N}^{\mathfrak{s}}/K}{\mathfrak{p}}\right)$ est dans le groupe d'inertie $I_{\mathfrak{p}}$, de sorte que $\mathfrak{h}$ prend bien ses valeurs dans la somme directe finie : $\mathfrak{S}^{\mathfrak{s}} = \left(\underset{\mathfrak{p}|\mathfrak{s}}{\oplus} D_{\mathfrak{p}}\right) \oplus \left(\underset{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{s}}{\oplus} I_{\mathfrak{p}}\right)$.

Compte tenu des propriétés normiques du symbole de Hasse, le noyau de $\mathfrak{h}$ est constitué par les $\mathfrak{s}$-unités qui sont normes locales dans l'extension $\tilde{N}^{\mathfrak{s}}/K$, c'est-à-dire, puisque $\tilde{N}^{\mathfrak{s}}/N$ est non ramifiée et que les places divisant $\mathfrak{s}$ se décomposent complètement, des $\mathfrak{s}$-unités qui sont normes locales (et donc normes globales) dans l'extension cyclique N/K. Il est d'ailleurs possible de retrouver ce résultat par le corps de classes local, en introduisant les complétés respectifs de K et de $\tilde{N}^{\mathfrak{s}}$, ainsi que leurs groupes d'unités principales, en remarquant que l'application $\mathfrak{h}$ est composée de l'injection canonique :

$$\mathcal{E}^{\mathfrak{s}}/\mathcal{E}^{\mathfrak{s}} \cap \mathfrak{N} \longrightarrow [\underset{\mathfrak{p}|\mathfrak{s}}{\oplus} K_{\mathfrak{p}}^*/N(\tilde{N}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{s}\,*})] \oplus [\underset{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{s}}{\oplus} U_{K_{\mathfrak{p}}}/N(U_{N_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{s}}})],$$

et des symboles locaux de reste normique.

Bien entendu, pour que l'application $\mathfrak{h}$ soit un Δ-morphisme, il est nécessaire de mettre sur $\mathfrak{S}^{\mathfrak{s}}$ la $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-structure induite par $\mathfrak{h}$, c'est-à-dire de poser :

$$\left(\sigma_{\mathfrak{p}}\right)_{\mathfrak{p}}^{\tau} = \left(\sigma^{\chi(\tau)}_{\mathfrak{p}^{\tau^{-1}}}\right)_{\mathfrak{p}}, \text{ pour tout } \tau \text{ de } \Delta \text{ ;}$$

ce qui explique, en particulier, le décalage des idempotents dans la formule des genres.

Cela étant, la projection canonique $\mathrm{pr} \mid (\sigma_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \mapsto \prod_{\mathfrak{p}} \sigma_{\mathfrak{p}}$ est ainsi un Δ-morphisme de $\mathfrak{S}^{\mathfrak{s}}$ dans $\mathrm{Gal}\left(\tilde{N}^{\mathfrak{s}}/K\right)$ qui a pour noyau le groupe de Galois $\mathrm{Gal}\left(\hat{K}^{\mathfrak{s}}/K\right)$ du ℓ-corps de classes de Hilbert en dehors de $\mathfrak{s}$ de K : en effet, puisque l'image $\mathrm{pr}\left(\mathfrak{S}^{\mathfrak{s}}\right)$ est engendrée par les groupes d'inertie des places ramifiées et les groupes de décomposition des places divisant $\mathfrak{s}$, son corps des invariants est bien la sous-extension maximale $\hat{K}^{\mathfrak{s}}$ de $\tilde{N}^{\mathfrak{s}}$, qui est non ramifiée sur K, et où les places divisant $\mathfrak{s}$ se décomposent complètement.

Pour établir l'exactitude de la suite, le problème est alors de montrer que les éléments $(\sigma_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{S}^{\mathfrak{s}}$ qui vérifient la formule du produit $\prod_{\mathfrak{p}} \sigma_{\mathfrak{p}} = 1$ sont précisément ceux qui proviennent par les symboles de Hasse des $\mathfrak{s}$-unités de K. Or cela résulte ici d'un argument de valuation, puisque le calcul du nombre de genres $\ell^{a^{\mathfrak{s}}}$, effectué plus haut, nous montre que la somme alternée des valuations des groupes intervenant dans la suite, est identiquement nulle :

$$n^{\mathfrak{s}} - \left(r^{\mathfrak{s}} + d^{\mathfrak{s}}\right) + \left(g^{\mathfrak{s}} + m\right) - k^{\mathfrak{s}} = 0.$$

Nous retrouvons ainsi le fait bien connu que la formule du produit est essentiellement la seule relation entre les symboles de Hasse dans une extension donnée.

Quant à la formule du corollaire, elle résulte immédiatement de la suite exacte proposée, compte tenu des isomorphismes (non canoniques) :

$$I_{\mathfrak{p}} \simeq \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}^{1}/\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}^{0} \qquad \text{et} \qquad D_{\mathfrak{p}} \simeq \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}^{1}/\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}^{\nu}.$$

Corollaire 2. Sous les hypothèses du théorème, et lorsque $\mathfrak{s}$ est le diviseur unité, la suite exacte des genres prend la forme :

$$1 \longrightarrow \mathfrak{E}^{0}/\mathfrak{E}^{0} \cap \mathfrak{N} \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}} I_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \mathrm{Gal}\,(\tilde{N}/K) \longrightarrow \mathfrak{H}_{0} \longrightarrow 1.$$

En particulier, l'ordre de la φ-composante du ℓ-groupe des genres est donné par l'identité :

$$|\mathfrak{G}^{e_\varphi}| = |\mathfrak{H}_o^{e_\varphi}| \frac{\prod_{p|f} |I_p|^{\langle \varphi, \chi\chi_p \rangle}}{|(\mathcal{E}^o/\mathcal{E}^o \cap \mathfrak{N})^{e_\varphi}|} \ell^{-m\langle \varphi, \chi \rangle} ;$$

et sa ℓ-valuation est ainsi : $g_\varphi = k_\varphi + r_{\varphi\chi^{-1}} - n_\varphi - \langle \varphi, \chi \rangle$.

C'est le résultat que nous donnons dans [6] (§ 3, th. 3).

<u>Corollaire 3</u>. Sous les mêmes hypothèses, mais lorsque les places divisant $\mathfrak{s}$ sont exactement les places ramifiées dans l'extension N/K, introduisant le conducteur $\mathfrak{f}$ de N/K, nous obtenons la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathcal{E}_o^{\mathfrak{f}}/\mathcal{E}_o^{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{N} \longrightarrow \bigoplus_{p|\mathfrak{f}} D_p \longrightarrow \mathrm{Gal}\left(\tilde{N}^{\mathfrak{f}}/K\right) \longrightarrow \mathfrak{H}_o^{\mathfrak{f}} \longrightarrow 1.$$

En particulier, l'ordre de la φ-composante du ℓ-groupe des genres est donnée par l'identité :

$$|\mathfrak{G}^{\mathfrak{f}\,e_\varphi}| = |\mathfrak{H}_o^{\mathfrak{f}\,e_\varphi}| \frac{\prod_{p|\mathfrak{f}} |D_p|^{\langle \varphi, \chi\chi_p \rangle}}{|(\mathcal{E}_o^{\mathfrak{f}}/\mathcal{E}_o^{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{N})^{e_\varphi}|} \ell^{-m\langle \varphi, \chi \rangle} ;$$

et sa ℓ-valuation est ainsi : $g_\varphi^{\mathfrak{f}} = k_\varphi^{\mathfrak{f}} + d^{\mathfrak{f}}_{\varphi\chi^{-1}} - n_\varphi^{\mathfrak{f}} - m\langle \varphi, \chi \rangle$.

Démonstration : C'est clair.

Revenons maintenant à la formule des genres sous sa forme générale, telle qu'elle est donnée dans le corollaire 1. Contrairement à ce qui se passe pour a_φ, il est ici facile d'interpréter la ℓ-valuation g_φ comme somme de deux entiers :

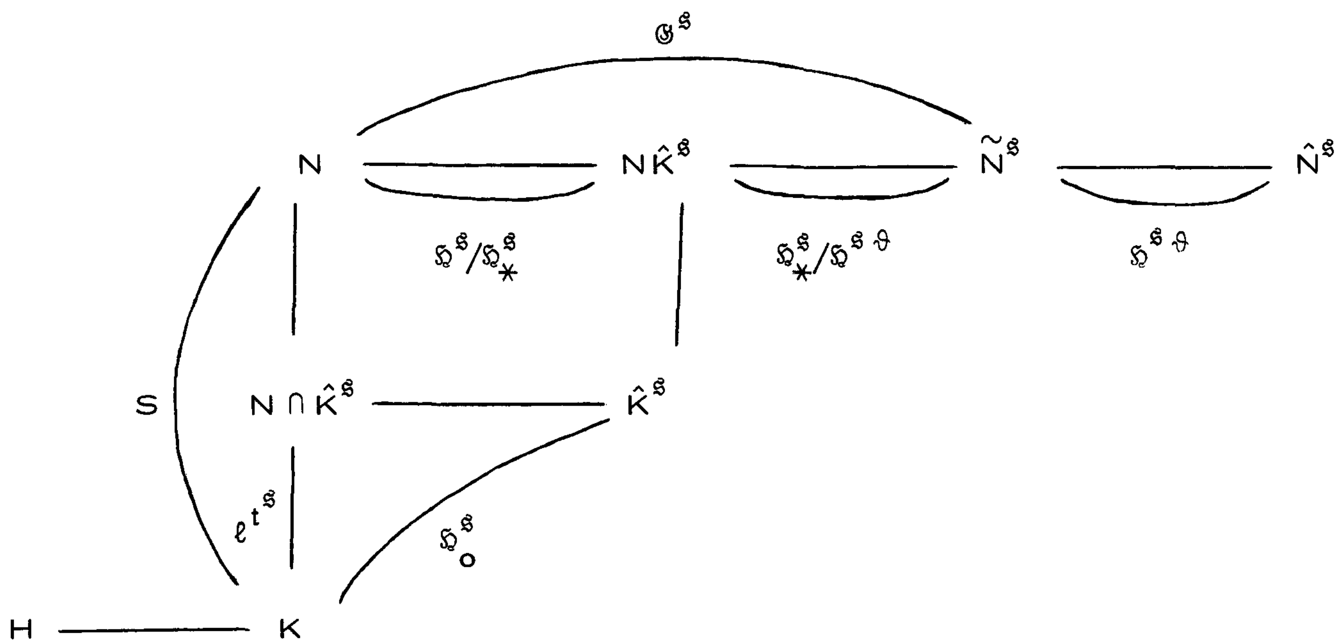
<u>Proposition 4</u>. Désignons par $\mathfrak{H}_*^{\mathfrak{s}}$ le noyau de la norme arithmétique $\mathcal{N}_{N/K}$ de $\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}}$ dans $\mathfrak{H}_o^{\mathfrak{s}}$, et par $\ell^{t^{\mathfrak{s}}}$ l'indice $[N : N \cap \hat{K}^{\mathfrak{s}}]$ dans N de la sous-extension maximale non ramifiée sur K, où les places divisant $\mathfrak{s}$ se décomposent complètement. Alors, pour tout caractère ℓ-adique irréductible φ de Δ, la quantité $r^{\mathfrak{s}}_{\varphi\chi^{-1}} + d^{\mathfrak{s}}_{\varphi\chi^{-1}} - n_\varphi^{\mathfrak{s}} - t^{\mathfrak{s}}\langle \varphi, \chi \rangle$ est exactement la ℓ-valuation

du quotient $\left(\mathfrak{H}_*^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}\,\vartheta}\right)^{e_\varphi}$.

En particulier, nous avons la majoration :

$n_\varphi^{\mathfrak{s}} \leq r^{\mathfrak{s}}_{\varphi\chi^{-1}} + d^{\mathfrak{s}}_{\varphi\chi^{-1}} - t^{\mathfrak{s}}\langle\varphi,\chi\rangle$.

Démonstration : Par l'isomorphisme de réciprocité du corps de classes, le sous-groupe $\mathfrak{H}_*^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}\,\vartheta}$ s'identifie, en effet, au groupe de Galois Gal $\left(\tilde{N}^{\mathfrak{s}}/N\hat{K}^{\mathfrak{s}}\right)$, dont l'ordre est connu, conformément au schéma de corps :



Naturellement, lorsque le diviseur $\mathfrak{s}$ est assez grand, le groupe $\mathfrak{H}_o^{\mathfrak{s}}$ est nul et le groupe $\mathfrak{G}^{\mathfrak{s}}$ aussi, de sorte que la majoration de la proposition 4 se résout alors en une égalité.

Notons, par ailleurs, que le noyau $\mathfrak{G}_*^{\mathfrak{s}}$ de la norme algébrique ν dans $\mathfrak{G}^{\mathfrak{s}}$ s'identifie à l'image réciproque par la norme arithmétique $N_{N/K}$ du sous-groupe de $\mathfrak{H}_o^{\mathfrak{s}}$ qui capitule dans $\mathfrak{G}^{\mathfrak{s}}$. En particulier :

Proposition 5. Si N est une extension cyclique de degré premier impair ℓ sur K, disjointe de $\hat{K}^{\mathfrak{s}}$, et métabélienne sur le sous-corps H, alors, pour tout caractère ℓ-adique irréductible φ de Δ = Gal (K/H), le rang de la φ-composante du ℓ-groupe des genres en dehors de $\mathfrak{s}$ est donné, comme somme d'entiers, par l'identité :

$$\mathrm{rg}\left(\mathfrak{G}^{\mathfrak{s}\, e_\varphi}\right) \geq c_\varphi^{\mathfrak{s}} + \left(r^{\mathfrak{s}}_{\varphi\chi^{-1}} + d^{\mathfrak{s}}_{\varphi\chi^{-1}} - n_\varphi - \langle \varphi , \chi \rangle\right) ;$$

où la quantité $c_\varphi^{\mathfrak{s}}$ mesure la φ-partie de la capitulation en dehors de $\mathfrak{s}$ dans l'extension N/K.

Démonstration : Le groupe $\mathfrak{G}_*^{\mathfrak{s}}$ est, dans ce cas, le noyau dans $\mathfrak{G}^{\mathfrak{s}}$ de l'opérateur ℓ. En tant que $\mathbb{F}_\ell[\Delta]$-module, il s'écrit ainsi comme somme directe du noyau $\mathfrak{H}_*^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}\,\vartheta}$ de la norme arithmétique, et de son image $N_{N/K}\left(\mathfrak{G}_*^{\mathfrak{s}}\right)$, qui contient la capitulation $\mathfrak{C}^{\mathfrak{s}}/\mathfrak{P}_o^{\mathfrak{s}}$.

Remarquons enfin, que la suite exacte des genres telle que nous l'exposons au théorème 2 vaut, en fait, sous des hypothèses plus larges :

<u>Scolie</u>. La suite des genres, donnée par le théorème 2, demeure une suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules lorsque N est une ℓ-extension abélienne de K, métabélienne sur le sous-corps H, pourvu que $\mathfrak{N}$ représente dans ce cas le tensorisé par $\mathbb{Z}_\ell$ du groupe des normes locales dans l'extension N/K.

5 - FORMULE DU NOMBRE DE CLASSES

Notre point de départ est la suite exacte des classes, que nous pouvons écrire de la façon suivante :

Théorème 3 (Suite exacte des classes). Soient N une ℓ-extension cyclique de degré impair sur un corps de nombres K, métabélienne sur un sous-corps H ; puis $\mathfrak{s}$ un idéal entier de K stable par le groupe de Galois $\Delta = \mathrm{Gal}\,(K/H)$.

Pour tout caractère ℓ-adique irréductible φ de Δ, la résolvante $\vartheta = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in \Delta} \chi^{-1}(\tau)\left(\sigma^{\chi(\tau)} - 1\right)$ associée à un générateur σ de Gal (N/K) donne lieu à une suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell$-modules :

$$1 \longrightarrow \mathfrak{A}^{\mathfrak{s}\, e_\varphi} \longrightarrow \mathfrak{H}^{\mathfrak{s}\, e_\varphi} \xrightarrow{\vartheta} \mathfrak{H}^{\mathfrak{s}\, e_{\varphi\chi}} \longrightarrow \mathfrak{G}^{\mathfrak{s}\, e_{\varphi\chi}} \longrightarrow 1 .$$

Corollaire 1 (Formule du nombre de classes). Avec les notations des théorèmes précédents, les φ-composantes du ℓ-groupe des classes en dehors de $\mathfrak{s}$ sont liées par l'identité :

$$\frac{|\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}\, e_{\varphi\chi}}|}{|\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}\, e_{\varphi}}|} = \frac{|\mathfrak{H}_o^{\mathfrak{s}\, e_{\varphi\chi}}|}{|\mathfrak{H}_o^{\mathfrak{s}\, e_{\varphi\chi}}|} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{s}} |D_\mathfrak{p}|^{\langle \varphi, \chi_\mathfrak{p}\rangle} \frac{|H^1(S, \mathcal{E}^{\mathfrak{s}})^{e_{\varphi\chi}}|}{|H^2(S, \mathcal{E}^{\mathfrak{s}})^{e_{\varphi\chi}}|}\, \ell^{-m\langle \chi\varphi, 1_\Delta\rangle}$$

où 1_Δ désigne le caractère de la représentation unité du groupe Δ.

Autrement dit, nous avons l'identité entre les ℓ-valuations :

$$h^{\mathfrak{s}}_{\varphi\chi} - h^{\mathfrak{s}}_{\varphi} = \left(k^{\mathfrak{s}}_{\varphi\chi} - k^{\mathfrak{s}}_{\varphi}\right) + \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{s}} \langle \varphi, \chi_\mathfrak{p}\rangle\, e_\mathfrak{p} f_\mathfrak{p} + \left(q^{\mathfrak{s}}_{\varphi\chi} - p^{\mathfrak{s}}_{\varphi\chi}\right) - m\langle \chi\varphi, 1_\Delta\rangle .$$

Démonstration : La suite exacte des classes résulte tout simplement du décalage des idempotents par la résolvante ϑ. Quant à la formule du nombre de classes, elle s'obtient à partir des évaluations du nombre de classes ambiges et du nombre de genres données plus haut, compte tenu de l'isomorphisme de groupe $I_p \simeq \mathfrak{D}_p^1/\mathfrak{D}_p^o$, pour chaque diviseur premier $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{S}$.

Bien entendu, si e_Φ est un idempotent central de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G]$, la Φ-composante du ℓ-groupe $\mathfrak{H}^{\mathfrak{S}}$ est stable par $\mathfrak{G}$, et la formule du nombre de classes nous donne immédiatement la valeur du quotient de Herbrand correspondant des $\mathfrak{S}$-unités :

<u>Corollaire 2.</u> Sous les hypothèses précédentes, pour tout idempotent central e_Φ du groupe Δ, la Φ-partie du quotient de Herbrand des $\mathfrak{S}$-unités est donnée par la relation :

$$\frac{|H^1(S,\mathcal{E}^{\mathfrak{S}})^{e_\Phi}|}{|H^2(S,\mathcal{E}^{\mathfrak{S}})^{e_\Phi}|} = \ell^{m\langle \Phi, 1_\Delta\rangle} \Big/ \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{S}} |D_\mathfrak{p}|^{\langle \Phi, \chi_\mathfrak{p}\rangle} ;$$

ce qui s'écrit encore, en termes de valuations :

$$q_\Phi^{\mathfrak{S}} - p_\Phi^{\mathfrak{S}} = m\langle \Phi, 1_\Delta\rangle - \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{S}} \langle \Phi, \chi_\mathfrak{p}\rangle\, e_\mathfrak{p} f_\mathfrak{p} .$$

Il est d'ailleurs facile d'isoler, dans la formule obtenue, la part des unités et la part de la décomposition : Par multiplicativité du quotient de Herbrand, nous avons en effet :

$$\frac{|H^1(S,\mathcal{E}^{\mathfrak{S}})^{e_\Phi}|}{|H^2(S,\mathcal{E}^{\mathfrak{S}})^{e_\Phi}|} = \frac{|H^1(S,\mathcal{E})^{e_\Phi}|}{|H^2(S,\mathcal{E})^{e_\Phi}|}\;\frac{|H^1(S,\mathfrak{P}_{\mathfrak{S}})^{e_\Phi}|}{|H^2(S,\mathfrak{P}_{\mathfrak{S}})^{e_\Phi}|} ;$$

c'est-à-dire, puisque le groupe $\mathfrak{P}_{\mathfrak{S}}$ est d'indice fini dans $\mathfrak{D}_{\mathfrak{S}}$:

$$\frac{|H^1(S,\mathcal{E}^{\mathfrak{S}})^{e_\Phi}|}{|H^2(S,\mathcal{E}^{\mathfrak{S}})^{e_\Phi}|} = \frac{|H^1(S,\mathcal{E})^{e_\Phi}|}{|H^2(S,\mathcal{E})^{e_\Phi}|}\;\frac{|H^1(S,\mathfrak{D}_{\mathfrak{S}})^{e_\Phi}|}{|H^2(S,\mathfrak{D}_{\mathfrak{S}})^{e_\Phi}|} ;$$

et nous reconnaissons $\ell^{m\langle \Phi, 1_\Delta\rangle}$ dans le premier quotient, $\dfrac{1}{|(\mathfrak{D}_{\mathfrak{S}}^o/\mathfrak{D}_{\mathfrak{S}}^\nu)^{e_\Phi}|}$ dans le second.

Corollaire 3. Avec les notations précédentes, la quantité $\ell^{m\langle \Phi, 1_\Delta\rangle}$ représente la Φ-partie du quotient de Herbrand du groupe des unités $\mathcal{E}$; ce qui s'écrit :

$$q_\Phi - p_\Phi = m\langle \Phi, 1_\Delta\rangle .$$

Lorsque l'idempotent e_Φ n'est pas central, ces deux derniers corollaires sont évidemment en défaut, et le problème se pose de préciser la quantité $q_\Phi^{\mathfrak{S}} - p_\Phi^{\mathfrak{S}}$.

Il est utile pour cela d'introduire le quotient $\mathcal{E}^{\mathfrak{S}}/\mathcal{E}_o^{\mathfrak{S}}\mathcal{E}^{\mathfrak{S}\vartheta}$. Il vient en effet :

Proposition 6. L'opérateur norme ν donne lieu à une suite exacte canonique de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules :

$$1 \to \mu_o^*/\mu_o \cap \mathcal{E}^{\mathfrak{S}\vartheta} \to \mathcal{E}_*^{\mathfrak{S}}/\mathcal{E}^{\mathfrak{S}\vartheta} \to \mathcal{E}^{\mathfrak{S}}/\mathcal{E}_o^{\mathfrak{S}}\mathcal{E}^{\mathfrak{S}\vartheta} \overset{\nu}{\to} \mathcal{E}_o^{\mathfrak{S}}/\mathcal{E}_o^{\mathfrak{S}\,\ell^m} \to \mathcal{E}_o^{\mathfrak{S}}/\mathcal{E}^{\mathfrak{S}\nu} \to 1 \ ;$$

et, pour tout caractère ℓ-adique irréductible φ de Δ, la quantité $q_\varphi^{\mathfrak{S}} - p_\varphi^{\mathfrak{S}}$ est donnée par l'identité :

$$q_\varphi^{\mathfrak{S}} - p_\varphi^{\mathfrak{S}} = m_\varphi^{\mathfrak{S}} - m\, r_\varphi^{\mathfrak{S}} + u_\varphi^{\mathfrak{S}} .$$

Démonstration : L'exactitude de la suite proposée est immédiate : le noyau ν est engendré par les classes des $\mathfrak{S}$-unités de norme 1, et les classes de $\mathcal{E}_*^{\mathfrak{S}}$ qui sont dans $\mathcal{E}_o^{\mathfrak{S}}\mathcal{E}^{\mathfrak{S}\vartheta}$ sont représentées modulo $\mathcal{E}^{\mathfrak{S}\vartheta}$ par les $\mathfrak{S}$-unités de K dont la puissance $\ell^{m\text{-ième}}$ vaut 1, c'est-à-dire par les racines de l'unité contenues dans μ_o^*.

Cela étant, le quotient $\mathcal{E}_o^{\mathfrak{S}}/\mathcal{E}_o^{\mathfrak{S}\,\ell^m}$ s'écrit comme somme directe de son sous-groupe $\mu_o/\mu_o^{\ell^m}$ engendré par les racines de l'unité, isomorphe à μ_o^*, et du quotient $\mathcal{E}_o^{\mathfrak{S}}/\mu_o\,\mathcal{E}^{\mathfrak{S}\,\ell^m}$ correspondant à la partie projective de $\mathcal{E}_o^{\mathfrak{S}}$. D'où l'évaluation annoncée.

La détermination de l'indice $r_\varphi^{\mathfrak{S}}$ ne fait aucune difficulté dès que la ramification à l'infini est connue :

Proposition 7. Pour chaque place à l'infini $\mathfrak{p}_\infty$ du corps H, notons $\chi_{\mathfrak{p}_\infty}$ l'induit du caractère de la représentation unité de son sous-groupe de décomposition $\Delta_{\mathfrak{p}_\infty}$ dans l'extension K/H ; et notons de même $\chi_{\mathfrak{p}}$ et $\Delta_{\mathfrak{p}}$ pour chaque diviseur premier $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{s}$ dans H. Pour tout caractère ℓ-adique irréductible φ de Δ, la φ-partie du rang essentiel du groupe des $\mathfrak{s}$-unités de K est donnée par la formule :

$$r_\varphi^{\mathfrak{s}} + \langle \varphi, 1_\Delta \rangle = \sum_{\mathfrak{p}_\infty} \langle \varphi, \chi_{\mathfrak{p}_\infty} \rangle + \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{s}} \langle \varphi, \chi_{\mathfrak{p}} \rangle .$$

Démonstration : Dans la suite exacte canonique scindée de $\mathbb{F}_\ell[\Delta]$-modules :

$$1 \longrightarrow \mathcal{E}^o/\mathcal{E}^{o\ell^m} \mu_o \longrightarrow \mathcal{E}_o^{\mathfrak{s}}/\mathcal{E}_o^{\mathfrak{s}\ell^m} \mu_o \longrightarrow \mathfrak{P}_{\mathfrak{s}}^o/\mathfrak{P}_{\mathfrak{s}}^{o\ell^m} \longrightarrow 1,$$

le terme de droite $\mathfrak{P}_{\mathfrak{s}}^o/\mathfrak{P}_{\mathfrak{s}}^{o\ell^m}$ s'identifie (non canoniquement) au quotient $\mathfrak{D}_{\mathfrak{s}}^o/\mathfrak{D}_{\mathfrak{s}}^{o\ell^m}$, isomorphe à la somme directe $\bigoplus_{\mathfrak{p}|\mathfrak{s}} \mathbb{F}_\ell[\Delta/\Delta_{\mathfrak{p}}]$; tandis que celui de droite $\mathcal{E}^o/\mathcal{E}^{o\ell^m} \mu_o$ est donné par le théorème de représentation de Herbrand.

Quant au calcul de l'indice $u_\varphi^{\mathfrak{s}}$, c'est un simple exercice de théorie de Kummer :

Proposition 8. Lorsque le corps K contient les racines $\ell^{\text{ièmes}}$ de l'unité, notons ω le caractère de l'action de Δ sur le groupe μ_o, puis $\chi^* = \omega\chi^{-1}$ le reflet de χ dans l'involution du miroir. Nous avons $u_\varphi^{\mathfrak{s}} = 0$, pour tout caractère φ autre que χ^* ; et $u_{\chi^*}^{\mathfrak{s}}$ n'est non nul que si N contient une sous-extension kummerienne non triviale $K[\sqrt[\ell^u]{\eta}]$ de K, engendrée par une $\mathfrak{s}$-unité η. Lorsque c'est le cas, $u_{\chi^*}^{\mathfrak{s}} = u$ est l'exposant maximal d'une telle sous-extension ; et nous disons que u est le $\mathfrak{s}$-exposant de Hasse de N/K.

Démonstration : C'est clair.

Rassemblant ces résultats, nous obtenons ainsi :

<u>Corollaire 4</u>. Avec les notations précédentes, la formule des classes prend la forme :

$$\frac{|\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}\,e_{\varphi\chi}}|}{|\mathfrak{H}^{\mathfrak{s}\,e_{\varphi}}|} = \frac{|\mathfrak{H}_o^{\mathfrak{s}\,e_{\varphi\chi}}|}{|\mathfrak{H}_o^{\mathfrak{s}\,e_{\varphi}}|}\ \frac{\prod_{p|\mathfrak{s}} |D_p|^{\langle \varphi\chi , \chi_p \rangle}}{|(\mathcal{E}_o^{\mathfrak{s}}/\mathcal{E}_o^{\mathfrak{s}\,\ell^m}\mu_o)^{e_{\varphi\chi}}|}\ |(\mathcal{E}^{\mathfrak{s}}/\mathcal{E}_o^{\mathfrak{s}}\,\mathcal{E}^{\mathfrak{s}\,\vartheta})^{e_{\varphi\chi}}|\ \ell^{-u\langle \varphi\chi , \chi^* \rangle}\ ;$$

où u est le $\mathfrak{s}$-exposant de Hasse de l'extension N/K, et χ^* le reflet de χ.

Autrement dit, il vient :

$$h^{\mathfrak{s}}_{\varphi\chi} - h^{\mathfrak{s}}_{\varphi} = (k^{\mathfrak{s}}_{\varphi\chi} - k^{\mathfrak{s}}_{\varphi}) + m^{\mathfrak{s}}_{\varphi\chi} - m \sum_{\mathfrak{p}_\infty} \langle \varphi\chi , \chi_{\mathfrak{p}_\infty} \rangle - \sum_{p|\mathfrak{s}} \langle \varphi\chi , \chi_{\mathfrak{p}_\infty} \rangle (m - e_p f_p)$$
$$- u\langle \varphi\chi , \chi_{\mathfrak{p}} \rangle .$$

Et l'indice $m^{\mathfrak{s}}_{\varphi}$ dépend étroitement de la ℓ-structure galoisienne du groupe des $\mathfrak{s}$-unités (cf. par exemple [7], où est abordé le problème de la $\mathbb{Z}_\ell[G]$-structure du groupe $\mathcal{E}$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. CHEVALLEY
Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux.
J. Fac. Sc. Tokyo, t.2 (1933) 365-476.

[2] R. GILLARD
$\mathbb{Z}_\ell$-extensions, fonctions L ℓ-adiques et unités cyclotomiques.
Sém. Th. Nombres Bordeaux, exp. 24 (1976-1977).

[3] G. GRAS
Nombre de φ-classes invariantes. Application aux classes des corps abéliens.
Bull. Soc. Math. France, 106 (1978) 337-364.

[4] G. GRAS
Théorie du corps de classes global.
Pub. Math. Fac. Sc. Besançon (1979-1980).

[5] H. HASSE
Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraische Zahlkörper, II.
Würzburg, Physica - Verlag (1965).

[6] J.- F. JAULENT
Unités et classes dans les extensions métabéliennes de degré $n\ell^s$ sur un corps de nombres algébriques.
Ann. Sc. Inst. Fourier, 31, 1 (1981) 39-62.

[7] J.- F. JAULENT
Sur la $\mathbb{Z}_\ell[G]$-structure des unités principales d'un corps local et des unités globales d'un corps de nombres à groupe de Galois métacyclique.
(à paraître).

Jean-François JAULENT
ERA n°070654
Université de Franche-Comté