



Séminaire Laurent Schwartz

EDP et applications

Année 2017-2018

Kleber Carrapatoso

Comportement en temps long pour l'équation de Landau

Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications (2017-2018), Exposé n° XIII, 17 p.

<http://sisedp.cedram.org/item?id=SLSEDP_2017-2018____A13_0>

© Institut des hautes études scientifiques & Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, 2017-2018.

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

Institut des hautes études scientifiques
Le Bois-Marie • Route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE
<http://www.ihes.fr/>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS, Université
Paris-Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<http://www.math.polytechnique.fr/>

cedram

*Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*
<http://www.cedram.org/>

Comportement en temps long pour l'équation de Landau

Kleber Carrapatoso

IMAG, Université de Montpellier, CNRS, Montpellier, France
kleber.carrapatoso@umontpellier.fr

Résumé

Dans cette note nous présentons les résultats de [CM17], obtenus en collaboration avec S. Mischler, concernant l'existence, l'unicité et la convergence vers l'équilibre pour l'équation de Landau (non homogène en espace) avec potentiel coulombien.

1 Introduction

L'équation de Landau est un modèle fondamentale en théorie cinétique qui modélise l'évolution d'un plasma interagissant par le biais de collisions binaires. Nous considérons un plasma confiné dans le tore \mathbf{T}^3 et décrit par la distribution de particules $f = f(t, x, v) \geq 0$ qui à l'instant $t \in \mathbf{R}^+$ et position $x \in \mathbf{T}^3$ possèdent vitesse $v \in \mathbf{R}^3$. L'évolution de f est donnée par l'équation de Landau

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f) \\ f|_{t=0} = f_0, \end{cases} \quad (1)$$

où $f_0(x, v) \geq 0$ est la donnée initiale. Dans le cas d'un plasma homogène en espace, c'est-à-dire lorsque la donnée initiale vérifie $f_0 = f_0(v)$, la solution f est aussi homogène ($f = f(t, v)$), et alors l'équation se simplifie en l'équation de Landau *homogène en espace*

$$\begin{cases} \partial_t f = Q(f, f) \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases} \quad (2)$$

L'opérateur de collision de Landau Q est un opérateur bilinéaire agissant seulement sur la variable de vitesse v et qui est donné par

$$Q(g, f)(v) = \nabla_v \cdot \int_{\mathbf{R}^3} a(v - v_*) \{g(v_*) \nabla_v f(v) - f(v) \nabla_v g(v_*)\} dv_*. \quad (3)$$

La matrice a est semi-définie positive et symétrique, et encode la physique de l'interaction entre particules. Lorsque les particules interagissent à travers un

potentiel de loi inverse de puissance, la matrice a vérifie

$$a_{ij}(z) = |z|^{\gamma+2} \left(\delta_{ij} - \frac{z_i z_j}{|z|^2} \right), \quad -3 \leq \gamma \leq 1, \quad 1 \leq i, j \leq 3. \quad (4)$$

Usuellement, comme pour l'équation de Boltzmann, nous classifions les différents types d'interaction entre particules — décrites par le paramètre γ — de la façon suivante :

- $\gamma \in (0, 1]$: potentiels durs ;
- $\gamma = 0$: molécules maxwelliennes ;
- $\gamma \in [-2, 0)$: potentiels modérément mous ;
- $\gamma \in (-3, -2)$: potentiels très mous ;
- $\gamma = -3$: potentiel coulombien.

Il est important de remarquer que le cas plus intéressant du point de vue de la physique, et aussi le plus difficile dû à la singularité présente dans (4), est le cas du potentiel coulombien.

Dans cette note nous allons considérer seulement le cas de l'équation de Landau *non homogène en espace* (1). Nous renvoyons le lecteur à [Des15, CDH17] ainsi que leurs références pour une revue sur les résultats concernant l'existence, l'unicité et le comportement en temps long dans le cadre de l'équation *homogène en espace* (2).

2 Propriétés fondamentales

Nous présentons dans cette section les propriétés fondamentales vérifiées par l'équation de Landau (1) dans les différents cas de potentiel $\gamma \in [-3, 1]$.

Définissons les quantités suivantes

$$b_i(z) = \partial_j a_{ij}(z) = -2 z_i |z|^\gamma, \quad i = 1, 2, 3,$$

et

$$c(z) = \partial_{ij} a_{ij}(z) = \begin{cases} -2(\gamma + 3)|z|^\gamma & \text{si } -3 < \gamma \leq 1, \\ -8\pi \delta_0(z) & \text{si } \gamma = -3, \end{cases}$$

où dans la suite nous utilisons la convention de sommation implicite des indices répétés, ainsi que l'abus de notation $\partial_i = \partial_{v_i}$, $\partial_{ij} = \partial_{v_i, v_j}$. Nous pouvons ainsi réécrire l'opérateur de Landau sous deux autres formes :

$$Q(g, f)(v) = \partial_i \{ (a_{ij} * g)(v) \partial_j f(v) - (b_i * g)(v) f(v) \} \quad (5)$$

et

$$Q(g, f)(v) = (a_{ij} * g)(v) \partial_{ij} f(v) - (c * g)(v) f(v). \quad (6)$$

Formellement nous obtenons, à partir de (3) et de la symétrie de la matrice a , la formulation faible suivante pour l'opérateur de Landau : pour toute fonction test $\phi = \phi(v)$ nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^3} Q(f, f)(v) \phi(v) \, dv \\ &= -\frac{1}{2} \iint_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} a_{ij}(v - v_*) \left\{ \frac{\partial_i f}{f}(v) - \frac{\partial_i f}{f}(v_*) \right\} \\ & \quad \times \{ \partial_j \phi(v) - \partial_j \phi(v_*) \} f(v_*) f(v) \, dv_* \, dv. \end{aligned} \quad (7)$$

En outre, en se basant sur (5) ou (6), nous pouvons obtenir une autre formulation faible, plus précisément, pour toute fonction test $\phi = \phi(v)$ nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^3} Q(f, f)(v) \phi(v) \, dv \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} a_{ij}(v - v_*) \{ \partial_{ij} \phi(v) + \partial_{ij} \phi(v_*) \} f(v) f(v_*) \, dv_* \, dv \\ & \quad + \iint_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} b_i(v - v_*) \{ \partial_i \phi(v) - \partial_i \phi(v_*) \} f(v) f(v_*) \, dv_* \, dv. \end{aligned} \quad (8)$$

Par conséquent, nous déduisons formellement deux propriétés fondamentales de l'équation de Landau (1) :

- la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie ;
- et le Théorème- H de Boltzmann ;

ce qui nous présentons en détails ci-dessous.

2.1 Lois de conservation

En prenant $\phi = 1$ ou $\phi(v) = v_\alpha$, pour $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, nous observons aisément que $\partial_j \phi(v) - \partial_j \phi(v_*) = 0$ de sorte que (7) s'annule. De plus, en choisissant $\phi(v) = |v|^2$ on a $\partial_j \phi(v) - \partial_j \phi(v_*) = 2(v_j - v_{*j})$ et $a_{ij}(v - v_*)(v_j - v_{*j}) = 0$ grâce à (4). On en déduit ainsi que l'opérateur de collision Q (3) possède les *invariants de collision* suivants

$$\int_{\mathbf{R}^3} Q(f, f)(v) \phi(v) \, dv = 0 \quad \text{pour} \quad \phi(v) = 1, v, |v|^2.$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f(t, x, v) \phi(v) \, dx \, dv \\ &= \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} \{ Q(f(t, x, \cdot), f(t, x, \cdot))(v) - v \cdot \nabla_x f(t, x, v) \} \phi(v) \, dx \, dv = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

ou, en d'autres termes, que l'équation de Landau (1) conserve la masse

$$\int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f(t, x, v) \, dx \, dv = \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f_0(x, v) \, dx \, dv, \quad \forall t \geq 0,$$

la quantité de mouvement

$$\int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} v f(t, x, v) \, dx dv = \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} v f_0(x, v) \, dx dv, \quad \forall t \geq 0,$$

et l'énergie

$$\int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} |v|^2 f(t, x, v) \, dx dv = \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} |v|^2 f_0(x, v) \, dx dv, \quad \forall t \geq 0.$$

2.2 Entropie et Théorème- H de Boltzmann

Encore de manière formelle, en choisissant la fonction $\phi(v) = \log f(v)$ dans la formulation faible (7), nous obtenons le célèbre Théorème- H de Boltzmann.

D'une part, on définit la fonctionnelle d'entropie

$$\mathcal{H}(f) = \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f(x, v) \log f(x, v) \, dx dv \quad (10)$$

ainsi que la dissipation d'entropie

$$\mathcal{D}(f) = - \int_{\mathbf{R}^3} Q(f, f)(v) \log f(v) \, dv. \quad (11)$$

On obtient grâce à (7) l'identité suivante, dite d'entropie-dissipation d'entropie,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}(f) &= - \int_{\mathbf{T}^3} \mathcal{D}(f) \, dx \\ &= - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} a_{ij}(v - v_*) \left\{ \frac{\partial_i f}{f}(t, x, v) - \frac{\partial_i f}{f}(t, x, v_*) \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{\partial_j f}{f}(t, x, v) - \frac{\partial_j f}{f}(t, x, v_*) \right\} f(t, x, v) f(t, x, v_*) \, dv_* dv dx \\ &\leq 0, \end{aligned} \quad (12)$$

où on a utilisé le fait que la matrice a est semi-définie positive. Ainsi on a la décroissance de l'entropie

$$\mathcal{H}(f(t)) \leq \mathcal{H}(f_0) \quad \forall t \geq 0.$$

D'autre part, on peut montrer que

$$\mathcal{D}(f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = \mathcal{M}_{\rho, u, T}(t, x, v) = \frac{\rho(t, x)}{(2\pi T(t, x))^{3/2}} \exp\left(-\frac{|v - u(t, x)|^2}{2T(t, x)}\right)$$

avec $\rho > 0$, $u \in \mathbf{R}^3$ et $T > 0$, et $\mathcal{M}_{\rho, u, T}$ est appelé une maxwellienne locale, c'est-à-dire une distribution gaussienne en la variable de vitesse v . Par conséquent l'équilibre global de (1) est donné par une maxwellienne globale $\mathcal{M} = \mathcal{M}(v)$ indépendante des variables de temps t et d'espace x .

2.3 Comportement en temps long

Dans la suite, on considère, sans perte de généralité, seulement des données initiales normalisées

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} f_0(x, v) \, dx dv &= 1, \\ \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} v f_0(x, v) \, dx dv &= 0, \\ \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} |v|^2 f_0(x, v) \, dx dv &= 3, \end{aligned} \tag{13}$$

ainsi que l'équilibre global maxwellien associé

$$\mathcal{M}(v) = \mathcal{M}_{1,0,1}(v) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|v|^2}{2}\right) \tag{14}$$

de même masse, quantité de mouvement et énergie que la donnée initiale (en considérant le tore de volume unitaire $|\mathbf{T}_x^3| = 1$).

Grâce aux lois de conservation et le Théorème-*H* présentés ci-dessus, on conjecture que les solutions $f = f(t)$ de l'équation de Landau (1) convergent, lorsque $t \rightarrow \infty$, vers l'unique équilibre maxwellien associé \mathcal{M} .

Dans cette note nous nous intéressons donc au problème de Cauchy (1) et aux questions suivantes concernant le comportement en temps long : les solutions $f = f(t)$ convergent-elles (dans un sens à préciser) vers la maxwellienne \mathcal{M} lorsque $t \rightarrow \infty$? Si oui, peut-on établir un taux de convergence ?

Nous allons présenter le résultat principal de [CM17], en collaboration avec S. Mischler, concernant l'équation de Landau (1) avec potentiel coulombien $\gamma = -3$. Nous y montrons l'existence, l'unicité et la convergence vers l'équilibre dans un cadre perturbatif — c'est-à-dire proche de l'équilibre — et nous donnons ainsi une réponse positive aux deux questions ci-dessus. La même preuve est en fait valide pour $-3 \leq \gamma < -2$ mais pour simplifier la présentation, et car c'est le cas plus important, nous allons considérer seulement le potentiel coulombien $\gamma = -3$ dans la suite.

Les autres potentiels d'interaction $-2 \leq \gamma \leq 1$ ont été traités dans l'article [CTW16], en collaboration avec I. Tristani et K.-C. Wu, où nous obtenons des résultats analogues. Il est important de remarquer que la principale différence entre les résultats de [CTW16] et [CM17] concerne le taux de convergence vers l'équilibre, exponentiel dans [CTW16] et polynomial ou sous-exponentiel dans [CM17]. Ceci est une conséquence des propriétés spectrales de l'opérateur de collision de Landau linéarisé autour de l'équilibre maxwellien : l'opérateur linéarisé possède un trou spectral si et seulement si $-2 \leq \gamma \leq 1$, et donc seulement dans ce cas on s'attend à obtenir une convergence exponentielle.

3 Existence, unicité et convergence vers l'équilibre dans un cadre perturbatif

Soit f une solution de (1), alors on définit la perturbation

$$h := f - \mathcal{M}$$

qui satisfait donc l'équation

$$\begin{cases} \partial_t h = \Lambda h + Q(h, h), \\ h_0 = f_0 - \mathcal{M}, \end{cases} \quad (15)$$

où l'opérateur linéarisé (spatialement non homogène) Λ est donné par

$$\Lambda h := Lh - v \cdot \nabla_x h \quad (16)$$

et l'opérateur de collision linéarisé (spatialement homogène) L par

$$Lh := Q(\mathcal{M}, h) + Q(h, \mathcal{M}). \quad (17)$$

On remarque que, grâce à (13) et aux lois de conservation (9), la solution h vérifie les lois de conservation suivantes : pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} h(t, x, v) \, dx dv &= 0, \\ \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} v h(t, x, v) \, dx dv &= 0, \\ \int_{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3} |v|^2 h(t, x, v) \, dx dv &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

On considère des fonctions « poids » $\omega : \mathbf{R}^3 \rightarrow [1, +\infty[$ satisfaisant

$$\begin{cases} \omega(v) = \langle v \rangle^k := (1 + |v|^2)^{k/2}, & \text{avec } k > 2 + 3/2; \\ \omega(v) = \exp(\kappa \langle v \rangle^s), & \text{avec } \begin{cases} 0 < s < 2 \text{ et } \kappa > 0, \\ \text{ou } s = 2 \text{ et } 0 < \kappa < 1/2. \end{cases} \end{cases} \quad (19)$$

On introduit l'espace de Sobolev $H_x^2 L_v^2$ associé à la norme

$$\|f\|_{H_x^2 L_v^2}^2 := \|f\|_{L_{x,v}^2}^2 + \|\nabla_x f\|_{L_{x,v}^2}^2 + \|\nabla_x^2 f\|_{L_{x,v}^2}^2$$

où $L_{x,v}^2 = L^2(\mathbf{T}_x^3 \times \mathbf{R}_v^3)$ est l'espace de Lebesgue usuel dans $\mathbf{T}_x^3 \times \mathbf{R}_v^3$.

Le théorème suivant concernant l'existence, l'unicité et la convergence vers l'équilibre pour l'équation de Landau avec potentiel coulombien dans un cadre perturbatif — c'est-à-dire proche de l'équilibre — est le résultat principal de [CM17] :

Théorème 1 ([CM17, Theorem 1.1]). *Soit ω une fonction vérifiant (19). Il existe $\epsilon_0 > 0$ assez petit tel que, si $\|\omega h_0\|_{H_x^2 L_v^2} \leq \epsilon_0$, alors il existe une unique solution faible globale h pour l'équation de Landau (15) avec potentiel coulombien ($\gamma = -3$) telle que*

$$\sup_{t \geq 0} \|\omega h(t)\|_{H_x^2 L_v^2}^2 + \int_0^\infty \|\langle v \rangle^{-3/2} \tilde{\nabla}_v(\omega h(t))\|_{H_x^2 L_v^2}^2 dt \lesssim \epsilon_0^2, \quad (20)$$

où $\tilde{\nabla}_v$ est le gradient anisotrope

$$\tilde{\nabla}_v h = P_v \nabla_v h + \langle v \rangle (I - P_v) \nabla_v h, \quad P_v \nabla_v h = \left(\frac{v}{|v|} \cdot \nabla_v h \right) \frac{v}{|v|}.$$

Cette solution vérifie en outre l'estimation de décroissance

$$\|h(t)\|_{H_x^2 L_v^2} \lesssim \Theta_\omega(t) \|\omega h_0\|_{H_x^2 L_v^2}, \quad \forall t \geq 0, \quad (21)$$

avec

$$\Theta_\omega(t) = \begin{cases} \langle t \rangle^{-(k-k_*)/3}, & \forall k_* \in]2 + \frac{3}{2}, k[, \quad \text{si } \omega = \langle v \rangle^k; \\ \exp\left(-\lambda \langle t \rangle^{s/3}\right), & \text{si } \omega = e^{\kappa \langle v \rangle^s}; \end{cases}$$

pour une constante $\lambda > 0$.

Nous remarquons que, dans un cadre perturbatif, Guo [Guo02] a montré l'existence et l'unicité dans des espaces de Sobolev d'ordre élevée et confinant (c'est-à-dire des fonctions à décroissance très rapide en la variable de vitesse v) du type

$$H_{x,v}^s(\mathcal{M}^{-1/2}) := \{f \mid \mathcal{M}^{-1/2} f \in H^s(\mathbf{T}_x^3 \times \mathbf{R}_v^3)\},$$

en développant une méthode d'énergie non linéaire. Guo et Strain [SG06, SG08] ont ensuite démontré la convergence sous-exponentielle vers l'équilibre dans le même types d'espaces $H_{x,v}^s(\mathcal{M}^{-\theta}) := \{f \mid \mathcal{M}^{-\theta/2} f \in H^s(\mathbf{T}_x^3 \times \mathbf{R}_v^3)\}$ avec $\theta \in (1/2, 1)$.

Or le résultat ci-dessus montre l'existence, l'unicité et la convergence vers l'équilibre dans des espaces fonctionnels plus grands du type

$$H_x^2 L_v^2(\omega) := \{f \mid \omega f \in H_x^2 L_v^2\},$$

en améliorant ainsi les résultats de [Guo02, SG06, SG08]. En outre, la méthode développée dans [CM17], que nous expliquons ci-dessous, est très différente de la méthode d'énergie de [Guo02].

Concernant le cadre non perturbatif, c'est-à-dire pour de données initiales générales, Villani [Vil96] a montré l'existence globale de solutions renormalisées avec mesure de défaut (basé sur les solutions renormalisées de DiPerna et Lions [DL89]). Plus tard, Desvillettes et Villani [DV05] ont démontré la convergence polynomiale vers l'équilibre pour des solutions *à priori* régulières et vérifiant des estimations uniformes en temps. Comme conséquence du Théorème 1 nous pouvons améliorer le taux de convergence de [DV05] dans un cadre non perturbatif :

Corollaire 2 ([CM17, Corollary 1.4]). *Soit f une solution forte globale de l'équation de Landau (1) avec potentiel coulombien ($\gamma = -3$) telle que*

$$\sup_{t \geq 0} (\|f(t)\|_{H^t(\mathbf{T}_x^3 \times \mathbf{R}_v^3)} + \|\omega f(t)\|_{L^1(\mathbf{T}_x^3 \times \mathbf{R}_v^3)}) < +\infty,$$

pour une constante explicite $\ell \geq 3$ assez grande et un poids exponentiel ω vérifiant (19). On suppose que la densité spatiale est uniformément positive sur le tore, c'est-à-dire

$$\forall t \geq 0, x \in \mathbf{T}^3, \quad \int_{\mathbf{R}^3} f(t, x, v) dv > 0.$$

Alors on a

$$\|f(t) - \mathcal{M}\|_{H_x^2 L_v^2} \lesssim \Theta_\omega(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (22)$$

où le taux de décroissance Θ_ω est défini dans le Théorème 1.

Pour démontrer le Théorème 1 nous développons une méthode qui consiste en deux parties :

- (a) des estimations non linéaires simples pour l'opérateur de collision Q et un argument de perturbation ;
- (b) des estimations de stabilité et de régularisation pour l'opérateur linéarisé Λ et son semi-groupe associé, dans les espaces fonctionnels correspondants.

Il est important de remarquer que notre méthode se repose surtout sur la stabilité des semi-groupes de la partie (b). Nous développons pour cela des techniques pour prouver des estimations de stabilité non uniformes pour des semi-groupes associés à des opérateurs *faiblement dissipatifs* (qui ne possèdent pas de trou spectral) que nous présentons dans la Section 5. Ceci est une généralisation de la méthode de factorisation développée dans [GMM17] (et introduite dans [Mou06b]) pour obtenir la stabilité uniforme (exponentielle) des semi-groupes associés à des opérateurs possédant un trou spectral.

4 Méthode de la preuve

Nous présentons les éléments principaux de la preuve du Théorème 1.

4.1 Cadre fonctionnel

On dénote par $L_{x,v}^2 = L_{x,v}^2(\mathbf{T}_x^3 \times \mathbf{R}_v^3)$ l'espace de Lebesgue usuel dans $\mathbf{T}_x^3 \times \mathbf{R}_v^3$. Étant donnée une fonction « poids » en vitesse $\omega = \omega(v) : \mathbf{R}_v^3 \rightarrow [1, +\infty[$ vérifiant (19), on définit l'espaces de Lebesgue à poids $L_x^2 L_v^2(\omega)$ par la norme associée

$$\|h\|_{L_x^2 L_v^2(\omega)}^2 := \|\omega h\|_{L_{x,v}^2}^2,$$

ainsi que l'espace de Sobolev à poids $H_x^2 L_v^2(\omega)$ par la norme

$$\|h\|_{H_x^2 L_v^2(\omega)}^2 := \|\omega h\|_{L_{x,v}^2}^2 + \|\nabla_x(\omega h)\|_{L_{x,v}^2}^2 + \|\nabla_x^2(\omega h)\|_{L_{x,v}^2}^2.$$

On définit ensuite l'espace de Hilbert à poids $\mathcal{H}_{x,v}^1(\omega)$, comme l'espace associé à la norme

$$\|h\|_{\mathcal{H}_{x,v}^1(\omega)}^2 := \|\omega h\|_{L_{x,v}^2}^2 + \|\nabla_x(\omega h)\|_{L_{x,v}^2}^2 + \|\langle v \rangle^{\sigma/4-3/2} \nabla_v(\omega h)\|_{L_{x,v}^2}^2, \quad (23)$$

où on note dans la suite $\sigma = 0$ lorsque $\omega = \langle v \rangle^k$ et $\sigma = s$ quand $\omega = e^{\kappa \langle v \rangle^s}$. On considère aussi l'espace $H_{v,*}^1(\omega)$ associé à la norme

$$\|h\|_{H_{v,*}^1(\omega)}^2 := \|\omega \langle v \rangle^{(\sigma-3)/2} h\|_{L_v^2}^2 + \|\langle v \rangle^{-3/2} \widetilde{\nabla}_v(\omega h)\|_{L_v^2}^2. \quad (24)$$

Lorsque ω est un polynôme, on définit l'espace de Sobolev négatif $H_{v,*}^{-1}(\omega)$ en dualité avec $H_{v,*}^1(\omega)$ par rapport au produit de dualité de $L_v^2(\omega)$, plus précisément

$$\|h\|_{H_{v,*}^{-1}(\omega)} = \sup_{\|\phi\|_{H_{v,*}^1(\omega)} \leq 1} \langle \omega h, \omega \phi \rangle_{L_v^2}. \quad (25)$$

Finalement on définit l'espace $H_x^2(H_{v,*}^1(\omega))$ associé à la norme

$$\|h\|_{H_x^2(H_{v,*}^1(\omega))}^2 := \sum_{j=0}^2 \|\|\nabla_x^j h\|_{H_{v,*}^1(\omega)}\|_{L_x^2}^2, \quad (26)$$

et, lorsque ω est un polynôme, on définit aussi par dualité l'espace de Sobolev négatif $H_x^2(H_{v,*}^{-1}(\omega))$, plus précisément

$$\|h\|_{H_x^2(H_{v,*}^{-1}(\omega))} := \sup_{\|\phi\|_{H_x^2(H_{v,*}^1(\omega))} \leq 1} \langle \omega h, \omega \phi \rangle_{H_x^2 L_v^2}, \quad (27)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_x^2 L_v^2}$ est le produit scalaire de $H_x^2 L_v^2$ donné par

$$\langle f, g \rangle_{H_x^2 L_v^2} = \langle f, g \rangle_{L_{x,v}^2} + \langle \nabla_x f, \nabla_x g \rangle_{L_{x,v}^2} + \langle \nabla_x^2 f, \nabla_x^2 g \rangle_{L_{x,v}^2}.$$

Notation. Nous utiliserons dans la suite des notations classiques en théorie des opérateurs. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ des espaces de Banach, on note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de X vers Y , que l'on muni de la norme d'opérateur

$$\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|\Lambda x\|_Y, \quad \forall \Lambda \in \mathcal{L}(X, Y).$$

Soit $\Lambda : X \rightarrow X$ un opérateur linéaire, on note $D(\Lambda)$ son domaine, $\sigma(\Lambda)$ son spectre et, lorsqu'il existe, $S_\Lambda = (S_\Lambda(t))_{t \geq 0}$ le semi-groupe généré par Λ .

4.2 Stabilité linéaire

On se concentre d'abord sur l'opérateur linéarisé Λ défini dans (16) et on montre la stabilité non uniforme du semi-groupe associé dans plusieurs espaces de Hilbert. Ces estimations de stabilité sont le point crucial de notre méthode et sont obtenues dans plusieurs étapes que nous détaillons ci-dessous.

4.2.1 Coercivité faible dans un « petit » espace

On considère l'espace de Hilbert $E := L_v^2(\mathcal{M}^{-1/2})$. Sur cet espace, la version linéarisé du Théorème- H , présenté dans la Section 2.2, implique que l'opérateur de collision linéarisé L (défini dans (17)) est auto-adjoint et vérifie $\langle Lf, f \rangle_E \leq 0$, de sorte que son spectre satisfait $\sigma(L) \subset \mathbf{R}_-$. En outre, grâce aux lois de conservation, son noyau $\ker(L)$ est donné par

$$\ker(L) = \text{span} \{ \mathcal{M}, v_1 \mathcal{M}, v_2 \mathcal{M}, v_3 \mathcal{M}, |v|^2 \mathcal{M} \}.$$

On obtient aussi l'estimation suivante de *coercivité faible* ([DL97, BM05, Guo02, Mou06a, MS07])

$$\forall h \in D(L), \quad \langle Lh, h \rangle_E \lesssim -\|\pi h\|_{E_*}^2,$$

où $E_* := H_{v,*}^1(\mathcal{M}^{-1/2})$ est défini dans (24) et π est la projection sur l'orthogonal du noyau $\ker(L)$, et on remarque que E_* n'est pas inclus dans E . À partir de cette estimation, on peut adapter l'argument de hypo-coercivité développé dans [MN06] à un cadre où l'opérateur n'a pas de trou spectral. Ainsi on obtient une inégalité de *coercivité faible* pour l'opérateur linéarisé non homogène $\Lambda = L - v \cdot \nabla_x$ dans un « petit » espace, plus précisément dans l'espace de Hilbert $\mathcal{E} := \mathcal{H}_{x,v}^1(\mathcal{M}^{-1/2})$ (muni d'une norme équivalente à (23)) :

$$\forall h \in D(\Lambda), \quad \langle \Lambda h, h \rangle_{\mathcal{E}} \lesssim -\|\Pi h\|_{\mathcal{E}_*}^2, \quad (28)$$

où Π est la projection sur l'orthogonal du noyau $\ker(\Lambda)$, et \mathcal{E}_* est un autre espace de Hilbert non contenu dans \mathcal{E} .

4.2.2 Factorisation de l'opérateur

On considère des espaces de Hilbert du type $\mathcal{X} := H_x^2 L_v^2(\omega)$, avec ω vérifiant (19). On pose aussi

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_0 &:= H_x^2 L_v^2, & \mathcal{X}_* &:= H_x^2(H_{v,*}^1(\omega)), \\ \mathcal{E}_1 &:= H_x^2 L_v^2(e^{\kappa\langle v \rangle^2}) & \text{avec } 1/4 < \kappa < 1/2, \end{aligned}$$

et on remarque que $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_0$, \mathcal{X}_* n'est pas contenu dans \mathcal{X} et $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$.

On décompose $\Lambda = A + B$ de sorte que les opérateurs A et B vérifient :

- (i) $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{X}_0, \mathcal{X}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_1)$;
- (ii) B est *faiblement dissipatif* dans \mathcal{X} , dans le sens

$$\langle Bh, h \rangle_{\mathcal{X}} \lesssim -\|h\|_{\mathcal{X}_*}^2; \quad (29)$$

- (iii) B est *0-dissipatif* dans \mathcal{E}_1 , dans le sens

$$\langle Bh, h \rangle_{\mathcal{E}_1} \leq 0; \quad (30)$$

- (iv) les opérateurs AS_B et $S_B A$ possèdent des propriétés de *régularisation* (voir (34)–(35) pour les détails).

Plus précisément, la décomposition utilisée est donnée par

$$Ah = Q(h, \mathcal{M}) + M\chi_R h, \quad Bh = Q(\mathcal{M}, h) - M\chi_R h - v \cdot \nabla_x h,$$

où $M, R > 0$ sont des constantes (choisies assez grandes) et χ_R est une fonction de troncature lisse donnée par $\chi_R(\cdot) = \chi(\cdot/R)$, avec $0 \leq \chi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^3)$, $\chi(v) = 1$ si $|v| \leq 1$ et $\chi(v) = 0$ si $|v| > 2$.

Il est important de remarquer qu'à partir des inégalités (28) (resp. (29)) on ne peut obtenir aucune estimation de décroissance pour le semi-groupe associé $S_\Lambda \Pi$ (resp. S_B). Ce cadre des opérateurs *faiblement dissipatifs* est plus difficile que celui des opérateurs dissipatifs, dans lequel on obtient des inégalités analogues avec $\mathcal{E}_* = \mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{X}_* = \mathcal{X}$), ce qui implique la stabilité exponentielle pour les semi-groupes associés.

4.2.3 Décroissance et régularisation pour S_B

Comme expliqué auparavant, l'estimation (29) seule n'implique aucune information sur la décroissance du semi-groupe S_B . Par contre, en utilisant (29) avec différents choix d'espace $\mathcal{X} = H_x^2 L_v^2(\omega)$ (c'est-à-dire avec plusieurs choix de poids ω), on peut obtenir par un argument d'interpolation (voir Proposition 3 dans Section 5) la stabilité (non uniforme, non exponentielle) du semi-groupe S_B . Plus précisément, on obtient d'abord

$$\|S_B(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}_0)} \lesssim \Theta(t) \quad \forall t \geq 0, \quad (31)$$

avec $\Theta = \Theta_{\mathcal{X}, \mathcal{X}_0} : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction décroissante (polynomiale ou sous-exponentielle) telle que $\Theta(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. On obtient aussi une estimation de régularisation

$$\|S_B(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}'_*, \mathcal{X}_0)} \lesssim \frac{\Theta^*(t)}{\min(1, \sqrt{t})}, \quad \forall t \geq 0, \quad (32)$$

pour une fonction décroissante polynomiale $\Theta^* = \Theta_{\mathcal{X}'_*, \mathcal{X}_0}^*$ et où $\mathcal{X}'_* := H_x^2(H_{v,*}^{-1}(\omega))$ est le dual de \mathcal{X}_* défini dans (27).

4.2.4 Extension

Nous utilisons ensuite un argument d'extension (voir Proposition 5 dans Section 5), pour en déduire que $S_\Lambda \Pi$ possède les mêmes propriétés de décroissance et régularisation que S_B .

Premièrement, on en déduit des estimations précédentes (28) et (30) avec l'argument d'interpolation (voir Proposition 3 dans Section 5) la stabilité de $S_\Lambda \Pi$ dans le « petit » espace \mathcal{E}_1 , plus précisément, pour une constante $\kappa > 0$, on a

$$\|S_\Lambda \Pi(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E})} \lesssim \exp\left(-\kappa t^{2/3}\right), \quad \forall t \geq 0. \quad (33)$$

Deuxièmement, en utilisant la décomposition $\Lambda = A + B$ et les propriétés de A et B présentés ci-dessus, on peut montrer que AS_B et S_BA possèdent les propriétés de régularisation correspondantes à **(iv)** : il existe $\ell, n \in \mathbf{N}^*$ tels que

$$\|(AS_B)^{*n}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{E}_1)} \lesssim \Theta(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (34)$$

et

$$\|(S_BA)^{*l}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{X}_0)} \lesssim \Theta(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (35)$$

où $\Theta \in L^1(\mathbf{R}^+)$ est donné par (31) et on note le produit de convolution des opérateurs par

$$\begin{aligned} S_1 * S_2(t) &= \int_0^t S_1(s)S_2(t-s) ds, \\ S^{*n} &= S * S^{*(n-1)} \quad \forall n \geq 1, \quad S^{*0} = \text{Id}. \end{aligned}$$

Finalement, avec les propriétés des opérateurs A et B décrites ci-dessus, on peut appliquer le résultat d'extension de la Proposition 5 pour en déduire que $S_\Lambda \Pi$ satisfait l'estimation de décroissance (31). Par une simple variante de la Proposition 5, on obtient aussi que $S_\Lambda \Pi$ vérifie l'estimation de régularisation (32).

4.2.5 Dissipativité faible pour Λ

Grâce aux estimations précédentes, on montre finalement (voir Proposition 4 dans la Section 5) que l'opérateur Λ est *faiblement dissipatif* dans \mathcal{X} , dans le sens

$$\forall h \in D(\Lambda), \quad \langle \Lambda h, h \rangle_{\mathcal{X}} \lesssim -\|\Pi h\|_{\mathcal{X}_*}^2 \quad (36)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ est le produit scalaire associé à une norme $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ qui est équivalente à la norme usuelle $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ sur $\Pi\mathcal{X}$. Cette norme est donné par

$$\forall h \in \Pi\mathcal{X}, \quad \|h\|_{\mathcal{X}}^2 := \eta \|h\|_{\mathcal{X}}^2 + \int_0^\infty \|S_\Lambda(\tau)h\|_{\mathcal{X}_0}^2 d\tau, \quad (37)$$

pou une constante $\eta > 0$ assez petite.

4.3 Stabilité non linéaire

Les estimations non linéaires pour l'opérateur de collision Q ont été obtenue dans [Guo02, CTW16] : d'abord sur les espaces $L_v^2(\omega)$ on a

$$\langle Q(h, h), h \rangle_{L_v^2(\omega)} \lesssim \|h\|_{L_v^2(\omega)} \|h\|_{H_{v,*}^1(\omega)},$$

et en intégrant ceci sur la variable d'espace $x \in \mathbf{T}^3$, on en déduit

$$\langle Q(h, h), h \rangle_{\mathcal{X}} \lesssim \|h\|_{\mathcal{X}} \|h\|_{\mathcal{X}_*}^2.$$

Avec les estimations sur Λ et ΠS_Λ présentées ci-dessus, on peut ainsi montrer des estimations similaires pour Q pour la nouvelle norme $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, ce qui nous donne

$$\langle Q(h, h), h \rangle_{\mathcal{X}} \lesssim \|h\|_{\mathcal{X}} \|h\|_{\mathcal{X}_*}^2. \quad (38)$$

On peut finalement établir l'estimation à priori clé pour obtenir les résultats du Théorème 1. En utilisant l'estimation de dissipativité faible (36) avec l'estimation non linéaire (38), la solution h de (15) vérifie, grâce aux lois de conservation (18),

$$\frac{d}{dt} \|\Pi h\|_{\mathcal{X}}^2 \leq -K \|\Pi h\|_{\mathcal{X}_*}^2 + C \|\Pi h\|_{\mathcal{X}_*}^2 \|\Pi h\|_{\mathcal{X}},$$

pour des constantes $K, C > 0$. L'existence et l'unicité sont une conséquence immédiate de cette dernière estimation. La convergence (21) s'obtient en utilisant cette dernière inégalité avec plusieurs choix d'espace \mathcal{X} (en faisant varier le poids ω) et en utilisant l'argument d'interpolation de la Section 4.2.3 (voir Proposition 3 dans la Section 5).

5 Opérateurs faiblement dissipatifs

Nous finissons cette note en présentant quelques résultats pour des opérateurs *faiblement dissipatifs* dans des espaces de Hilbert ainsi que leur semi-groupes associés, qui ont été utilisés dans la Section 4. Plus précisément, nous allons montrer dans cette section des liens entre le caractère faiblement dissipatif d'un opérateur et des estimations de décroissance de son semi-groupe ; et un résultat d'extension d'espace fonctionnel pour l'estimation de décroissance.

Ces résultats sont tirés de [CM17] et sont une généralisation, au cas des opérateurs ne possédant pas de trou spectral, de la méthode de factorisation développée dans [GMM17] pour des opérateurs possédant un trou spectral.

Soit \mathcal{X} un espace de Hilbert (réel) et $\Lambda : D(\Lambda) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ un opérateur linéaire. On rappelle que Λ est a -dissipatif¹, pour un $a \in \mathbf{R}$, si

$$\langle \Lambda f, f \rangle_{\mathcal{X}} \leq -a \|f\|_{\mathcal{X}}^2, \quad \forall f \in D(\Lambda),$$

et lorsque cette inégalité est vérifiée pour une autre norme (associée à un autre produit scalaire) équivalente à la norme usuelle de \mathcal{X} , on dit que Λ est a -hypo-dissipatif. On dit que Λ est *faiblement dissipatif* si

$$\langle \Lambda f, f \rangle_{\mathcal{X}} \leq -\lambda \|f\|_{\mathcal{X}_*}^2, \quad \forall f \in D(\Lambda),$$

pour un certain $\lambda > 0$ et un autre espace de Hilbert \mathcal{X}_* qui n'est pas inclus dans \mathcal{X} .

On considère pour la suite des espaces de Hilbert $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{X}_0$ et un opérateur linéaire $\Lambda : D(\Lambda) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ qui génère un semi-groupe d'opérateurs $S_\Lambda = (S_\Lambda(t))_{t \geq 0}$ dans \mathcal{X} .

Le premier résultat montre comment obtenir des estimation de décroissance pour le semi-groupe S_Λ à partir des estimations de dissipativité faible de Λ .

1. La notion de dissipativité peut être définie dans le cas plus général des opérateurs linéaires dans des espaces de Banach. Dans cette note on ne va considérer que le cadre hilbertien, et dans ce cas la dissipativité est aussi appelée coercivité.

Proposition 3. *Supposons que*

(a) S_Λ est uniformément borné sur \mathcal{X}_1 , c'est-à-dire que

$$\|S_\Lambda(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_1)} \lesssim 1, \quad \forall t \geq 0;$$

(b) Λ est faiblement dissipatif dans \mathcal{X} , dans le sens

$$\forall h \in D(\Lambda), \quad \langle \Lambda h, h \rangle_{\mathcal{X}} \lesssim -\|h\|_{\mathcal{X}_0}^2;$$

(c) les espaces $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{X}_0$ sont en interpolation dans le sens suivant : pour tout $R > 0$

$$\epsilon_R \|h\|_{\mathcal{X}}^2 \lesssim \|h\|_{\mathcal{X}_0}^2 + \theta_R \|h\|_{\mathcal{X}_1}^2$$

où ϵ_R, θ_R sont des fonctions vérifiant $\epsilon_R, \theta_R / \epsilon_R \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow \infty$.

Alors il existe une fonction $\Theta : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ décroissante et qui converge vers 0 à l'infini telle que

$$\|S_\Lambda(t)\|_{\mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}} \lesssim \Theta(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Donnons une idée de la démonstration, en se concentrant sur l'estimation de décroissance. Posons $h_t = S_\Lambda(t)h$. Grâce au point (b) on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h_t\|_{\mathcal{X}}^2 = \langle \Lambda h_t, h_t \rangle_{\mathcal{X}} \lesssim -\|h_t\|_{\mathcal{X}_0}^2.$$

En utilisant ensuite le point (c) et le fait que $\|h_t\|_{\mathcal{X}_1} \lesssim \|h_0\|_{\mathcal{X}_1}$ par (a), on en déduit

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h_t\|_{\mathcal{X}}^2 \lesssim -\epsilon_R \|h_t\|_{\mathcal{X}}^2 + \theta_R \|h_t\|_{\mathcal{X}_1}^2 \lesssim -\epsilon_R \|h_t\|_{\mathcal{X}}^2 + \theta_R \|h_0\|_{\mathcal{X}_1}^2.$$

Par le lemme de Grönwall on en conclut

$$\|h_t\|_{\mathcal{X}}^2 \lesssim e^{-\epsilon_R t} \|h_0\|_{\mathcal{X}}^2 + \frac{\theta_R}{\epsilon_R} \|h_0\|_{\mathcal{X}_1}^2 \lesssim \Theta^2(t) \|h_0\|_{\mathcal{X}_1}^2$$

avec

$$\Theta^2(t) = \inf_{R>0} \left(e^{-\epsilon_R t} + \frac{\theta_R}{\epsilon_R} \right),$$

ce qui donne le résultat recherché.

Notre deuxième résultat montre comment obtenir une estimation de dissipativité faible pour Λ à partir d'une estimation de décroissance pour le semi-groupe S_Λ .

Proposition 4. *Soient $\mathcal{X}, \mathcal{X}_* \subset \mathcal{X}_0$ des espaces de Hilbert tels que \mathcal{X}_* n'est pas inclus dans \mathcal{X} . Supposons que*

(a) S_Λ est stable sur \mathcal{X} dans le sens suivant

$$\|S_\Lambda(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}_0)} \lesssim \Theta(t), \quad \forall t \geq 0,$$

où $\Theta : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+ \in L^2(\mathbf{R}_+)$ est une fonction décroissante et qui converge vers 0 à l'infini.

(b) on a la factorisation $\Lambda = A + B$ avec $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ un opérateur borné vérifiant

$$\langle Ah, h \rangle_{\mathcal{X}} \lesssim \|h\|_{\mathcal{X}_0}^2,$$

et B un opérateur faiblement dissipatif dans \mathcal{X} dans le sens

$$\langle Bh, h \rangle_{\mathcal{X}} \lesssim -\|h\|_{\mathcal{X}_*}^2.$$

Alors Λ est faiblement dissipatif dans \mathcal{X} , plus précisément on a

$$\forall h \in D(\Lambda), \quad \langle \Lambda h, h \rangle_{\mathcal{X}} \lesssim -\|h\|_{\mathcal{X}_*}^2,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}$ est le produit de dualité associé à la norme

$$\|h\|_{\mathcal{X}}^2 := \eta \|h\|_{\mathcal{X}}^2 + \int_0^\infty \|S_\Lambda(\tau)h\|_{\mathcal{X}_0}^2 d\tau,$$

avec $\eta > 0$ assez petit, qui est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$.

Ce résultat se repose sur le calcul suivant. Posons $h_t = S_\Lambda(t)h$, alors on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h_t\|_{\mathcal{X}}^2 &= \langle \Lambda h_t, h_t \rangle_{\mathcal{X}} \\ &= \eta \langle Bh_t, h_t \rangle_{\mathcal{X}} + \eta \langle Ah_t, h_t \rangle_{\mathcal{X}} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d}{d\tau} \|S_\Lambda(\tau)h_t\|_{\mathcal{X}_0}^2 d\tau \\ &= \eta \langle Bh_t, h_t \rangle_{\mathcal{X}} + \eta \langle Ah_t, h_t \rangle_{\mathcal{X}} + \frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|S_\Lambda(\tau)h_t\|_{\mathcal{X}_0}^2 - \frac{1}{2} \|h_t\|_{\mathcal{X}_0}^2 \\ &\leq -\eta K \|h_t\|_{\mathcal{X}_*}^2 + \left(\eta C - \frac{1}{2} \right) \|h_t\|_{\mathcal{X}_0}^2, \end{aligned}$$

où $K, C > 0$ sont des constantes associées aux hypothèses ci-dessus et on a utilisé le point (a) pour avoir $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|S_\Lambda(\tau)h_t\|_{\mathcal{X}_0} = 0$. On conclut en choisissant $\eta > 0$ assez petit.

Finalement, la dernière proposition est un résultat d'extension.

Proposition 5. Soit $\Theta : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction décroissante qui converge vers 0 à l'infini, et supposons que $\Theta^{-1}(t) \lesssim \Theta^{-1}(t-s)\Theta^{-1}(s)$ pour tout $0 < s < t$. On considère des espaces de Hilbert $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_0$ et on suppose que

(a) S_Λ est stable dans \mathcal{E}_1 dans le sens

$$\|S_\Lambda(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E})} \lesssim \Theta(t), \quad \forall t \geq 0;$$

(b) on a la factorisation $\Lambda = A + B$ avec

(i) $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ est borné;

(ii) S_B est stable dans \mathcal{X} dans le sens suivant

$$\|S_B(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}_0)} \lesssim \Theta(t), \quad \forall t \geq 0;$$

(iii) pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, AS_B vérifie

$$t \mapsto \|(AS_B)^{*j}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})} \Theta^{-1}(t) \in L^1(\mathbf{R}^+);$$

(iv) AS_B et $S_B A$ sont régularisants dans le sens suivant : il existe $n, \ell \in \mathbf{N}^*$ tels que

$$t \mapsto \|(AS_B)^{*n}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{E}_1)} \Theta^{-1}(t) \in L^1(\mathbf{R}^+);$$

et

$$t \mapsto \|(S_B A)^{*l}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{X}_0)} \Theta^{-1}(t) \in L^1(\mathbf{R}^+).$$

Alors S_Λ est stable dans \mathcal{X} dans le sens suivant

$$\|S_\Lambda(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}_0)} \lesssim \Theta(t), \quad \forall t \geq 0.$$

En écrivant la décomposition $\Lambda = A + B$ et en utilisant la formule de Duhamel on a d'abord

$$S_\Lambda = S_B + S_\Lambda * AS_B \quad \text{et} \quad S_\Lambda = S_B + S_B A * S_\Lambda.$$

Ensuite on itère ces formules pour obtenir la série tronquée (dite de Dyson-Phillips)

$$S_\Lambda = \sum_{0 \leq j \leq n+\ell-1} S_B * (AS_B)^{*j} + (S_B A)^{*l} * S_\Lambda * (AS_B)^{*n}$$

d'où on déduit

$$\begin{aligned} & \|S_\Lambda(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}_0)} \Theta^{-1}(t) \\ & \leq \sum_{0 \leq j \leq n+\ell-1} \{ \|S_B(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}_0)} \Theta^{-1}(t) \} * \{ \|(AS_B)^{*j}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})} \Theta^{-1}(t) \} \\ & \quad + \{ \|(S_B A)^{*l}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{X}_0)} \Theta^{-1}(t) \} * \{ \|S_\Lambda(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E})} \Theta^{-1}(t) \} \\ & \quad \quad * \{ \|(AS_B)^{*n}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{E}_1)} \Theta^{-1}(t) \}. \end{aligned}$$

Le résultat est une conséquence de cette inégalité et des hypothèses de la proposition.

Références

- [BM05] C. Baranger and C. Mouhot. Explicit spectral gap estimates for the linearized Boltzmann and Landau operators with hard potentials. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 21(3) :819–841, 2005.
- [CDH17] K. Carrapatoso, L. Desvillettes, and L. He. Estimates for the large time behavior of the Landau equation in the Coulomb case. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 224(2) :381–420, 2017.

- [CM17] K. Carrapatoso and S. Mischler. Landau equation for very soft and Coulomb potentials near Maxwellians. *Ann. PDE*, 3(1) :Art. 1, 65 pp, 2017.
- [CTW16] K. Carrapatoso, I. Tristani, and K.-C. Wu. Cauchy problem and exponential stability for the inhomogeneous Landau equation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 221(1) :363–418, 2016.
- [Des15] L. Desvillettes. Entropy dissipation estimates for the Landau equation in the Coulomb case and applications. *J. Funct. Anal.*, 269(5) :1359–1403, 2015.
- [DL89] R. J. DiPerna and P.-L. Lions. On the Cauchy problem for Boltzmann equations : global existence and weak stability. *Ann. of Math. (2)*, 130(2) :321–366, 1989.
- [DL97] P. Degond and M. Lemou. Dispersion relations for the linearized Fokker-Planck equation. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 138 :137–167, 1997.
- [DV05] L. Desvillettes and C. Villani. On the trend to global equilibrium for spatially inhomogeneous kinetic systems : the Boltzmann equation. *Invent. Math.*, 159(2) :245–316, 2005.
- [GMM17] M. Gualdani, S. Mischler, and C. Mouhot. Factorization for non-symmetric operators and exponential H-Theorem. *Mémoires de la SMF*, 153 :137 pp, 2017.
- [Guo02] Y. Guo. The Landau equation in a periodic box. *Comm. Math. Phys.*, 231 :391–434, 2002.
- [MN06] C. Mouhot and L. Neumann. Quantitative perturbative study of convergence to equilibrium for collisional kinetic models in the torus. *Nonlinearity*, 19(4) :969–998, 2006.
- [Mou06a] C. Mouhot. Explicit coercivity estimates for the linearized Boltzmann and Landau operators. *Comm. Part. Diff Equations*, 261 :1321–1348, 2006.
- [Mou06b] C. Mouhot. Rate of convergence to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation with hard potentials. *Comm. Math. Phys.*, 261 :629–672, 2006.
- [MS07] C. Mouhot and R. Strain. Spectral gap and coercivity estimates for the linearized Boltzmann collision operator without angular cutoff. *J. Math. Pures Appl.*, 87 :515–535, 2007.
- [SG06] R. M. Strain and Y. Guo. Almost exponential decay near Maxwellian. *Comm. Partial Differential Equations*, 31(1-3) :417–429, 2006.
- [SG08] R. M. Strain and Y. Guo. Exponential decay for soft potentials near Maxwellian. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 187(2) :287–339, 2008.
- [Vil96] C. Villani. On the Cauchy problem for Landau equation : sequential stability, global existence. *Adv. Differential Equations*, 1(5) :793–816, 1996.