THÉORIE DES NOMBRES
BESANÇON

Années 1994/95-1995/96

Cycles de codimension 2 en produits de variétés de Severi-Brauer

N.A. KARPENKO

CYCLES DE CODIMENSION 2
EN PRODUITS DE VARIÉTÉS DE SEVERI-BRAUER

NIKITA A. KARPENKO

RÉSUMÉ. Nous recherchons le groupe de Chow des cycles de codimension 2 en le produit de n variétés de Severi-Brauer ($n \geq 2$). Nous analysons plus en détail

- le produit d'une variété biquaternionique et d'une conique;
- le produit de deux surfaces de Severi-Brauer.

TABLE DES MATIÈRES

Date: Janvier, 1997.

0. Introduction

Dans [9], nous recherchions le groupe de Chow CH^2 pour une variété de Severi-Brauer. Ici, en utilisant les mêmes méthodes, nous recherchons le même groupe pour un produit direct de mêmes variétés. La motivation pour ce travail est donnée par un résultat de Izhboldin ([5]): le corps de fonctions d'une variété de Severi-Brauer est universellement excellent ssi l'indice de l'algèbre correspondante n'est pas divisible par 4. Cependant, pour ce résultat, il avait besoin d'information certaine sur le groupe CH^2 du produit d'une variété biquaternionique et d'une conique (6.1).

Des premiers résultats sur le groupe CH^2 d'un produit de variétés de Severi-Brauer sont obtenus dans [14]. On y établit sa connexion avec le 3-ième groupe de cohomologie galoisienne ([14, theorem 4.1]) et on y construit un exemple d'un produit de trois coniques avec torsion dans CH^2 ([14, remark 6.1]).

Le résultat principal et général de l'article présent est 5.5 (avec le corollaire 5.6). Nous l'appliquons à des produits de deux variétés de petites dimensions (6.1), (7.1); on arrive en particulier à des exemples nouveaux de torsion dans CH^2.

Nous utilisons la terminologie et la notation suivantes. Si on dit que A est une algèbre, on veut toujours dire que A est une algèbre centrale simple sur un corps. Pour une algèbre A sur un corps F on note $[A]$ sa classe dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(F)$ de F; $\exp A$ désigne l'exposant, $\deg A$ le degré et $\operatorname{ind} A$ l'indice de A.

La variété de Severi-Brauer d'une algèbre A est désignée par $\mathrm{SB}(A)$. Une variété est toujours une variété algébrique projective lisse sur un corps; un faisceau sur X est un $\mathcal{O}_X$-module. L'anneau de Grothendieck d'une variété X est désigné par $K(X)$;

$$K(X) = \Gamma^0 K(X) \supset \Gamma^1 K(X) \supset \dots \quad \text{et} \quad K(X) = \mathrm{T}^0 K(X) \supset \mathrm{T}^1 K(X) \supset \dots$$

sont respectivement la gamma-filtration et la filtration topologique de $K(X)$; on utilise la notation $G^*\Gamma K(X)$ et $G^*\mathrm{T}K(X)$ pour les anneaux adjoints gradués de ces filtrations. Il y a des relations certaines entre $G^*\Gamma K(X)$, $G^*\mathrm{T}K(X)$ et l'anneau de Chow $\mathrm{CH}^*(X)$ que nous utilisons mais ne décrivons pas ici; on les trouve dans [9, §2].

Ce travail est exécuté au Labo de Mathématiques de l'Université de Franche-Comté. Je le remerci sincèrement pour l'atmosphère et les conditions excellentes.

1. Deux résultats préliminaires

Proposition 1.1. *Soient $A_1, \dots, A_n$ et $B_1, \dots, B_m$ des algèbres sur un corps F telles que les sous-groupes de $\mathrm{Br}(F)$ engendrés par $[A_1], \dots, [A_n]$ et par $[B_1], \dots, [B_m]$ coïncident. Alors*

$$\operatorname{Tors} \mathrm{CH}^2\left(\mathrm{SB}(A_1) \times \dots \times \mathrm{SB}(A_n)\right) \simeq \operatorname{Tors} \mathrm{CH}^2\left(\mathrm{SB}(B_1) \times \dots \times \mathrm{SB}(B_m)\right).$$

Démonstration. Posons $X = \mathrm{SB}(A_1) \times \cdots \times \mathrm{SB}(A_n)$, $Y_1 = \mathrm{SB}(B_1)$. Il suffit de montrer que

$$\mathrm{Tors}\,\mathrm{CH}^2(X) \simeq \mathrm{Tors}\,\mathrm{CH}^2(X \times Y_1)\,.$$

Puisque $X \times Y_1 \to X$ est une fibration projective (5.3), on a ([4, §2 of appendix A])

$$\mathrm{CH}^2(X \times Y_1) \simeq \mathrm{CH}^2(X) \oplus \cdots \oplus \mathrm{CH}^{2-\dim Y_1}(X)\,.$$

La dernière observation est: pour tout $i < 2$, le groupe $\mathrm{CH}^i(X)$ n'a pas de torsion (pour $i = 1$ v. [16, lemme 6.3, (i)]). □

Soit p un premier. Pour une algèbre ainsi que pour un groupe abélien A, on va noter $A\{p\}$ la partie p-primaire de A.

Proposition 1.2. *Soient $A_1, \ldots, A_n$ des algèbres sur un (même) corps. On a*

$$\mathrm{CH}^2\left(\mathrm{SB}(A_1) \times \cdots \times \mathrm{SB}(A_n)\right)\{p\} \simeq \mathrm{Tors}\,\mathrm{CH}^2\left(\mathrm{SB}(A_1\{p\}) \times \cdots \times \mathrm{SB}(A_n\{p\})\right)\,.$$

Démonstration. Pour $n = 1$, le résultat est démontré dans [9, proposition 1.3]. La même preuve marche pour $n > 1$. □

2. Groupe de Grothendieck de produit de variétés de Severi-Brauer

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des algèbres sur un corps F, $X_1, \ldots, X_n$ leurs variétés de Severi-Brauer et $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. Fixons une clôture séparable $\bar{F}$ de F et posons $\bar{X}_i = (X_i)_{\bar{F}}$ pour chaque i. Les variétés $\bar{X}_i$ sont des espaces projectifs; notons ξ_i la classe dans $K(\bar{X})$ du faisceau tautologique de la fibration projective

$$\bar{X} \to \prod_{j \neq i} \bar{X}_j\,.$$

L'anneau $K(\bar{X})$ est engendré par les éléments $\xi_1, \ldots, \xi_n$ avec les seules relations

$$(\xi_1 - 1)^{\deg A_1} = \cdots = (\xi_n - 1)^{\deg A_n} = 0\,.$$

Regardons la restriction $K(X) \to K(\bar{X})$ qui est un homomorphisme d'anneaux.

Théorème 2.1. *L'homomorphisme $K(X) \to K(\bar{X})$ est injectif; son image est additivement engendrée par les éléments*

$$\mathrm{ind}(A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n}) \cdot \xi_1^{j_1} \cdots \xi_n^{j_n}$$

avec $0 \leq j_1 < \deg A_1, \ldots, 0 \leq j_n < \deg A_n$.

Démonstration. On utilise [15, §8, theorem 4.1] n fois. □

Corollaire 2.2. *Pour des algèbres $A_1, \ldots, A_n$ des degrés fixés, l'anneau $K(X)$ avec la gamma-filtration (et le groupe $\mathrm{Tors}\,\mathrm{G}^2\Gamma K(X)$ en particulier) dépend seulement des nombres $\mathrm{ind}(A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n})$.*

Démonstration. Par le théorème, les nombres déterminent $K(X)$ entièrement comme un sous-anneau de $K(\bar{X})$. Les classes de Chern à valeurs dans K ([9, definition 2.1]) pour X qui déterminent la gamma-filtration ([9, definition 2.6]) sont les restrictions des classes de Chern pour $\bar{X}$. □

3. Variétés et algèbres disjointes

Définition 3.1. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variétés quelconques sur un (même) corps. Nous disons qu'elles sont *disjointes* si l'homomorphisme d'anneaux

$$K(X_1) \otimes \cdots \otimes K(X_n) \to K(X_1 \times \cdots \times X_n) ,$$

induit par les homomorphismes d'image inverse

$$pr_i^* : K(X_i) \to K(X_1 \times \cdots \times X_n)$$

par rapport aux projections $pr_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$, est un isomorphisme.

Proposition 3.2. *Soient $X_1, \dots, X_n$ des variétés disjointes. La gamma-filtration de $K(X_1 \times \cdots \times X_n)$ coïncide avec la filtration induite par les gamma-fitrations de $K(X_1), \dots, K(X_n)$.*

Démonstration. Notons X le produit $X_1 \times \cdots \times X_n$ et $\tilde{\Gamma}$ la filtration induite. Alors, pour chaque $l \geq 0$, on définit $\tilde{\Gamma}^l K(X)$ comme le sous-groupe de $K(X)$ engendré par tous les produits

$$pr_1^* \Gamma^{l_1} K(X_1) \cdots pr_n^* \Gamma^{l_n} K(X_n)$$

avec $l_1 + \cdots + l_n \geq l$. Comme un homomorphisme d'image inverse respecte la gamma-filtration, on a l'inclusion $\tilde{\Gamma}^l K(X) \subset \Gamma^l K(X)$. Démontrons l'inclusion inverse. Puisque la gamma-filtration Γ de $K(X)$ est la plus petite filtration d'anneau ayant les propriétés $\Gamma^0 K(X) = K(X)$ et $c^l(x) \in \Gamma^l K(X)$ pour tout $x \in K(X)$ et $l \geq 1$, où c^l est la l-ième classe de Chern à valeurs dans K ([9, definition 2.1]), il suffit de montrer que

$$(*) \qquad c^l(x) \in \tilde{\Gamma}^l K(X) .$$

Comme les variétés $X_1, \dots, X_n$ sont disjointes, le groupe additif de $K(X)$ est engendré par les produits

$$(**) \qquad x = pr_1^*(x_1) \cdots pr_n^*(x_n)$$

où $x_i \in K(X_i)$ est la classe d'un faisceau localement libre. Il suffit donc de vérifier l'inclusion $(*)$ seulement pour x de la forme $(**)$. Puisque c^l commute avec pr_i^*, on a

$$c^l\big(pr_i^*(x_i)\big) \in \tilde{\Gamma}^l K(X) ,$$

et le dernier pas de la preuve est

Lemme 3.3. *Soient $n, m, l \geq 0$. Il existe un polynôme $f_l\big((\sigma_i), (\tau_j)\big)$ sur $\mathbb{Z}$ en les variables $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ et $\tau_1, \dots, \tau_m$ ayant les deux propriétés suivantes:*

- *si $x, y \in K(X)$ sont les classes de faisceaux localement libres sur une variété X, la classe de Chern $c^l(x \cdot y)$ est égale à $f_l\big(c^i(x), c^j(y)\big)$;*
- *si on pose $\deg \sigma_i = i$ et $\deg \tau_j = j$, le degré de chaque monôme de f_l est supérieur ou égal à l.*

Démonstration. Par le principe de décomposition ([13, prop. 5.6]), il suffit de regarder le cas où

$$x = \xi_1 + \cdots + \xi_n, \quad y = \eta_1 + \cdots + \eta_m$$

avec les classes de faisceaux inversibles ξ_i, η_j. Pour la classe de Chern totale c_t ([9, definition 2.1]), on a

$$c_t(x) = c_t(\sum_{i=1}^{n} \xi_i) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + (\xi_i - 1)t\right) = \prod_{i=1}^{n} (1 + a_i t) \text{ où } a_i = \xi_i - 1;$$
$$c_t(y) = c_t(\sum_{j=1}^{m} \eta_j) = \prod_{j=1}^{m} \left(1 + (\eta_j - 1)t\right) = \prod_{j=1}^{m} (1 + b_j t) \text{ où } b_j = \eta_j - 1;$$
$$c_t(xy) = c_t(\sum_{i,j} \xi_i \eta_j) = \prod_{i,j} \left(1 + (\xi_i \eta_j - 1)t\right) = \prod_{i,j} \left(1 + (a_i b_j + a_i + b_j)t\right).$$

La classe $c^l(xy)$ est (par définition) le coefficient de t^l dans $c_t(xy)$. Ce coefficient est évidemment un polynôme en $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_m$ qui est symétrique par rapport aux variables (a_i) et aussi symétrique par rapport aux variables (b_j) (notons que le degré de chaque monôme est au moins égal à l). Alors, par le théorème fondamental sur les polynômes symétriques, $c^l(xy) = f_l\big((\sigma_i), (\tau_j)\big)$ pour un polynôme f_l, où $(\sigma_i)_{i=1}^n$ sont les polynôme symétriques élémentaires en (a_i) (σ_i est un polynôme homogène de degré i) et $(\tau_j)_{j=1}^m$ les polynôme symétriques élémentaires en (b_j). L'assertion de la lemme concernant le degré est évidemment satisfaite. Finalement, on note que $\sigma_i = c^i(x)$ et $\tau_j = c^j(y)$. □

□

Corollaire 3.4. *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variétés telles que leurs groupes de Grothendieck sont finement engendrés (des variétés de Severi-Brauer par exemple). Si les variétés sont disjointes et les groupes* $G^*\Gamma K(X_1), \ldots, G^*\Gamma K(X_n)$ *n'ont pas de torsion, le groupe* $G^*\Gamma K(X_1 \times \cdots \times X_n)$ *est aussi sans torsion.*

Démonstration. L'homomorphisme naturel

$$G^*\Gamma K(X_1) \otimes \cdots \otimes G^*\Gamma K(X_n) \to G^*\Gamma K(X_1 \times \cdots \times X_n)$$

est surjectif par la proposition. Par notre condition, le groupe du côté gauche est finement engendré et sans torsion; alors c'est un groupe libre abélien de rang fini. Ce rang coïncide avec le rang du groupe du côté droit parce que les variétés sont disjointes. □

Maintenant, on va comprendre ce que la condition d'être disjointes veut dire pour des variétés de Severi-Brauer.

Définition 3.5. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des algèbres sur un (même) corps. On dit qu'elles sont *disjointes* si

$$\operatorname{ind}(A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n}) = \operatorname{ind} A_1^{\otimes j_1} \cdots \operatorname{ind} A_n^{\otimes j_n} \quad \text{pour tous } j_1, \ldots, j_n \geq 0.$$

Proposition 3.6. *Des algèbres $A_1, \ldots, A_n$ sont disjointes ssi leurs variétés de Severi-Brauer sont disjointes.*

Démonstration. Comme pour une algèbre A arbitraire il y a un isomorphisme canonique $K(A) = \operatorname{ind} A \cdot \mathbb{Z}$ où maintenant K note le groupe de Grothendieck de l'algèbre, les algèbres sont disjointes ssi les applications

$$K(A_1^{\otimes j_1}) \otimes \cdots \otimes K(A_n^{\otimes j_n}) \to K(A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n})$$

sont des isomorphismes pour tous $0 \leq j_1 < \deg A_1, \ldots, 0 \leq j_n < \deg A_n$. En prenant la somme directe, on obtient l'application

$$\left(\coprod_{j_1=0}^{\deg A_1 - 1} K(A_1^{\otimes j_1})\right) \otimes \cdots \otimes \left(\coprod_{j_n=0}^{\deg A_n - 1} K(A_n^{\otimes j_n})\right) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \coprod_{j_1=0}^{\deg A_1 - 1} \cdots \coprod_{j_n=0}^{\deg A_n - 1} K(A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n}) .$$

En identifiant les facteurs du produit du côté gauche avec $K(\operatorname{SB}(A_1)), \ldots,$ $K(\operatorname{SB}(A_n))$ et la somme directe du côté droit avec $K(\operatorname{SB}(A_1) \times \cdots \times \operatorname{SB}(A_n))$ par 2.1, on obtient à la place de la flèche l'homomorphisme de 3.1. □

4. VARIÉTÉS "GÉNÉRIQUES"

Définition 4.1. Disons que une variété X est *"générique"* si la gamma-filtration de $K(X)$ coïncide avec la filtration topologique.

Lemme 4.2. *Si* $\operatorname{Tors} G^*\Gamma K(X) = 0$ *(pour une variété arbitraire X), alors X est "générique".*

Démonstration. Pour voir que les filtrations coïncident, il suffit de montrer que l'homomorphisme

$$\alpha \colon G^*\Gamma K(X) \to G^*TK(X) ,$$

induit par l'inclusion des filtrations, est injectif. Comme $\alpha \otimes \mathbb{Q}$ est bijectif ([3, proposition 5.5 of chapter VI]), le noyau de α contient seulement des éléments d'ordre fini. Donc α est vraiment injectif si le groupe $G^*\Gamma K(X)$ est sans torsion. □

Lemme 4.3. *Soit $\mathcal{G} \to X$ une fibration grassmannienne. Si X est "générique", la variété $\mathcal{G}$ est pareillement "générique".*

Démonstration. Puisque $\mathcal{G}$ est une fibration grassmannienne sur X, la $\operatorname{CH}^*(X)$-algèbre (commutative) $\operatorname{CH}^*(\mathcal{G})$ est engendrée par les classes de Chern (à valeurs dans CH^*) (v. [2, proposition 14.6.5] ou [11, (3.2)]). En utilisant l'épimorphisme naturel $\operatorname{CH}^* \to G^*TK$, on obtient le même résultat pour G^*TK: la $G^*TK(X)$-algèbre (commutative) $G^*TK(\mathcal{G})$ est engendrée par les classes de Chern (à valeurs dans G^*TK). Comme X est "générique", l'anneau $G^*TK(X)$ même est engendré par les classes de Chern ([9, remark 2.17]). Par conséquent, $G^*TK(\mathcal{G})$ est engendré par les classes de Chern non seulement comme l'algèbre mais aussi comme un anneau. Cela veut dire que $\mathcal{G}$ est "générique" ([9, remark 2.17]). □

Lemme 4.4. *Soit $X \to Y$ un morphisme lisse de variétés, $\tilde{X}$ sa fibre générique. Si X est "générique", la variété $\tilde{X}$ (c'est une variété sur le corps de fonctions de Y) est aussi "générique".*

Démonstration. Le morphisme (de schémas) $\tilde{X} \to X$ induit un homomorphisme des groupes de Grothendieck $K(X) \to K(\tilde{X})$, respectant les deux filtrations, et un homomorphisme des groupes de Chow $\mathrm{CH}^*(X) \to \mathrm{CH}^*(\tilde{X})$ qui est surjectif ([10, theorem 3.1]). Par conséquent, l'homomorphisme

$$\mathrm{G}^*\mathrm{T}K(X) \to \mathrm{G}^*\mathrm{T}K(\tilde{X})$$

est aussi surjectif, et donc, pour chaque l, le groupe $\mathrm{T}^l K(X)$ est appliqué surjectif dans $\mathrm{T}^l K(\tilde{X})$. Puisque $\mathrm{T}^l K(X) = \Gamma^l K(X)$, on en déduit que $\mathrm{T}^l K(\tilde{X}) \subset \Gamma^l K(\tilde{X})$. L'inclusion inverse a lieu tout le temps. □

Corollaire 4.5. *Soient X et Y des variétés sur un corps F telles que la projection $X \times Y \to Y$ est une fibration grassmannienne. Si X est "générique", alors $X_{F(Y)}$ est pareillement "générique".*

Démonstration. La variété $X \times Y$ est "générique" d'après 4.3; ensuite la variété $X_{F(Y)}$ est "générique" par 4.4. □

5. Algèbres "génériques"

Proposition 5.1. *Soit A une algèbre primaire (i.e.* $\deg A$ *est une puissance d'un premier). On suppose que*

- *soit* $\operatorname{ind} A = \exp A$
- *soit* $\operatorname{ind} A = 2^n$ *et* $\operatorname{ind} A^{\otimes 2^{n-2}} = 4$ $(n \geq 2)$

(une algèbre des biquaternions est un exemple de telle A). Alors, le groupe $\mathrm{G}^*\Gamma(\mathrm{SB}(A))$ *n'a pas de torsion.*

Démonstration. Pour des algèbres du premier type, v. [9, proposition 3.3, corollary 3.6]; pour le deuxième type, v. la démonstration de [9, proposition 4.9]. □

Corollaire 5.2. *Soient $A_1, \ldots, A_n$ des algèbres disjointes et supposons que chaque A_i satisfait la condition de 5.1. Alors pour le produit X de leurs variétés de Severi-Brauer, on a:* $\operatorname{Tors} \mathrm{G}^*\Gamma K(X) = 0$*; en particulier,* $\operatorname{Tors} \mathrm{CH}^2(X) = 0$.

Démonstration. Ceci résulte directement de la proposition avec 3.4 et 3.6. □

Pour une algèbre B et un entier $r \geq 0$, notons $\mathrm{SB}(r, B)$ *la variété de Severi-Brauer généralisée* des idéaux à droite de B de rang r ([1, §2]). En particulier, $\mathrm{SB}(1, B) = \mathrm{SB}(B)$.

Proposition 5.3. *Soient $A_1, \ldots, A_n$ et B des algèbres sur un (même) corps,* $X = \mathrm{SB}(A_1) \times \cdots \times \mathrm{SB}(A_n)$ *et* $Y = \mathrm{SB}(r, B)$ *avec certain $r \geq 0$.*

Si la classe $[B]$ de l'algèbre B dans le groupe de Brauer appartient au groupe engendré par $[A_1], \ldots, [A_n]$, la projection $X \times Y \to X$ est une fibration r-grassmannienne.

Démonstration. On peut supposer que
$$B \simeq A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n}$$
avec $j_1, \ldots, j_n \geq 0$ certains. Considérons le carré cartésien
$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r] \arrow[d] & T \times Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$
où $T = \mathrm{SB}(B)$ et le morphisme $X \to T$ est donné par le produit tensoriel d'idéaux. La flèche du côté droit (c'est la projection $T \times Y \to T$) est une fibration r-grassmannienne d'après [9, proposition 6.3]. Donc, la projection $X \times Y \to Y$ (c'est la flèche du côté gauche) est aussi une fibration r-grassmannienne. □

Définition 5.4. Disons que une collection d'algèbres $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n$ est "générique", si c'est un résultat d'une procédure suivante. On commence avec des algèbres disjointes $A_1, \ldots, A_n$ sur un corps F telles que chaque A_i satisfait la condition de 5.1. Puis, on prendre des F-algèbres $B_1, \ldots, B_m$ telles que leurs classes dans $\mathrm{Br}(F)$ appartiennent au sous-groupe engendré par $[A_1], \ldots, [A_n]$. Enfin, on prendre comme Y un produit direct de variétés de Severi-Brauer généralisées quelconques des algèbres $B_1, \ldots, B_m$ et on pose $\tilde{A}_i = (A_i)_{F(Y)}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Théorème 5.5. *Si une collection d'algèbres $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n$ est "générique", le produit $\tilde{X}$ de leurs variétés de Severi-Brauer est une variété "générique" (4.1); en particulier, l'épimorphisme*
$$\mathrm{Tors}\, \mathrm{G}^2\Gamma K(\tilde{X}) \to \mathrm{Tors}\, \mathrm{CH}^2(\tilde{X})$$
est bijectif dans ce cas.

Démonstration. Soient $A_1, \ldots, A_n$ les algèbres utilisées pour construction de notre collection "générique" (5.4). Posons $X_i = \mathrm{SB}(A_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$ et soit $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. D'après 5.2, le groupe $\mathrm{G}^*\Gamma K(X)$ est sans torsion. En particulier, la variété X est "générique" (4.2).

Maintenant, soit Y le produit direct de variétés de Severi-Brauer généralisées, utilisé dans la construction de notre collection "générique". Par 5.3, la projection $X \times Y \to X$ est un produit fibré (sur X) de fibrations grassmanniennes. Donc, en utilisant (4.5) m fois, on démontre que la variété $\tilde{X} = X_{F(Y)}$ est "générique". □

Corollaire 5.6. *Soient $A_1, \ldots, A_n$ des algèbres quelconques et X le produit de leurs variétés de Severi-Brauer. Soit $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n$ une collection "générique" d'algèbres telles que* $\deg \tilde{A}_i = \deg A_i$ *et*
$$\mathrm{ind}(\tilde{A}_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{A}_n^{\otimes j_n}) = \mathrm{ind}(A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n})$$
pour tout i et tous $j_1, \ldots, j_n$.

Le groupe $\mathrm{Tors}\, \mathrm{CH}^2(X)$ *est isomorphe à un groupe quotient de* $\mathrm{Tors}\, \mathrm{CH}^2(\tilde{X})$.

Démonstration. Par le théorème, on a un isomorphisme

$$\operatorname{Tors} \mathrm{CH}^2(\tilde{X}) \simeq \operatorname{Tors} \mathrm{G}^2\Gamma K(\tilde{X}) \ ;$$

par 2.2, on a

$$\operatorname{Tors} \mathrm{G}^2\Gamma K(\tilde{X}) \simeq \operatorname{Tors} \mathrm{G}^2\Gamma K(X) \ ;$$

enfin, on a toujours une surjection ([9, 2.15])

$$\operatorname{Tors} \mathrm{G}^2\Gamma K(X) \twoheadrightarrow \operatorname{Tors} \mathrm{CH}^2(X) \ .$$

□

6. Variété biquaternionique fois conique

Nous appelons *variété biquaternionique* une variété de Severi-Brauer d'une algèbre des biquaternions.

Théorème 6.1. *Soient X une variété biquaternionique, Y une conique (sur le même corps) et A, B les algèbres correspondantes (B est une algèbre des quaternions).*

1. *La torsion dans le groupe* $\mathrm{CH}^2(X \times Y)$ *est sois triviale, sois d'ordre 2.*
2. *Si la torsion n'est pas triviale, alors*

$$(*) \qquad \operatorname{ind} A = \operatorname{ind}(A \otimes B) = 4 \quad \textit{et} \quad \operatorname{ind} B = 2 \ .$$

3. *Si la collection A, B est "générique" (5.4) et satisfait la condition $(*)$, alors la torsion n'est pas triviale.*

Démonstration. Si $\operatorname{ind} B \neq 2$, c.-à.-d. si B est décomposée, on sait par 1.1 que $\operatorname{Tors} \mathrm{CH}^2(X \times Y) \simeq \mathrm{CH}^2(X)$; le dernier groupe n'a pas de torsion ([8, corollary]).

Si $\operatorname{ind} A \neq 4$, alors A est Brauer-équivalente à une algèbres des quaternions A'; désignant par X' sa variété de Severi-Brauer, on obtient (1.1)

$$\operatorname{Tors} \mathrm{CH}^2(X \times Y) \simeq \operatorname{Tors} \mathrm{CH}^2(X' \times Y) \ .$$

Puisque $\dim(X' \times Y) = 2$, le groupe

$$\mathrm{G}^2\Gamma K(X' \times Y) = \Gamma^2 K(X' \times Y) \subset K(X' \times Y)$$

n'a pas de torsion. On en conclut que $\operatorname{Tors} \mathrm{CH}^2(X \times Y) = 0$ aussi dans ce cas.

Soit C l'algèbre à division qui est Brauer-équivalente au produit $A \otimes B$; $T = \mathrm{SB}(C)$. En utilisant 1.1 de nouveau, on tire

$$\operatorname{Tors} \mathrm{CH}^2(X \times Y) \simeq \operatorname{Tors} \mathrm{CH}^2(T \times Y) \ .$$

Si $\operatorname{ind}(A \otimes B) \leq 2$, alors $\dim T \times Y \leq 2$ et on finit au même façon comme si-dessus.

Si $\operatorname{ind}(A \otimes B) = 8$, les algèbres A, B sont disjointes et 5.2 montre que $\operatorname{Tors} \mathrm{CH}^2(X \times Y) = 0$.

Le reste est desservi par

Proposition 6.2. *Supposons que une algèbre des biquaternions A et une algèbre des quaternions B sont des algèbres à division et* $\operatorname{ind}(A \otimes B) = 4$. *Pour X, Y comme ci-dessus, on a:* $\operatorname{Tors} \mathrm{G}^2\Gamma K(X \times Y) \simeq \mathbb{Z}/2$.

Démonstration. Posons $K = K(X \times Y)$, $\bar{K} = K(\bar{X} \times \bar{Y})$. L'anneau $\bar{K}$ est engendré par les elements ξ, η avec les seules relations $(\xi - 1)^4 = 0 = (\eta - 1)^2$ (v. §2). En particulier, le groupe additif de $\bar{K}$ est un groupe abélien librement engendré par les elements $\xi^i\eta^j$, $i = 0,1,2,3$, $j = 0,1$. Nous allons aussi utiliser un autre system de générateurs: f^ig^j, $i = 0,1,2,3$, $j = 0,1$, où $f = \xi - 1$, $g = \eta - 1$.

Pour chaque l, le l-ième term $\Gamma^l\bar{K}$ de la gamma-filtration de $\bar{K}$ est engendré par les produits f^ig^j avec $i + j \geq l$. En particulier, $\mathrm{G}^l\Gamma\bar{K}$ est un groupe abélien librement engendré par les classe résidueles des produits f^ig^j avec $i + j = l$.

Lemme 6.3. *Le sous-anneau $K \subset \bar{K}$ est addivement engendré par les elements*

$$1,\ 4\xi,\ \xi^2,\ 4\xi^3,\ 2\eta,\ 4\xi\eta,\ 2\xi^2\eta,\ 4\xi^3\eta\ .$$

Démonstration. C'est 2.1 à notre situation particulier. □

Lemme 6.4. *Les elements suivants sont aussi des générateurs du groupe additif de K:*

$$1,\ 2f - f^2,\ 2g,\ 2f^2,\ 4fg,\ 4f^3,\ \boxed{2f^2g},\ 4f^3g$$

(l'element relevé va produir la torsion — v. 6.9). □

Lemme 6.5. *Il y a les inclusions suivantes:*

$$\Gamma^1K \ni 2f - f^2,\ 2g\ ;$$
$$\Gamma^2K \ni 2f^2,\ 4fg,\ \boxed{2f^2g}\ ;$$
$$\Gamma^3K \ni 4f^3,\ 2 \cdot \boxed{2f^2g}\ ;$$
$$\Gamma^4K \ni 4f^3g\ .$$

Démonstration. L'assertion sur Γ^1K est evidente.

Puisque $2f^2$, $4fg \in K \cap \Gamma^2\bar{K}$ et l'homomorphisme α^1 est injectif ([16, lemme 6.3, (i)]), l'assertion sur Γ^2K a lieu (une vérification direct (v. le rest de la démonstration) est aussi facile).

Finelment, on a:

$$c_t(4\xi) = (1 + ft)^4 \quad \Rightarrow \quad c^3(4\xi) = 4f^3 \quad \Rightarrow \quad 4f^3 \in \Gamma^3K\ ;$$
$$2f^2 \in \Gamma^2K \text{ et } 2g \in \Gamma^1K \quad \Rightarrow \quad 4f^2g = (2f^2) \cdot (2g) \in \Gamma^3K\ ;$$
$$c^4(4\xi\eta) = (\xi\eta - 1)^4 = \big((f+1)(g+1) - 1\big) = 4f^3g \in \Gamma^4K\ .$$

□

Corollaire 6.6. *Notons α^* l'homomorpshime de restriction* $\mathrm{G}^*\Gamma K \to \mathrm{G}^*\Gamma\bar{K}$. *Pour tout $i > 0$, on a:* $\operatorname{Im}\alpha^i \subset 2\mathrm{G}^i\Gamma\bar{K}$.

Démonstration. D'après le lemme, le groupe $G^1\Gamma K$ est engendré par les classes residueles des elements $2f - f^2$ et $2g$; leurs images dans $G^1\Gamma\bar{K}$ sont effectivement divisibles par 2. Ainsi, l'assertion du corollaire pour $i = 1$ est démontrée.

Puisque les elements de Γ^2K, Γ^3K et Γ^4K énumérés dans le lemme engendrent Γ^2K et sont divisibles par 2 dans $\bar{K}$, on obtient l'assertion pour $i \geq 2$ (on utilise l'absense de torsion dans $G^*\Gamma\bar{K}$). □

Corollaire 6.7. $\#\,\mathrm{Tors}\,G^*\Gamma K \leq 2$.

Démonstration. Comme le groupe $G^*\Gamma\bar{K}$ est sans torsion, $\mathrm{Tors}\,G^*\Gamma K \subset \mathrm{Ker}\,\alpha^*$. Nous allons montrer que $\#\,\mathrm{Ker}\,\alpha^* \leq 2$ en utilisant la formule suivante ([7, proposition]):

$$\mathrm{Ker}\,\alpha^* = \#\,\mathrm{Coker}\,\alpha^*/\#(\bar{K}/K)\,.$$

Il est facile de calculer que $\#(\bar{K}/K) = 2^{10}$. D'après le lemme, $\#\,\mathrm{Coker}\,\alpha^* \leq 2^{11}$. □

Lemme 6.8. $2f^2g \notin \Gamma^3K$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathrm{Im}\,\alpha^3 \subset 4G^3\Gamma\bar{K}$.

Le groupe $\mathrm{Im}\,\alpha^3$ est engendré par le sous-groupe $\mathrm{Im}\,\alpha^1 \cdot \mathrm{Im}\,\alpha^2$ est le sous-ensemble $\alpha^3(c^3K)$, où c^3 est la 3-ième classe de Chern à valeurs dans $G^*\Gamma K$ ([9, definition 2.7]). Puisque $\mathrm{Im}\,\alpha^i \subset 2G^i\Gamma\bar{K}$ pour $i > 0$ par 6.6, on a: $\mathrm{Im}\,\alpha^1 \cdot \mathrm{Im}\,\alpha^2 \subset 4G^3\Gamma\bar{K}$. Il suffit donc de vérifier que $\alpha^3(c^3(S)) \subset 4G^3\Gamma\bar{K}$ pour un system de generatuers du groupe additif de K. La vérification est triviale si on prend à titre de S le system de generateurs de 6.3. □

Corollaire 6.9. *Le résidu de* $2f^2g$ *dans* $G^2\Gamma K$ *a l'ordre 2 et engendre le sous-groupe de torsion.*

Démonstration. Le résidu est d'ordre 2 d'après 6.8 et 6.5. Il engendre tout le sous-groupe de torsion (non seulment de $G^3\Gamma K$ mais aussi d'entier $G^*\Gamma K$) par 6.7. □

Nous avons fini les démonstrations du théorème et de la proposition. □

□

Remarque 6.10. A la condition du théorème, notons F le corps de base et supposons qu'il existe une extension quadratique L/F (ou, plus généralement, une extension de degré indivisible par 4) telle que l'algèbre A_L n'est plus une algèbre à division et l'algèbre B_L est décomposée. Dans ce cas, $f^2g \in T^3K(X_L \times Y_L)$; en utilisant l'application de norme, nous obtenons: $2f^2g \in T^3K(X \times Y)$, i.e. $\mathrm{Tors}\,\mathrm{CH}^2(X \times Y) = 0$.

Alors, si A, B sont telles que $\mathrm{Tors}\,\mathrm{CH}^2(X \times Y) \neq 0$ (par exemple, si A, B forment une collection "générique" (6.1)), il n'y a pas d'extension comme sidessus. Le premier exemple semblable est construit dans [12].

7. Produit de deux surfaces de Severi-Brauer

Un surface de Severi-Brauer est une variété de Severi-Brauer de dimension 2.

Théorème 7.1. *Soient X, Y des surfaces de Severi-Brauer sur un (même) corps et A, B les algèbres correspondantes.*

1. *La torsion dans le groupe* $\mathrm{CH}^2(X \times Y)$ *est sois triviale, sois d'ordre 3.*
2. *Si la torsion n'est pas triviale, alors*

$$(*) \qquad \operatorname{ind} A = \operatorname{ind} B = \operatorname{ind}(A \otimes B) = \operatorname{ind}(A \otimes B^{\circ}) = 3$$

où B° est l'algèbre opposée.

3. *Si la collection A, B est "générique" (5.4) et satisfait la condition $(*)$, alors la torsion n'est pas triviale.*

Démonstration. Si au moins une des algèbres A, B, $A \otimes B$, $A \otimes B^{\circ}$ est décomposée, il existe une algèbre C du degré 3 telle que sa classe $[C]$ dans le groupe de Brauer engendre le même groupe que $[A]$ et $[B]$ (ensemble). D'après 1.1, le groupe $\operatorname{Tors} \mathrm{CH}^2(X \times Y)$ est isomorphe dans ce cas au groupe $\operatorname{Tors} \mathrm{CH}^2(\mathrm{SB}(C))$ qui est trivial par [7, corollary].

Si $\operatorname{ind}(A \otimes B) = \operatorname{ind}(A \otimes B^{\circ}) = 9$, alors les algèbres A, B sont disjointes et on peut utiliser 5.2.

Posons $Y^{\circ} = \mathrm{SB}(B^{\circ})$. Comme par (1.1)

$$\operatorname{Tors} \mathrm{CH}^2(X \times Y) \simeq \operatorname{Tors} \mathrm{CH}^2(X \times Y^{\circ}) ,$$

il suffit de regarder seulment un des deux cas suivants:

- $\operatorname{ind}(A \otimes B) = 3$ et $\operatorname{ind}(A \otimes B^{\circ}) = 9$;
- $\operatorname{ind}(A \otimes B) = 9$ et $\operatorname{ind}(A \otimes B^{\circ}) = 3$.

Lemme 7.2. *Si* $\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} B = \operatorname{ind}(A \otimes B) = 3$ *et* $\operatorname{ind}(A \otimes B^{\circ}) = 9$, *alors* $\operatorname{Tors} \mathrm{G}^2\Gamma K(X \times Y) = 0$.

Démonstration. Posons $K = K(X \times Y)$, $\bar{K} = K(\bar{X} \times \bar{Y})$. L'anneau $\bar{K}$ est engendré par les elements ξ, η avec les relations $(\xi - 1)^3 = 0 = (\eta - 1)^3$ (v. §2). En particulier, le groupe additif de $\bar{K}$ est un groupe abélien librement engendré par les elements $\xi^i\eta^j$, $i, j = 0, 1, 2$. Nous allons aussi utiliser un autre system de générateurs: $f^i g^j$, $i, j = 0, 1, 2$, où $f = \xi - 1$, $g = \eta - 1$.

Pour chaque l, le l-ième term $\Gamma^l \bar{K}$ de la gamma-filtration de $\bar{K}$ est engendré par les produits $f^i g^j$ avec $i + j \geq l$.

La condition du lemme implique que

$$\operatorname{ind} A^{\otimes 2} = \operatorname{ind} B^{\otimes 2} = \operatorname{ind}(A^{\otimes 2} \otimes B^{\otimes 2}) = 3 \text{ et}$$
$$\operatorname{ind}(A \otimes B^{\otimes 2}) = \operatorname{ind}(A^{\otimes 2} \otimes B) = 9 .$$

Ainsi, d'après 2.1, le sous-anneau $K \subset \bar{K}$ est additivement engendré par

$$1,\ 3\xi,\ 3\xi^2,\ 3\eta,\ 3\xi\eta,\ 9\xi^2\eta,\ 3\eta^2,\ 9\xi\eta^2,\ 3\xi^2\eta^2 .$$

Nous allons aussi utiliser un autre system de générateurs:

$$1,\ 3f,\ 3g,\ 3f^2,\ 3fg,\ 3g^2,\ 9f^2g,\ 3f^2g + 3fg^2 + 6f^2g^2,\ 9f^2g^2\ .$$

Maintenant c'est evident que l'intersection $K \cap \Gamma^3\bar{K}$ est engendrée par

$$9f^2g,\ 3f^2g + 3fg^2 + 6f^2g^2 \text{ et } 9f^2g^2\ .$$

Pour démontrer que le groupe $G^2\Gamma K$ est sans torsion, il suffit de vérifier que les trois elements appartiennent à Γ^3K.

Comme $3f^2$, $3g^2 \in \Gamma^2K$ et $3g \in \Gamma^1K$, on a:

$$9f^2g = (3f^2)\cdot(3g) \in \Gamma^3K,\ \ 9f^2g^2 = (3f^2)\cdot(3g^2) \in \Gamma^4K\ .$$

L'element resté coïncide avec une 3-ième classe de Chern:

$$c^3(3\xi\eta) = (\xi\eta - 1)^3 = \left((f+1)(g+1) - 1\right)^3 = (fg + f + g)^3 =$$
$$3fg(f+g)^2 + (f+g)^3 = 6f^2g^2 + 3f^2g + 3fg^2\ .$$

□

Nous finissons la démostration du théorème avec

Proposition 7.3. *Si* $\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} B = \operatorname{ind}(A \otimes B) = \operatorname{ind}(A \otimes B^{o}) = 3$, *alors* $\operatorname{Tors} G^2\Gamma K(X \times Y) \simeq \mathbb{Z}/3$.

Démonstration. Nous utilisons la notation introduite au commencement de la démonstration du dernier lemme.

Lemme 7.4. *Le sous-anneau* $K \subset \bar{K}$ *est maintenant engendré par 1 et* $3\bar{K}$. *En plus,*

$$\Gamma^1K = 3\Gamma^1\bar{K}\ ;$$
$$\Gamma^2K = 3\Gamma^2\bar{K}\ ;$$
$$\Gamma^3K \ni 3f^2g - 3fg^2,\ 3f^2g + 3fg^2 + 6f^2g^2\ ;$$
$$\Gamma^4K \ni 9f^2g^2\ .$$

Démonstration. L'assertion sur Γ^1K est triviale. L'assertion sur Γ^2K découle d'injectivité de α^1 ([16, lemme 6.3, (i)]); puis $9f^2g^2 \in \Gamma^4K$ car $3f^2, 3g^2 \in \Gamma^2K$.

Pour montrer l'assertion sur Γ^3K, calculons la 3-ième classe de Chern

$$c^3(\xi^2\eta) = (\xi^2\eta - 1)^3 = \left((f+1)^2(g+1) - 1\right)^3 = 27f^2g^2 + 12f^2g + 6fg^2\ .$$

Puisque $9f^2g, 9fg^2 \in \Gamma^3K$, on en conclude que $3f^2g - 3fg^2 \in \Gamma^3K$.

Enfin, comme nous avons deja calculé dans le preuve de 7.2,

$$3f^2g + 3fg^2 + 6f^2g^2 = c^3(3\xi\eta) \in \Gamma^3K\ .$$

□

Corollaire 7.5. $\#\operatorname{Tors} G^*\Gamma K \leq 3$.

Démonstration. Analogiquement 6.7. Maintenant, on a: $\#(\bar{K}/K) = 3^8$ et $\#\operatorname{Coker}\alpha^* \leq 3^9$ (7.4). □

Lemme 7.6. $3f^2g^2 \notin \Gamma^3 K$.

Démonstration. Définissons un homomorphisme $\phi_9 : \bar{K} \to \mathbb{Z}/9$ à la maniere suivante: ecrivons un élément $x \in \bar{K}$ arbitraire comme une combination lineaire

$$x = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} f^i g^j \quad \text{avec } a_{ij} \in \mathbb{Z},$$

posons $\phi(x) = a_{21} + a_{12} + a_{22}$ et définissons $\phi_9(x)$ comme le résidu de $\phi(x)$ modulo 9.

Comme $\phi_9(3f^2g^2) \neq 0$, il suffit de montrer que $\phi_9(\Gamma^3 K) = 0$.

A priori, le groupe $\Gamma^3 K$ est engendré par $\Gamma^1 K \cdot \Gamma^2 K$, $c^3(S)$ et $c^4(S)$ où

$$S = 1,\ 3\xi,\ 3\xi^2,\ 3\eta,\ 3\xi\eta,\ 3\xi^2\eta,\ 3\eta^2,\ 3\xi\eta^2,\ 3\xi^2\eta^2\ .$$

Cependant, $c^4(s) = 0$ pour tout $s \in S$; on peut donc rayer $c^4(S)$ de la liste des generateurs.

Puisque

$$\Gamma^1 K \cdot \Gamma^2 K \subset \Gamma^1 K \cdot \Gamma^1 K \subset 9\bar{K} \quad (7.4),$$

on a: $\phi_9(\Gamma^1 K \cdot \Gamma^2 K) = 0$.

Il reste $c^3(S)$. Pour $s = 1$, 3ξ, $3\xi^2$, 3η et $3\eta^2$, $\phi(s)$ est deja 0. Les calculs suivants montrent que $\phi_9\big(c^3(s)\big) = 0$ aussi pour les autres quatre elements $s \in S$:

$$c^3(3\xi\eta) = (\xi\eta - 1)^3 = \big((f+1)(g+1) - 1\big) = \big(fg + (f+g)\big)^3 =$$
$$= 3fg(f+g)^2 + (f+g)^3 = \boxed{6f^2g^2 + 3f^2g + 3fg^2}\ ;$$

$$c^3(3\xi^2\eta^2) = (\xi^2\eta^2 - 1)^3 = \big((f+1)^2(g+1)^2 - 1\big) = \big((f^2+4fg+g^2) + 2(f+g)\big)^3 =$$
$$= 12(f^2 + 4fg + g^2)(f+g)^2 + 8(f+g)^3 = \boxed{120f^2g^2 + 24f^2g + 24fg^2}\ ;$$

$$c^3(3\xi^2\eta) = (\xi^2\eta - 1)^3 = \big((f+1)^2(g+1) - 1\big)^3 = \big(f(f+2g) + (2f+g)\big)^3 =$$
$$= 3f(f+2g)(2f+g)^2 + (2f+g)^3 = \boxed{27f^2g^2 + 12f^2g + 6fg^2}\ ;$$

$$c^3(3\xi\eta^2) \qquad = \qquad \boxed{27f^2g^2 + 6f^2g + 12fg^2}\ .$$

□

□

□

RÉFÉRENCES

[1] Blanchet, A. *Function fields of generalized Brauer-Severi varieties.* Comm. Algebra 19.1 (1991), 97–118.
[2] Fulton, W. *Intersection Theory.* Springer-Verlag, 1984.
[3] Fulton, W., Lang, S. *Riemann-Roch Algebra.* Springer-Verlag, 1985.
[4] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, 1977.
[5] Izhboldin, O. T. *On the (non)-excellent property for function field of Severi-Brauer varieties.* Preprint.
[6] Karpenko, N. A. *Algebro-geometric invariants of quadratic forms.* Leningrad (St. Petersburg) Math. J. 2 (1991), no. 1, 119–138.
[7] Karpenko, N. A. *On topological filtration for Severi-Brauer varieties.* Proc. Symp. Pure Math. 58.2 (1995), 275–277.
[8] Karpenko, N. A. *On topological filtration for Severi-Brauer varieties II.* Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. 174, 1996, 45–48.
[9] Karpenko, N. A. *Codimension 2 cycles on Severi-Brauer varieties.* Prépublications de l'Équipe de Mathémathiques de Besançon 96/40 (1996), 26 p.
[10] Karpenko, N. A., Merkurjev, A. S. *Chow groups of projective quadrics.* Leningrad (St. Petersburg) Math. J. 2 (1991), no. 3, 655–671.
[11] Köck, B. *Chow motif and higher Chow theory of G/P.* Manuscripta Math. 70 (1991), 363–372.
[12] Mammone, P. *On the tensor product of division algebras.* Arch. Math. 58 (1992), 34–39.
[13] Manin, Yu. I. *Lectures on the K-functor in algebraic geometry.* Russian Math. Surveys 24 (1969), no. 5, 1–89.
[14] Peyre, E. *Products of Severi-Brauer varieties and Galois cohomology.* Proc. Symp. Pure Math. 58.2 (1995), 369–401.
[15] Quillen, D. *Higher algebraic K-theory: I.* Lect. Notes Math. 341 (1973), 85–147.
[16] Sansuc, J.-J. *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres.* J. reine angew. Math. 327 (1981), 12–80.

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ, ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES DE BESANÇON, 16, ROUTE DE GRAY, F-25030 BESANÇON CEDEX, FRANCE
E-mail address: karpenko@math.univ-fcomte.fr