

Institut Fourier — Université de Grenoble I

*Actes du séminaire de*  
**Théorie spectrale  
et géométrie**

Ugo BOSCAIN, Grégoire CHARLOT & Mario SIGALOTTI

**Stabilité des systèmes à commutations du plan**

Volume 28 (2009-2010), p. 1-12.

<[http://tsg.cedram.org/item?id=TSG\\_2009-2010\\_\\_28\\_\\_1\\_0](http://tsg.cedram.org/item?id=TSG_2009-2010__28__1_0)>

© Institut Fourier, 2009-2010, tous droits réservés.

L'accès aux articles du Séminaire de théorie spectrale et géométrie (<http://tsg.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://tsg.cedram.org/legal/>).

**cedram**

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## STABILITÉ DES SYSTÈMES À COMMUTATIONS DU PLAN

Ugo Boscain, Grégoire Charlot & Mario Sigalotti

RÉSUMÉ. — Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs lisses sur  $\mathbb{R}^2$  globalement asymptotiquement stables à l'origine. Nous donnons des conditions nécessaires et des conditions suffisantes sur la topologie de l'ensemble des points où  $X$  et  $Y$  sont parallèles pour pouvoir assurer la stabilité asymptotique globale du système contrôlé non linéaire non autonome

$$\dot{q}(t) = u(t)X(q(t)) + (1 - u(t))Y(q(t))$$

où le contrôle  $u$  est une fonction mesurable arbitraire de  $[0, +\infty[$  dans  $\{0, 1\}$ . Les conditions données ne nécessitent aucune intégration ou construction d'une fonction de Lyapunov pour être vérifiées, et sont robustes.

ABSTRACT. — Let  $X$  and  $Y$  be two smooth vector fields on  $\mathbb{R}^2$ , globally asymptotically stable at the origin. We give some sufficient and some necessary conditions on the topology of the set where  $X$  and  $Y$  are parallel for global asymptotic stability of the nonautonomous and nonlinear control system

$$\dot{q}(t) = u(t)X(q(t)) + (1 - u(t))Y(q(t)),$$

where  $u : [0, +\infty[ \rightarrow \{0, 1\}$  is an arbitrary measurable function. Such conditions can be verified without any integration or construction of a Lyapunov function, and are robust.

### 1. Introduction

Ce texte, qui reprend le contenu de l'exposé du 15 octobre 2009 donné au séminaire "Théorie Spectrale et Géométrie", s'appuie sur l'article "Stability of Planar Nonlinear Switched Systems" [12], publié en 2006 dans *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A*. Vous ne trouverez pas ici les preuves détaillées.

---

*Mots-clés* : stabilité asymptotique globale, commutations, non linéaire.

*Classification math.* : 32C20, 37N35, 93D20.

*Crédits* : Ce travail a été soutenu par l'ERC Starting Grants 2009 GeCoMethods, contrat 239748, par l'ANR GCM, programme "Blanc CSD 5", et par le projet DIGITEO intitulé "CONGEO".

L'article [12] fait partie d'une série de travaux des auteurs [2, 5, 9, 7, 11, 14] concernant les systèmes contrôlés bidimensionnels, qui traitent de sujets diverses mais qui se sont nourris les uns les autres.

On s'intéresse aux systèmes contrôlés du plan qui s'écrivent

$$(1.1) \quad \dot{q}(t) = u(t)X(q(t)) + (1 - u(t))Y(q(t)),$$

où  $u(\cdot)$  est à valeur dans  $\{0, 1\}$ ,  $q(\cdot)$  est une courbe de  $\mathbf{R}^2$  et  $X$  et  $Y$  sont deux champs de vecteurs lisses sur  $\mathbf{R}^2$ . Une solution admissible sur  $[0, T]$  d'un tel système est la donnée d'un couple  $(u, q)$  défini sur  $[0, T]$  avec  $u$  mesurable et  $q$  absolument continue tels que (1) soit vérifié pour presque tout  $t$  de  $[0, T]$ . Il est à noter que pour tout contrôle  $u : [0, T] \rightarrow \{0, 1\}$  mesurable et tout point  $q_0$  du plan il existe une solution "locale"  $q$  qui vérifie  $q(0) = q_0$  et (1.1) pour  $t \in [0, \tau]$ , avec  $\tau$  suffisamment petit.

Sans autre hypothèse un tel système peut avoir des propriétés très variées. Par exemple, il peut être contrôlable (deux points quelconques peuvent être reliés par une courbe admissible en un certain temps) avec  $X = (-y, x)$  et  $Y = (1, 0)$ , ou non contrôlable avec  $X = Y$ .

Les propriétés auxquelles ont va s'intéresser ici sont liées à la notion de stabilité. Un système contrôlé est dit

- *globalement attractif* à l'origine si toutes ses trajectoires admissibles convergent vers 0.
- *uniformément stable* à l'origine si pour tout voisinage  $V_1$  de l'origine il existe un voisinage  $V_2$  de l'origine inclus dans  $V_1$  tel que toute trajectoire admissible du système issue de  $V_2$  reste dans  $V_1$ .

Il est dit *globalement asymptotiquement stable* (GAS) s'il vérifie ces deux propriétés. Dans la suite de cet article, on suppose que les deux sous-systèmes définis par  $X$  ( $u \equiv 1$ ) et  $Y$  ( $u \equiv 0$ ) sont GAS et on se pose les deux questions naturelles suivantes :

- Le système contrôlé (1.1) est-il lui même GAS?
- L'ensemble accessible depuis un compact est-il borné ((1.1) est alors dit *borné*) ou, au contraire, existe-t-il une trajectoire qui tend vers l'infini ?

Ces questions, ainsi que certaines situations proches, ont bien entendu des applications en automatique. Par exemple, si un système de la forme (1.1) est tel que  $X$  et  $Y$  sont GAS, il est important de savoir s'il peut s'écarter de son équilibre. Ou au contraire si, ayant deux dynamiques qui devient  $(-X$  et  $-Y)$ , on peut construire une commutation qui stabilise (ce qui correspond pour la dynamique (1.1) à une trajectoire qui s'éloigne de l'origine).

Les questions de stabilité dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont linéaires, en dimension deux ou plus, ont produit une littérature importante ([3, 6, 8, 16, 20, 22]). La réponse complète à ces questions en dimension 2 a été donnée dans [8]. Plus précisément, un critère nécessaire et suffisant pour la stabilité asymptotique globale a été établi en fonction de trois paramètres, les deux premiers dépendant des valeurs propres de  $X$  et  $Y$  respectivement, le troisième étant le birapport des quatre vecteurs propres.

Dans le cas non linéaire, il est sans espoir de vouloir caractériser complètement la stabilité globale asymptotique sans connaître les courbes intégrales de  $X$  et  $Y$ . Cependant, en s'inspirant des techniques utilisées dans [8], on arrive à donner une réponse partielle à ces questions.

Si l'on s'intéresse à la première question, à savoir déterminer si le système est GAS, il est classique de chercher à construire une fonction de Lyapunov pour la dynamique c'est-à-dire une fonction  $f$  qui atteint son minimum à l'origine et qui vérifie  $d_q f.F(q, u) < 0$  pour tout  $q \in \mathbf{R}^2 - \{0\}$  et  $u \in \{0, 1\}$ . Ici le point de vue est différent et s'appuie principalement sur la forme de l'ensemble accessible depuis un point  $p$  quelconque : on appelle *ensemble accessible* depuis le point  $p$  l'ensemble des points  $q$  de  $\mathbf{R}^2$  par lesquels passe une trajectoire admissible de (1.1) issue de  $p$ .

Dans [8], la forme de l'ensemble accessible depuis un point est obtenue en s'appuyant sur la construction de l'ensemble  $\mathcal{Z}$  où les champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  sont colinéaires. Dans le cas linéaire l'ensemble  $\mathcal{Z}$  est soit l'origine, soit une droite linéaire, soit la réunion de deux droites linéaires, soit le plan. Dans le cas non linéaire, la topologie de cet ensemble est plus compliquée. Cependant, sous des hypothèses de généricité que nous exposons en section 2,  $\mathcal{Z}$  est la réunion de  $\{0\}$  et de sous variétés plongées de dimension 1, l'orientation du plan définie par  $(X, Y)$  change quand on traverse  $\mathcal{Z}$  et les *points de tangence*, où  $X$  et  $Y$  sont tangents à  $\mathcal{Z}$ , sont isolés.

Dans [12], on montre que si  $\mathcal{Z}$  est réduit à l'origine alors le système contrôlé (1.1) est GAS (Théorème 3.1). On montre ensuite que, en situation générique, si la composante connexe de  $\mathcal{Z}$  de l'origine est réduite à l'origine et si, le long de  $\mathcal{Z} - \{0\}$ ,  $X$  et  $Y$  ne sont pas tangents à  $\mathcal{Z}$ , alors le système contrôlé est GAS (Théorème 3.2). On montre aussi que si  $\mathcal{Z}$  est compacte (sans hypothèse de généricité) alors le système contrôlé est borné, c'est-à-dire que l'ensemble accessible depuis tout compact est borné (Théorème 3.3). Enfin, en situation générique, on montre que si  $\mathcal{Z}$  a une composante connexe non bornée le long de laquelle  $X$  et  $Y$  pointent dans

des sens opposés l'un à l'autre, alors il existe une trajectoire qui tend vers l'infini (Théorème 3.4).

## 2. Généricité

Pour pouvoir définir ce que l'on entend par situation *générique*, nous munissons l'ensemble des champs de vecteurs sur  $\mathbf{R}^2$  de la topologie de Whitney  $C^\infty$  dont une base est

$$\mathcal{V}(k, f, r) = \left\{ g \in C^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2) \left\| \left\| \frac{\partial^{|I|}(f-g)}{\partial x^I}(x) \right\| < r(x), \forall x \in \mathbf{R}^2, |I| \leq k \right\} \right\},$$

où  $k$  est un entier positif,  $f$  est dans  $C^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$  et  $r$  est une fonction strictement positive définie sur  $\mathbf{R}^2$ . Si on note  $\text{GAS}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$  l'ensemble des champs de vecteurs lisses GAS en 0 muni de cette topologie, une propriété est dite *générique* si elle est vérifiée pour un ouvert dense de  $\text{GAS}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2) \times \text{GAS}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$  muni de la topologie produit.

On fixe un système de coordonnées sur  $\mathbf{R}^2$  et on définit

$$Q(p) = \det(X(p), Y(p)).$$

L'ensemble  $\mathcal{Z}$  coïncide avec  $Q^{-1}(0)$ . La fonction  $Q$  n'est pas intrinsèquement définie mais les propriétés **(G1)**, **(G2)** et **(G3)** définies dans le lemme suivant le sont.

LEMME 2.1. — *Les propriétés suivantes sont génériques au sens défini au dessus.*

**(G1)** Si  $p \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}$  alors  $\nabla Q(p) \neq 0$ .

**(G2)** La hessienne de  $Q$  à l'origine est non dégénérée.

**(G3)** Si  $p \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}$  et  $(L_X Q)(p) = \det(X(p), [X, Y](p)) = 0$  alors

$$(L_X L_X Q)(p) \neq 0.$$

Sous l'hypothèse **(G1)**,  $\mathcal{Z} \setminus \{0\}$  est une sous-variété plongée. Dans ce cas, on dit que  $p \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}$  est un *point de tangence* si  $X(p)$  (et donc  $Y(p)$ ) est tangent à  $\mathcal{Z}$ . Un calcul simple montre alors que  $p \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}$  est un point de tangence si et seulement si  $\det(X(p), [X, Y](p)) = 0$ . Si on suppose en plus que la condition **(G3)** est vérifiée alors les points de tangence sont isolés.

Sous l'hypothèse **(G1)**, la condition **(G2)** assure que, au voisinage de l'origine,  $\mathcal{Z}$  est soit réduit à l'origine, soit la réunion de deux sous-variétés plongées transversales s'intersectant à l'origine 2.1.

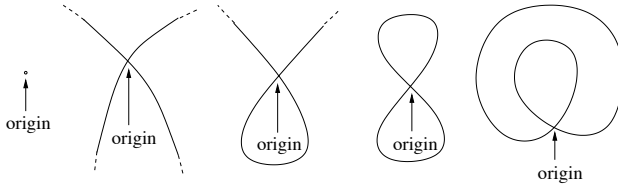


FIGURE 2.1. La composante connexe de  $\mathcal{Z}$  contenant l'origine

Le système (1.1) ne peut pas être GAS quand il existe un point  $p$  en dehors de l'origine où  $X$  et  $Y$  pointent dans des directions opposées, c'est-à-dire où  $X(p) = -\lambda Y(p)$  avec  $\lambda > 0$ . Un tel point est clairement dans  $\mathcal{Z}$ . Sous l'hypothèse **(G1)**, cette situation se prolonge à toute la composante connexe de  $\mathcal{Z} \setminus \{0\}$  contenant  $p$ . On appellera *directe* (resp. *inverse*) une composante connexe de  $\mathcal{Z} \setminus \{0\}$  le long de laquelle  $X$  et  $Y$  sont positivement (resp. négativement) proportionnels.

### 3. Énoncés des théorèmes

On rappelle que dans les énoncés suivant  $X$  et  $Y$  sont supposés GAS en l'origine.

THÉORÈME 3.1. — Si  $\mathcal{Z}$  est réduit à l'origine alors (1.1) est GAS à l'origine.

THÉORÈME 3.2. — Si  $X$  et  $Y$  vérifient les hypothèses génériques **(G1)**, si 0 est isolé dans  $\mathcal{Z}$  et si  $\mathcal{Z}$  ne contient pas de point de tangence, alors (1.1) est GAS à l'origine.

THÉORÈME 3.3. — Si  $\mathcal{Z}$  est compact alors (1.1) est borné.

THÉORÈME 3.4. — Si  $X$  et  $Y$  vérifient les hypothèses génériques **(G1)** et **(G3)**, et si  $\mathcal{Z}$  contient une composante inverse non bornée alors (1.1) est non borné.

Le théorème 3.2 est une généralisation du théorème 3.1 dont la preuve reprend les arguments de la preuve du théorème 3.1. Le théorème 3.3 est une conséquence du théorème 3.1. La preuve du théorème 3.4 est de nature différente. Une idée de chaque preuve est proposée dans les sections suivantes.

Dans la section 4 on détaille en grande partie la preuve du théorème 3.1 alors que dans la section 5 on discute juste de l'idée des preuves.

## 4. Preuve du théorème 3.1

Pour démontrer le théorème 3.1, on étudie la forme de l'ensemble accessible  $A_p$  depuis un point  $p$  quelconque.

On démontre d'une part que cet ensemble est d'adhérence compacte, d'autre part que le seul point d'accumulation d'une courbe admissible est l'origine. La réunion des deux arguments implique que toutes les courbes admissibles convergent vers l'origine c'est-à-dire que le système est globalement attractif.

On démontre aussi que le bord de l'adhérence de  $A_p$  est inclus dans la réunion de l'origine et des supports des courbes intégrales de  $X$  et  $Y$  depuis  $p$ . Ceci a pour conséquence quasi immédiate que si  $X$  et  $Y$  sont asymptotiquement stables alors le système (1.1) est asymptotiquement stable.

### 4.1. Les ensembles accessibles sont compacts

On démontre dans un premier temps que  $A_p$  est compact. On note  $\gamma_X(q, \cdot)$  et  $\gamma_Y(q, \cdot)$  les courbes intégrales de  $X$  et  $Y$  qui passent en  $q$  à  $t = 0$ .

On traite d'abord le cas où les deux courbes issues de  $p$  ne se coupent pas. On peut alors définir la courbe  $\gamma_{X,Y}(p, \cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par

$$\gamma_{X,Y}(p, t) = \begin{cases} \gamma_X(p, \tan(\pi t)) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_Y(p, \tan(\pi(1-t))) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Cette courbe est lisse par morceaux,

$$\gamma_{X,Y}(p, 0) = \gamma_{X,Y}(p, 1) = p \quad \text{et} \quad \gamma_{X,Y}\left(p, \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Son support sépare le plan en deux domaines disjoints, l'un borné, noté  $B(p)$  et l'autre non borné, noté  $D(p)$ . On veut montrer que  $A_p$  est toujours inclus dans l'adhérence de  $B(p)$ .

Pour cela on considère, le long de la courbe  $\gamma_{X,Y}(p, \cdot)$ , le champ de vecteurs  $\frac{X+Y}{2}$ . On montre facilement que, en dehors de l'origine, il pointe soit tout le temps vers  $\overline{B(p)}$ , soit tout le temps vers  $\overline{D(p)}$ . Dans le premier cas,  $\overline{B(p)}$  est invariant par la dynamique (1.1),  $A_p$  est donc inclus dans  $\overline{B(p)}$  et est borné. Dans le second cas,  $\overline{D(p)}$  est invariant par la dynamique (1.1),  $A_p$  est donc inclus dans  $\overline{D(p)}$  et on ne sait rien sur son caractère borné. Montrons que ce second cas est impossible avec les hypothèses du théorème.

Quand  $\frac{X+Y}{2}$  pointe partout vers  $D(p)$  on définit la famille de courbes suivante :

$$\gamma^{X,Y,t}(p, \tau) = \begin{cases} \gamma_X(p, -\tau) & \text{pour } \tau < -t \\ \gamma_Y(\gamma_X(p, t), \tau + t) & \text{pour } \tau \geq -t \end{cases}$$

Si  $q$  est un point de l'intérieur de  $B(p)$  alors pour  $t = 0$  la courbe  $\gamma^{X,Y,t}$ ,

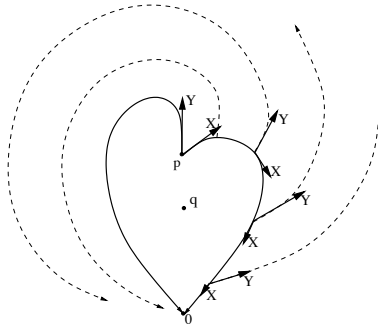


FIGURE 4.1. Les courbes  $\gamma_{X,Y,t}(p, \cdot)$

dont le support est le même que celui de  $\gamma_{X,Y}(p, \cdot)$ , est d'indice 1 par rapport à  $q$ . Pour  $t$  suffisamment proche de  $+\infty$ , la courbe est d'indice 0 par rapport à  $q$  : en effet pour  $\tau$  entre  $-\infty$  et  $-t$  la courbe reste proche de l'origine car  $\gamma_X(p, \cdot)$  tend vers l'origine et donc ne sort pas de la boule de centre l'origine et de rayon  $\frac{|q|}{2}$  ; et pour  $\tau$  entre  $-t$  et  $+\infty$  c'est le caractère asymptotiquement stable de  $Y$  qui permet de conclure : pour  $t$  suffisamment grand,  $\gamma_X(p, t)$  est suffisamment proche de l'origine pour que la courbe intégrale de  $Y$  qui part de lui ne quitte pas la boule de centre l'origine et de rayon  $\frac{|q|}{2}$ . Ceci est en contradiction avec le fait que l'indice dépend continuellement du paramètre  $t$  et devrait donc être constant.

Donc  $A_p$  est inclus dans  $\overline{B(p)}$  ce qui permet de conclure qu'il est borné.

Pour traiter le cas où  $\gamma_X(p, \cdot)$  et  $\gamma_Y(p, \cdot)$  se coupent on traite plus où moins de la même façon.

On construit une courbe  $\gamma_{X,Y}(p, \cdot)$  fermée en s'appuyant sur les courbes intégrales de  $X$  et  $Y$  : on note  $t$  le premier temps où la courbe  $\gamma_X(p, \cdot)$  coupe la courbe  $\gamma_Y(p, \cdot)$  et on note  $t'$  le temps correspondant pour  $Y$  :  $\gamma_X(p, t) = \gamma_Y(p, t')$ . On définit  $\gamma_{X,Y}(p, \cdot)$  par

$$\gamma_{X,Y}(p, \tau) : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ \tau < \frac{1}{2} & \longmapsto \gamma_X(p, 2t\tau) \\ \tau \geq \frac{1}{2} & \longmapsto \gamma_Y(p, 2t'(1 - \tau)) \end{cases}$$



Cette courbe sépare le plan en deux ensembles disjoints,  $B(p)$  et  $D(p)$ , avec  $B(p)$  borné, et on montre que l'ensemble  $A_p$  est inclus dans l'adhérence de l'un ou de l'autre. En effet,  $X$  et  $Y$  laissent  $\overline{B(p)}$  ou  $\overline{D(p)}$  invariant le long de  $\gamma_{X,Y}(p, \cdot)$ , même au point d'intersection.

Pour montrer que c'est dans l'ensemble borné que  $A_p$  est inclus, on regarde l'indice de  $\frac{X+Y}{2}$ . Il vaut toujours 1 car il pointe toujours du même côté de la courbe fermée  $\gamma_{X,Y}(p, \cdot)$ . Ceci indique qu'il a un zéro dans  $B(p)$ , qui ne peut être que l'origine, seul point où  $X$  et  $Y$  sont colinéaires. Donc l'origine est dans  $B(p)$  donc  $A(p)$  est forcément dans  $\overline{B(p)}$ . Et à nouveau  $A(p)$  est d'adhérence compacte.

On peut montrer un peu plus : l'ensemble accessible est exactement  $\overline{B(p)} - \{0\}$ . On ne le détaille pas ici car ce n'est pas un point crucial de la démonstration.

## 4.2. Le seul point d'accumulation possible est l'origine

Pour montrer que le seul point d'accumulation possible d'une courbe admissible de (1.1) est l'origine, on montre simplement que tout point  $q$  en dehors de l'origine est dans un voisinage particulier que la dynamique oblige à quitter en temps fini et qu'elle interdit d'y revenir.

Plus précisément, on commence par montrer que pour tout point  $q'$ ,  $A_{q'}$  contient un petit ouvert de forme triangulaire  $T(q')$  tel que

- un des sommets est  $q'$ ,
- deux bords sont formés de segments des courbes intégrales de  $X$  et  $Y$  issues de  $q'$ ,
- le troisième bord est tel que la dynamique de (1.1) est sortante le long de ce bord,
- toute trajectoire de (1.1) qui entre dans ce triangle en sort en temps fini.

On ne fait pas la preuve ici mais la figure 4.2 donne une idée de comment il est construit. Une fois construit ce petit ouvert pour tout point  $q'$ , on peut montrer que tout point  $q \neq 0$  est inclus dans l'ouvert triangulaire d'un point  $q'$ , obtenu en suivant  $-\frac{X+Y}{2}$  en temps petit. Alors, comme  $q$  est dans  $A_{q'}$ ,  $A_q$  est inclus dans  $A_{q'}$ . Or  $A_{q'} - \overline{T(q')}$  est un ensemble invariant par la dynamique (1.1) donc toute trajectoire qui passe proche de  $q$  entre dans  $T(q')$ , puis dans  $A_{q'} - \overline{T(q')}$  et ne peut donc pas revenir dans  $T(q')$ . Le point  $q$  ne peut donc pas être un point d'accumulation.

On a donc fini la première partie de la preuve, à savoir l'attractivité globale du système (1.1). Pour montrer la stabilité asymptotique, il n'y a

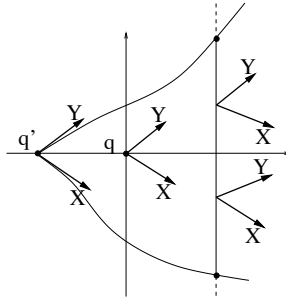


FIGURE 4.2. *Le voisinage triangulaire et la dynamique*

en fait plus rien à construire. En effet comme l'ensemble accessible  $A(p)$  est inclus dans  $\overline{B(p)}$  dont le bord est inclus dans la réunion de l'origine et des courbes intégrales de  $X$  et  $Y$  issues de  $p$ , la stabilité asymptotique de  $X$  et  $Y$  en l'origine implique immédiatement la stabilité asymptotique de (1.1) en l'origine.

## 5. Quelques mots sur les théorèmes 3.2, 3.3 et 3.4

### 5.1. Le théorème 3.2

Pour prouver le théorème 3.2, on reproduit quasiment à l'identique la preuve du théorème 3.1, la seule chose à construire est le bord de l'ensemble accessible. Pour cela, on remarque les faits suivants qui sont des conséquences directes des hypothèses :

- chaque composante connexe de  $\mathcal{Z}$  est directe et sépare le plan en deux domaines, celui qui contient l'origine étant laissé invariant par la dynamique (1.1).
- ceci a pour conséquence que  $\gamma_X(p, \cdot)$  et  $\gamma_Y(p, \cdot)$ , qui convergent vers l'origine, rencontrent les mêmes composantes connexes de  $\mathcal{Z}$  et dans le même ordre.

On construit alors les deux courbes suivantes issues de  $p$  : la première consiste à suivre  $X$  jusqu'à intersecter  $\mathcal{Z}$ , où on commute vers  $Y$  jusqu'à l'intersection avec  $\mathcal{Z}$  suivante, où on commute à nouveau, vers  $X$ , etc., jusqu'à converger vers l'origine ; la seconde courbe est obtenue en commençant par  $Y$ . Ces deux courbes commutent bien un nombre fini de fois qui est égal au nombre de fois que  $\gamma_X(p, \cdot)$  rencontre  $\mathcal{Z}$  avant de converger vers l'origine.

Une fois construites ces courbes, on les utilise dans la preuve comme on utilisait  $\gamma_X(p, \cdot)$  et  $\gamma_Y(p, \cdot)$  dans la preuve du théorème 3.1.

### 5.2. Le théorème 3.3

L'idée de la preuve du théorème 3.3 consiste à montrer que, quitte à transformer un des deux champs de vecteurs sur un domaine borné, alors on peut se ramener à la situation du théorème 3.1. La preuve passe par la linéarisation d'un des champs de vecteurs, via un homéomorphisme qui est un difféomorphisme de  $\mathbf{R}^2 - \{0\}$  dans  $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ .

### 5.3. Le théorème 3.4

Pour faire la preuve du théorème 3.4, il faut étudier la dynamique du système (1.1) au voisinage de la composante de  $\mathcal{Z}$  qui est inverse. Pour ce faire, on utilise un résultat de Davidov ([15]), qui permet d'affirmer que, sous les hypothèses (G1) et (G3), au voisinage d'un point  $p$  de  $\mathcal{Z}$ ,  $X$  et  $Y$  peuvent s'écrire  $X(x, y) = (1, x)$  et  $Y(x, y) = (-1, x)$  si  $p = (0, 0)$  n'est pas un point de tangence ou  $X(x, y) = (-1, \pm(x^2 - y))$  et  $Y(x, y) = (1, \pm(x^2 - y))$  si  $p = (0, 0)$  est un point de tangence.

On montre alors que, loin des points de tangence, la dynamique permet de suivre la composante inverse dans un sens d'un côté de la composante, et dans l'autre sens de l'autre côté de la composante, et ceci sans s'écarter de la composante (voir la figure 5.1).

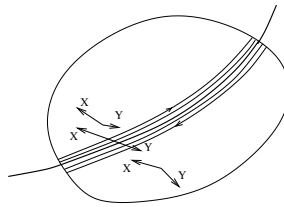


FIGURE 5.1. La dynamique le long de  $\mathcal{Z}$  loin des points de tangence.

Il ne reste plus qu'à montrer que l'on peut dépasser les points de tangence. Ceci est obtenu en analysant la dynamique au voisinage de tels points pour la forme normale. L'image du portrait de phase  $X$  et  $Y$  au voisinage d'un point de tangence est donnée figure 5.2 (Normal Form 2 et Normal Form 3).

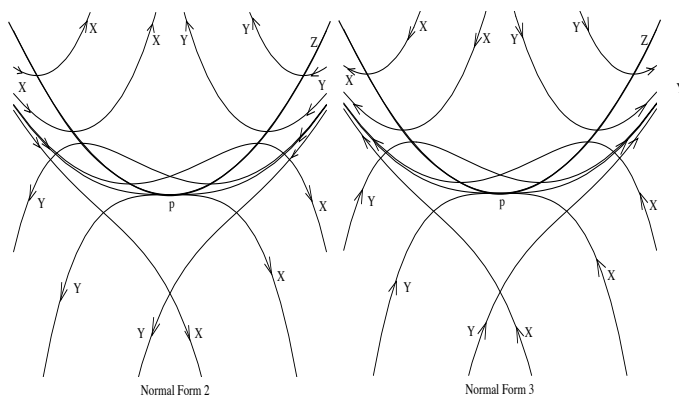


FIGURE 5.2. La dynamique au voisinage d'un point de tangence (Normal Form 2 et 3).

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. Abraham and J. Robbin, *Transversal mappings and flows*, An appendix by Al Kelley, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.
- [2] A. A. Agrachev, U. Boscain, G. Charlot, R. Ghezzi, and M. Sigalotti, *Two-dimensional almost-Riemannian structures with tangency points*, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **27** (2010), no. 3, 793–807.
- [3] A. A. Agrachev and D. Liberzon, *Lie-algebraic stability criteria for switched systems*, *SIAM J. Control Optim.* **40** (2001), no. 1, 253–269 (electronic).
- [4] D. Angeli, B. Ingalls, E. D. Sontag, and Y. Wang, *Uniform global asymptotic stability of differential inclusions*, *J. Dynam. Control Systems* **10** (2004), no. 3, 391–412.
- [5] M. Balde, U. Boscain, and P. Mason, *A note on stability conditions for planar switched systems*, *Internat. J. Control* **82** (2009), no. 10, 1882–1888.
- [6] F. Blanchini and S. Miani, *A new class of universal Lyapunov functions for the control of uncertain linear systems*, *IEEE Trans. Automat. Control* **44** (1999), no. 3, 641–647.
- [7] B. Bonnard, G. Charlot, R. Ghezzi, and G. Janin, *The sphere and the cut locus at a tangency point in two-dimensional almost-Riemannian geometry*, *Journal of Dynamical and Control Systems* **17** (2011), 141–161.
- [8] U. Boscain, *Stability of planar switched systems : the linear single input case*, *SIAM J. Control Optim.* **41** (2002), no. 1, 89–112 (electronic).
- [9] U. Boscain, Th. Chambrion, and G. Charlot, *Nonisotropic 3-level quantum systems : complete solutions for minimum time and minimum energy*, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **5** (2005), no. 4, 957–990 (electronic).
- [10] U. Boscain, G. Charlot, R. Ghezzi, and M. Sigalotti, *Lipschitz classification of two-dimensional almost-Riemannian distances on compact oriented surfaces*, article soumis.
- [11] U. Boscain, G. Charlot, and F. Rossi, *Existence of planar curves minimizing length and curvature*, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* **270** (2010), no. 1, 43–56.

- [12] U. Boscain, G. Charlot, and M. Sigalotti, *Stability of planar nonlinear switched systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **15** (2006), no. 2, 415–432.
- [13] U. Boscain and B. Piccoli, *Optimal syntheses for control systems on 2-D manifolds*, Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], vol. 43, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [14] U. Boscain and M. Sigalotti, *High-order angles in almost-Riemannian geometry*, Actes du Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Vol. 25. Année 2006–2007, Sémin. Théor. Spectr. Géom., vol. 25, Univ. Grenoble I, Saint, 2008, pp. 41–54.
- [15] A. A. Davydov, *Qualitative theory of control systems*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 141, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994, Translated from the Russian manuscript by V. M. Volosov.
- [16] W. P. Dayawansa and C. F. Martin, *A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching*, IEEE Trans. Automat. Control **44** (1999), no. 4, 751–760.
- [17] L. Grüne, E. D. Sontag, and F. R. Wirth, *Asymptotic stability equals exponential stability, and ISS equals finite energy gain—if you twist your eyes*, Systems Control Lett. **38** (1999), no. 2, 127–134.
- [18] B. Ingalls, E. D. Sontag, and Y. Wang, *An infinite-time relaxation theorem for differential inclusions*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 2, 487–499 (electronic).
- [19] D. Liberzon, *Switching in systems and control*, Systems & Control : Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2003.
- [20] D. Liberzon, J. P. Hespanha, and A. S. Morse, *Stability of switched systems : a Lie-algebraic condition*, Systems Control Lett. **37** (1999), no. 3, 117–122.
- [21] D. Liberzon and A. S. Morse, *Basic problems in stability and design of switched systems*, IEEE Control Systems Magazine **19** (1999), 59–70.
- [22] P. Mason, U. Boscain, and Y. Chitour, *Common polynomial Lyapunov functions for linear switched systems*, SIAM J. Control Optim. **45** (2006), no. 1, 226–245 (electronic).

Ugo BOSCAIN  
 École polytechnique  
 CMAP  
 Route de Saclay  
 91128 Palaiseau cedex (France)  
 boscain@cmap.polytechnique.fr

Grégoire CHARLOT  
 Université Grenoble 1  
 Institut Fourier  
 100 rue des maths  
 BP 74  
 38402 St Martin d’Hères cedex (France)  
 gregoire.charlot@ujf-grenoble.fr

Mario SIGALOTTI  
 Université Nancy 1  
 Institut Élie Cartan de Nancy  
 BP 70239  
 54506 Vandœuvre-lès-Nancy cedex (France)  
 Mario.Sigalotti@inria.fr