

Institut Fourier — Université de Grenoble I

*Actes du séminaire de*  
**Théorie spectrale  
et géométrie**

Nicolas BEDARIDE

**Combinatoire du billard dans un polyèdre**

Volume 25 (2006-2007), p. 1-15.

[<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG\\_2006-2007\\_\\_25\\_\\_1\\_0>](http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2006-2007__25__1_0)

© Institut Fourier, 2006-2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

**cedram**

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

# COMBINATOIRE DU BILLARD DANS UN POLYÈDRE

Nicolas Bedaride

RÉSUMÉ. — Ces notes ont pour but de rassembler les différents résultats de combinatoire des mots relatifs au billard polygonal et polyédral. On commence par rappeler quelques notions de combinatoire, puis on définit le billard, les notions utiles en dynamique et le codage de l'application. On énonce alors les résultats connus en dimension deux puis trois.

## 1. Combinatoire des mots

On rappelle ici les notions de base de combinatoire des mot, nous renvoyons à [12] pour de plus amples détails. Nous allons donner une définition de langage sachant que dans ce contexte un langage est un langage factoriel prolongeable.

Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble fini appelé l'*alphabet*. Un **mot** est une chaîne finie d'éléments de  $\mathcal{A}$ . Le mot vide est noté  $\varepsilon$ . La longueur d'un mot est le nombre d'éléments qui le composent, le mot vide est de longueur nulle par hypothèse. La **concaténation** de deux mots  $v = v_1 \dots v_r$  et  $w = w_1 \dots w_l$  est le mot noté  $vw$  défini par  $v_1 \dots v_r w_1 \dots w_l$ . L'ensemble des mots muni de la concaténation forme un monoïde libre. Un **mot infini** est alors une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\mathcal{A}$ . Soit  $u$  un mot fini ou infini, on dit que  $v = v_1 \dots v_r$  est un **facteur** de  $u$  s'il existe  $n$  tel que

$$u_n = v_1 \dots u_{n+r-1} = v_r.$$

Un **langage**  $\mathcal{L}$  sur  $\mathcal{A}$  est une collection d'ensembles  $\mathcal{L}_n$ , avec  $\mathcal{L}_0 = \varepsilon$ , où les éléments de  $\mathcal{L}_n$  sont des mots finis de longueurs  $n$  tels que pour tout  $v \in \mathcal{L}_n$  il existe  $a, b \in \mathcal{A}$  avec  $av, vb \in \mathcal{L}_{n+1}$ , et tel que pour tout  $v \in \mathcal{L}_{n+1}$  si  $v = au = u'b$  avec  $a, b \in \mathcal{A}$  alors  $u, u' \in \mathcal{L}_n$ .

DÉFINITION 1.1. — Soit  $\mathcal{L}$  un langage, on appelle complexité de  $\mathcal{L}$  la fonction suivante :

$$p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$p(n) = \text{card}(\mathcal{L}_n).$$

DÉFINITION 1.2. — Si  $v$  est un mot infini défini sur un alphabet fini, alors l'union de ses facteurs forme un langage. La complexité de  $v$  est par définition la complexité de ce langage. On la note  $p(n, v)$ .

Supposons que l'on cherche la complexité d'un langage  $\mathcal{L}$ , les notions suivantes sont alors utiles :

DÉFINITION 1.3. — Pour tout  $n \geq 1$  on définit  $s(n) := p(n+1) - p(n)$ . Pour  $v \in \mathcal{L}(n)$  on définit les trois nombres suivants

$$m_l(v) = \text{card}\{a \in \mathcal{A}, va \in \mathcal{L}(n+1)\},$$

$$m_r(v) = \text{card}\{b \in \mathcal{A}, bv \in \mathcal{L}(n+1)\},$$

$$m_b(v) = \text{card}\{a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{A}, bva \in \mathcal{L}(n+2)\}.$$

Un mot est alors dit spécial à droite si  $m_r(v) \geq 2$ , spécial à gauche si  $m_l(v) \geq 2$  et bispécial s'il est spécial à gauche et à droite. Soit  $\mathcal{BL}(n)$  l'ensemble des mots bispéciaux de longueur  $n$ .

Cassaigne [9] a alors prouvé le résultat suivant, dont on peut trouver une autre preuve dans [10] :

LEMME 1.4. — Soit  $\mathcal{L}$  un langage et  $p$  sa complexité, alors pour tout entier  $n$  on a

$$s(n+1) - s(n) = \sum_{v \in \mathcal{BL}(n)} [m_b(v) - m_r(v) - m_l(v) + 1].$$

Remarquons au passage que  $s(n)$  vérifie les deux formules suivantes

$$s(n) = \sum_{v \in \mathcal{L}(n)} (m_r(v) - 1) = \sum_{v \in \mathcal{L}(n)} (m_l(v) - 1).$$

## 1.1. Exemples

Nous allons donner deux exemples qui illustrent le calcul de la complexité d'un mot infini.

- Le premier exemple est celui du mot

$$v = abaaabbabbaaaaaab \dots$$

obtenu de la façon suivante : vous considérez tous les mots de longueur un sur l'alphabet à deux lettres et vous les rangez dans l'ordre lexicographique, vous écrivez alors tous les mots de longueur deux de la même façon, puis ceux de longueur trois, *et caetera*.

On voit alors que tous les mots possibles de longueur  $n$  sont représentés dans ce mot, on en déduit donc que pour tout entier  $n$

$$p(n, v) = 2^n.$$

- Le deuxième exemple est directement lié au sujet qui nous concerne. Considérons les mots sur l'alphabet à deux lettres  $a, b$  muni de la concaténation. Appelons alors  $\sigma$  le morphisme de monoïde défini par l'image des générateurs :  $\sigma(a) = ab; \sigma(b) = a$ . Considérons alors la suite  $(\sigma^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ . Si on munit l'ensemble  $\{a; b\}$  de la topologie grossière et le monoïde de la topologie produit, on s'aperçoit alors que cette suite converge. Appelons  $v = \lim_{+\infty} \sigma^n(a)$  sa limite.

$$v = abaababaabaababa \dots$$

Intéressons nous alors aux mots spéciaux à droite de  $v$ . On s'aperçoit qu'il n'y a qu'un mot spécial à droite de longueur un c'est  $a$ ; de même il n'y a qu'un mot spécial de longueur deux c'est  $ba$ . On peut alors montrer que ce résultat est vrai pour tout entier  $n$ , par récurrence sur  $n$ . Ainsi on en déduit  $\sum_{v \in \mathcal{L}(n)} m_r(v) = 1$ , d'ou  $s(n) = 1$  et  $p(n) = n + 1$  pour tout entier, vu que  $p(1) = 2$ .

## 2. Billard

### 2.1. Définitions

Dans cette partie nous donnons les premières définitions du billard dans un polyèdre  $P$  de  $\mathbb{R}^3$ , le lecteur pourra facilement en déduire celle valable en dimension  $d$  quelconque. Une bille de billard, c.a.d un point masse se déplace dans  $P$  suivant une ligne droite jusqu'à rencontrer le bord de  $P$ . Il y a alors un changement de direction, avec réflexion orthogonale par rapport à la face de  $P$  et le point repart suivant la nouvelle droite.

De manière plus précise l'application  $T$  du billard est définie sur un sous ensemble  $X$  de  $\partial P \times \mathbb{P}\mathbb{R}^3$  par la façon suivante :

Tout d'abord on définit un ensemble  $X' \subset \partial P \times \mathbb{P}\mathbb{R}^3$ . Le point  $(m, \omega)$  appartient à  $X'$  si et seulement si une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(1) La droite  $m + \mathbb{R}^*[\omega]$  intersecte une arête de  $P$ , où  $[\omega]$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  qui représente  $\omega$ .

(2) La droite  $m + \mathbb{R}[\omega]$  est incluse dans une face de  $P$  qui contient  $m$ .

On définit alors  $X$  comme l'ensemble  $X = (\partial P \times \mathbb{P}\mathbb{R}^3) \setminus X'$ .

On peut maintenant définir  $T$  : Considérons  $(m, \omega) \in X$ , alors on pose  $T(m, \omega) = (m', \omega')$  si et seulement si  $mm'$  est colinéaire à  $[\omega]$ , et  $[\omega'] = s[\omega]$ , où  $s$  est la réflexion orthogonale par rapport à la face de  $P$  qui contient  $m'$ .

$$T : X \rightarrow \partial P \times \mathbb{P}\mathbb{R}^3$$

$$T : (m, \omega) \mapsto (m', \omega')$$

*Remarque 2.1.* — Dans la suite on identifiera  $\mathbb{P}\mathbb{R}^3$  avec les vecteurs unitaires de  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.2. Dépliage

Le *dépliage* est un outil très simple, mais très utile dans l'étude du billard. Considérons une trajectoire de billard dans un polyèdre  $P$ . Pour dessiner l'orbite on doit réfléchir la droite à chaque fois que la trajectoire intersecte une face du polyèdre. Le dépliage consiste à effectuer la réflexion du polyèdre par rapport à la face et de poursuivre la droite. Voici un exemple de dépliage dans le cadre du cube : (pour simplifier les dessins se font pour le carré).

*Exemple 2.2.* — L'orbite de billard de  $(m, \omega)$  apparaît comme la suite des intersections de la droite  $m + \mathbb{R}\omega$  avec le réseau  $\mathbb{Z}^3$ , voir Figure 2.1. Dans le dessin de gauche on représente l'orbite de billard en pointillé. Cette trajectoire est dépliée en la droite intersectant le réseau.

Sur la figure de droite, on voit que l'orbite de billard peut s'étudier sur le grand carré où l'on identifie les côtés opposés. On obtient alors un tore, et l'application obtenue est une translation sur ce tore :

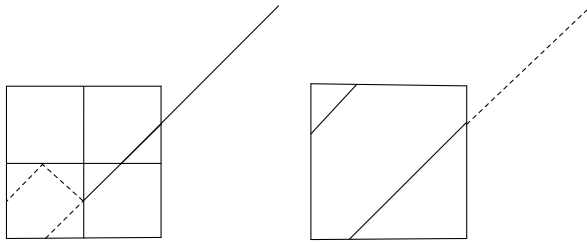


FIG. 2.1. Dépliage.

DÉFINITION 2.3. — Pour  $\omega \in \mathbb{R}^3$ , une translation  $T_\omega$  sur le tore est une application définie par :

$$\mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$$

$$T_\omega : (x, y, z) \mapsto (x + \omega_1, y + \omega_2, z + \omega_3).$$

La figure 2.1 fournit une preuve au résultat suivant

LEMME 2.4. — Soit  $\omega \in \mathbb{R}^3$ , et soit  $T$  l'application du billard dans le cube.

Alors il est équivalent d'étudier l'orbite  $(T^n(m, \omega))_n$  ou  $(T_\omega^n(m))_n$ . Elles ont les mêmes propriétés dynamiques.

### 3. Dynamique

#### 3.1. Définitions

L'ensemble des points  $(m, \omega)$  tel que pour tout entier  $n$ ,  $T^n(m, \omega) \in X$  est noté  $X_\infty$ . Cet ensemble est de mesure pleine dans  $X$ , suite aux travaux de [13].

DÉFINITION 3.1. — On note  $\pi_1$  la projection de  $X$  sur  $\partial P$  qui à un point associe sa première coordonnée. Une direction  $\omega \in \mathbb{P}\mathbb{R}^3$  est dite minimale si pour tout point  $m$  tel que  $(m, \omega) \in X_\infty$ , la suite  $\pi_1(T^n(m, \omega))_{n \in \mathbb{N}}$  est dense dans  $\partial P$ .

Grace au procédé de dépliage on peut alors caractériser les directions minimales du billard cubique :

LEMME 3.2. — Avec les notations usuelles on a :

- Soit  $\omega = (a, b)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ . Considérons l'application du billard dans le carré. Alors on a :
  - La direction  $\omega$  est minimale si et seulement si  $a, b$  sont rationnellement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ .
  - Si la direction  $\omega$  n'est pas minimale alors pour tout point  $(m, \omega) \in X_\infty$ , l'orbite de billard est périodique.
- Dans le cas du cube de  $\mathbb{R}^d$  la direction  $\omega$  est minimale si et seulement si les nombres  $\omega_i, i = 1 \dots d$  sont indépendants sur  $\mathbb{Q}$ .

La preuve de ce lemme est basée sur le lemme de Kronecker, voir [16]. Il faut noter que la dichotomie trajectoire périodique ou minimale n'est vraie qu'en dimension deux.

Pour un polygone quelconque on ne sait pas caractériser les directions minimales. On connaît une condition suffisante pour une famille de polygones : **les polygones rationnels**.

**DÉFINITION 3.3.** — *Un polygone est dit rationnel si tous ses angles sont des multiples rationnels de  $\pi$ . De plus on dit qu'une direction est une direction diagonale s'il existe une trajectoire de billard partant d'un sommet dans cette direction et atteignant un autre sommet du polygone.*

On peut alors énoncer la condition suffisante de minimalité :

**THÉORÈME 3.4.** — *Dans un polygone rationnel si une direction n'est pas diagonale alors cette direction est minimale.*

Pour un polygone irrationnel ou pour un polyèdre quelconque, on ne connaît pas de condition semblable.

### 3.2. Billard et isométrie par morceaux

Dans cette partie nous montrons un lien entre ces deux objets, lien qui permettra de réduire un problème de billard au même problème sur les isométries par morceaux. On rappelle qu'une isométrie par morceaux du plan est une application bijective définie sur une union de polygones (ou bien des ensembles non bornés dont le bord est une ligne brisée), telles que restreinte à chaque morceau elle soit une isométrie. Voici un exemples classique d'isométries par morceaux en dimension un : les échanges d'intervalles. Il a été étudié par de nombreux auteurs [22] [11].

*Exemple 3.5.* — Soit  $s$  un entier supérieur ou égal à deux,  $\sigma$  une permutation de  $\{1..s\}$  et  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$  un élément de  $\mathbb{R}^s$  à coordonnées

strictement positives telles que  $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$ . Posons  $\delta_0 = 0$  et pour tout  $k$  appartenant à  $[1 \dots s]$  posons  $\delta_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i$  et  $I_k = [\delta_{k-1}; \delta_k[$ . Un **échange d'intervalles**  $E$  est alors la bijection de  $[0; 1[$  sur lui même qui à  $x$  dans  $I_k$  associe le point  $E(x) = x + \alpha_k$  ou

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{\sigma(k)-1} \lambda_{\sigma^{-1}(i)} - \sum_1^{k-1} \lambda_i.$$

Ainsi un échange de deux intervalles est isomorphe à une rotation d'angle  $\lambda_1$  sur le tore  $\mathbb{T}^1$ . Une rotation du tore  $\mathbb{T}^2$  est un exemple d'isométrie en dimension deux, via la partition suivante :

*Exemple 3.6.* — La rotation d'angle  $(\alpha, \beta)$  est définie de la façon suivante : On considère le réseau  $\Lambda$  engendré par les deux vecteurs  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta + 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha + 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha + 1 \\ \beta + 1 \end{pmatrix}$ . Un domaine fondamental du tore  $\mathbb{R}^2/\Lambda$  est l'hexagone de sommets

$$(0, 0); (1, 0); (0, 1); (\alpha + 1, \beta), (\alpha, \beta + 1).$$

Cet hexagone est alors partitionné en trois parallélogrammes en reliant trois sommets au point  $(\alpha, \beta)$  et au point  $(1, 1)$ , voir figure. La rotation consiste alors à translater les points du vecteur  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ .

$$(x, y) \longrightarrow (x + \alpha, y + \beta)$$

Pour d'autres exemples en dimension deux nous renvoyons le lecteur à [14].

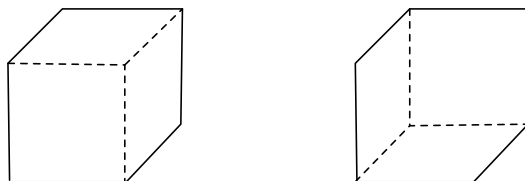


FIG. 3.1. Rotation du tore



Le but est d'étudier l'application de premier retour du flot du billard sur une partie transverse donnée. Pour ce faire il faut que le polyèdre vérifie certaines propriétés qui vont généraliser la notion de polygone rationnel.

Soit  $P$  un polyèdre, supposons qu'il a  $N$  faces et appelons  $s_i, i = 1 \dots N$  les réflexions orthogonales par rapport à ces faces. Considérons le groupe  $G$  engendré par ces réflexions. On dit alors que le polyèdre est rationnel si ce groupe est fini. Remarquons que ce groupe est un sous groupe du groupe orthogonal linéaire, et que c'est un groupe de Weyl. Dans le cadre des polygones cette définition coïncide avec celle donnée. De plus lorsque une trajectoire de billard effectue plusieurs rebonds, la direction initiale est changée suivant l'action de ce groupe  $G$ , voir la figure 2.1.

On a alors le résultat suivant

**PROPOSITION 3.7.** — *Soit  $P$  un polyèdre rationnel et  $\omega$  une direction. Soit  $I$  un plan transverse à  $\omega$ , alors l'application de premier retour du flot de billard sur  $I \times \omega$  est une isométrie par morceaux  $T_\omega$ .*

Remarquons que dans le cas d'un polygone rationnel (avec  $I$  un intervalle), l'application  $T_\omega$  coïncide avec un échange d'intervalles. Ainsi pour montrer qu'une direction est minimale il suffit de montrer que l'échange d'intervalles est minimal, *i.e* tout point est d'orbite dense. Si le polygone n'est plus rationnel, alors l'échange d'intervalles dégénère en un échange avec un nombre infini d'intervalles.

## 4. Codage

Supposons que le polyèdre possède  $N$  faces. On associe à chaque face du polyèdre  $P$  une lettre de l'alphabet  $\{1 \dots N\}$ . Soit  $d = \{d_1 \dots d_N\}$  le recouvrement de  $X_\infty$  associé au codage. Dénotons par  $\phi$  l'application suivante :

$$\begin{aligned} \phi : X_\infty &\rightarrow \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}, \\ \phi(p) &= (v_n)_{\mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

où  $v_n$  est définie par  $T^n(p) \in d_{v_n}$ . Soit  $S$  le shift sur l'espace  $\{1 \dots N\}^{\mathbb{Z}}$ . On a alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X_\infty & \xrightarrow{T} & X_\infty \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \phi(X_\infty) & \xrightarrow{S} & \phi(X_\infty) \end{array}$$

avec l'équation  $\phi \circ T = S \circ \phi$ .

DÉFINITION 4.1. — Soit  $P$  un polyèdre, considérons la partition  $d$  précédente. On appelle alors **complexité globale** le nombre de cellules du raffinement de  $d$  à l'étape  $n$  :

$$p(n) = \text{card} \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}d.$$

De manière équivalente  $p(n)$  compte le nombre de mots différents de longueur  $n$  obtenus comme mot de billard à partir de n'importe quel point et n'importe quelle direction.

DÉFINITION 4.2. — Considérons le billard dans un polyèdre. Le mot infini associé au point  $(m, \omega)$  de  $X_\infty$  est noté  $v_{m, \omega}$ .

DÉFINITION 4.3. — Considérons le billard dans un polyèdre, et un point  $(m, \omega) \in X_\infty$ . On note  $p(n, m, \omega)$  la complexité du mot  $v_{m, \omega}$  (voir Définition 1.2). On l'appelle **complexité directionnelle**.

On l'appelle ainsi à cause du résultat suivant.

LEMME 4.4. — Si  $P$  est un polygone rationnel et  $\omega$  une direction minimale alors le nombre  $p(n, m, \omega)$  est indépendant de  $m$ . On la notera donc  $p(n, \omega)$  dans ce cadre là.

Tout calcul de complexité directionnelle se fait grâce à ce lemme. Il suffit ainsi d'étudier tous les mots de longueur  $n$  obtenus comme début de trajectoire de billard.

#### 4.1. Remarque importante

Le carré (ou le cube de dimension quelconque) est généralement codé via un codage simplifié consistant à donner la même lettre aux faces parallèles. L'utilité d'un tel codage viendra avec le théorème suivant.

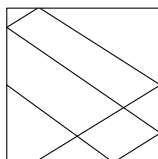


FIG. 4.1. Codage du carré

Supposons que l'on code le carré avec la lettre  $a$  pour l'horizontale et la lettre  $b$  pour la verticale, alors dans cette figure le mot associé est codé par  $ababbab$  (on commence par le point le plus à gauche sur le côté horizontal).

Par exemple dans le billard carré codé par deux lettres, les mots de longueur quatre sont au nombre de quatorze. Les sept mots commençant par  $a$  sont

$$\{aaaa, aaab, aaba, abaaa, abab, abba, abbb\}.$$

## 5. Résultats en dimension deux

Nous présentons dans cette section les différents résultats connus en dimension deux.

Le premier résultat est du à Morse-Hedlund, [21]. Il est en deux parties : la première donne un résultat général sur les valeurs possibles d'une fonction de complexité et la deuxième relie la valeur minimale d'une fonction de complexité au billard carré :

**THÉORÈME 5.1.** — *Avec les notations usuelles*

- *Soit  $v$  un mot infini sur un alphabet fini. S'il existe un entier  $n_0$  tel que  $p(n_0, v) \leq n_0$  alors le mot  $v$  est ultimement périodique.*
- *Si  $v$  est un mot infini de complexité  $p(n, v) = n + 1$  pour tout entier  $n$ , alors il existe  $m$  point du carré et  $\omega$  direction minimale tels que si l'on code le billard carré par deux lettres, alors on a  $p(n, m, \omega) = n + 1$  pour tout entier  $n$ . Inversement pour toute direction minimale la complexité directionnelle du billard carré est égale à  $n + 1$ .*

On remarque alors que le deuxième mot de l'exemple 1.1 correspond à un mot de billard carré de pente le nombre d'or.

Le résultat suivant de Katok, [18] donne une première estimation de la complexité

**THÉORÈME 5.2.** — *Soit  $P$  un polygone, alors on a*

$$\lim_{+\infty} \frac{\log p(n)}{n} = 0.$$

Ce théorème n'a pas de preuve combinatoire, et utilise des arguments de théorie ergodique. Ainsi le premier mot de l'exemple 1.1 ne peut être un mot de billard.

**THÉORÈME 5.3.** — *Soit  $P$  un polygone rationnel, alors il existe  $a, b > 0$  tels que pour toute direction minimale  $\omega$  il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout entier  $n \geq n_0$  on ait  $p(n, \omega) = an + b$ .*

Ce résultat de Hubert [17] généralise le théorème de Morse-Hedlund à tout polygone rationnel, et montre que la complexité directionnelle est linéaire à partir d'un certain rang. Ces deux résultats sont les seuls connus sur la complexité directionnelle.

En ce qui concerne la complexité globale, on connaît sa valeur dans le cas du carré. De nombreux auteurs ont d'ailleurs obtenus une preuve de ce résultat, citons [7] [20] ou [23] et [19].

**THÉORÈME 5.4.** — *On suppose que le carré est codé par deux lettres, alors on a*

$$p(n) = 1 + \sum_{i=1}^n (n+1-i)\phi(i),$$

où  $\phi$  représente la fonction indicatrice d'Euler.

Pour un autre polygone le résultat suivant est le meilleur connu actuellement. Il est dû à Cassaigne-Hubert-Troubetzkoy [10].

**THÉORÈME 5.5.** — *Si  $P$  est un polygone rationnel convexe, alors il existe deux constantes  $a, b > 0$  tels que pour tout entier  $n$  :*

$$a \leq \frac{p(n)}{n^3} \leq b.$$

Ils obtiennent en fait un résultat valable pour n'importe quel polygone. On appelle **diagonale généralisée** une trajectoire de billard reliant deux sommets. Remarquons qu'une telle trajectoire a une direction diagonale en vertu de la définition 3.3. On dit qu'elle est de longueur  $n$  si le mot associé est de longueur  $n$ .

**THÉORÈME 5.6.** — *Soit  $P$  un polygone convexe, notons par  $N(n)$  le nombre de diagonales généralisées de longueur  $n$ . On a alors pour tout entier  $n$  non nul*

$$s(n+1) - s(n) = N(n-1).$$

Ainsi l'estimation de  $N(n)$  donne la complexité dans n'importe quel polygone. Le problème est que l'on ne sait estimer cette quantité que dans le cadre des polygones rationnels via la théorie de Teichmüller. Dans le cas du carré une étude directe montre que  $N(n) = \phi(n)$ , on retrouve ainsi la formule de Mignosi.

Remarquons que le théorème est encore vrai sans l'hypothèse de convexité, voir [3]. Dans le cas d'un polygone irrationnel on ne connaît pas de majoration de la complexité. On sait juste qu'elle est minorée par  $n^2$ , voir [24].

THÉORÈME 5.7. — Soit  $P$  un polygone du plan, alors il existe  $c > 0$  tel que pour tout entier  $n$  :

$$p(n) \geq cn^2.$$

## 6. Dimension trois

Dans le cadre du cube on peut calculer la complexité directionnelle pour toute direction. La valeur maximale de cette fonction est alors quadratique en  $n$ , voir [4]. Signalons que la dernière partie du théorème avait d'abord été démontrée par Arnoux-Mauduit-Shiokawa-Tamura dans [1] mais leur preuve comportait une erreur.

THÉORÈME 6.1. — Considérons un cube de  $\mathbb{R}^3$  et  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une direction telle que  $\omega_i \neq 0$  pour tout  $i$ . Notons  $\alpha, \beta$  les deux nombres suivants  $\alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \beta = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ . Alors on a

- (1) Si  $\alpha, \beta$  sont des nombres rationnels, alors il existe  $C > 0, n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout point  $m, p(n, m, \omega) = C$  pour tout entier  $n \geq n_0$ .
- (2) Si  $\alpha$  est irrationnel, et que  $\beta$  est rationnel, alors il existe  $C$  tel que pour tout point  $m, n + 1 \leq p(n, m, \omega) \leq Cn$ .
- (3) Si  $\alpha, \beta$  sont irrationnels et que les nombres  $1, \alpha, \beta$  sont indépendants sur  $\mathbb{Q}$ , alors il existe  $C$  tel que pour tout  $m, n + 1 \leq p(n, m, \omega) \leq Cn$  pour tout entier  $n$ .
- (4) Si  $\alpha, \beta, 1$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ , mais que  $\alpha^{-1}, \beta^{-1}, 1$  sont liés sur  $\mathbb{Q}$ , alors il existe  $C \in ]0; 1[$  tel que  $p(n, \omega) \sim Cn^2$ .
- (5)  $p(n, \omega) = n^2 + n + 1$  dans tous les autres cas.

Le cas de la dimension quelconque a été traité par Baryshnikov dans [2] Ce théorème donne la valeur maximale de la complexité directionnelle : C'est un polynôme en  $n$  de degré  $d$ , ou la dimension de l'espace vaut  $d + 1$ .

THÉORÈME 6.2. — On se place dans  $\mathbb{R}^{d+1}$  et on considère une direction  $\omega$  vérifiant :

- Les nombres  $\omega_i, i = 1 \dots d + 1$  sont indépendant sur  $\mathbb{Q}$ .
- Les nombres  $\omega_i^{-1}, i = 1 \dots d + 1$  sont indépendant sur  $\mathbb{Q}$ .

Alors on a

$$p(n, \omega) = \sum_{i=0}^{\min(n,d)} \frac{n!d!}{(n-i)!(d-i)!i!} \quad \forall n, d \in \mathbb{N}.$$

Signalons que cette formule avait été conjecturée par Tamura, et remarquons que la formule est symétrique en  $n$  et  $d$ . De plus si l'on arrive à démontrer la symétrie de manière indépendante, on peut retrouver la formule. Ainsi la preuve de la symétrie est une question importante.

En ce qui concerne la complexité globale il n'y a que deux résultats connus. Le premier généralise le théorème de Katok, et le deuxième traite le cas du cube, voir respectivement les articles [5] et [6].

THÉORÈME 6.3. — *Dans tout polyèdre convexe de  $\mathbb{R}^3$  on a*

$$\lim_{+\infty} \frac{\log p(n)}{n} = 0.$$

THÉORÈME 6.4. — *Pour le cube de  $\mathbb{R}^{d+1}$  codé par  $d+1$  lettres il existe deux nombres  $a, b > 0$  tels que pour tout entier  $n$  on ait :*

$$a \leq \frac{p(n)}{n^{3d}} \leq b.$$

Signalons pour finir ce paragraphe deux résultats liés au billard : Le premier, dû à Gutkin-Haydn [15], estime la complexité d'un échange de polygones, et permet de donner une estimation de la complexité directionnelle dans un polyèdre rationnel. Le deuxième, dû à Buzzi [8] est une généralisation du premier résultat, et montre que toute isométrie par morceaux de  $\mathbb{R}^d$  est d'entropie nulle.

THÉORÈME 6.5. — *On considère un échange de polygones défini sur un ensemble compact en dimension deux. Alors cette application est d'entropie topologique nulle, (c.a.d que la complexité est sous exponentielle).*

On peut alors déduire de ce résultat et de la Proposition 3.7 que la complexité directionnelle dans un polyèdre rationnel est sous exponentielle.

THÉORÈME 6.6. — *Toute isométrie par morceaux de  $\mathbb{R}^d$  est d'entropie topologique nulle.*

Elle vérifie donc  $\lim_{+\infty} \frac{\log p(n)}{n} = 0$ . Ainsi ce théorème montre que le flot directionnel dans un polyèdre rationnel est d'entropie nulle. Ce résultat généralise donc le théorème précédent.

## 7. Problèmes ouverts

Nous finissons cet article par une série de problèmes ouverts qui nous paraissent importants :

- Estimer la complexité globale dans un triangle irrationnel.
- Estimer  $p(n)$  ou  $p(n, \omega)$  dans un polyèdre rationnel.
- Quel est le lien entre  $p(n, \omega)$  et  $p(n)$  ?
- Donnez une condition suffisante pour la minimalité d'un échange de rectangles.
- Pour un polygone irrationnel, existe-t-il une trajectoire dense dans  $X$  ?

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. Arnoux, C. Mauduit, I. Shiokawa, and J. Tamura, *Complexity of sequences defined by billiard in the cube*, Bull. Soc. Math. France **122** (1994), no. 1, 1–12.
- [2] Yu. Baryshnikov, *Complexity of trajectories in rectangular billiards*, Comm. Math. Phys. **174** (1995), no. 1, 43–56.
- [3] N. Bedaride, *Billiard complexity in rational polyhedra*, Regul. Chaotic Dyn. **8** (2003), no. 1, 97–104.
- [4] ———, *Classification of cubic billiard trajectories*, to appear in Theoretical computer sciences, 2007.
- [5] ———, *Entropy of polyhedral billiard*, to appear in Discrete and continuous dynamical systems, 2007.
- [6] N. Bedaride and P. Hubert, *Billiard complexity in the cube*, to appear in Annales de l'institut Fourier, 2007.
- [7] J. Berstel and M. Pocchiola, *A geometric proof of the enumeration formula for Sturmian words*, Internat. J. Algebra Comput. **3** (1993), no. 3, 349–355.
- [8] J. Buzzi, *Piecewise isometries have zero topological entropy*, Ergodic Theory Dynam. Systems **21** (2001), no. 5, 1371–1377.
- [9] J. Cassaigne, *Complexité et facteurs spéciaux*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **4** (1997), no. 1, 67–88, Journées Montoises (Mons, 1994).
- [10] J. Cassaigne, P. Hubert, and S. Troubetzkoy, *Complexity and growth for polygonal billiards*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52** (2002), no. 3, 835–847.
- [11] Sébastien Ferenczi, Charles Holton, and Luca Q. Zamboni, *Structure of three-interval exchange transformations III : ergodic and spectral properties*, J. Anal. Math. **93** (2004), 103–138.
- [12] Pytheas Fogg, *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1794, Springer-Verlag, Berlin, 2002, Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel.
- [13] G. Gal'perin, T. Krüger, and S. Troubetzkoy, *Local instability of orbits in polygonal and polyhedral billiards*, Comm. Math. Phys. **169** (1995), no. 3, 463–473.
- [14] Arek Goetz and Guillaume Poggiaspalla, *Rotations by  $\pi/7$* , Nonlinearity **17** (2004), no. 5, 1787–1802.
- [15] E. Gutkin and N. Haydn, *Topological entropy of polygon exchange transformations and polygonal billiards*, Ergodic Theory Dynam. Systems **17** (1997), no. 4, 849–867.
- [16] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, fifth ed., The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1979.
- [17] P. Hubert, *Complexité de suites définies par des billards rationnels*, Bull. Soc. Math. France **123** (1995), no. 2, 257–270.

- [18] A. Katok, *The growth rate for the number of singular and periodic orbits for a polygonal billiard*, Comm. Math. Phys. **111** (1987), no. 1, 151–160.
- [19] E. P. Lipatov, *A classification of binary collections and properties of homogeneity classes*, Problemy Kibernet. (1982), no. 39, 67–84.
- [20] F. Mignosi, *On the number of factors of Sturmian words*, Theoret. Comput. Sci. **82** (1991), no. 1, Algorithms Automat. Complexity Games, 71–84.
- [21] M. Morse and G. A. Hedlund, *Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories*, Amer. J. Math. **62** (1940), 1–42.
- [22] Gérard Rauzy, *Échanges d'intervalles et transformations induites*, Acta Arith. **34** (1979), no. 4, 315–328.
- [23] Yu. V. Tarannikov, *On the number of ordered pairs of  $l$ -balanced sets of length  $n$* , Diskret. Mat. **7** (1995), no. 3, 146–156.
- [24] S. Troubetzkoy, *Complexity lower bounds for polygonal billiards*, Chaos **8** (1998), no. 1, 242–244.

Nicolas BEDARIDE  
Fédération de recherches des unités de  
mathématiques de Marseille  
Laboratoire d'Analyse Topologie et Probabilités -  
UMR 6632  
Avenue Escadrille Normandie Niemen  
13397 Marseille cedex 20 (France)  
nicolas.bedaride@univ-cezanne.fr