

Institut Fourier — Université de Grenoble I

Actes du séminaire de
**Théorie spectrale
et géométrie**

Chady EL MIR

Géométrie systolique et métriques polyédrales sur les 3-variétés de Bieberbach

Volume 27 (2008-2009), p. 101-115.

<http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2008-2009__27__101_0>

© Institut Fourier, 2008-2009, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

GÉOMÉTRIE SYSTOLIQUE ET MÉTRIQUES POLYÉDRALES SUR LES 3-VARIÉTÉS DE BIEBERBACH

Chady El Mir

RÉSUMÉ. — La systole d'une variété riemannienne compacte non simplement connexe est la plus petite longueur d'une courbe fermée non contractile ; le rapport systolique est le quotient $(\text{systole})^n/\text{volume}$. Sa borne supérieure, sur l'ensemble des métriques riemanniennes, est fini pour une large classe de variétés, dont les $K(\pi, 1)$.

On étudie le rapport systolique optimal des variétés de Bieberbach compactes, orientables de dimension 3 qui ne sont pas des tores, et on démontre en utilisant des constructions de métriques polyédrales qu'il ne peut être atteint par une métrique plate.

ABSTRACT. — The *systole* of a compact non simply connected Riemannian manifold is the smallest length of a non-contractible closed curve; the *systolic ratio* is the quotient $(\text{systole})^n/\text{volume}$. Its supremum, over the set of all Riemannian metrics, is known to be finite for a large class of manifolds, including the $K(\pi, 1)$.

We study the optimal systolic ratio of compact, 3-dimensional orientable Bieberbach manifolds which are not tori, and prove that it cannot be realized by a flat metric (using constructions of polyhedral metrics).

1. Introduction

Un invariant naturel d'une variété riemannienne compacte (non simplement connexe) (M^n, g) est sa *systole*, notée $\text{sys}(g)$. C'est la plus petite longueur d'une courbe fermée non contractile. Pour avoir un invariant homogène, on introduit le *quotient systolique* $\frac{\text{sys}(g)^n}{\text{vol}(g)}$. On appelle géodésique systolique toute courbe qui réalise la systole au sens précédent.

Un résultat fondamental de M. Gromov, assure que *si M^n est essentielle la borne supérieure des quotients systoliques, quand g parcourt l'ensemble*

Mots-clés : Systole, rapport systolique, métriques riemanniennes singulières, variétés de Bieberbach .

Classification math. : 53C23, 53C22, 53C20.

des métriques riemanniennes sur M^n est finie. Une variété compacte M est dite *essentielle* s'il existe une application continue de M dans un $K(\pi, 1)$ qui envoie la classe fondamentale sur une classe non triviale. Concernant la géométrie systolique, deux références incontournables sont le rapport [6] de M. Berger et la monographie [14] de M. Katz.

Les surfaces compactes autres que S^2 sont essentielles, et le théorème de Gromov est une généralisation profonde de résultats antérieurs concernant le tore T^2 (C. Loewner, voir [13] p.295-296 pour une preuve), et le plan projectif (P.M. Pu, voir [15]).

Pour ces deux variétés, le résultat est beaucoup plus précis : on a en fait

$$\frac{(\text{sys}(g))^2}{\text{aire}(g)} \leq \frac{(\text{sys}(g_0))^2}{\text{aire}(g_0)}$$

où g_0 est plate hexagonale (cas du tore) ou à courbure constante positive (cas du plan projectif). De plus, dans les deux cas, l'égalité caractérise les métriques homothétiques à g_0 .

Il existe un troisième cas, élucidé par C. Bavard dans [2] où la borne supérieure du quotient systolique est connue, et réalisée, celui de la bouteille de Klein. Mais la métrique optimale est singulière, plus précisément C^∞ par morceaux. Voir [3] ci-dessous. Cet exemple joue ici un rôle décisif.

Pour les variétés essentielles de dimension supérieure, on ne connaît que très peu de choses. On ignore par exemple, pour des variétés apparemment aussi simples que les tores et les projectifs réels, si les métriques à courbure constante sont optimales. L'argument de Gromov, puissant mais très général, ne donne qu'une majoration très grossière du quotient systolique. *A fortiori*, on a très peu d'informations sur les métriques qui pourraient réaliser sa borne supérieure. Un résultat classique de la géométrie systolique est le suivant : *si g est une métrique optimale (éventuellement singulière) sur M , les courbes systoliques (c'est-à-dire les courbes fermées non contractibles de longueur $\text{sys}(g)$) recouvrent M .*

Cette propriété est satisfaite par les tores plats, et par les projectifs réels munis de leur métrique à courbure constante. Sur les variétés compactes de dimension 3 qui portent une métrique plate, les métriques qui optimisent le quotient systolique *parmi les métriques plates* vérifient aussi cette propriété, à l'exception d'une d'entre elles. (Il s'agit de la variété dont le groupe fondamental est le groupe appelé G_6 par J.A. Wolf, cf. [17] p.117-118, et le dessin très suggestif de [16], p.236 ; ce groupe est engendré par trois symétries glissées par rapport à trois droites deux à deux orthogonales).

Dans ce travail, nous nous intéressons aux *variétés de Bieberbach*, c'est-à-dire aux variétés compactes qui portent une métrique riemannienne plate.

Ces variétés sont des $K(\pi, 1)$, donc le théorème de Gromov s'applique. L'exemple de la bouteille de Klein, et celui de la variété de dimension 3 que nous venons d'évoquer, conduisent à penser que, au moins pour celles de ces variétés qui ne sont pas des tores, il ne faut pas s'attendre à ce que les métriques plates soient optimales. Notre résultat est le suivant.

Soit M une variété de Bieberbach de dimension 3 orientable qui n'est pas un tore. Alors il existe sur M une métrique riemannienne g telle que, pour toute métrique plate h ,

$$\frac{(\text{sys}(h))^3}{\text{aire}(h)} < \frac{(\text{sys}(g))^3}{\text{vol}(g)}.$$

Remarque. — On note que dans [11] le même résultat a été démontré pour les variétés de Bieberbach non-orientables.

2. Métriques plates et singulières

2.1. Classification des variétés plates, compactes, connexes et orientable de dimension 3

Les variétés compactes et plates sont les quotients \mathbb{R}^n/Γ où Γ est un sous groupe discret Γ , cocompact et sans points fixes d'isométries affines de \mathbb{R}^n . Le théorème de Bieberbach caractérise les variétés plates en toutes dimension en assurant que Γ est une extension d'un groupe fini G par un réseau Λ de \mathbb{R}^n . Ce réseau est le sous-groupe des éléments de Γ qui sont des translations. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \longrightarrow G \longrightarrow e.$$

En dimension 3, la classification des variétés plates résulte d'une méthode directe de classification des sous-groupes discrets et cocompacts de $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ opérant librement. Elle est évidemment beaucoup plus simple que celle des groupes cristallographiques. Elle est due à W. Hantzsche et H. Wendt (1935), et exposée dans le livre [17] de J.A. Wolf. Il y a dix types à difféomorphisme près, six orientables et quatre non orientables.

Dans le cas orientable, ces types sont caractérisés par le groupe d'holonomie G , ce qui motive notre notation. Dans la suite $r_{a,\alpha}$ designera la rotation d'angle α donné autour d'axe a .

- i) $G = \{1\}$: type C_1 . C'est le tore, il est le quotient de \mathbb{R}^3 par un réseau quelconque de \mathbb{R}^3 .

- ii) $G = \mathbb{Z}_2$: type C_2 . On se donne trois vecteurs (a_1, a_2, a_3) avec $a_3 \perp (a_1, a_2)$. Soit Γ le sous groupe des isométries de \mathbb{R}^3 engendré par $t_{a_3/2} \circ r_{a_3, \pi}$ (cf. Notations) et les translations t_{a_1} et t_{a_2} . Alors le quotient \mathbb{R}^3/Γ est une variété de type C_2 . Notons que le réseau Λ engendré par t_{a_1}, t_{a_2} et t_{a_3} est d'indice 2 dans Γ . Cette variété est le quotient du tore \mathbb{R}^3/Λ par le groupe cyclique d'ordre 2 engendré par (l'image de) $t_{a_3/2} \circ r_{a_3, \pi}$.
- iii) $G = \mathbb{Z}_4$: type C_4 . On se donne une base orthogonale (a_1, a_2, a_3) de \mathbb{R}^3 avec $|a_1| = |a_2|$, soit Γ le sous groupe des isométries de \mathbb{R}^3 engendré par $t_{a_3/4} \circ r_{a_3, \pi/2}$ et les translations t_{a_1} et t_{a_2} . Alors le quotient \mathbb{R}^3/Γ est une variété de type C_4 . Notons que le réseau Λ engendré par t_{a_1}, t_{a_2} et t_{a_3} est d'indice 4 dans Γ . Cette variété est le quotient du tore \mathbb{R}^3/Λ par le groupe cyclique d'ordre 4 engendré par (l'image de) $t_{a_3/4} \circ r_{a_3, \pi/2}$.
- iv) $G = \mathbb{Z}_6$: type C_6 . On se donne trois vecteurs (a_1, a_2, a_3) avec $a_3 \perp (a_1, a_2)$, $|a_1| = |a_2|$ et $(a_1, a_2) = \pi/3$. Soit Γ le sous groupe des isométries de \mathbb{R}^3 engendré par $t_{a_3/6} \circ r_{a_3, \pi/3}$ et les translations t_{a_1} et t_{a_2} . Alors le quotient \mathbb{R}^3/Γ est une variété de type C_6 . Cette fois ci, le réseau Λ engendré par t_{a_1}, t_{a_2} et t_{a_3} est d'indice 6 dans Γ . Cette variété est le quotient du tore \mathbb{R}^3/Λ par le groupe cyclique d'ordre 6 engendré par (l'image de) $t_{a_3/6} \circ r_{a_3, \pi/3}$.
- v) $G = \mathbb{Z}_3$: type C_3 . On se donne trois vecteurs (a_1, a_2, a_3) avec $a_3 \perp (a_1, a_2)$, $|a_1| = |a_2|$ et $(a_1, a_2) = 2\pi/3$. Soit Γ le sous groupe des isométries de \mathbb{R}^3 engendré par $t_{a_3/3} \circ r_{a_3, 2\pi/3}$ et les translations t_{a_1} et t_{a_2} . Alors le quotient \mathbb{R}^3/Γ est une variété de type C_3 . Le réseau Λ engendré par t_{a_1}, t_{a_2} et t_{a_3} est d'indice 3 dans Γ . Cette variété est le quotient du tore \mathbb{R}^3/Λ par le groupe cyclique d'ordre 3 engendré par (l'image de) $t_{a_3/3} \circ r_{a_3, 2\pi/3}$.
- vi) $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$: type $C_{2,2}$. On se donne une base orthogonale (a_1, a_2, a_3) de \mathbb{R}^3 , soit Γ le sous groupe des isométries de \mathbb{R}^3 engendré par $t_{a_1/2} \circ r_{a_1, \pi}$, $t_{(\frac{a_1+a_2}{2})} \circ r_{a_2, \pi}$ et $t_{(\frac{a_1+a_2+a_3}{2})} \circ r_{a_3, \pi}$. Alors le quotient \mathbb{R}^3/Γ est une variété de type $C_{2,2}$. Cette fois ci, le groupe d'holonomie G n'est pas cyclique, il est égal à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Remarque 2.1. — Que l'on soit dans C_2 , C_4 ou C_6 , tout plan contenant a_3 donne, par passage au quotient, une bouteille de Klein plate (si ce plan contient des points du réseau autres que ceux de l'axe a_3) ou un ruban de Möbius plat sans bord (dans le cas contraire).

2.2. Métriques singulières

Nous travaillerons avec des métriques riemanniennes *singulières* dans le sens suivant.

- (1) Elles sont continues, c'est-à-dire que les coefficients g_{ij} , exprimés en cartes locales, sont continus.
- (2) La variété est une réunion de domaines à bord d'intérieurs deux à deux disjoints, tels qu'à l'intérieur de chaque domaine la métrique est lisse.

Une telle métrique définit un espace de longueur (voir [7], [1] et [10] pour des détails sur cette notion). On peut donc parler de géodésiques. De plus, la mesure riemannienne se définit exactement comme dans le cas lisse.

2.3. Métriques singulières sur les variétés de Bieberbach orientables

Pour un réseau quelconque Δ de \mathbb{R}^2 , on introduit le pavage de Dirichlet-Voronoi associé. C'est un pavage du plan par des hexagones (ou des rectangles si le réseau Δ est rectangle) A_p centrés aux points p du réseau. Alors un réseau de \mathbb{R}^3 de la forme $\Delta \times c\mathbb{Z}$, où $c \in \mathbb{R}$, nous permet de paver \mathbb{R}^3 naturellement par des prismes hexagonaux ou rectangles que l'on note D_p .

On introduit alors sur \mathbb{R}^3 la métrique riemannienne singulière

$$h = dx^2 + dy^2 + \psi(m)dz^2,$$

où l'on a posé, pour $m(x, y, z) \in D_p$, $\psi(m) = \cos^2 \text{dist}((x, y), p)$, avec $\text{dist}((x, y), p) < \pi/2$. Si m appartient à deux domaines D_p et $D_{p'}$ alors p et p' sont à la même distance de m : la fonction ψ est bien définie. Elle est continue, mais pas C^1 . La composante neutre du groupe des isométries des (\mathbb{R}^3, h) est formée des translations verticales $(x, y, z) \mapsto (x, y, z + c')$. Les translations par les vecteurs de Δ sont aussi des isométries. Il est important de noter que la métrique h s'écrit aussi $dx^2 + dy^2 + \cos^2(d((x, y), \Delta))$, où $d((x, y), \Delta)$ est la distance du point (x, y) au réseau Δ .

Le quotient de (\mathbb{R}^3, h) par le groupe $\Delta \times c\mathbb{Z}$ (où $c > 0$) est un tore singulier de dimension 3. On note ce tore par (T, h) . Les sections de ce tore par les plans $z = \text{constante}$ sont des tores plats géodésiques de dimension 2, tous ces tores plats sont isométriques à \mathbb{R}^2/Δ . Il faut noter que l'application de (T, h) dans le tore \mathbb{R}^2/Δ , qui consiste à projeter sur le tore $z = 0$, est une submersion riemannienne.

Remarque 2.2. — Il est utile de noter que la transformation $t_{a_3/2} \circ r_{a_3, \pi}$, déjà décrites dans la classification de la variété C_2 , est une isométries de (T, h) . On obtient de cette façon des familles de métriques riemanniennes singulières sur C_2 .

Remarque 2.3. — En fait cette construction marche aussi si on quotiente (\mathbb{R}^3, h) par le réseau $n\Delta \times c\mathbb{Z}$. A partir du tore obtenu, on peut réobtenir toutes la variété C_2 exactement de la même façon que pour le tore (T, h) . On verra au chapitre suivant qu'il est plus utile, pour obtenir de "bons quotients systoliques" sur cette variété, de prendre $n = 2$.

3. Preuve

3.1. Deux tores singuliers et leur systole

On quotiente l'espace riemannien singulier (\mathbb{R}^3, h) vu dans 2.3 par le réseau $2\Delta \times c\mathbb{Z}$. On obtient un tore de dimension 3 (T, g) dont le lieu singulier est connexe. Il est formé du bord de la projection canonique de quatre prismes hexagonaux (ou rectangles) formant un domaine fondamental de l'action de $2\Delta \times c\mathbb{Z}$. Si u et v sont deux vecteurs qui engendrent le réseau Δ alors les sections de (T, g) par les plans passant par un point du réseau Δ et parallèles à u (ou v) sont des tores de dimension 2 à courbure $+1$ en dehors de leur lieu singulier. Avec un bon choix de u et v ces tores sont le revêtement orientable de la bouteille de Bavard (\mathbf{K}, b) introduite dans [2]. Plus généralement, les sections de (T, g) par des plans passant par l'axe d'un domaine D_p sont des surfaces à courbure $+1$ tant qu'on reste à l'intérieur de D_p . Notons par S_p ces surfaces.

Remarque 3.1. — Pour conserver la systole et diminuer le volume il est crucial de quotienter (\mathbb{R}^3, h) par le réseau $2\Delta \times c\mathbb{Z}$ et non pas par $\Delta \times c\mathbb{Z}$. Ceci empêche le raccourcissement des courbes fermées au niveau des surfaces S_p .

Supposons maintenant que le réseau Δ est hexagonal et qu'il est engendré par deux vecteurs de norme $2a > 0$. Le réseau $2\Delta \times 2\pi\mathbb{Z}$ est engendré par les trois translations $T_1 : (x, y, z) \longrightarrow (x + 4a, y, z)$, $T_2 : (x, y, z) \longrightarrow (x + 2a, y + 2a\sqrt{3}, z)$ et $T_3 : (x, y, z) \longrightarrow (x, y, z + 2\pi)$. La variété obtenue est un tore singulier que nous noterons (T, g_{hex}) . Son lieu singulier est formé des bords des prismes hexagonaux D_p qui pavent \mathbb{R}^3 .

Remarque 3.2. — Les symétries par rapport aux surfaces $x = pa$, $y + \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{2pa}{\sqrt{3}}$ et $y - \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{2pa}{\sqrt{3}}$ sont des isométries de (T^3, g_{hex}) .

LEMME 3.3. — La systole de (T, g_{hex}) est égale à $\inf\{4a, 2\pi \cos(2a/\sqrt{3})\}$.

Preuve. — Pour une courbe γ de m à $T_1(m)$ on a

$$l(\gamma) \geq \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + \psi(x, y)z'^2} dt \geq \int x' dt \geq 4a.$$

La même égalité est valable pour une courbe de m à $T_2(m)$ puisque la situation est invariante par la rotation $r_{a_3, \pi/3}$ d'angle $\pi/3$ autour de l'axe des z .

Enfin pour une courbe γ de m à $T_3(m)$, on a

$$l(\gamma) = \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + \psi(x, y)z'^2} dt \geq \int \inf(\psi)z' dt = 2\pi \cos(2a\sqrt{3}).$$

L'égalité est obtenue pour les points des arêtes d'un prisme hexagonal D_p . La distance entre un point m et son image par la composée de plusieurs translations est supérieure à $\inf\{4a, 2\pi \cos(2a\sqrt{3})\}$. \square

3.2. La variété C_2

3.2.1. Calcul du quotient systolique dans le cas plat

Le volume est égal à $\frac{1}{2} \det(a_2, a_1)|a_3|$ et la systole à $\inf\{|a_3|/2, s\}$, où s est la systole du tore plat de dimension 2 défini par le réseau de base a_1, a_2 . Normalisons de façon que $\frac{1}{2}|a_3| = 1$, alors le quotient systolique vaut

$$\frac{s^3}{\det(a_1, a_2)} \quad \text{si } s \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\det(a_1, a_2)} \quad \text{si } s \geq 1,$$

compte tenu du fait que $\frac{s^2}{\det(a_1, a_2)} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ (réseau de dimension 2), le quotient systolique est inférieur à $2/\sqrt{3}$.

Remarque 3.4. — On a déjà vu que les plans passant par a_3 donnent par passage au quotient soit des bouteilles de Klein plates soit des rubans de Möbius plats sans bord. Si le plan passe par un point du réseau Λ autre que ceux de l'axe a_3 , l'intersection est une bouteille de Klein, elle est un ruban de Möbius dans le cas contraire.

Pour améliorer le rapport systolique de $2/\sqrt{3}$ il faut diminuer le volume sans toucher à la systole. Une façon de le faire est de profiter de ces surfaces non orientables existant dans la variété plate C_2 et d'utiliser la métrique sphérique de Bavard et de Pu sur ces surfaces.

3.2.2. Une métrique singulière sur C_2 meilleure que les métriques plates

On part du tore singulier (T, g_{hex}) vu dans 3.1.

La transformation $\sigma : (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z + \pi)$ est une isométrie de la métrique g . Pour obtenir une variété homéomorphe à C_2 il suffit de quotienter (T, g_{hex}) par le sous groupe engendré par σ . On note (C_2, g_{hex}) une telle variété riemannienne.

Dans le tore (T, g_{hex}) , la transformation σ laisse 4 géodésiques globalement invariantes, ce sont les axes verticaux passant par les 4 centres des prismes qui forment un domaine fondamental de C_2 (c'est l'ensemble $\{x = 2pa, y = 2qa, (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$). En fait c'est une propriété du groupe fondamental de C_2 qui ne dépend pas de la métrique et qui reste donc vraie pour toute métrique sur C_2 .

Revenons à la métrique g , elle s'écrit localement (dans le domaine D) en coordonnées cylindriques (par rapport à x et y) sous la forme $g = dr^2 + r^2 d\theta^2 + \cos^2 r dz^2$ (r est la distance à l'axe vertical passant par le centre p du prisme D_p et θ est l'angle par rapport à l'axe des " x "). Dans la suite on considèrera tantôt la première forme tantôt l'autre suivant le besoin.

Remarque 3.5. — En restriction à un prisme D_p , une surface d'équation $\theta = \theta_0$ est totalement géodésique. Pour le voir il suffit de remarquer que la longueur d'une courbe γ dans D_p joignant deux points de $\theta = \theta_0$ est toujours supérieure à celle de sa projection sur cette surface. Ceci est dû simplement à l'écriture de la métrique en coordonnées "cylindriques" :

$$l(\gamma) = \int \sqrt{r'^2 + r^2 \theta'^2 + \cos^2 r z'^2} dt \geq \int \sqrt{r'^2 + \cos^2 r z'^2} dt.$$

Les surfaces $\theta = \text{constante}$ ne sont pas singulières tant qu'on reste à l'intérieur d'un domaine D_p , elles sont localement isométriques à S^2 et leurs géodésiques sont aussi des géodésiques de (C_2, g_{hex}) .

LEMME 3.6. — *Soit γ une courbe du revêtement riemannien universel de (T, g_{hex}) et γ' sa projection minimale sur un prisme hexagonal D_p , alors $l(\gamma) \geq l(\gamma')$.*

Preuve. — La projection minimale d'un point m est ici le point de D_p à distance (euclidienne) minimale de m . Il est unique puisque D_p est convexe.

Si la projection minimale orthogonale se fait sur la singularité $x = pa$, c'est-à-dire si γ' est incluse dans une telle hypersurface, alors

$$l(\gamma) = \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + \psi(x, y) z'^2} dt \geq \int \sqrt{y'^2 + \psi(x, y) z'^2} dt = l(\gamma').$$

Or la situation est invariante par une rotation d'angle $\pi/3$ autour de p ; ceci implique que si γ se projette sur les surfaces

$$y + \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{2pa}{\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad y - \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{2pa}{\sqrt{3}}$$

de la singularité, on a aussi $l(\gamma) \geq l(\gamma')$. Enfin, le résultat est vrai pour une courbe qui se projette sur toute la singularité. □

LEMME 3.7. — *Pour tout point $m(r_0, \theta_0, z_0)$ de (T, g_{hex}) on a*

$$d_{(T, g_{hex})}(m, \sigma(m)) \geq \pi$$

l'égalité étant obtenue pour une géodésique de la surface $\theta = \theta_0$.

Preuve. — Soit $m(r_0, \theta_0, z_0)$ un point de D_p , et γ une courbe de (\mathbb{R}^3, h) de m à $\sigma(m)$. Si γ reste dans D_p alors d'après la remarque 3.5 on a $l(\gamma) \geq l(pr(\gamma))$ où $pr(\gamma)$ est la projection de γ sur la surface $\theta = \theta_0$. Or $l(pr(\gamma)) \geq \pi$ à cause de l'écriture de la métrique sur la surface $(dr^2 + \cos^2 r d\theta^2)$. Maintenant si γ sort du prisme D_p , soit γ' la courbe obtenue en prenant la projection (minimale) de la partie de γ extérieure à D_p sur son bord ∂D_p , et en gardant la partie à l'intérieur de D_p inchangée. Alors γ' est une courbe de D_p allant de m à $\sigma(m)$. Sa longueur est supérieure ou égale à π en utilisant le même argument de projection sur la surface $\theta = \theta_0$. Or $l(\gamma) \geq l(\gamma')$.

Ensuite il faut calculer (minorer) dans (\mathbb{R}^3, h) la distance à (un relevé de) $\sigma(m)$ des transformées de m par les translations. On note par σ_0 un relevé de σ sur (\mathbb{R}^3, h) . Si on translate m par T_3 , alors la situation sera équivalente à celle ci-dessus puisque $T_3(m)$ et $\sigma_0(m)$ sont conjugués par σ_0^{-1} . Maintenant une courbe γ dans (\mathbb{R}^3, h) de $\sigma_0(m)$ à $T_1(m)$ doit passer forcément par au moins 3 domaines D_p . Parmi ceux-ci soit D' le domaine qui ne contient ni $\sigma_0(m)$ ni $T_1(m)$.

Si γ reste dans ces trois domaines alors on lui associe la courbe γ' obtenue en prenant les symétriques des parties de γ à l'extérieur de D' par rapport à son plan singulier du côté de la courbe (voir fig.3.1). Alors γ' est une courbe de D' qui joint deux points conjugués par σ_0 , alors $l(\gamma) \geq l(\gamma') \geq \pi$.

Si γ sort de ces trois domaines, on lui associe une courbe γ' obtenue en projetant la partie de γ extérieure à D' sur son bord $\partial D'$. On obtient une courbe continue dans D' joignant deux points conjugués par σ_0 , d'où $l(\gamma) \geq l(\gamma') \geq \pi$.

Finalement, on note que la distance à $\sigma_0(m)$ de la composée de plusieurs translations de m est trop grande par des arguments similaires à ceux-ci dessus. □

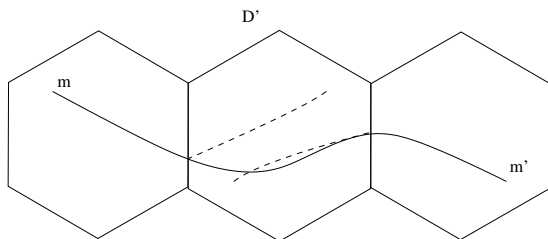


FIGURE 3.1. Une courbe joignant m à $m' = T_1(\sigma(m))$ doit forcément passer par trois domaine D_p . Pour les parties de cette courbe à l'extérieur de D' on prend leur symétrie par rapport au bord de D' .

THÉORÈME 3.8. — Si le réel a est égal à $\pi/4$ alors

$$\frac{Sys^3(C_2, g_{hex})}{Vol(C_2, g_{hex})} > \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Preuve. — Le volume de (C_2, g_{hex}) est égal à

$$\int_0^\pi \int \int_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} dy dx dz$$

où D est un hexagone régulier de plus courte distance entre les côtés opposés égale à $2a$.

La systole est égale à

$$\inf \{ Sys(T, g_{hex}), \inf \{ dist_{(T, g_{hex})}(m, \sigma(m)) \} \}.$$

Elle est égale alors à $\inf \{ 4a, 2\pi \cos(a\sqrt{2}), \pi \}$ d'après les lemmes 3.3 et 3.7, d'où pour $a = \pi/4$, on a $Sys(C_2, g_{hex}) = \pi$. En utilisant le logiciel "Maple" on trouve une approximation du volume (2,80) à un centième près, puis un simple calcul donne le rapport $Sys^3(C_2, g_{hex})/Vol(C_2, g_{hex})$. Il est de l'ordre de 1,38. \square

4. Les variétés C_n ($n=3,4,6$) et $C_{2,2}$

4.1. Type $C_{2,2}$

Ce cas est le plus facile puisque les géodésiques systoliques de la métrique plate optimale sont isolées.

Dans le cas plat, la systole est égale à $\inf \{ a_1/2, a_2/2, a_3/2 \}$. Le volume est égal à $\frac{|a_1||a_2||a_3|}{4}$. Le quotient systolique est inférieur à $1/2$, avec égalité

si et seulement si $|a_1| = |a_2| = |a_3|$. Dans ce cas les géodésiques systoliques sont isolées et ne recouvrent donc pas la variété $C_{2,2}$.

Le critère de Babenko vu dans l'introduction nous permet alors de déduire que les métriques plates sur $C_{2,2}$ ne sont pas les meilleures pour l'inégalité isosystolique.

4.2. Type C_n , ($n = 3, 4, 6$)

Dans le cas plat, le volume est égal à $\frac{1}{n} \det(a_1, a_2) |a_3|$, et la systole à $\inf\{|a_3|/3, |a_1|\}$, puisque le réseau engendré par a_1 et a_2 est équilatéral. On en déduit facilement que le quotient systolique est inférieur ou égal à $2/\sqrt{3}$ pour C_3 et C_6 , il est inférieur ou égal à 1 pour C_4 . L'égalité est obtenue pour $|a_3| = n|a_2| = n|a_1|$, on note par Γ_0 le groupe de Bieberbach donnant l'égalité (unique à dilatation près).

Pour démontrer que les métriques plates sur C_n ne sont pas extrémales, on a recours à des métriques différentes de celles que nous avons utilisées pour la variété C_2 . L'existence d'une géodésique systolique isolée dans le cas plat optimal va nous permettre de diminuer le volume de la variété en utilisant la technique de "creuser" autour de la géodésique systolique. Ceci peut se faire sans raccourcir la systole.

4.2.1. Une métrique polyédrale singulière sur C_n

On part du groupe Γ_0 pour lequel on obtient le meilleur quotient systolique sur C_n . Pour C_3 et C_6 , il y a dans Γ_0 quatre classes de conjugaison représentées par des géodésiques qui réalisent la systole, celles de t_{a_1} , t_{a_2} , $t_{a_1-a_2}$ et $\varphi = t_{a_3/3} \circ r_{a_3, 2\pi/n}$ (leurs inverses donnant les mêmes géodésiques parcourues en sens opposé, nous ne les prenons pas en compte). On a une famille à un paramètre de géodésiques dans les trois premières classes, mais 3 géodésiques isolées pour la classe de φ .

Pour C_4 il y a dans Γ_0 trois classes de conjugaison représentées par des géodésiques qui réalisent la systole, celles de t_{a_1} , t_{a_2} , et $\varphi = t_{a_3/3} \circ r_{a_3, 2\pi/n}$. On a une famille à un paramètre de géodésiques dans les deux premières classes, mais 2 isolées géodésiques pour la classe de φ .

On considère maintenant un prisme droit hexagonal H , hexagonal (pour C_3 et C_6) ou carré (pour C_4), formant un domaine fondamental de l'action de Γ_0 . Sa base est un domaine de Dirichlet–Voronoi pour le réseau engendré par a_1 et a_2 , sa hauteur est $|a_3|/n$ et son axe, que nous noterons u , est

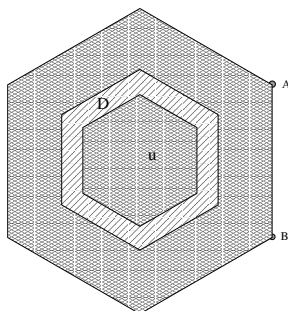


FIGURE 4.1. Sur les hexagones horizontaux ($z = 0$ et $z = |a_3|/n$) on creuse les parties limitées par les deux petits hexagones (D et D' en hachuré) d'une profondeur égale à ϵ .

le relèvement d'une géodésique systolique donnée par ϕ . Les géodésiques fermées et C^∞ voisines de cet axe sont n fois plus longues. La variété C_n peut se voir, aussi bien comme variété que comme espace métrique, comme le quotient H/\mathcal{R} , où \mathcal{R} est la trace sur H de la relation d'équivalence sur \mathbb{R}^3 définie par l'action de Γ_0 . En modifiant H tout en gardant l'identification des faces donnée par la relation d'équivalence, nous allons obtenir une métrique riemannienne (singulière) sur C_n ayant la même systole que \mathbb{R}^3/Γ_0 et un volume plus petit.

On marque sur chacun des deux hexagones $z = 0$ et $z = |a_3|/n$ deux "petits" hexagones réguliers ayant un même centre appartenant à l'axe u (voir la figure 4.1). Soient D et D' les deux parties limitées par chaque couple d'hexagones marqués. On creuse d'une profondeur ϵ les deux domaines D et D' (voir la figure 4.2). On obtient un polyèdre H_{sing} de volume strictement inférieur à H si $\epsilon > 0$. On essaie maintenant de réobtenir une variété homéomorphe à C_n à partir de H_{sing} . Pour la partie non modifiée, les identifications sont les mêmes que dans le cas plat. Dans les parties modifiées, on identifie chaque point (x, y, z) de la partie "creusée" du bas avec le point $(r_\alpha(x, y), z')$ de la partie "creusée" du haut, où $\alpha = \pi/3$ pour C_6 , $2\pi/3$ pour C_3 et $\pi/2$ pour C_4 . On note H_{sing}/\mathcal{R}' l'espace de longueur obtenu. Par construction, cet espace est bien homéomorphe à une variété de type C_n . Il est singulier (au sens déjà défini) et plat en dehors des singularités. Les géodésiques systoliques verticales passant par A , B et C restent inchangées. Pour ϵ assez petit les courbes fermées qui sont dans la classe d'homotopie libre définie par φ sont de longueur supérieure à $|a_3|/n$, même

si elles traversent l'image du creux. On note enfin que les géodésiques fermées associées aux translations horizontales sont de longueur $|a_1|$ si elles ne touchent pas la singularité. Elles sont plus longues dans le cas contraire.

THÉORÈME 4.1. — *Pour ϵ assez petit la systole de H_{sing}/\mathcal{R}' est égale à $|a_1| = |a_2| = |a_3|/n$ et le quotient $Sys^3(H_{sing})/Vol(H_{sing})$ est strictement supérieur à $2/\sqrt{3}$ pour C_3 et C_6 et à 1 pour C_4 .*

Remarque 4.2. — La variété C_2 admettant des géodésiques systoliques isolées (dans le cas d'une métrique plate optimale), cette même technique peut être utilisée pour démontrer que les métriques plates sur cette variété ne sont pas optimales. Son défaut provient du fait que pour les métriques singulières qu'elle donne, les géodésiques systoliques ne recouvrent pas la variété. Par suite, ces métriques ne peuvent pas réaliser la constante systolique de ces variétés d'après le critère énoncé dans l'introduction.

Il y a tellement d'arbitraire dans ces constructions (nous avons pris un polyèdre localement euclidien uniquement par commodité, on pourrait aussi par exemple creuser suivant une couronne) qu'il est difficile de voir quelle est la meilleure.

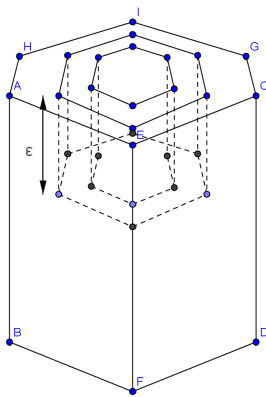


FIGURE 4.2. Un prisme hexagonal avec un “gros” creux sur sa face supérieure.

5. Propriétés de nos métriques singulières

Parmi les tores plats de dimension 3, celui qui maximise le rapport systolique est le tore hexagonal. Il est le quotient de \mathbb{R}^3 par un réseau admettant

comme base (a_1, a_2, a_3) tel que $(a_i, a_j) = \pi/3$ pour $i \neq j$. Il est connu que ce tore, qu'on note T_{hex} , est un très bon candidat pour réaliser la constante systolique sur l'ensemble de toutes les métriques riemanniennes. Il vérifie les propriétés suivantes :

- En chaque point de T_{hex} passent exactement 6 géodésiques systoliques.
- Les géodésiques systoliques de toute classe systolique de T_{hex} recouvrent le tore. Une classe systolique est un élément du groupe fondamental qui contient au moins une géodésique systolique.

Notre métrique singulière (C_2, g_{hex}) satisfait la deuxième propriété et une autre plus forte que la première : en tout point en dehors de la singularité de (C_2, g_{hex}) passent un nombre infini de géodésiques systoliques.

Pour les points de la singularité, il existe 5 géodésiques systoliques qui passent par chacun de ces points : 3 dans le 2-tore plat horizontal et 2 dans la surface $\theta = constante$. Le nombre de géodésiques systoliques qui passent par les points de la singularité est inférieur à celui du cas de T_{hex} , mais ceci n'est pas gênant puisque la singularité est de mesure nulle.

On pense que, comme pour le cas du tore T_{hex} , la variété (C_2, g_{hex}) est un très bon candidat pour réaliser la constante systolique car elle a une abondance de géodésiques systoliques qui se traduit par le fait qu'elle vérifie les propriétés mentionnées ci-dessus. Il serait intéressant dans un premier temps de démontrer qu'elle est optimale dans sa classe conforme (voir [3]).

Quant aux métriques singulières polyédrales qu'on a construites sur C_3, C_6 et C_4 , elles ne satisfont ni ces propriétés ni celle de l'introduction (recouvrement par les géodésiques systoliques) et ne peuvent donc pas être extrémales. Leur avantage est qu'il y a certainement des situations en dimension supérieure où cette technique s'adapte, par exemple quand la variété est le quotient d'un tore par le groupe engendré par un déplacement hélicoïdal, ce qui donne le résultat pour ce type de variétés en toute dimension. Il serait intéressant de donner un cadre général à cette construction.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ivan K. Babenko, *Forte souplesse intersystolique de variétés fermées et de polyèdres*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52** (2002), no. 4, 1259–1284. MR 1927080 (2003j :53075)
- [2] C. Bavard, *Inégalité isosystolique pour la bouteille de Klein*, Math. Ann. **274** (1986), no. 3, 439–441. MR 842624 (87i :53059)
- [3] ———, *Inégalités isosystoliques conformes pour la bouteille de Klein*, Geom. Dedicata **27** (1988), no. 3, 349–355. MR 960206 (89k :53012)
- [4] Christophe Bavard, *L'aire systolique conforme des groupes cristallographiques du plan*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **43** (1993), no. 3, 815–842. MR 1242617 (95a :53054)

- [5] ———, *Une remarque sur la géométrie systolique de la bouteille de Klein*, Arch. Math. (Basel) **87** (2006), no. 1, 72–74. MR 2246408 (2007b :53083)
- [6] Marcel Berger, *Systoles et applications selon Gromov*, Astérisque (1993), no. 216, Exp. No. 771, 5, 279–310, Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93. MR 1246401 (94j :53042)
- [7] Dmitri Burago, Yuri Burago, and Sergei Ivanov, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. MR 1835418 (2002e :53053)
- [8] Eugenio Calabi, *Extremal isosystolic metrics for compact surfaces*, Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992), Sémin. Congr., vol. 1, Soc. Math. France, Paris, 1996, pp. 167–204. MR 1427758 (97k :53037)
- [9] Leonard S. Charlap, *Bieberbach groups and flat manifolds*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1986. MR 862114 (88j :57042)
- [10] Chady El Mir, *The systolic constant of orientable Bieberbach 3-manifolds*, Preprint (2009).
- [11] Chady El Mir and Jacques Lafontaine, *Sur la géométrie systolique des variétés de Bieberbach*, Geom. Dedicata **136** (2008), 95–110. MR 2443345 (2009f :53057)
- [12] Mikhael Gromov, *Filling Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 1, 1–147. MR 697984 (85h :53029)
- [13] ———, *Systoles and intersystolic inequalities*, Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992), Sémin. Congr., vol. 1, Soc. Math. France, Paris, 1996, pp. 291–362. MR 1427763 (99a :53051)
- [14] Mikhail G. Katz, *Systolic geometry and topology*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 137, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007, With an appendix by Jake P. Solomon. MR 2292367 (2008h :53063)
- [15] P. M. Pu, *Some inequalities in certain nonorientable Riemannian manifolds*, Pacific J. Math. **2** (1952), 55–71. MR 0048886 (14,87e)
- [16] William P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, Princeton Mathematical Series, vol. 35, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, Edited by Silvio Levy. MR 1435975 (97m :57016)
- [17] Joseph A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, third ed., Publish or Perish Inc., Boston, Mass., 1974. MR 0343214 (49 #7958)

Chady EL MIR
Université François Rabelais
Laboratoire de Mathématiques et Physique
Théorique
UMR CNRS 6083
Parc de Grandmont
37200 Tours (France)
chady.elmir@lmpt.univ-tours.fr