



# Journées mathématiques X-UPS

Année 1994

Aspects des systèmes dynamiques

(des équations différentielles aux itérations de fonctions)

Adrien DOUADY

**L'ensemble de Julia dépend-il continûment du polynôme ?**

*Journées mathématiques X-UPS* (1994), p. 41-91.

<https://doi.org/10.5802/xups.1994-03>

© Les auteurs, 1994.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence

LICENCE INTERNATIONALE D'ATTRIBUTION CREATIVE COMMONS BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Les Éditions de l'École polytechnique  
Route de Saclay  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<https://www.editions.polytechnique.fr>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz  
CMLS, École polytechnique, CNRS,  
Institut polytechnique de Paris  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<https://portail.polytechnique.edu/cmls/>



Publication membre du

Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

[www.centre-mersenne.org](http://www.centre-mersenne.org)

## L'ENSEMBLE DE JULIA DÉPEND-IL CONTINÛMENT DU POLYNÔME ?

*par*

Adrien Douady

---

### Table des matières

Introduction.....	42
<b>Partie I. Propriétés de continuité.....</b>	<b>43</b>
1. La métrique de Hausdorff.....	43
2. Applications semi-continues à valeurs dans $\text{Comp}^*(E)$ .....	45
3. Points périodiques.....	48
4. Ensemble de Julia rempli et ensemble de Julia d'un po- lynôme.....	51
5. Semi-continuités de $K(f)$ et $J(f)$ en fonction de $f$ ....	54
6. L'effet des bassins attractifs.....	57
7. L'effet des disques de Siegel.....	58
8. Un théorème de Mañé-Sad-Sullivan.....	61
<b>Partie II. L'implosion parabolique.....</b>	<b>62</b>
9. Un exemple parabolique typique.....	62
10. Le batteur à œufs.....	64
11. Scénarios imaginables.....	65
12. L'implosion.....	67
13. La raison des discontinuités.....	69
14. Coordonnées de Fatou.....	70
15. Prolongement des coordonnées de Fatou.....	73
16. Persistance des coordonnées de Fatou.....	74

---

**Publication originelle dans** Journées X-UPS 1994. Aspects des systèmes dynamiques (des équations différentielles aux itérations de fonctions). Prépublication du Centre de mathématique de l'École polytechnique, 1994, et Éditions de l'École polytechnique, 2009.

17. La phase.....	77
18. Applications de Lavaurs.....	79
19. Les ensembles $K(f_0, g_\sigma)$ et $J(f_0, g_\sigma)$ .....	79
20. Le cas où le point critique s'échappe.....	82
21. Le cas où $\sigma$ est réel.....	84
22. Et pour $\varepsilon$ non réel?.....	84
23. L'éléphant limite.....	86
24. Autres polynômes ayant un cycle parabolique.....	88
<b>Références.....</b>	<b>90</b>

### Introduction

Étant donné un polynôme complexe  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de degré  $d \geq 2$ , on définit *l'ensemble de Julia rempli*  $K(f)$  et *l'ensemble de Julia* proprement dit  $J(f)$  (§ 4). Tous deux sont des compacts non vides de  $\mathbb{C}$ . L'ensemble  $J(f)$  est la frontière de  $K(f)$ , et  $K(f)$  est la réunion de  $J(f)$  avec les composantes connexes bornées de  $\mathbb{C} - J(f)$ . L'ensemble  $K(f)$  peut être d'intérieur vide (auquel cas  $J(f) = K(f)$ ), ou d'intérieur non vide. L'ensemble  $J(f)$  est la fermeture de l'ensemble des points périodiques répulsifs. Les composantes connexes de l'intérieur de  $K(f)$  sont toujours reliées à des points périodiques non répulsifs de  $f$ . Les points périodiques sont décrits au § 3.

Dans cet exposé, nous examinons à quel point  $K(f)$  et  $J(f)$  dépendent continûment de  $f$ , quand  $f$  parcourt l'ensemble  $\mathcal{P}_d$  des polynômes de degré  $d$ .

Il nous faut d'abord donner un sens à la question. On le fait en définissant la *métrie de Hausdorff* sur l'ensemble  $\text{Comp}^*(\mathbb{C})$  des compacts non vides de  $\mathbb{C}$  (§ 1). La distance de Hausdorff est définie comme sup de deux semi-distances ce qui permet de décomposer la continuité pour des applications à valeurs dans  $\text{Comp}^*(\mathbb{C})$  en semi-continuités supérieure et inférieure. Au contraire de ce qui se passe pour les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , les deux semi-continuités jouent des rôles très différents : la semi-continuité supérieure est beaucoup plus naturelle.

L'application  $f \mapsto K(f)$  est semi-continue supérieurement, et  $f \mapsto J(f)$  est semi-continue inférieurement. Toutes deux sont continues en  $f_0$  si  $K(f_0)$  est d'intérieur vide.

Le fait pour  $K(f_0)$  d'avoir un intérieur non vide peut être dû à la présence de cycles attractifs, de cycles paraboliques ou de disques de Siegel. Il peut y en avoir plusieurs pour le même  $f_0$  si  $d > 2$ , mais en degré 2 ils s'excluent mutuellement. Nous examinons l'effet sur la continuité de ces trois types de cycles.

Les cycles attractifs ne causent en fait aucune discontinuité (§6). Les disques de Siegel causent une discontinuité dans  $f \mapsto J(f)$ , mais aucune pour  $f \mapsto K(f)$  (§7).

Un cycle parabolique cause une discontinuité dans  $f \mapsto K(f)$  et dans  $f \mapsto J(f)$ . Ces discontinuités peuvent être décrites et analysées avec précision. Nous les ferons dans la partie II pour l'exemple le plus simple : l'application  $z \mapsto z + z^2$ . L'outil principal pour cette étude est fourni par les *coordonnées de Fatou*.

Je remercie l'Union des Professeurs de Spéciale et l'École Polytechnique, en particulier Nicole Berline et Claude Sabbah, qui ont organisé cette rencontre, Bodil Branner et Nuria Fagella pour leur aide dans la préparation de ce texte et Jacques Carette qui a réalisé les figures à l'ordinateur. Ce texte paraît en anglais dans les comptes-rendus d'une rencontre semblable (short course) organisée par Robert Devaney de l'université de Boston et qui a eu lieu à Cincinnati sous l'égide de l'American Mathematical Society<sup>(1)</sup>.

## Partie I. Propriétés de continuité

### 1. La métrique de Hausdorff

Soit  $E$  un espace métrique. Notons  $\text{Comp}(E)$  l'ensemble des compacts de  $E$  et posons  $\text{Comp}^*(E) = \text{Comp}(E) - \{\emptyset\}$ . Nous allons munir  $\text{Comp}^*(E)$  d'une distance appelée la distance de Hausdorff. Nous

---

<sup>(1)</sup>N.d.E. : la référence exacte de l'article est « Does a Julia set depend continuously on the polynomial? » in *Complex dynamical systems (Cincinnati, OH, 1994)*, p. 91–138, Proc. Sympos. Appl. Math., vol. 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

donnons la définition et quelques propriétés dans le cadre général des espaces métriques arbitraires, mais en fait nous nous intéressons seulement au cas  $E = \mathbb{C}$ .

Soient  $X$  et  $Y$  deux compacts de  $E$ . Nous disons que  $X$  est contenu dans  $Y$  à  $r$  près si  $X$  est contenu dans le  $r$ -voisinage de  $Y$ , c'est-à-dire si  $d(x, Y) \leq r$  pour tout  $x \in X$ . Nous notons  $\partial(X, Y)$  le plus petit  $r$  tel que  $X \subset Y$  à  $r$  près, soit

$$\partial(X, Y) = \sup_{x \in X} d(x, Y).$$

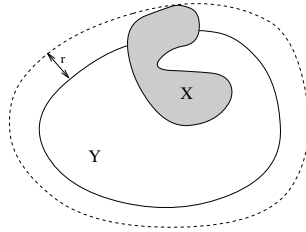


FIGURE 1.

La *distance de Hausdorff*  $d_H$  est définie par

$$d_H(X, Y) = \sup(\partial(X, Y), \partial(Y, X)).$$

Les conventions usuelles concernant l'ensemble vide nous amènent à poser  $d(x, \emptyset) = \infty$ ,  $\partial(X, \emptyset) = \infty$  pour  $X \neq \emptyset$  et  $\partial(\emptyset, \emptyset) = 0$ . Pour éviter des difficultés sans pertinence, nous travaillons sur  $\text{Comp}^*(E)$ , autrement dit nous ne considérerons que des compacts non vides.

**Proposition 1.1.** *La fonction  $d_H$  est une distance sur  $\text{Comp}^*(E)$ .*

**Lemme 1.2**

- (a) On a  $\partial(X, Y) = 0$  si et seulement si  $X \subset Y$ .
- (b) Pour  $X, Y, Z$  dans  $\text{Comp}^*(E)$ , on a

$$\partial(X, Z) \leq \partial(X, Y) + \partial(Y, Z).$$

*Démonstration*

(a) On a

$$\begin{aligned} \partial(X, Y) = 0 &\iff (\forall x \in X) d(x, Y) = 0 \iff (\forall x \in X) x \in Y \\ &\iff X \subset Y. \end{aligned}$$

On a la deuxième équivalence parce que  $Y$  est fermé.

(b) Posons  $r_1 = \partial(X, Y)$  et  $r_2 = \partial(Y, Z)$ . Pour  $x \in X$ , on peut trouver  $y \in Y$  tel que  $d(x, y) \leq r_1$ , puis  $z \in Z$  tel que  $d(y, z) \leq r_2$ . On a alors  $d(x, z) \leq r_1 + r_2$ , d'où  $d(x, Z) \leq r_1 + r_2$ . Comme cela vaut pour tout  $x \in X$ , on a  $\partial(X, Z) \leq r_1 + r_2$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 1.1*

(a)  $d_H(X, Y) = d_H(Y, X)$  est évident sur la définition.

(b)  $d_H(X, Y) = 0 \iff \partial(X, Y) = \partial(Y, X) = 0 \iff (X \subset Y \text{ et } Y \subset X) \iff X = Y$ .

(c) De  $\partial(X, Z) \leq \partial(X, Y) + \partial(Y, Z)$  et  $\partial(Z, X) \leq \partial(Y, X) + \partial(Z, Y)$  on tire  $d_H(X, Z) \leq d_H(X, Y) + d_H(Y, Z)$ .  $\square$

À partir de maintenant nous munissons  $\text{Comp}^*(E)$  de la distance de Hausdorff et nous le considérons donc comme un espace métrique. Ceci nous permet d'utiliser des expressions comme «  $X_n \rightarrow X$  quand  $n \rightarrow \infty$  » ou «  $X_\lambda$  dépend continûment de  $\lambda \in \Lambda$  ».

## 2. Applications semi-continues à valeurs dans $\text{Comp}^*(E)$

La distance de Hausdorff  $(X, Y) \mapsto d_H(X, Y)$  est le sup des deux semi-distances  $(X, Y) \mapsto \partial(X, Y)$  et  $(X, Y) \mapsto \partial(Y, X)$ . Ceci nous permet de décomposer la propriété de continuité pour une application  $\Lambda \rightarrow \text{Comp}^*(E)$  en semi-continuités supérieure et inférieure.

Comparons avec  $\mathbb{R}$  : la distance  $(x, y) \mapsto |y - x|$  sur  $\mathbb{R}$  peut s'exprimer comme

$$|y - x| = \sup((y - x)^+, (x - y)^+)$$

où  $r^+ = \sup(r, 0)$ . Rappelons qu'une fonction  $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *semi-continue supérieurement* en  $\lambda_0$  si

$$(f(\lambda) - f(\lambda_0))^+ \longrightarrow 0 \quad \text{quand } \lambda \longrightarrow \lambda_0,$$

c'est-à-dire :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists V_{\text{vois}\lambda_0}) (\forall \lambda \in V) \quad f(\lambda) < f(\lambda_0) + \varepsilon.$$

On dit que  $f$  est *semi-continue inférieurement* en  $\lambda_0$  si

$$(f(\lambda_0) - f(\lambda))^+ \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \lambda \longrightarrow \lambda_0$$

c'est-à-dire

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists V_{\text{vois}\lambda_0}) (\forall \lambda \in V) \quad f(\lambda) > f(\lambda_0) - \varepsilon.$$

Par analogie, nous disons qu'une application  $\phi : \Lambda \rightarrow \text{Comp}^*(E)$  est *semi-continue supérieurement* en  $\lambda_0$  si

$$\partial(\phi(\lambda), \phi(\lambda_0)) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \lambda \longrightarrow \lambda_0,$$

c'est-à-dire

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists V_{\text{vois}\lambda_0}) (\forall \lambda \in V) \quad \phi(\lambda) \subset \phi(\lambda_0) \text{ à } \varepsilon \text{ près.}$$

Nous disons que  $\phi$  est *semi-continue inférieurement* en  $\lambda_0$  si

$$\partial(\phi(\lambda_0), \phi(\lambda)) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \lambda \longrightarrow \lambda_0,$$

c'est-à-dire

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists V_{\text{vois}\lambda_0}) (\forall \lambda \in V) \quad \phi(\lambda) \supset \phi(\lambda_0) \text{ à } \varepsilon \text{ près.}$$

Mais il y a une différence avec le cas de  $\mathbb{R}$ , qui est toute en faveur du nouveau cas. Dans le cas de  $\mathbb{R}$ , il est difficile à quelqu'un de normal, même après quelques efforts, de s'y retrouver entre les deux semi-continuités. Dans le cas de  $\text{Comp}^*(E)$ , les deux semi-continuités jouent des rôles très différents : la semi-continuité supérieure est très naturelle à considérer, à cause de l'interprétation donnée dans la Prop. 2.1. ci-dessous, tandis que la semi-continuité inférieure est une propriété un peu bizarre.

Si  $E$  et  $F$  sont deux espaces métrisables, on dit qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est *propre* si  $f$  est continue et si l'image inverse de tout compact de  $F$  est un compact de  $E$ . Toute application propre est fermée, c'est-à-dire que l'image d'un fermé est fermée ([2])

**Proposition 2.1.** *Soient  $E$  un espace métrique,  $\Lambda$  un espace métrisable et  $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille de sous-ensembles de  $E$ . Considérons l'espace  $\mathcal{H}$  des  $(X, x) \in \Lambda \times E$  tels que  $x \in X_\lambda$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) *l'application  $\lambda \mapsto X_\lambda$  est semi-continue supérieurement de  $\Lambda$  dans  $\text{Comp}^*(E)$  ;*
- (2)  *$\mathcal{H}$  est fermé dans  $\Lambda \times E$  et la projection  $p_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow \Lambda$  est propre et surjective.*

*Démonstration*

(2)  $\Rightarrow$  (1) : Pour tout  $\lambda$ , l'ensemble  $X_\lambda$  est un compact non vide de  $E$ . Étant donné  $\lambda_0 \in \Lambda$  et  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble

$$A = \{(\lambda, x) \in \mathcal{H} \mid d(x, X_{\lambda_0}) \geq \varepsilon\}$$

est un fermé de  $\mathcal{H}$  ne rencontrant pas  $p_{\mathcal{H}}^{-1}(\lambda_0)$ . Donc  $p_{\mathcal{H}}(A)$  est fermé dans  $\Lambda$  et  $W = \Lambda - p_{\mathcal{H}}(A)$  est un voisinage de  $\lambda_0$ . Pour  $\lambda \in W$ , on a  $\partial(X_\lambda, X_{\lambda_0}) < \varepsilon$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2) : Puisque  $X_\lambda \neq \emptyset$  pour tout  $\lambda$ , la projection  $p_{\mathcal{H}}$  est surjective. Soit  $L \subset \Lambda$  un compact, et soient  $((\lambda_n, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $p_{\mathcal{H}}^{-1}(L)$ . Comme  $(\lambda_n)$  est une suite dans  $L$ , on peut supposer qu'elle tend vers un point  $\lambda_0 \in L$ . Posons  $r_n = d(x_n, X_{\lambda_0})$ . Par semi-continuité,  $r_n \leq \partial(X_{\lambda_n}, X_{\lambda_0}) \rightarrow 0$ .

Pour tout  $n$  on peut trouver un point  $y_n \in X_{\lambda_0}$  tel que  $d(x_n, y_n) = r_n$ . De la suite  $(y_n)$  dans  $X_{\lambda_0}$  on peut extraire une suite convergente vers un point  $y_0 \in X_{\lambda_0}$ . Alors  $(\lambda_n, x_n) \rightarrow (\lambda_0, y_0)$ .  $\square$

*Remarque 2.2.* Si  $\Lambda$  est localement compact, la condition (2) est équivalente à :

(2')  $\mathcal{H}$  est fermé dans  $\Lambda \times E$ , pour chaque  $\lambda_0 \in \Lambda$  on peut trouver un voisinage  $V$  de  $\lambda_0$  dans  $\Lambda$  et un compact  $K$  dans  $E$  tels que  $X_\lambda \subset K$  pour  $\lambda \in V$ , et  $p_{\mathcal{H}}$  est surjective.

Si  $E$  est compact, (2) est équivalente à :

(2'')  $\mathcal{H}$  est fermé dans  $\Lambda \times E$  et  $p_{\mathcal{H}}$  est surjective.



### 3. Points périodiques

**3.1. Multiplicateur.** Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme complexe de degré  $d$ . On note  $f^k$  le  $k$ -ième itéré de  $f$ .

Un point  $x \in \mathbb{C}$  est *périodique de période  $k$*  si  $f^k(x) = x$ ,  $f^i(x) \neq x$  pour  $0 < i < k$ . Le *cycle* engendré par  $x$  est alors  $\xi = \{x_0, \dots, x_{k-1}\}$ , où  $x_i = f^i(x)$ . Le *multiplicateur* de  $\xi$  est

$$\rho_\xi = f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdots f'(x_{k-1}) = (f^k)'(x_i) \text{ pour tout } i.$$

Pour  $z$  voisin de  $x_i$ ,  $f^k(z) - x_i$  est approximativement  $\rho_\xi \cdot (z - x_i)$ .

On dit que le cycle  $\xi$  est *attractif* si  $|\rho_\xi| < 1$ , *répulsif* si  $|\rho_\xi| > 1$ , *indifférent (ou neutre)* si  $|\rho_\xi| = 1$ . Les cycles indifférents se divisent en *cycles paraboliques* (cas où  $\rho_\xi$  est une racine de l'unité) et *cycles indifférents irrationnels*.

Le *multiplicateur* d'un point périodique est le multiplicateur du cycle qu'il engendre. Un point périodique est attractif, répulsif, etc., s'il en est ainsi du cycle qu'il engendre.

**3.2. Cycles attractifs.** Si  $x$  est un point périodique attractif de période  $k$ , le *bassin*  $A_x$  de  $x$  est

$$\{z \in \mathbb{C} \mid f^{nk}(z) \rightarrow x \text{ quand } n \rightarrow \infty\}.$$

C'est un ouvert contenu dans  $\mathring{K}$ , et  $x \in A_x$ . Le *bassin immédiat*  $A_x^0$  est la composante connexe de  $A_x$  contenant  $x$ . Le *bassin* (resp. *bassin immédiat*) du cycle engendré par  $x$  est

$$A_\xi = \bigcup_{0 \leq i < k} A_{x_i} \text{ (resp. } A_\xi^0 = \bigcup_{0 \leq i < k} A_{x_i}^0).$$

Le résultat suivant est classique. Rappelons qu'un *point critique* de  $f$  est un point où la dérivée  $f'$  s'annule.

**Théorème 3.1 (Fatou, Julia).** *Le bassin immédiat d'un cycle attractif contient toujours un point critique.*

**Corollaire.** *Le nombre maximum de cycles attractifs pour un polynôme de degré  $d$  est  $d - 1$ .*

En effet, un polynôme de degré  $d$  a au plus  $d - 1$  points critiques distincts.

En fait on a un meilleur résultat :

**Théorème 3.2.** *Le nombre maximum de cycles non répulsifs pour un polynôme de degré  $d$  est  $d - 1$ .*

*Plan de la démonstration.* La démonstration repose sur la notion d'application à allure polynomiale. Une application à allure polynomiale  $f : U' \rightarrow U$ , où  $U$  et  $U'$  sont deux ouverts de  $\mathbb{C}$  limités par des courbes de Jordan  $\gamma$  et  $\gamma'$  avec  $\overline{U'} \subset U$ , est une application holomorphe  $U' \rightarrow U$  qui admet un prolongement continu  $\overline{U'} \rightarrow \overline{U}$  induisant une application  $\gamma' \rightarrow \gamma$ . Le degré de  $f$  est le degré de l'application induite  $\gamma' \rightarrow \gamma$ . Une application à allure polynomiale de degré  $d$  a  $d - 1$  points critiques (en comptant avec multiplicité). Si  $f$  est un polynôme de degré  $d$ , l'application

$$f : f^{-1}(D_R) \longrightarrow D_R$$

est à allure polynomiale pour  $R$  assez grand.

Le théorème 3.1 s'étend aux applications à allure polynomiale : tout cycle attractif attire au moins un point critique. Il suffit de recopier la démonstration pour les polynômes. Par conséquent, une application à allure polynomiale de degré  $d$  a au plus  $d - 1$  points critiques.

L'avantage de ce nouveau cadre est le suivant : alors qu'il est difficile de modifier un polynôme de façon à rendre attractifs tous les cycles non répulsifs, cela est très facile pour les applications à allure polynomiale. Par suite une application à allure polynomiale de degré  $d$  a au plus  $d - 1$  cycles non répulsifs — sinon l'application modifiée donnerait une contradiction. Ceci s'applique notamment aux polynômes.  $\square$

**3.3. Cycles paraboliques.** Soit maintenant  $x$  un point parabolique de période  $k$  et de multiplicateur  $\rho = e^{2i\pi p/q}$  ( $p$  et  $q$  premiers entre eux). Alors  $f^{kq}$  est tangent à l'identité en  $x$ . On peut trouver  $Q$  demi-droites d'origine  $x$  appelées les *axes d'attraction*, alternant avec  $Q$  autres appelées les *axes de répulsion*, avec la propriété suivante : si  $z$  est voisin de  $x$  sur un axe d'attraction (resp. de répulsion),  $f^{kq}$  rapproche (resp. éloigne)  $z$  de  $x$ . Les axes d'attraction et de répulsion sont déterminés de la façon suivante :

En mettant l'origine en  $x$ , l'application  $f^{kq}$  se met sous la forme

$$z \mapsto z(1 + cz^Q + O(z^{Q+1}))$$

avec  $c \neq 0$ ,  $Q \geq 1$ . Les valeurs de  $z$  pour lesquelles  $cz^Q$  est réel  $< 0$  (resp.  $> 0$ ) forment les axes d'attraction (resp. de répulsion).

L'application linéaire tangente  $z \mapsto \rho \cdot z$  envoie les axes d'attraction sur axes d'attraction et axes de répulsion sur axes de répulsion. On voit ainsi que  $Q$  est nécessairement un multiple de  $q$ .

Pour chaque axe d'attraction  $L$ , il y a des points  $z$  tels que  $f^{kqn}(z) \rightarrow x$  tangentiellement à  $L$ . Ces points forment un ouvert non vide  $A_L$  qui contient un segment  $S$  de  $L$  ayant  $x$  pour une de ses extrémités. Nous appelons  $A_L$  le *bassin* de  $L$ , et la composante connexe  $A_L^0$  de  $L$  qui contient  $S$  le *bassin immédiat*. Le point  $x$  est sur la frontière de  $A_L^0$ . Le bassin (resp. bassin immédiat) de  $x$  est la réunion des  $A_L$  (resp.  $A_L^0$ ) pour  $L$  axe d'attraction, et si  $\xi$  est le cycle engendré par  $x$  nous définissons  $A_\xi$  (resp.  $A_\xi^0$ ) comme la réunion des bassins (resp. bassins immédiats) des points du cycle.

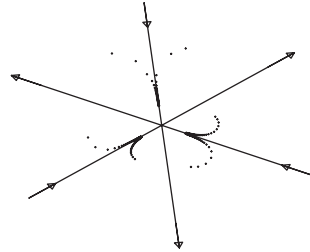


FIGURE 2.

Le résultat suivant est analogue au théorème 3.1 :

**Théorème 3.3 (Fatou, Julia).** *Le bassin immédiat d'un cycle parabolique contient toujours au moins un point critique (en fait  $\nu = Q/q$  points critiques).*

**3.4. Cycles indifférents irrationnels.** Soit maintenant  $x$  un point périodique indifférent irrationnel de période  $k$  et de multiplicateur  $\rho = e^{2i\pi\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ . Alors  $x$  peut être linéarisable (cas de Siegel) ou non linéarisable (cas de Cremer). On dit que  $x$  est *linéarisable* s'il y

a un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  tel que  $f^k(U) = U$  et un isomorphisme  $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}$  tel que  $\phi \circ f^k \circ \phi^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  soit la rotation  $z \mapsto \rho \cdot z$ . Le plus grand  $U$  possible est le *disque de Siegel*  $\Delta_x$  de  $x$ .

Des résultats de Cremer, Siegel, Bruno, Yoccoz donnent des conditions pour qu'un point périodique indifférent irrationnel soit linéarisable. Pour les polynômes quadratiques, on a

**Théorème 3.4 (Bruno, Yoccoz).** *Soit  $f$  un polynôme quadratique avec un point périodique indifférent irrationnel  $x$  de période  $k$  et de multiplicateur  $\rho = e^{2i\pi\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ . Soient  $p_n/q_n$  les réduites du développement de  $\theta$  en fraction continue. Alors  $x$  est linéarisable si et seulement si*

$$(\mathcal{B}) \quad \sum \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty.$$

L'implication  $(\mathcal{B}) \Rightarrow$  linéarisabilité est due à Bruno, et vaut pour un polynôme de degré quelconque, et même pour tout germe de fonction holomorphe. La réciproque est due à Yoccoz.

#### 4. Ensemble de Julia rempli et ensemble de Julia d'un polynôme

Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme complexe de degré  $d \geq 2$ . On note  $f^n$  le  $n$ -ième itéré de  $f$  :  $f^0 = I$ ,  $f^{n+1} = f \circ f^n$ . Nous écrivons parfois  $z_n$  pour  $f^n(z)$ .

On dit que  $z$  s'échappe par  $f$  si  $f^n(z) \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ . On peut trouver un  $R > 0$  tel que tout  $z$  vérifiant  $|z| \geq R$  s'échappe. Une telle valeur de  $R$  est appelée un *rayon d'échappement*. Pour  $f : z \mapsto a_d z^d + \dots + a_0$ , le rayon

$$R = \frac{1 + |a_d| + \dots + |a_0|}{|a_d|}$$

est un rayon d'échappement.

En fait, dès qu'un point commence à s'échapper pour de bon, la convergence vers  $\infty$  est incroyablement rapide. Par exemple, pour  $f(z) = z^2 + c$  avec  $|c| \leq 2$ , si  $|z_n| \geq 3$  pour un certain  $n$ , on a  $|z_{n+10}| > 10^{300}$  : c'est plus que le rapport du volume de l'univers connu jusqu'aux quasars les plus lointains au volume d'un proton.

Nous notons  $K(f)$  l'ensemble des points qui ne s'échappent pas par  $f$ , et nous l'appelons *l'ensemble de Julia rempli* de  $f$ . L'ensemble de Julia proprement dit est la frontière  $J(f)$  de  $K(f)$ . L'ensemble  $K(f)$  est compact. En effet, il est contenu dans  $D_R$  dès que  $R$  est un rayon d'échappement, et il est fermé : si un point  $z$  s'échappe, on a  $|f^n(z)| > R$  pour un certain  $n$ , d'où  $|f^n(z')| > R$  avec le même  $n$  si  $z'$  est assez voisin de  $z$ , et l'ensemble des points qui s'échappent est ouvert.

L'ensemble  $K(f)$  n'est jamais vide, car il contient les points fixes de  $f$ , solutions de  $f(z) - z = 0$ . En fait il est toujours infini non dénombrable. Il résulte du principe du maximum que son complémentaire  $\mathbb{C} - K(f)$  ne peut pas avoir de composante connexe bornée, donc  $\mathbb{C} - K(f)$  est connexe.

Suivant les coefficients de  $f$ , l'ensemble  $K(f)$  peut être connexe ou non connexe, il peut être d'intérieur vide (auquel cas  $J(f) = K(f)$ ) ou d'intérieur non vide. En vertu d'un théorème de Fatou et Julia,  $K(f)$  est connexe si et seulement si aucun point critique de  $f$  ne s'échappe.

**Proposition 4.1**

- (a) *Tout point périodique attractif appartient à  $\overset{\circ}{K}(f)$ .*
- (b) *Tout point périodique répulsif appartient à  $J(f)$ .*
- (c) *Tout point parabolique appartient à  $J(f)$ .*
- (d) *Tout point de Siegel (indifférent irrationnel linéarisable) appartient à  $\overset{\circ}{K}(f)$ .*
- (e) *Tout point de Cremer (indifférent irrationnel non linéarisable) appartient à  $J(f)$ .*

*Démonstration.* (a) et (d) sont immédiats. Le bassin attractif ou le disque de Siegel de  $x$  est un voisinage de  $x$  contenu dans  $K(f)$ . Réciproquement, supposons que  $x$  soit un point périodique de période  $k$  avec  $x \in \overset{\circ}{K}(f)$ , et soit  $U$  la composante connexe de  $\overset{\circ}{K}(f)$  contenant  $x$ . Alors  $f^k$  applique  $U$  dans  $U$ . L'ouvert  $U$  est isomorphe à  $\mathbb{D}$ , soit  $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}$  un isomorphisme tel que  $\phi(x) = 0$  et considérons  $h = \phi \circ f^k \circ \phi^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ . On a  $h(0) = 0$ , et  $h'(0)$  est le multiplicateur

$\rho = (f^k)'(x)$ . D'après le lemme de Schwarz, on a  $|\rho| \leq 1$ , et si  $|\rho| = 1$  l'application  $h$  est la rotation  $z \mapsto \rho z$ . Ceci démontre (b) et (e).

Remarquons que si  $x$  est parabolique avec  $\rho = e^{2\pi ip/q}$ , alors  $f^{kq}$  est tangente à l'identité en  $x$ , mais ne peut être l'identité puisque c'est un polynôme de degré  $d^{kq}$ . Donc  $x$  ne peut être linéarisable, et ceci établit (c).  $\square$

D'après un théorème de Sullivan, et des résultats antérieurs de Fatou, les composantes de l'intérieur de  $K(f)$  sont toujours reliées à des cycles non répulsifs, d'une façon que nous allons décrire.

Les ensembles de la forme suivante :

- (A) Bassin immédiat d'un point périodique attractif
- (P) Bassin immédiat d'un axe d'attraction d'un point parabolique
- (S) Disque de Siegel

sont des composantes connexes de  $\overset{\circ}{K}(f)$ .

Si  $U$  est une composante connexe de  $\overset{\circ}{K}(f)$ , son image  $f(U)$  est encore une composante connexe de  $\overset{\circ}{K}(f)$ . On dit que  $U$  est périodique si  $f^k(U) = U$  pour un certain  $k > 0$ , pré-périodique si  $f^\ell(U)$  est périodique pour un certain  $\ell \geq 0$ . Les composantes de l'un des types (A), (P), (S) ci-dessus sont périodiques.

**Théorème 4.2 (Sullivan).** *Toute composante connexe de  $\overset{\circ}{K}(f)$  est pré-périodique.*

**Théorème 4.3 (Fatou).** *Toute composante connexe périodique de  $\overset{\circ}{K}(f)$  est de l'un des types (A), (P), (S).*

**Corollaire 4.4.** *Si tous les cycles de  $f$  sont répulsifs, on a  $\overset{\circ}{K}(f) = \emptyset$ .*

L'ensemble  $J(f)$ , frontière de  $K(f)$ , est compact, non vide et d'intérieur vide. L'ensemble  $K(f)$  est la réunion de  $J(f)$  avec les composantes connexes bornées de  $\mathbb{C} - J(f)$ . D'après un théorème de Fatou et Julia,  $J(f)$  est la fermeture de l'ensemble des points périodiques répulsifs. Pour tout  $\alpha \in J(f)$ , l'ensemble  $J(f)$  est la fermeture de l'ensemble des images inverses itérées de  $\alpha$ .

### 5. Semi-continuités de $K(f)$ et $J(f)$ en fonction de $f$

Notons  $\mathcal{P}_d$  l'ensemble des polynômes complexes de degré  $d$ . Un tel polynôme s'écrit

$$f(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \cdots + a_0 \quad \text{avec} \quad a_d \neq 0.$$

Ainsi  $\mathcal{P}_d$  peut s'identifier à  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^d$ , ce qui le munit d'une topologie.

#### ***Théorème 5.1***

(a) *L'application  $f \mapsto K(f)$  de  $\mathcal{P}_d$  dans  $\text{Comp}^*(\mathbb{C})$  est semi-continue supérieurement.*

(b) *L'application  $f \mapsto J(f)$  de  $\mathcal{P}_d$  dans  $\text{Comp}^*(\mathbb{C})$  est semi-continue inférieurement.*

*Démonstration*

(a) Pour  $f \in \mathcal{P}_d$ , considérons le rayon d'échappement

$$R_f = \frac{1 + |a_d| + \cdots + |a_0|}{|a_d|}.$$

Il dépend continûment de  $f$ . L'ensemble des couples  $(f, z) \in \mathcal{P}_d \times \mathbb{C}$  tels que  $z$  s'échappe par  $f$  est

$$\{(f, z) \mid (\exists n) |f^n(z)| > R_f\}.$$

Il est donc ouvert, et son complémentaire  $\mathcal{K} = \{(f, z) \mid z \in K(f)\}$  est fermé dans  $\mathcal{P}_d \times \mathbb{C}$ . Comme  $K(f) \neq \emptyset$  pour tout  $f$  et

$$\mathcal{K} \subset \{(f, z) \mid |z| \leq R_f\},$$

la projection  $p_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{P}_d$  est propre et surjective (cf. Remarque 2.2). On peut donc appliquer la proposition 2.1.

(b) Nous allons utiliser la description de  $J(f)$  comme fermeture de l'ensemble des points périodiques répulsifs. Soient  $f_0$  un point de  $\mathcal{P}_d$  et  $\varepsilon > 0$ . On peut trouver un ensemble fini  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$  de points périodiques répulsifs pour  $f_0$  qui remplit  $J(f_0)$  à  $\varepsilon/2$  près, c'est à dire tel que  $\partial(J(f_0), X) \leq \varepsilon/2$ . Chaque  $x_i$  est solution d'une équation  $f_0^{k_i}(z) - x = 0$ . C'est une solution simple de cette équation, car la dérivée est  $\rho_{x_i} - 1 \neq 0$ . On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites; on trouve un voisinage  $W$  de  $f_0$  dans  $\mathcal{P}_d$  et des fonctions holomorphes  $\xi_i : W \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $\xi_i(f_0) = x_i$  et  $\xi_i(f)$

périodique de période  $k_i$  pour  $f$ . Si on a choisi  $W$  assez petit,  $\xi_i(f)$  est encore répulsif, et  $|\xi_i(f) - x_i| \leq \varepsilon/2$  pour tout  $f \in W$ . On a alors

$$\partial(X, J(f)) \leq \partial(X, \{\xi_i(f)\}) \leq \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \partial(J(f_0), J(f)) \leq \varepsilon. \quad \square$$

**Corollaire 5.2.** *Soit  $f_0 \in \mathcal{P}_d$  un point tel que  $\mathring{K}(f_0) = \emptyset$ , de sorte que  $J(f_0) = K(f_0)$ . Alors les deux applications  $f \mapsto K(f)$  et  $f \mapsto J(f)$  sont continues en  $f_0$ .*

Ceci résulte du théorème 5.1, et du lemme 5.4 ci-dessous. Nous démontrons d'abord le lemme 5.3, non pour l'utiliser mais simplement pour s'échauffer.

**Lemme 5.3.** *Soient  $\Lambda$  un espace topologique,  $u$  et  $v$  deux fonctions  $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $u$  semi-continue inférieurement et  $v$  semi-continue supérieurement. On suppose que  $u(\lambda) \leq v(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , et  $u(\lambda_0) = v(\lambda_0)$ . Alors  $u$  et  $v$  sont continues en  $\lambda_0$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un voisinage  $W$  de  $\lambda_0$  tel que, pour  $\lambda \in W$ , on ait  $u(\lambda) \geq u(\lambda_0) - \varepsilon$  et  $v(\lambda) \leq v(\lambda_0) + \varepsilon$ . Pour  $\lambda \in W$ , on a donc

$$u(\lambda_0) - \varepsilon \leq u(\lambda) \leq v(\lambda) \leq v(\lambda_0) + \varepsilon = u(\lambda_0) + \varepsilon,$$

d'où

$$|u(\lambda) - u(\lambda_0)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |v(\lambda) - v(\lambda_0)| \leq \varepsilon. \quad \square$$

**Lemme 5.4.** *Soient  $\Lambda$  un espace topologique,  $\lambda \mapsto X_\lambda$  et  $\lambda \mapsto Y_\lambda$  deux applications  $\Lambda \rightarrow \text{Comp}^*(E)$ , la première semi-continue inférieurement et la seconde semi-continue supérieurement. On suppose que  $X_\lambda \subset Y_\lambda$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$  et  $X_{\lambda_0} = Y_{\lambda_0}$ . Alors  $\lambda \mapsto X_\lambda$  et  $\lambda \mapsto Y_\lambda$  sont continues en  $\lambda_0$ .*

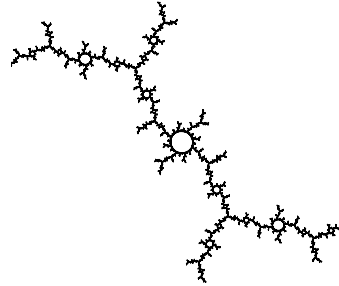
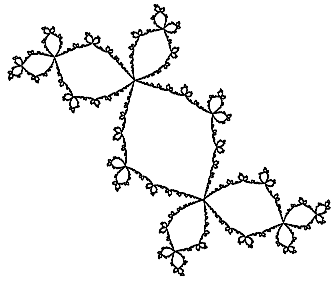
*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un voisinage  $w$  de  $\lambda_0$  dans  $\Lambda$  tel que  $\partial(X_{\lambda_0}, X_\lambda) \leq \varepsilon$  et  $\partial(Y_\lambda, Y_{\lambda_0}) \leq \varepsilon$  pour  $\lambda \in W$ . Pour  $\lambda \in W$ , on a aussi

$$\partial(Y_{\lambda_0}, Y_\lambda) = \partial(X_{\lambda_0}, Y_\lambda) \leq \partial(X_{\lambda_0}, X_\lambda) \leq \varepsilon$$

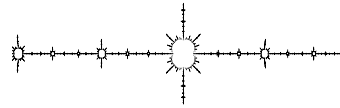
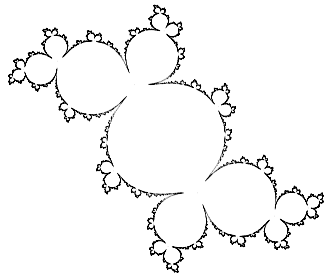
et

$$\partial(X_\lambda, X_{\lambda_0}) = \partial(X_\lambda, Y_{\lambda_0}) \leq \partial(Y_\lambda, Y_{\lambda_0}) \leq \varepsilon. \quad \square$$

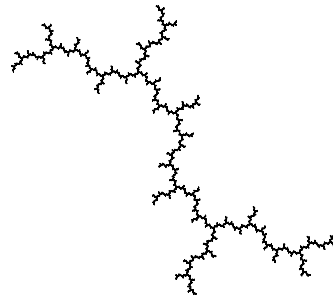
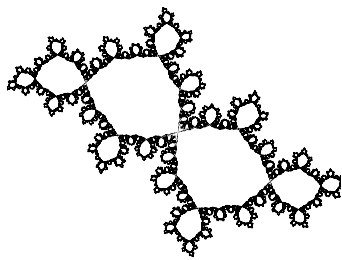




deux avec des cycles attractifs



deux avec des cycles paraboliques



un avec un disque de Siegel

si tous les cycles sont répulsifs,  
 $\mathring{K}(f) = \emptyset$  (ici  $f(z) = z^2 + i$ )

## 6. L'effet des bassins attractifs

Dans ce paragraphe, on montre que les bassins attractifs ne produisent de discontinuité ni dans  $f \mapsto K(f)$  ni dans  $f \mapsto J(f)$ .

Notons  $A(f)$  la réunion des bassins des cycles attractifs de  $f$ . L'ensemble  $A(f)$  est réunion de composantes connexes de  $\mathring{K}(f)$ . Il est donc ouvert, et  $J(f) \cup A(f)$  est fermé donc compact.

### Proposition 6.1

- (a) L'application  $f \mapsto J(f) \cup A(f)$  est une application semi-continue inférieurement  $\mathcal{P}_d \rightarrow \text{Comp}^*(\mathbb{C})$
- (b) L'application  $f \mapsto K(f) - A(f)$  est une application semi-continue supérieurement  $\mathcal{P}_d \rightarrow \text{Comp}^*(\mathbb{C})$ .

**Corollaire 6.2.** Si l'intérieur de  $K(f_0)$  est formé exclusivement de bassins attractifs, les applications  $f \mapsto K(f)$  et  $f \mapsto J(f)$  sont continues en  $f_0$ .

**Lemme 6.3.** L'ensemble  $\mathcal{A} = \{(f, z) \mid z \in A(f)\}$  est ouvert dans  $\mathcal{P}_d \times \mathbb{C}$ .

Avant de démontrer ce lemme, introduisons une définition. Nous dirons qu'une partie  $L$  de  $\mathbb{C}$  est un *piège contractant* de période divisant  $k$  pour  $f$  si  $L$  est un compact convexe non vide et  $f^k(L) \subset \mathring{L}$  avec  $|(f^k)'| < 1$  sur  $L$ . Si  $L$  est un piège contractant de période divisant  $k$  pour  $f$ , il existe un point  $x \in L$  tel que  $f^{nk}(z) \rightarrow x$  pour tout  $z \in L$ . Le point  $x$  est un point périodique attractif pour  $f$  et  $L$  est contenu dans son bassin immédiat.

Si  $x$  est un point périodique attractif pour  $f$ , le disque fermé  $\overline{D}_{x,r}$  est un piège contractant pour  $f$  si  $r$  est assez petit. Si  $L$  est un piège contractant pour  $f_0$ , c'est aussi un piège contractant pour  $f$  si  $f$  est assez voisin de  $f_0$ .

*Démonstration du lemme 6.3.* Soit  $(f_0, z_0) \in \mathcal{A}$ . On peut trouver un piège contractant  $L$  pour  $f_0$  et un entier  $n$  tel que  $f_0^n(z_0) \in \mathring{L}$ . Pour  $(f, z)$  assez voisin de  $(f_0, z_0)$ , on a encore  $f^n(z) \in \mathring{L}$  avec le même  $n$ , et  $L$  est un piège contractant pour  $f$ , d'où  $z \in A(f)$  et  $(f, z) \in \mathcal{A}$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 6.1*

(a) Fixons  $f_0 \in \mathcal{P}_d$  et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $X = X_1 \cup X_2$  un ensemble fini dans  $J(f_0) \cup A(f_0)$ , le remplissant à  $\varepsilon/2$  près, avec  $X_1 \subset J(f_0)$  et  $X_2 \subset A(f_0)$ . On peut trouver un voisinage  $W$  de  $f_0$  dans  $\mathcal{P}_d$  tel que, pour  $f \in W$ , on ait  $\partial(X_1, J(f)) \leq \varepsilon/2$  et  $X_2 \subset A(f)$ . Alors

$$\partial(X, J(f) \cup A(f)) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \partial(J(f_0) \cup A(f_0), J(f) \cup A(f)) \leq \varepsilon$$

(b) La projection  $p_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{P}_d$  est propre et  $\mathcal{K} - \mathcal{A}$  est fermé dans  $\mathcal{K}$ , donc  $p_{\mathcal{K}}$  induit une application propre  $\mathcal{K} - \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}_d$ . Cette application est surjective car  $K(f) - A(f) \supset J(f) \neq \emptyset$  pour tout  $f$ . On peut donc appliquer la proposition 2.1.  $\square$

*Démonstration du corollaire 6.2.* On peut appliquer le lemme 5.4. aux couples  $(f \mapsto J(f) \cup A(f), f \mapsto K(f))$  et  $(f \mapsto J(f), f \mapsto K(f) - A(f))$ .  $\square$

## 7. L'effet des disques de Siegel

Il est facile de voir que la présence d'un disque de Siegel produit une discontinuité dans  $f \mapsto J(f)$ . Il est beaucoup moins évident que cela n'en produit pas dans  $f \mapsto K(f)$ .

**Proposition 7.1.** *Soit  $f_0$  un polynôme de degré  $d$  ayant un point périodique indifférent irrationnel linéarisable  $x$ . Alors  $f \mapsto J(f)$  n'est pas continue en  $f_0$ .*

*Démonstration.* Soit  $k$  la période de  $x$ , le point  $x$  est solution simple de l'équation  $f_0^k(z) - z = 0$ , car la dérivée est  $\rho_x - 1 \neq 0$ . Par le théorème des fonctions implicites, on peut trouver une fonction holomorphe  $\xi : W \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $W$  est un voisinage de  $f_0$  dans  $\mathcal{P}_d$ , telle que  $\xi(f_0) = x$  et  $\xi(f)$  périodique de période  $k$  pour  $f$ . L'application  $f \mapsto \rho_{\xi(f)} = (f^k)'(\xi(f))$  est holomorphe sur  $W$ , et non constante (sinon tous les polynômes de degré  $d$  auraient un cycle indifférent!). C'est donc une application ouverte, et on peut trouver une suite  $f_n \rightarrow f_0$  telle que  $\xi(f_n)$  soit répulsif. On a alors

$$\xi(f_n) \in J(f_n) \quad \text{et} \quad \partial(\{x\}, J(f_n)) = d(x, J(f_n)) \rightarrow 0.$$

Mais  $x \notin J(f_0)$ , donc  $d(x, J(f_0)) \neq 0$ . Il en résulte que  $\partial(J(f_n), J(f_0))$  ne tend pas vers 0.  $\square$

**Proposition 7.2.** *Soit  $f_0$  un polynôme de degré  $d$  ayant un point périodique indifférent irrationnel avec un disque de Siegel  $\Delta$ . Alors  $\partial(\overline{\Delta}, K(f)) \rightarrow 0$  quand  $f \rightarrow f_0$  dans  $\mathcal{P}_d$ .*

Soit  $k$  la période de  $x$  et soit  $\phi : \Delta \rightarrow \mathbb{D}$  un isomorphisme conjuguant  $f_0^k$  à la rotation  $z \mapsto e^{2i\pi\theta}z$ . Pour  $r < 1$ , posons  $\Gamma_r = \{z \in \Delta \mid |\phi(z)| = r\}$ . Étant donné  $\alpha > 0$ , on dit qu'une suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une orbite de  $f_0$  à  $\alpha$  près si  $(\forall n) |z_{n+1} - f_0(z_n)| \leq \alpha$ . On dit que  $(z_n)$  couvre un compact  $L$  à  $\varepsilon$  près si  $\cup \overline{D}_{z_n, \varepsilon} \supset L$ .

**Lemme 7.3.** *Pour tout  $r < 1$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\alpha > 0$  tel que :*

- (a) toute suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui est une orbite de  $f_0$  à  $\alpha$  près avec  $z_0 \in \Gamma_r$  couvre  $\Gamma_r$  à  $\varepsilon$  près ;
- (b) toute suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui est une orbite pour  $f_0$  à  $\alpha$  près avec  $z_0 \in \Delta$ ,  $|\phi(z_0)| \leq r$ , et  $z_N \notin \Delta$  ou  $|\phi(z_N)| > r$  pour un certain  $N$ , couvre  $\Gamma_r$  à  $\varepsilon$  près.

*Démonstration*

(a) Fixons  $r < 1$  et  $\varepsilon > 0$ . On peut supposer  $\varepsilon < d(\Gamma_r, \mathbb{C} - \Delta)$ . On peut trouver un entier  $m$  tel que, pour tout  $z \in \Gamma_r$ , l'ensemble  $\{f_0^{ki}(z)\}_{0 \leq i < m}$  remplit  $\Gamma_r$  à  $\varepsilon/2$  près. On peut alors trouver  $\alpha$  tel que, pour toute suite  $(z_n)$  qui est une orbite pour  $f_0^k$  à  $\alpha$  près avec

$$|z_i - f_0^{ki}(z_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour } 0 \leq i < m.$$

Alors  $\{z_i\}_{0 \leq i < m}$  couvre  $\Gamma_r$  à  $\varepsilon$  près. Remarquons qu'on peut trouver un  $\alpha$  qui marche pour tout  $r \in [r_1, r_2]$  si  $r_1 < r_2 < 1$ .

(b) On peut trouver  $\varepsilon_1$  tel que  $|r - r'| \leq \varepsilon_1 \Rightarrow d_H(\Gamma_r, \Gamma_{r'}) \leq \varepsilon/2$ , et  $\alpha_1$  tel que  $|z - z'| \leq \alpha_1 \Rightarrow |\phi(z) - \phi(z')| \leq \varepsilon_1$ . D'après la partie (a), on peut trouver un  $\alpha_2$  tel que toute orbite pour  $f_0$  à  $\alpha_2$  près avec  $d(z_0, \Gamma_r) \leq \varepsilon/2$  couvre  $\Gamma_r$  à  $\varepsilon$  près. Prenons  $\alpha = \inf(\alpha_1, \alpha_2)$ . Si  $(z_n)$  satisfait aux hypothèses de (b),  $|\phi(z_n)|$  bouge par pas  $\leq \varepsilon_1$  tant qu'il est défini. Il y a donc un  $n_0$  tel que  $||\phi(z_{n_0})| - r| \leq \varepsilon_1$ , et les  $z_{n_0+p}$  couvrent  $\Gamma_r$  à  $\varepsilon$  près.  $\square$

**Lemme 7.4.** *Pour  $z \in \Delta$ , la distance  $d(z, K(f))$  tend vers 0 quand  $f \rightarrow f_0$ .*

*Démonstration.* Soit  $y$  un point périodique répulsif pour  $f_0$ . D'après le théorème des fonctions implicites, on peut trouver un voisinage  $W$  de  $f_0$  dans  $\mathcal{P}_d$  et des fonctions analytiques  $\xi$  et  $\eta : W \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $\xi(f_0) = x$ ,  $\eta(f_0) = y$ ,  $\xi(f)$  et  $\eta(f)$  périodiques pour  $f$ . Si  $z = x$ , on a  $d(z, K(f)) \leq |z - \xi(f)| \rightarrow 0$ ; on peut donc supposer  $z \neq x$  et ne s'intéresser qu'aux polynômes  $f$  pour lesquels  $z \notin K(f)$ . Puisque  $\xi(f) \in K(f)$  et  $z \notin K(f)$ , il existe un point  $w \in [\xi(f), z]_\Delta \cap J(f)$ , où  $[z', z]_\Delta = \phi^{-1}([\phi(z'), \phi(z)])$ .

Arbitrairement près de  $w$ , on peut trouver un point  $z_0 \in J(f)$  qui soit une image inverse itérée par  $f$  de  $\eta(f)$ . On peut supposer  $|\phi(z_0)| \leq r = |\phi(z)|$ . Si  $f$  est suffisamment proche de  $f_0$ , l'orbite de  $z_0$  par  $f$  est une orbite pour  $f_0$  à  $\alpha$  près. On a  $|\phi(z_0)| \leq r$  et il existe un  $N$  tel que  $z_N = \eta(f) \notin \Delta$  ou  $|\phi(\eta(f))| > r$ . Donc  $(z_n)$  couvre  $\Gamma_r$  à  $\varepsilon$  près. En particulier il y a un  $n$  tel que  $|z - z_n| < \varepsilon$ , donc  $d(z, K(f)) < \varepsilon$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 7.2.* Fixons  $\varepsilon$  et soit  $Z$  un ensemble fini dans  $\Delta$  couvrant  $\overline{\Delta}$  à  $\varepsilon/2$  près. D'après le lemme 7.4, on peut trouver un voisinage  $W$  de  $f_0$  dans  $\mathcal{P}_d$  tel que  $d(z, K(f)) \leq \varepsilon/2$  pour  $z \in Z$  et  $f \in W$ . On a alors  $\partial(\overline{\Delta}, K(f)) \leq \varepsilon$  pour tout  $f \in W$ .  $\square$

**Corollaire 7.5.** *Posons  $U = \cup_n f^{-n}(\Delta)$ . On a  $\partial(J(f_0) \cup U, K(f)) \rightarrow 0$  quand  $f \rightarrow f_0$*

**Corollaire 7.6.** *Soit  $f_0 \in \mathcal{P}_d$  un polynôme sans cycle parabolique. Alors  $f \mapsto K(f)$  est continue en  $f_0$ .*

*Indication.* L'intérieur de  $K(f_0)$  est formé exclusivement de bassins de cycles attractifs et de disques de Siegel avec leurs images inverses itérées.

### 8. Un théorème de Mañé-Sad-Sullivan

Savoir que deux compacts sont proches pour la distance de Hausdorff ne nous dit en rien qu'ils se ressemblent du point de vue topologique. Ainsi tout compact peut être approché par des ensembles de Cantor, voire par des ensembles finis.

La théorie de Mañé-Sad-Sullivan fournit des cas où l'on sait que des ensembles de Julia — ou des ensembles de Julia remplis — sont homéomorphes. Voici un des résultats principaux :

**Théorème 8.1.** *Soit  $\Lambda$  une variété  $\mathbb{C}$ -analytique et  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille  $\mathbb{C}$ -analytique de polynômes de degré  $d$ . Supposons que  $\Lambda$  soit simplement connexe, et que  $f_\lambda$  n'ait de cycle parabolique pour aucun  $\lambda$ . Choisissons un point de base  $\lambda_0 \in \Lambda$ . Alors*

(a) *on peut trouver de façon unique, une famille d'homéomorphismes*

$$(\phi_\lambda = \phi_{\lambda_0, \lambda} : J(f_{\lambda_0}) \longrightarrow J(f_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$$

*de façon que :*

- (i)  $(\lambda, x) \mapsto \phi_\lambda(x)$  *soit continue sur  $\Lambda \times J(f_{\lambda_0})$  ;*
- (ii)  $\phi_\lambda$  *conjugue  $f_{\lambda_0}$  à  $f_\lambda$ , c'est-à-dire  $\phi_\lambda \circ f_{\lambda_0} = f_\lambda \circ \phi_\lambda$  ;*

(b) *on peut étendre, pour chaque  $\lambda$ , l'application  $\phi_\lambda$  en un homéomorphisme  $\phi_\lambda : K(f_{\lambda_0}) \rightarrow K(f_\lambda)$ . Il n'y a pas d'unicité. On peut s'arranger pour que  $\phi_\lambda(x)$  dépende continûment de  $(\lambda, x)$ , mais pas toujours pour que  $\phi_\lambda$  conjugue  $f_{\lambda_0}$  à  $f_\lambda$ .*

**Corollaire 8.2.** *Soit  $S$  la fermeture dans  $\mathcal{P}_d$  de l'ensemble des polynômes ayant un cycle indifférent. Si  $f_0$  et  $f_1$  sont dans la même composante connexe de  $\mathcal{P}_d - S$ , l'ensemble  $J(f_1)$  est homéomorphe à  $J(f_0)$ , et  $K(f_1)$  est homéomorphe à  $K(f_0)$ .*

On peut trouver une démonstration du théorème 8.1 dans [21] ou dans [9]. Le corollaire 8.2 s'en déduit immédiatement : on peut trouver un ouvert simplement connexe  $\Lambda$  dans  $\mathcal{P}_d - S$  contenant  $f_0$  et  $f_1$ .

#### Remarques

(1) Fixons  $f_0$  dans  $\mathcal{P}_d - S$ . Pour  $f$  proche de  $f_0$ , le compact  $K(f)$  est l'image de  $K(f_0)$  par un homéomorphisme proche de l'identité.

Ceci est plus fort que la conclusion du Cor. 7.6. Mais l'hypothèse aussi est plus forte : on demande qu'il y ait tout un voisinage de  $f_0$  dans  $\mathcal{P}_d$  formé de polynômes n'ayant pas de cycle indifférent (on peut remplacer indifférent par parabolique, ça ne change rien).

(2) Dans le cas  $d = 2$ , pour les polynômes de la forme  $z \mapsto z^2 + c$ , l'ensemble  $S$  est la frontière de l'ensemble de Mandelbrot. Le corollaire affirme en particulier que, pour  $c_0$  et  $c_1$  dans la même composante connexe de  $\overset{\circ}{M}$ , les ensembles  $K(f_{c_0})$  et  $K(f_{c_1})$  sont homéomorphes, ainsi que  $J(f_{c_0})$  et  $J(f_{c_1})$ .

## Partie II. L'implosion parabolique

Dans cette II<sup>e</sup> partie nous analysons sur un exemple les discontinuités en un point  $f_0$  causées pour  $f \mapsto K(f)$  et  $f \mapsto J(f)$  par la présence d'un cycle parabolique pour  $f_0$ . Les §§ 9 à 13 sont essentiellement descriptifs. L'exposé devient plus technique au § 14. Le résultat principal est énoncé au § 11 (théorème 11.3). Les §§ 14 à 21 sont consacrés à donner l'essentiel de sa démonstration.

### 9. Un exemple parabolique typique

Nous choisissons l'exemple le plus simple possible, à savoir :

$$f_0 : z \mapsto z + z^2.$$

Un *point parabolique* de période  $k$  pour un polynôme de degré  $d > 1$  est un point  $\alpha$  avec  $f^k(\alpha) = \alpha$  et  $\rho = (f^k)'(\alpha) = e^{2i\pi p/q}$  pour des entiers  $k > 0$ ,  $q > 0$ ,  $0 \leq p < q$  avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux. Pour  $f_0 : z \mapsto z + z^2$  on a  $d = 2$ ,  $\alpha = 0$ ,  $k = 1$ ,  $q = 1$ ,  $p = 0$ . Nous allons faire de cet exemple une étude approfondie.

Le polynôme  $f_0$  est affinement conjugué à  $z \mapsto z^2 + 1/4$ . Le point  $1/4$  est le point de rebroussement de la grande cardioïde de l'ensemble de Mandelbrot. L'ensemble de Julia rempli  $K(f_0)$  est le *chou-fleur* centré en  $\omega = -1/2$ . Sa frontière  $J(f_0)$  est une courbe de Jordan.

Considérons maintenant

$$f_\varepsilon : z \mapsto z + z^2 + \varepsilon,$$

qui est affinement conjugué à  $z \mapsto z^2 + 1/4 + \varepsilon$ , pour  $\varepsilon$  réel voisin de 0.

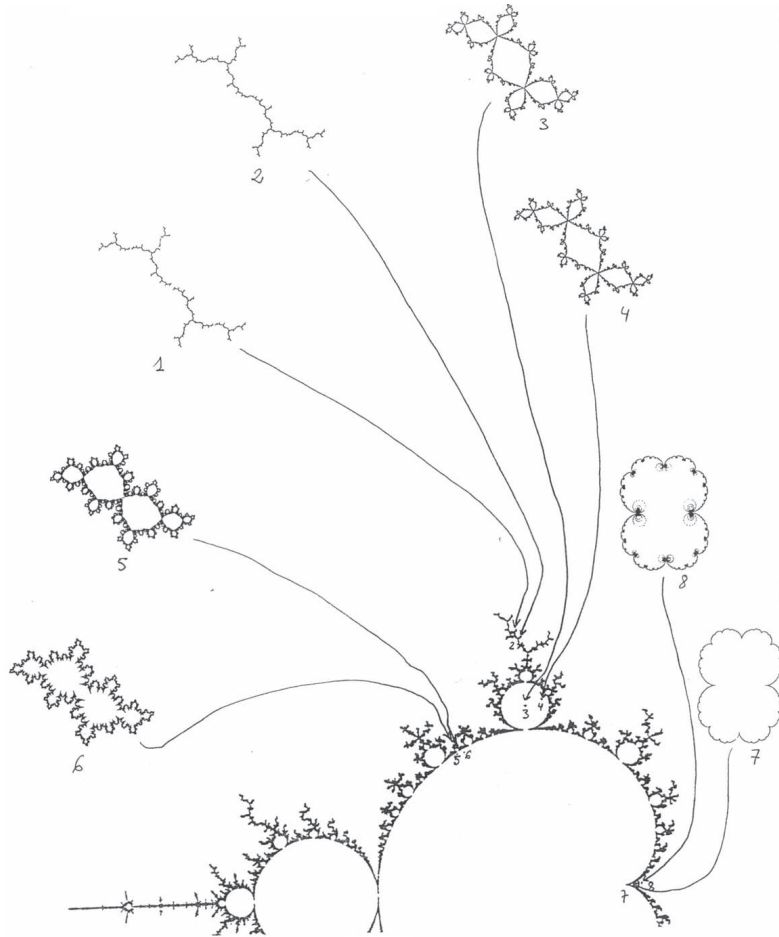


PLANCHE 2.

Pour  $\varepsilon < 0$ , le point  $1/4 + \varepsilon$  est à l'intérieur de la cardioïde, l'application  $f_\varepsilon$  a un point fixe attractif,  $K(f_\varepsilon)$  est un disque topologique,  $J(f_\varepsilon)$  est une courbe de Jordan ; on a

$$K(f_\varepsilon) \longrightarrow K(f_0) \quad \text{et} \quad J(f_\varepsilon) \longrightarrow J(f_0) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , le point  $1/4 + \varepsilon$  est à l'extérieur de l'ensemble de Mandelbrot, donc  $K(f_\varepsilon)$  est un ensemble de Cantor et  $J(f_\varepsilon) = K(f_\varepsilon)$ .



Comme  $J(f_0) \neq K(f_0)$ , il y a forcément une discontinuité dans l'une au moins des applications  $\varepsilon \mapsto K(f_\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \mapsto J(f_\varepsilon)$  sur  $\mathbb{R}_+$  en  $\varepsilon = 0$ .

### 10. Le batteur à œufs

Considérons maintenant  $f_\varepsilon : z \mapsto z + z^2 + \varepsilon$  avec  $\varepsilon > 0$  petit, disons  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  où  $\varepsilon_0 = 1/25$ . On a  $K(f_\varepsilon) \cap \mathbb{R} = \emptyset$  car  $f_\varepsilon(x) > x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , donc tout point réel s'échappe.

L'application  $f_\varepsilon$  a deux points fixes  $\alpha = i\sqrt{\varepsilon}$  et  $\bar{\alpha} = -i\sqrt{\varepsilon}$ . Si on conjugue par l'homothétie de rapport  $1/\sqrt{\varepsilon}$  de façon à envoyer  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  en  $i$  et  $-i$ , l'application devient

$$F_\varepsilon : Z \mapsto Z + \sqrt{\varepsilon}(Z^2 + 1)$$

qui est la méthode d'Euler de pas  $\sqrt{\varepsilon}$  pour l'équation différentielle

$$\dot{Z} = Z^2 + 1.$$

Les solutions de cette équation différentielles décrivent les cercles du faisceau de cercles ayant pour points limites  $i$  et  $-i$ . Les orbites de  $F_\varepsilon$  suivent approximativement ces cercles. C'est ce que nous appelons la *dynamique du batteur à œufs*.

Cette description est valable dans un compact fixe du plan des  $Z$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  (ça donne un compact qui se rétrécit dans le plan des  $z$ ).

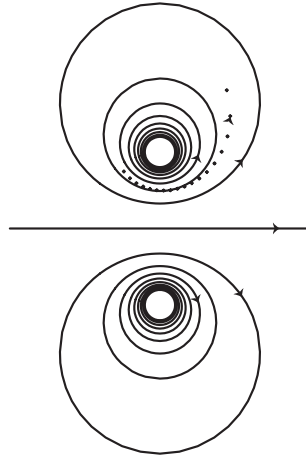


FIGURE 3.

Tandis que les points tournent sur ces cercles, ils dérivent lentement de  $\alpha$  ou  $\bar{\alpha}$  vers  $\mathbb{R}$ , car chaque pas se fait sur la tangente. Les multiplicateurs sont  $1 \pm 2i\sqrt{\varepsilon}$ , donc  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  sont très légèrement répulsifs. L'effet dominant est la rotation.

### 11. Scénarios imaginables

Qu'arrive-t-il à l'ensemble de Cantor  $K(f_\varepsilon) = J(f_\varepsilon)$  quand  $\varepsilon > 0$  tend vers 0? A priori, on peut imaginer deux scénarios (voir planche 3). Pour les décrire, introduisons une notation. L'ensemble de Cantor triadique  $C_{1/3}$  est obtenu à partir de  $I = [0, 1]$  par la recette suivante : on enlève le tiers du milieu ouvert puis on enlève le tiers du milieu (ouvert) de chacun des intervalles qui restent et on recommence : enfin on prend l'intersection des compacts ainsi obtenus.

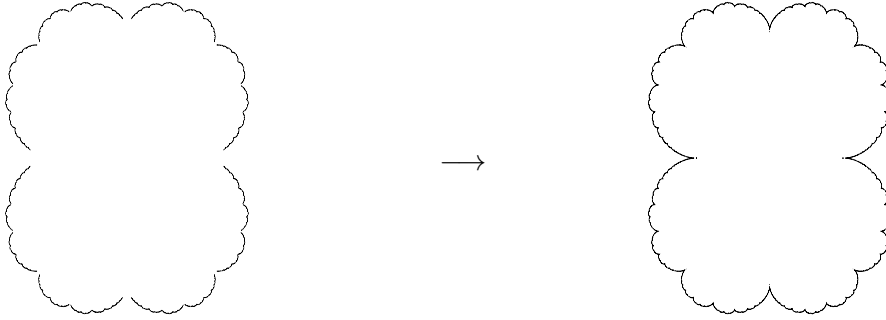
Pour  $0 < \delta$ , notons  $C_\delta$  l'ensemble de Cantor obtenu par le même procédé, sauf qu'à chaque pas on enlève de chaque intervalle de longueur  $\ell$  un intervalle ouvert centré de longueur  $\delta \cdot \ell$ .

Quand  $\delta \rightarrow 0$ , le Cantor  $C_\delta$  tend vers  $I$  (pour la métrique de Hausdorff).

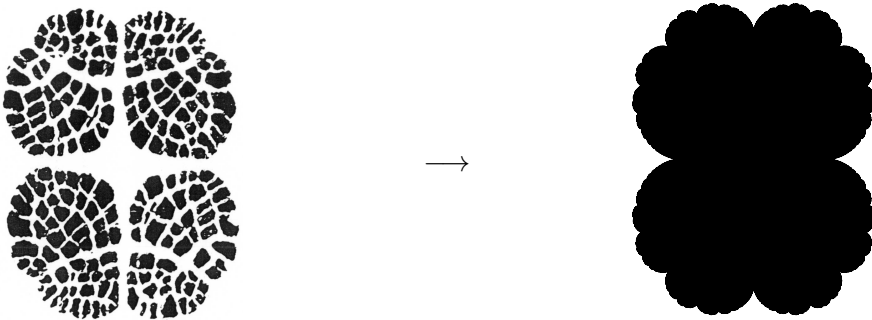
*Scénario 11.1.* Pour  $\varepsilon > 0$  petit,  $J(f_\varepsilon)$  se trouve sur une courbe voisine de  $J(f_0)$  tout comme  $C_\delta$  se trouve dans  $I$  pour  $\delta$  petit. En d'autres termes on a une famille continue  $(\Gamma_\varepsilon)$  de courbes de Jordan, et  $J_\varepsilon$  est obtenu à partir de  $\Gamma_\varepsilon$  en ôtant une infinité de petits arcs ouverts.

*Scénario 11.2.* Pour  $\varepsilon > 0$  petit,  $J(f_\varepsilon) = K(f_\varepsilon)$  est obtenu à partir de  $K(f_0)$  en y faisant une fente fine le long du segment  $K(f_0) \cap \mathbb{R}$ , et une infinité d'autres fentes très fines qui disconnectent complètement cet ensemble. Ainsi  $K(f_\varepsilon)$  se trouve situé dans  $K(f_0)$  (ou dans un disque topologique voisin) comme  $C_\delta \times C_\delta$  dans le carré  $I^2$  pour  $\delta$  petit.

Le premier scénario ne donnerait aucune discontinuité pour  $f \mapsto J(f)$ , mais en donnerait une pour  $f \mapsto K(f)$ , car  $K(f_0)$  n'est pas approximativement contenu dans  $K(f_\varepsilon) = J(f_\varepsilon)$  pour  $\varepsilon > 0$  petit.



Scénario 1



Scénario 2

## PLANCHE 3

Le second scénario ne donnerait pas de discontinuité pour  $f \mapsto K(f)$ , mais en donnerait une pour  $f \mapsto J(f)$ , car  $J(f_\varepsilon) = K(f_\varepsilon)$  n'est pas approximativement contenu dans  $J(f_0)$ .

Ce qui se passe en fait ne suit aucun de ces deux scénarios. C'est bien plus horrible, donc bien plus beau. Pour commencer les deux applications  $\varepsilon \mapsto J(f_\varepsilon)$  et  $\varepsilon \mapsto K(f_\varepsilon)$  ont une discontinuité. Est-ce que ça veut dire que  $J(f_\varepsilon) = K(f_\varepsilon)$  a une limite  $L$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  avec  $J(f_0) \not\subset L \not\subset K(f_0)$ , ou qu'il n'y a pas de limite du tout ?

Il faut bien qu'il y ait un peu une limite, pour la raison suivante : Pour  $\varepsilon \leq 1$ ,  $K(f_\varepsilon)$  est contenu dans  $\overline{D}_4$ . Or  $\text{Comp}^*(\overline{D}_4)$  est compact. Je vous ai caché cela au §1 mais, pour tout espace métrique compact  $E$  l'espace  $\text{Comp}^*(E)$  est compact pour la métrique de Hausdorff. Donc de toute suite  $(\varepsilon_n)$  tendant vers 0 on peut extraire une suite  $(\varepsilon_{n_k})$  telle que  $K(f_{\varepsilon_{n_k}})$  ait une limite  $L$ . On a  $J(f_0) \subset L \subset K(f_0)$  en vertu des propriétés de semi-continuité, et en fait on peut montrer qu'on a toujours  $J(f_0) \subsetneq L \subsetneq K(f_0)$ . Mais  $L$  dépend de la suite d'où on est parti, et éventuellement de la sous-suite choisie, de sorte que  $J(f_\varepsilon) = K(f_\varepsilon)$  ne tend pas vers une limite. Comme nous le verrons au §21, ce qui se produit est ce qui suit :

**Théorème 11.3.** *On peut trouver une application  $\tau : ]0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{T}$  appelée la fonction phase, admettant un relèvement continu  $\tilde{\tau} : ]0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$  qui tend vers  $-\infty$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  (de sorte que  $\tau$  n'a pas de limite), et une application continue injective  $\theta \mapsto L_\theta$  de  $\mathbb{T}$  dans  $\text{Comp}^*\mathbb{C}$  vérifiant  $J(f_0) \subsetneq L_\theta \subsetneq K(f_0)$  pour tout  $\theta$ , de façon que  $K(f_{\varepsilon_\nu}) \rightarrow L_\theta$  pour toute suite  $(\varepsilon_\nu)$  tendant vers 0 avec  $\tau(\varepsilon_\nu) \rightarrow \theta$ .*

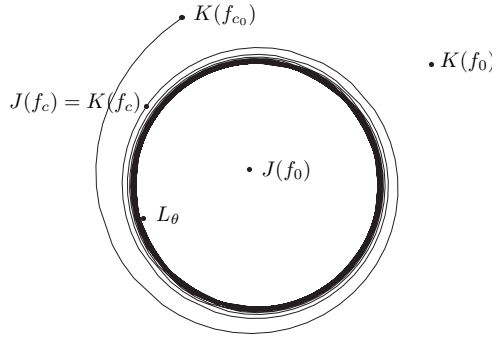


FIGURE 4. : Dans l'espace  $\text{Comp}^*(\mathbb{C})$ , les points  $L_\theta$  forment un cercle topologique, et la courbe  $(K(f_\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  spirale asymptotiquement à ce cercle quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Les points  $K(f_0)$  et  $J(f_0)$  sont isolés de cette figure.

## 12. L'implosion

Ce paragraphe est seulement descriptif.

Les dessins à l'ordinateur montrent quelque chose d'assez semblable au scénario 1, sauf qu'il y a des boucles en pointillé qui spiralent vers l'intérieur (planche 3). Le diamètre de ces boucles ne tend pas vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  chaque (grande) boucle porte une suite de petites boucles. Quand  $\varepsilon$  varie, les petites boucles voyagent le long des grandes boucles, et quand la phase a fait un tour la suite se retrouve approximativement dans la même position, simplement décalée, et les dessins sont pratiquement indiscernables. Au même moment, les toutes petites boucles qui sont sur les petites boucles sont aussi revenues à leur place.

Suivons un point  $x_\varepsilon$  quand  $\varepsilon$  varie depuis  $\varepsilon = \varepsilon_0$  jusqu'à  $\varepsilon$  tendant vers 0, au moyen des homéomorphismes  $\phi_{\varepsilon_0, \varepsilon} : K(f_{\varepsilon_0}) \rightarrow K(f_\varepsilon)$  évoqués au § 8. Autrement dit, posons

$$x_\varepsilon = \phi_{\varepsilon_0, \varepsilon}(x)$$

où  $x$  est un point choisi dans  $J(f_{\varepsilon_0})$ . Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , le point  $x_\varepsilon$  tend vers un point  $x_0 \in J(f_0)$ , et ceci définit une application  $\phi_{\varepsilon_0, 0} : J(f_{\varepsilon_0}) \rightarrow J(f_0)$ . Cette application est continue, elle est surjective mais non injective : les points de  $J(f_0)$  qui sont dans l'orbite inverse de  $\alpha_0 = 0$  ont deux images réciproques par  $\phi_{\varepsilon_0, 0}$ , les autres points en ont une. Bien que  $\phi_{\varepsilon_0, 0}$  soit continue, la convergence de  $\phi_{\varepsilon_0, \varepsilon}$  vers  $\phi_{\varepsilon_0, 0}$  a lieu ponctuellement, il n'y a pas d'uniformité. Une bonne raison est que  $\partial(J(f_\varepsilon), J(f_0)) \not\rightarrow 0$ .

Imaginons maintenant  $\varepsilon$  variant de 0 à  $\varepsilon_0$ . Les points de l'orbite inverse de  $\alpha_0$  se cassent en deux dès que  $\varepsilon$  devient  $> 0$ . Les autres points ont chacun un mouvement continu, mais il n'y a pas d'uniformité dans cette continuité. Il y a des points qui bougent très vite vers l'intérieur, de sorte qu'une région fixe de  $\mathring{K}(f_0)$  à une distance  $> 0$  de  $J(f_0)$  peut très bien se trouver envahie par des points de  $J(f_\varepsilon)$  dès que  $\varepsilon$  devient  $> 0$ .

C'est cette situation que j'essaie de décrire de façon imagée en disant que  $J(f_0)$  subit une implosion, comme un tube de télévision rempli de vide.

### 13. La raison des discontinuités

L'application  $f \mapsto K(f)$  peut se factoriser en

$$f \longmapsto \{f^n\}_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto K(f).$$

Dans ce paragraphe, nous essayons d'expliquer que la cause de la discontinuité réside dans la première application  $f \mapsto \{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Fixons des points de base réels dans  $V^-$  et  $V^+$ , disons  $a = -1/8$  et  $b = 1/8$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , on a  $f_\varepsilon^n(a) \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ , définissons le temps de batteur à œufs  $T(\varepsilon)$  comme le plus petit  $n$  tel que  $f_\varepsilon^n(a) \geq b$ . On a  $f_\varepsilon^{T(\varepsilon)}(a) \in [b, f_\varepsilon(b)]$ , donc de toute suite de valeurs de  $\varepsilon$  tendant vers 0 on peut extraire une suite  $(\varepsilon_n)$  telle que  $f_{\varepsilon_n}^{T(\varepsilon_n)}(a)$  ait une limite  $b^*$ .

**Proposition 13.1 (P. Lavaurs).** *Pour une telle suite, l'application  $f_{\varepsilon_n}^{T(\varepsilon_n)}$  converge, uniformément sur tout compact de  $\mathring{K}(f_0)$ , vers une fonction holomorphe  $g : \mathring{K}(f_0) \rightarrow \mathbb{C}$ , qui commute à  $f_0$ .*

Cette proposition sera démontrée au § 18, après qu'on ait introduit des coordonnées où il est particulièrement commode de travailler. Il s'agit des coordonnées de Fatou. La proposition 13.1 jette quelque lueur sur la raison des discontinuités.

Appelons *dynamique sur  $\mathbb{C}$*  un ensemble  $\mathcal{G}$  d'application  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ , avec  $U \subset \mathbb{C}$  ouvert, qui soit stable par restriction et composition. Autrement dit :

- (1)  $(g : U \rightarrow \mathbb{C}) \in \mathcal{G}, \quad U' \subset U \implies g|_{U'} \in \mathcal{G}.$
- (2)  $(g_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}) \in \mathcal{G}, (g_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}) \in \mathcal{G}, \quad g(U_1) \subset U_2 \implies g_2 \circ g_1 \in \mathcal{G}.$

La dynamique  $\mathcal{G}$  est *fermée* si, pour toute suite  $(g_n : U_n \rightarrow \mathbb{C})$  dans  $\mathcal{G}$ , si  $g_n \rightarrow g$  uniformément sur tout compact de  $U$ , on a  $(g : U \rightarrow \mathbb{C}) \in \mathcal{G}$ .

On dit qu'une suite  $(\mathcal{G}_\nu)$  de dynamiques sur  $\mathbb{C}$  *converge géométriquement* vers une dynamique  $\mathcal{G}$  si

- (1) Pour  $(g : U \rightarrow \mathbb{C}) \in \mathcal{G}$  on peut trouver une suite  $(g_\nu)$  avec  $(g_\nu : U_\nu \rightarrow \mathbb{C}) \in \mathcal{G}_\nu, g_\nu \rightarrow g$  uniformément sur tout compact de  $U$ ;
- (2) si  $\nu_k \rightarrow \infty, (g_{\nu_k} : U_{\nu_k} \rightarrow \mathbb{C}) \in \mathcal{G}_{\nu_k}$  pour tout  $k, g_{\nu_k} \rightarrow g : U \rightarrow \mathbb{C}$  uniformément sur tout compact de  $U$ , alors on a  $(g : U \rightarrow \mathbb{C}) \in \mathcal{G}$ .

La notion de limite géométrique est familière aux spécialistes des groupes kleinien.

Étant donné un polynôme  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , la *dynamique*  $[f]$  engendrée par  $f$  est l'ensemble des restrictions des itérées de  $f$ . Pour ce qui est des polynômes  $f_\varepsilon : z \mapsto z + z^2 + \varepsilon$ , la situation est la suivante : Pour chaque  $\varepsilon \geq 0$  la dynamique  $[f_\varepsilon]$  est fermée. Mais  $[f_0]$  n'est pas la limite des  $[f_\varepsilon]$  pour  $\varepsilon > 0$  tendant vers 0. Pour une suite  $(\varepsilon_n)$  comme dans la proposition 13.1, l'application  $g : \mathring{K}(f_0) \rightarrow \mathbb{C}$  appartient à la limite des  $[f_{\varepsilon_n}]$ , mais pas à  $[f_0]$ .

Nous ne prétendons pas pouvoir définir une application  $\mathcal{G} \mapsto K(\mathcal{G})$  avec des propriétés de continuité raisonnables, mais on peut quand même affirmer que c'est la discontinuité de  $f \mapsto [f]$  qui se reflète dans celle de  $f \mapsto K(f)$ , et aussi dans celle de  $f \mapsto J(f)$ .

#### 14. Coordonnées de Fatou

Revenons à l'application  $f_0 : z \mapsto z + z^2$ . On peut trouver des cartes dans lesquelles l'expression de  $f_0$  est

$$\zeta \mapsto \zeta + 1.$$

Plus précisément, notons  $V^-$  et  $V^+$  les disques ouverts ayant pour diamètre  $] -1/4, 0[$  et  $]0, 1/4[$  respectivement.

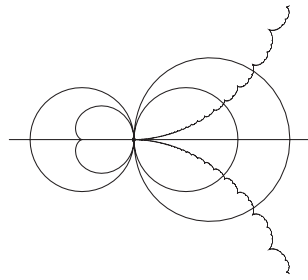


FIGURE 5.

#### **Lemme 14.1**

- (a) L'application  $f_0$  est injective sur  $V^-$  et sur  $V^+$ .
- (b) On a  $f_0(V^-) \subset V^-$  et  $f_0(V^+) \supset V^+$ .

*Démonstration.* Faisons le changement de variable  $Z = -1/z$ . L'application  $z \mapsto z_1 = z + z^2$  devient  $F : Z \mapsto Z_1 = Z + 1 + 1/(Z - 1)$ . Les disques  $V^+$  et  $V^-$  deviennent respectivement les demi-plans

$$U^+ = \{z = x + iy \mid x < -4\} \quad \text{et} \quad U^- = \{z = x + iy \mid x > 4\}.$$

Sur  $U_+ \cup U_-$ , l'application se comporte comme la translation  $Z \mapsto Z + 1$  : le terme d'erreur est majoré par  $1/4$  et sa dérivée par  $1/9$ . En particulier  $F$  est injective sur  $U^+$  et  $U^-$ , on a  $F(U^+) \subset U^-$  et  $F(U^-) \supset U^+$ . Le lemme en découle.  $\square$

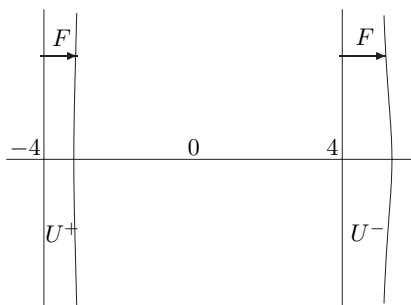


FIGURE 6.

Nous allons maintenant faire un nouveau changement de variable  $Z \mapsto \zeta$  de façon à nous débarrasser du terme d'erreur. Appelons *région gauche* (resp. *région droite*) un ensemble dans  $\mathbb{C}$  de la forme  $\{z = x + iy \mid x < h(y)\}$  (resp.  $>$ ) où  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue.

**Théorème et Définition 14.2.** *On peut trouver des applications holomorphes injectives  $\phi^+ : V^+ \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\phi^- : V^- \rightarrow \mathbb{C}$  telles que*

- (a)  $\phi^+(V^+)$  est une région gauche et  $\phi^-(V^-)$  est une région droite.
- (b)  $\phi^+(f_0(z)) = \phi^+(z) + 1$  si  $z$  et  $f(z)$  sont dans  $V^+$ ,  $\phi^-(f_0(z)) = \phi^-(z) + 1$  si  $z \in V^-$ .

*De telles applications sont appelées des coordonnées de Fatou. Elles sont uniques à une constante additive près.*

*Esquisse de démonstration.* Reprenons les notations du lemme 14.1 et de sa démonstration. Notons  $X^+ = V^+/p = U^+/F$  le quotient



de  $V^+$  par la relation d'équivalence identifiant  $z$  et  $f(z)$  quand ils sont tous deux dans  $V^+$ . L'espace  $X^+$  est une cylindre topologique et une surface de Riemann.

Il résulte du théorème d'uniformisation de Riemann que toute surface de Riemann homéomorphe à un cylindre est  $\mathbb{C}$ -analytiquement isomorphe à  $B_h/\mathbb{Z}$ , où  $B_h = \{z = x + iy \mid |y| < h/2\}$ , pour un certain  $h \in ]0, +\infty]$  appelé le *module*, ou à  $H/\mathbb{Z}$  où  $H$  est le demi-plan supérieur (module infini unilatéral). Dans le cas qui nous concerne, on peut montrer que le module est infini bilatéral, autrement dit  $X^+ \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ . Choisissons un isomorphisme  $\psi : X^+ \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  et notons  $\chi_F$  l'application de passage au quotient  $U^+ \rightarrow X^+$ . Comme  $U^+$  est simplement connexe, l'application  $\psi \circ \chi_F : U^+ \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  se relève en une application  $\phi_U^+ : U^+ \rightarrow \mathbb{C}$ . En composant avec le changement de variable  $z \mapsto Z = -1/z$ , on obtient une application  $\phi^+ : V^+ \rightarrow \mathbb{C}$ . Par construction, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} V^+ & \xrightarrow{z \rightarrow Z} & U^+ & \xrightarrow{\phi_U^+} & \mathbb{C} \\ \downarrow \chi_f & \approx & \downarrow \chi_F & & \downarrow \chi_Z \\ V^+/f & \xrightarrow{\approx} & U^+/F & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}/\mathbb{Z} \end{array}$$

Si  $Z$  et  $Z_1$  sont deux points de  $U^+$  avec  $Z_i = F(Z)$ , les points  $\phi_U^+(Z)$  et  $\phi_U^+(Z_1)$  ont même image par  $\chi_Z$ , donc diffèrent d'un entier et cet entier ne dépend pas de  $\mathbb{Z}$  (application continue d'un connexe dans un discret). On peut vérifier que  $\phi_U^+(Z_1) - \phi_U^+(Z) = 1$  (pourvu qu'on n'ait pas échangé les deux bouts), et que  $\phi^+(z) = \phi_U^+(Z)$  a les propriétés voulues.

On construit de même  $\phi^-$ .

On voit facilement que des coordonnées de Fatou sont nécessairement obtenues par ce procédé. Il y a certains choix dans la construction :

- choix de  $\psi$  : si on prend soin de ne pas échanger les deux bouts,  $\psi$  ne peut être modifié que par une translation dans le groupe  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ ;
- choix du relèvement  $\phi$  de  $\psi \circ \chi_F$  — qui ne peut être modifié que par une translation entière.

Ces choix ne modifient les coordonnées de Fatou que par l'addition d'une constante.  $\square$

*Remarque.* On peut choisir les coordonnées de Fatou réelles sur  $\mathbb{R} \cap V^+$  et  $\mathbb{R} \cap V^-$ .

## 15. Prolongement des coordonnées de Fatou

### Proposition 15.1

(a) La coordonnée de Fatou attractive  $\phi^- : V^- \rightarrow \mathbb{C}$  se prolonge en une fonction holomorphe  $\hat{\phi}^- : \mathring{K}(f_0) \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant, pour tout  $z \in \mathring{K}(f_0)$ ,

$$\hat{\phi}^-(f_0(z)) = \hat{\phi}^-(z) + 1.$$

(b) L'inverse  $\psi^+ : \phi^+(V^+) \rightarrow V^+$  de la coordonnée de Fatou répulsive se prolonge en une application  $\hat{\psi}^+ : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant, pour tout  $\xi \in \mathbb{C}$ ,

$$\hat{\psi}(\xi + 1) = f_0(\hat{\psi}^+(\xi)).$$

Nous appelons  $\hat{\phi}^-$  la *coordonnée de Fatou étendue* et  $\hat{\psi}^+$  le *paramétrage de Fatou étendu*.

*Démonstration.* Reprenons les notations de 14.1. Pour  $Z \in U^-$ ,  $|F^n(Z)|$  tend vers  $\infty$  et  $\text{Arg } F^n(Z)$  tends vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ , donc pour  $z \in U^-$  le point  $f_0^n(z)$  tend vers 0 tangentiellement à  $\mathbb{R}_-$ . Au point parabolique 0, l'unique axe d'attraction est  $\mathbb{R}_-$ , et  $\mathbb{R}_+$  est l'axe de répulsion. Le disque ouvert  $V^-$  est contenu dans le bassin de 0, et ce bassin est  $\mathring{K}(f_0)$  puisque  $\mathring{K}(f_0)$  est connexe. C'est aussi le bassin immédiat.

(a) Pour  $z \in \mathring{K}(f_0)$  on a  $f_0^n(z) \in V^-$  pour  $n$  assez grand. On pose  $\hat{\phi}^-(z) = \phi^-(f_0^n(z)) - n$  pour  $n$  assez grand, en remarquant que cela ne dépend pas du choix de  $n$ .

(b) Pour  $\xi \in \mathbb{C}$ , on a  $\xi - n \in U^+$  pour  $n$  assez grand. On pose alors  $\hat{\psi}^+(\xi) = f_0^n(\psi^+(\xi - n))$ , en remarquant que cela ne dépend pas du choix de  $n$ .

On vérifie immédiatement que  $\hat{\phi}^-$  et  $\hat{\psi}^+$  répondent à la question.  $\square$

Notons  $\omega$  le point critique  $-1/2$  de  $f_0$ , qui est centre de symétrie pour  $K(f_0)$ . Ajustons la coordonnée de Fatou  $\phi^-$  de façon que  $\widehat{\phi}^-(\omega) = 0$ . Nous avons alors :

**Proposition 15.2.** *L'application  $\widehat{\phi}^- : \mathring{K}(f_0) \rightarrow \mathbb{C}$  est un revêtement ramifié de degré infini, ramifié seulement au-dessus des entiers négatifs. Les points critiques de  $\phi^-$  sont les points pré-critiques de  $f_0$ , c'est-à-dire les points de  $\cup f_0^{-n}(\omega)$ .*

Nous n'avons pas pour  $\widehat{\psi}^+$  une aussi jolie description. Plutôt que de donner de la proposition 15.2 une démonstration en forme, nous trouvons plus instructif de donner une description détaillée (sans démonstration) de  $\widehat{\phi}^-$ .

Dans  $V^-$ , colorions le demi-disque supérieur en jaune, le demi-disque inférieur en marron et le diamètre  $V^- \cap \mathbb{R}$  en grenat. Remarquons que  $f_0(z)$  a la même couleur que  $z$ . On prolonge ce coloriage à tout  $\mathring{K}(f_0)$  en mettant  $z$  de la même couleur que  $f_0^n(z)$  pour  $n$  grand. On obtient ce que nous appelons *l'échiquier parabolique*. Ce qui est marqué en grenat est  $S = U f_0^{-n} ]-1, 0[$ , les cases sont les composantes connexes de  $\mathring{K}(f_0) - S$ . Les deux *cases principales* sont les cases  $B'$  et  $B''$  qui contiennent les demi-disques supérieur et inférieur de  $V^-$ .

L'application  $\widehat{\phi}^-$  induit un homéomorphisme biholomorphe de  $B'$  sur le demi-plan supérieur  $H$ , réalisant donc l'uniformisation de Riemann. Puisque  $\widehat{\phi}^-$  conjugue  $f_0$  à la translation  $\xi \mapsto \xi + 1$  dans  $H$ , nous pouvons dire que  $f_0 : B' \rightarrow B'$  est une application parabolique (c'est peut être de là que vient la terminologie de « points paraboliques »).

La situation est symétrique pour  $B''$ .

Les coins des cases de l'échiquier sont les points pré-critiques;  $\widehat{\phi}^-$  les envoie sur les entiers négatifs.

Pour chaque case  $B$ , il existe un entier  $n$  tel que  $f_0^n$  applique  $B$  biholomorphiquement sur  $B'$  ou  $B''$ .

## 16. Persistance des coordonnées de Fatou

Considérons maintenant  $f_\varepsilon : z \mapsto z + z^2 + \varepsilon$  avec  $\varepsilon > 0$  petit (disons  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ ,  $\varepsilon_0 = 1/25$ ). Prenons pour  $V_\varepsilon^+$  (resp.  $V_\varepsilon^-$ ) le disque bordé

par le cercle passant par  $1/4$  (resp.  $-1/4$ ) et les deux points fixes  $\alpha = i\sqrt{\varepsilon}$  et  $\bar{\alpha} = -i\sqrt{\varepsilon}$ .

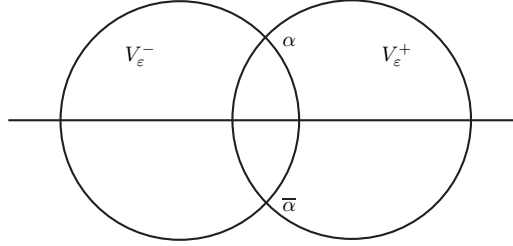


FIGURE 7.

N'espérons plus obtenir une application  $V_\varepsilon^- \rightarrow \mathbb{C}$  conjuguant  $f_\varepsilon$  à  $\xi \mapsto \xi + 1$  et appliquant  $V_\varepsilon^-$  sur une région droite, car l'orbite d'un point de  $V_\varepsilon^-$  en sort toujours au bout d'un temps fini.

**Proposition et Définition 16.1.** *On peut trouver des applications holomorphes injectives  $\phi_\varepsilon^+ : V_\varepsilon^+ \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\phi_\varepsilon^- : V_\varepsilon^- \rightarrow \mathbb{C}$  telles que*

(a)  $\phi_\varepsilon^+(V_\varepsilon^+)$  est une région de la forme

$$\{\zeta = \xi + i\eta \mid h_1^+(\eta) < \xi < h^+(\eta)\},$$

où  $h^+$  et  $h_1^+$  sont des fonctions continues  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $h^+ - h_1^+ > 1$ , et de même pour  $\phi_\varepsilon^-$ .

(b)  $\phi_\varepsilon^+(f_\varepsilon(z)) = \phi_\varepsilon^+(z) + 1$  chaque fois que  $z$  et  $f_\varepsilon(z)$  sont tous deux dans  $V_\varepsilon^+$ , et de même pour  $\phi_\varepsilon^-$ .

Nous appelons encore ces applications coordonnées de Fatou. Elles sont uniques à une constante additive près. Sur  $V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+$  elles diffèrent d'une constante.

*Esquisse de démonstration.* Nous allons adapter la démonstration de la Prop. 14.2. Le changement de variable qui convient ici est

$$z \mapsto Z = \frac{1}{2\alpha} \operatorname{Log} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$$

en choisissant sur  $V_\varepsilon^-$  (resp.  $V_\varepsilon^+$ ) la branche du Log qui est voisine de 0 quand  $\varepsilon$ , donc  $\alpha$  tend vers 0 à  $z$  fixé.

Ceci transforme  $V_\varepsilon^-$  et  $V_\varepsilon^+$  en deux bandes verticales  $U_\varepsilon^-$  et  $U_\varepsilon^+$ .

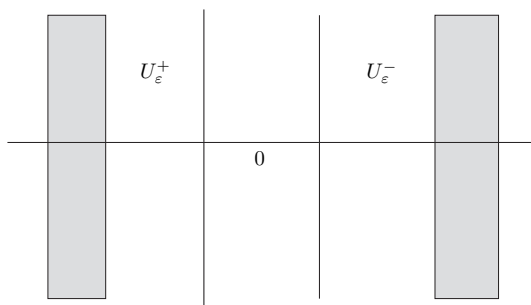


FIGURE 8.

L'application  $f_\varepsilon : z \mapsto z_1$  devient une application  $F_\varepsilon : Z \mapsto Z_1$  définie par

$$Z_1 = Z + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+z}.$$

Pour  $|z| \leq 1/4$ , le terme  $(1/\sqrt{\varepsilon}) \operatorname{Arctg} \sqrt{\varepsilon}/(1+z)$  est assez voisin de  $1/(1+z)$  pour qu'on soit sûr que sa partie réelle est  $> 0$ . Les espaces quotients  $X_\varepsilon^+ = U_\varepsilon^+/F_\varepsilon$  et  $X_\varepsilon^- = U_\varepsilon^-/F_\varepsilon$  sont des anneaux  $\mathbb{C}$ -analytiques, c'est-à-dire des surfaces de Riemann homéomorphes à des cylindres, et on peut montrer que leur module est infini bilatéral. La démonstration rejoint alors celle de 14.2 pour montrer (a), (b) et l'unicité à constante additive près. Sur l'ouvert  $V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+$ , le changement de variable  $z \mapsto Z$  ne prend pas la même valeur suivant que  $z$  est considéré comme élément de  $V_\varepsilon^-$  ou de  $V_\varepsilon^+$ . Cet ouvert donne les deux bandes  $U_\varepsilon^- \cap T_{\pi/\sqrt{\varepsilon}}U_\varepsilon^+$ . Ces bandes sont assez larges pour être sûr que l'orbite par  $F_\varepsilon$  de tout point de  $U_\varepsilon^-$  ou  $U_\varepsilon^+$  les rencontre, de sorte que les inclusions de  $V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+$  dans  $V_\varepsilon^-$  et  $V_\varepsilon^+$  induit des bijections de  $(V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+)/f_\varepsilon$  sur  $X_\varepsilon^- = V_\varepsilon^-/f_\varepsilon$  et  $X_\varepsilon^+ = V_\varepsilon^+/f_\varepsilon$ . En particulier  $(V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+)/f_\varepsilon$  est un cylindre de module infini bilatéral. On peut alors appliquer le raisonnement qui classe l'unicité à constante additive près aux restrictions de  $\phi_\varepsilon^+$  et  $\phi_\varepsilon^-$  à  $V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+$ .  $\square$

*Remarque 16.2.* Avec les conventions que nous avons prises, l'application

$$z \mapsto Z = \frac{-i}{2\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{Log} \frac{z - i\sqrt{\varepsilon}}{z + i\sqrt{\varepsilon}}$$

tend quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  vers l'application  $z \mapsto Z = -1/z$  considérée au §14. Pour obtenir cet avantage, nous en avons sacrifié un autre. Sur

l'ouvert  $V_\varepsilon^-$  et  $V_\varepsilon^+$ , on a deux valeurs de  $Z$  qui diffèrent de  $\pi/\sqrt{\varepsilon}$ . Avec un autre choix, on aurait pu s'arranger pour qu'elles coïncident et obtenir une coordonnée de Fatou sur  $V_\varepsilon^- \cup V_\varepsilon^+$ .

### 17. La phase

Les coordonnées de Fatou  $\phi_\varepsilon^-$  et  $\phi_\varepsilon^+$  tendent-elles vers  $\phi_0^-$  et  $\phi_0^+$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0?

La question a besoin d'être précisée pour deux raisons :

(1) Le domaine de définition dépend de  $\varepsilon$ . Mais cela ne pose guère de problème, car  $\mathcal{V}^- = \{(\varepsilon, z) \mid z \in V_\varepsilon^-\}$  et  $\mathcal{V}^+ = \{(\varepsilon, z) \mid z \in V_\varepsilon^+\}$  sont ouverts dans  $[0, 1] \times \mathbb{C}$ .

(2) Les applications  $\phi_\varepsilon^-$  et  $\phi_\varepsilon^+$  ne sont définies qu'à une constante additive près. Il faut donc les fixer par une normalisation.

Choisissons donc des points de base, par exemple  $a = -1/8$  et  $b = 1/8$  (qui sont dans  $V_\varepsilon^\pm$  pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ ) et normalisons  $\phi_\varepsilon^-$  et  $\phi_\varepsilon^+$  par  $\phi_\varepsilon^-(a) = \phi_\varepsilon^+(b) = 0$ .

**Proposition 17.1.** *Avec ces conventions,*

$$(\varepsilon, z) \mapsto \phi_\varepsilon^-(z) \quad \text{et} \quad (\varepsilon, z) \mapsto \phi_\varepsilon^+(z)$$

*sont continues sur  $\mathcal{V}^-$  et  $\mathcal{V}^+$  respectivement.*

La démonstration, sans être vraiment difficile, nécessite quelques outils d'analyse complexe. Nous ne la donnons pas ici.

*Remarque 17.2.* Pour  $\varepsilon > 0$ , les fonctions  $\phi_\varepsilon^-$  et  $\phi_\varepsilon^+$  diffèrent d'une constante sur  $V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+$ . Nous appelons cette constante la *phase relevée*  $\tilde{\tau}(\varepsilon)$ , c'est-à-dire que nous posons

$$\tilde{\tau}(\varepsilon) = \phi_\varepsilon^+(z) - \phi_\varepsilon^-(z) \quad \text{pour} \quad z \in V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+.$$

La phase relevée est reliée au temps de batteur à œufs  $T(\varepsilon)$  introduit au § 13 (plus petit  $n$  tel que  $f_\varepsilon^n(a) \geq b$ ) par le résultat suivant :

**Proposition 17.3.** *On a  $-T(\varepsilon) \leq \tilde{\tau}(\varepsilon) < -T(\varepsilon) + 1$ .*

*Démonstration.* Posons  $a' = f_\varepsilon^{T(\varepsilon)}(a)$ , et  $a'' = f_\varepsilon^m(a)$  avec  $m$  choisi de façon que  $a'' \in V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+$ .

On a  $\phi_\varepsilon^-(a'') = m$  et  $\phi_\varepsilon^+(a'') = \phi_\varepsilon^+(a') - (T(\varepsilon) - m)$ , d'où  $\tilde{\tau}(\varepsilon) = \phi_\varepsilon^+(a'') - \phi_\varepsilon^-(a'') = -T(\varepsilon) + \phi_\varepsilon^+(a')$ . Mais  $a' \in [b, f_\varepsilon(b)[$  par définition de  $T(\varepsilon)$ , et  $\phi_\varepsilon^+$  applique  $[b, f_\varepsilon(b)[$  sur  $[0, 1[$ , d'où  $0 \leq \phi_\varepsilon^+(a') < 1$ .  $\square$

**Corollaire 17.4.** *La phase relevée  $\tilde{\tau}(\varepsilon)$  tend vers  $-\infty$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

En effet  $T(\varepsilon) \rightarrow \infty$ , puisque  $f_\varepsilon^n(a) \rightarrow f_0^n(a) \in [a, 0[$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  avec  $n$  fixé.

*Remarque 17.5.* On peut montrer que  $\tilde{\tau}(\varepsilon) = -\pi/\sqrt{\varepsilon} + \eta + o(1)$  avec  $\eta \in \mathbb{R}$ .

On note  $\tau(\varepsilon)$  la classe de  $\tilde{\tau}(\varepsilon)$  dans  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , et nous l'appelons la *phase*. On a  $\tau(\varepsilon) = 0$  si et seulement si l'orbite de  $a$  contient  $b$ . En général,  $\tau(\varepsilon)$  nous renseigne sur la position relative des orbites de  $a$  et  $b$  à droite de  $b$ . Comme conséquence du Cor. 17.4, on a :

**Corollaire 17.6.** *La phase  $\tau(\varepsilon)$  n'a pas de limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

Pour  $\sigma \in \mathbb{C}$ , notons  $T_\sigma$  la translation  $Z \mapsto Z + \sigma$ .

**Proposition 17.7.** *Pour  $\varepsilon > 0$ , l'application*

$$(\phi_\varepsilon^+)^{-1} \circ T_{n+\tilde{\tau}(\varepsilon)} \circ \phi_\varepsilon^-$$

*coïncide avec  $f_\varepsilon^n$  là où elle est définie.*

*Démonstration.* Soit  $\xi \in \Omega_\varepsilon^- = \phi_\varepsilon^-(V_\varepsilon^-)$  un point tel que  $\xi + n + \tilde{\tau}(\varepsilon) \in \Omega_\varepsilon^+$ . Soit  $m$  le plus grand entier  $\leq n$  tel que  $\xi + m \in \Omega_\varepsilon^-$ . Alors  $\xi + i \in \Omega_\varepsilon^-$  pour  $0 \leq i \leq m$ ,  $\xi + m + \tilde{\tau}(\varepsilon) \in \Omega_\varepsilon^+$  et par suite aussi  $\xi + j + \tilde{\tau}(\varepsilon) \in \Omega_\varepsilon^+$  pour  $m \leq j \leq n$ . Si  $\zeta = \phi_\varepsilon^-(z)$ , on a

$$f^m(z) = (\phi_\varepsilon^-)^{-1}(\xi + m) = (\phi_\varepsilon^+)^{-1}(\xi + m + \tilde{\tau}(\varepsilon))$$

et

$$f^n(z) = f^{n-m}(f^m(z)) = (\phi_\varepsilon^+)^{-1}(\xi + n + \tilde{\tau}(\varepsilon)). \quad \square$$

**Corollaire 17.8.** *Soient  $x$  un point de  $V_\varepsilon^-$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $f_\varepsilon^n(x) \in V_\varepsilon^+$  et  $f_\varepsilon^i(x) \in V_\varepsilon^- \cup V_\varepsilon^+$  pour  $0 \leq i \leq n$ . Alors l'expression de  $f_\varepsilon^n$  au voisinage de  $x$ , dans les cartes  $\phi_\varepsilon^-$  et  $\phi_\varepsilon^+$ , est*

$$\xi \longmapsto \xi + n + \tilde{\tau}(\varepsilon).$$

## 18. Applications de Lavaurs

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'application  $g$  qui intervient dans la proposition 13.1.

**Définition 18.1.** Une application de Lavaurs pour  $f_0$  est une application  $\mathring{K}(f_0) \rightarrow \mathbb{C}$  de la forme  $g_\sigma$  de la forme  $\hat{\psi}^+ \circ T_\sigma \circ \hat{\phi}^-$ , où  $\hat{\phi}^-$  et  $\hat{\phi}^+$  sont la coordonnée et le paramétrage de Fatou étendus pour  $f_0$ , et  $T_\sigma$  la translation  $\xi \mapsto \xi + \sigma$ .

On a  $g_\sigma \circ f_0 = f_0 \circ g_{\sigma+1}$ . L'ensemble des applications de Lavaurs ne dépend pas du choix des coordonnées de Fatou, mais la correspondance  $\sigma \mapsto g_\sigma$  en dépend.

La proposition qui suit est un raffinement de la proposition 13.1.

**Proposition 18.2.** Soit  $(\varepsilon_\nu)$  est une suite tendant vers 0 dans  $]0, \varepsilon_0]$ , et  $(n_\nu)$  une suite d'entiers tendant vers  $+\infty$ . Supposons que  $\tilde{\tau}(\varepsilon_\nu) + n_\nu$  tende vers une limite  $\sigma \in \mathbb{R}$ . Alors  $f_{\varepsilon_\nu}^{n_\nu}$  tend, uniformément sur tout compact de  $\mathring{K}(f_0)$ , vers l'application de Lavaurs  $g_\sigma$ .

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $x_0 \in V_0^-$  et que  $\sigma$  soit tel que  $\phi_0^-(x) + \sigma \in U_0^+ = \phi_0^+(V_0^+)$ . On peut alors trouver un voisinage  $\Lambda$  de  $x$  tel que

$$(\phi_{\varepsilon_\nu}^+)^{-1} \circ T_{n_\nu + \tilde{\tau}(\varepsilon_\nu)} \circ \phi_{\varepsilon_\nu}^-$$

soit défini sur  $\Lambda$  pour  $\nu$  assez grand, et converge uniformément sur  $\Lambda$  vers  $g_0$ . Sur  $\Lambda$ , on a  $(\phi_{\varepsilon_\nu}^+)^{-1} \circ T_{n_\nu + \tilde{\tau}(\varepsilon_\nu)} \circ \phi_{\varepsilon_\nu}^- = f_{\varepsilon_\nu}^{n_\nu}$ , donc  $f_{\varepsilon_\nu}^{n_\nu} \rightarrow g_\sigma$  uniformément sur  $\Lambda$ .

Soit maintenant  $x$  un point arbitraire de  $\mathring{K}(f_0)$  et  $\sigma \in \mathbb{R}$  un réel arbitraire. On peut trouver  $m_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $x' = f_0^{m_1}(x) \in V_0^-$ , et  $\sigma' = \sigma - m_1 - m_2$  avec  $m_2 \in \mathbb{N}$  tel que  $\phi_\varepsilon^-(x') + \sigma' \in U_0^+$ . Posant  $n'_\nu = n_\nu - m_1 - m_2$ , l'application  $f_{\varepsilon_\nu}^{n'_\nu}$  tend vers  $g_\sigma$ , uniformément sur un voisinage de  $x'$ , donc  $f_{\varepsilon_\nu}^{n_\nu}$  tend vers  $f_0^{m_2} \circ g_{\sigma'} \circ f_0^{m_1} = g_\sigma$  uniformément sur un voisinage de  $x$ .  $\square$

## 19. Les ensembles $K(f_0, g_\sigma)$ et $J(f_0, g_\sigma)$

Dans ce paragraphe, nous définissons les ensembles qui vont apparaître comme limite de  $K(f_\varepsilon)$  et  $J(f_\varepsilon)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .



Considérons  $f_0$  et une application de Lavaurs  $g_\sigma$ . Nous définissons d'abord les points qui *s'échappent par*  $(f_0, g_\sigma)$ .

Un point  $\mathbb{C} - K(f_0)$  s'échappe par  $f_0$ , on dit qu'il s'échappe par  $(f_0, g_\sigma)$ . Un point de  $J(f_0)$  ne s'échappe pas par  $f_0$ , et on ne peut pas lui appliquer  $g_\sigma$ , à lui ni à aucune de ses images itérées par  $f_0$  : il ne s'échappe pas par  $(f_0, g_\sigma)$ . À un point  $z \in \overset{\circ}{K}(f_0)$  on peut appliquer  $g_\sigma$ . Si  $g_\sigma(z) \in \mathbb{C} - K(f_0)$ , il s'échappe ensuite par  $f_0$ , on dit que  $z$  s'échappe par  $(f_0, g_\sigma)$ . Si  $g_\sigma(z) \in J(f_0)$ , il reste prisonnier, donc  $z$  ne s'échappe pas par  $(f_0, g_\sigma)$ . Si  $g_\sigma(z) \in \overset{\circ}{K}(f_0)$ , on peut appliquer  $g_\sigma$  de nouveau, et cela donne à  $z$  encore une chance. Remarquons qu'appliquer d'abord  $f_0$  ne changerait rien, puisque  $f_0$  et  $g_\sigma$  commutent et que  $K(f_0)$  est invariant par  $f_0$  et  $f_0^{-1}$ .

Au total, on définit les points qui s'échappent par  $(f_0, g_\sigma)$  comme les points  $z$  tels que  $(\exists m \in \mathbb{N}) g_\sigma^m(z) \in \mathbb{C} - K(f_0)$ . À prendre au sens de : il existe un  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $g_\sigma^m(z)$  soit défini et appartienne à  $\mathbb{C} - K(f_0)$ . Ceci inclue le cas  $m = 0$ , donc les points extérieurs à  $K(f_0)$  s'échappent. Nous notons  $K(f_0, g_\sigma)$  l'ensemble des points de  $\mathbb{C}$  qui ne s'échappent pas par  $(f_0, g_\sigma)$ .

Nous définissons  $J(f_0, g_\sigma)$  comme la fermeture de

$$\{z \mid (\exists m \in \mathbb{N}) g_\sigma^m(z) \in J(f_0)\}.$$

C'est un compact contenu dans  $K(f_0)$ , et contenant  $J(f_0)$  puisque  $m = 0$  est autorisé.

**Proposition 19.1.** *L'ensemble  $J(f_0, g_\sigma)$  est la frontière de  $K(f_0, g_\sigma)$ .*

*Démonstration.* Si  $g_\sigma^m(z) \in J(f_0)$ , le point  $z$  ne s'échappe pas, donc  $z \in K(f_0, g_\sigma)$ , mais arbitrairement près de  $z$  on peut trouver un  $z'$  tel que  $g_\sigma^m(z') \in \mathbb{C} - K(f_0)$  puisque  $g_\sigma^m$  est ouverte, donc  $z \in \partial K(f_0, g_\sigma)$ . Par suite  $J(f_0, g_\sigma) \subset \partial K(f_0, g_\sigma)$ .

Réciproquement, soit  $z \in \partial K(f_0, g_\sigma)$ , et fixons  $\delta > 0$ ,  $z'$  avec  $|z' - z| < \delta$  et  $m$  tel que  $g_\sigma^m(z') \in \mathbb{C} - K(f_0)$ . Ou bien  $g_\sigma^m(z)$  est défini, ou bien  $(\exists m' < m) g_\sigma^{m'}(z) \in J(f_0)$ . Dans le premier cas,  $g_\sigma^m(z) \in K(f_0)$  et  $g_\sigma^m(z') \in \mathbb{C} - K(f_0)$ , donc il existe un  $z''$  dans le segment  $[z, z']$  tel que  $g_\sigma^m(z'') \in J(f_0)$ .

Dans les deux cas  $d(z, J(f_0, g_\sigma)) < \delta$ .

Comme ceci vaut pour tout  $\delta > 0$ , on a  $z \in J(f_0, g_\sigma)$ . □

Nous fixons notre intérêt temporairement sur le cas où  $\sigma$  est réel. Comme  $g_{\sigma+1} = g_\sigma \circ f_0 - f_0 \circ g_\sigma$ , les ensembles  $K(f_0, g_\sigma)$  et  $J(f_0, g_\sigma)$  ne dépendent que de la classe  $\theta$  de  $\sigma$  dans  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Nous les notons  $K(f_0, \theta)$  et  $J(f_0, \theta)$ .

Les propriétés de semi-continuité s'étendent à ce contexte : la proposition ci-dessous généralise le théorème 5.1.

**Proposition 19.2.** *Soit  $(\varepsilon_\nu)$  une suite tendant vers 0 avec  $\tau(\varepsilon_\nu) \rightarrow \sigma \in \mathbb{T}$ . Alors*

- (a)  $\partial(K(f_{\varepsilon_\nu}), K(f_0, \theta)) \rightarrow 0$  ;
- (b)  $\partial(J(f_0, \theta), J(f_{\varepsilon_\nu})) \rightarrow 0$ .

*Remarque 19.3.* Nous verrons au §21 qu'en fait on a  $K(f_0, \theta) = J(f_0, \theta)$  pour  $\sigma \in \mathbb{R}$ , de sorte que  $K(f_{\varepsilon_\nu})$  tend vers  $K(f_0, \theta)$ . Nous avons énoncé la proposition 19.2 sous cette forme à titre d'étape dans la démonstration de ce fait, et aussi parce qu'elle se généralise à des valeurs non réelles de  $\varepsilon$  comme on le verra au §22.

*Démonstration de la proposition 19.2*

(a) Si  $z$  s'échappe par  $(f_0, g_\sigma)$ , tout point  $z'$  suffisamment voisin de  $z$  s'échappe par  $(f_0, \sigma)$ , et aussi par  $f_{\varepsilon_\nu}$  pour  $\nu$  assez grand en vertu de la proposition 18.2. Par suite l'ensemble

$$X = \bigcup(\{\varepsilon_\nu\} \times K(f_{\varepsilon_\nu})) \cup (\{0\} \times K(f_0, g_\sigma))$$

est fermé dans  $(\{\varepsilon_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \cup \{0\}) \times D_4$ , donc compact, et on peut appliquer la proposition 2.1.

(b) Soit  $\sigma \in \mathbb{R}$  un représentant de  $\theta$ , et définissons  $n_\nu \in \mathbb{N}$  de façon que  $\tilde{\tau}(\varepsilon_\nu) + \eta_\nu \rightarrow \sigma$ .

Soit  $X_0$  un point périodique répulsif pour  $f_0$ . Par le théorème des fonctions implicites, on peut trouver une application analytique  $\varepsilon \mapsto x_\varepsilon$  donnant  $x_0$  et telle que  $x_\varepsilon$  soit périodique répulsif de même période pour  $f_\varepsilon$ , au moins si  $\varepsilon$  est assez petit.

Les points  $z$  tels que  $(\exists m, \ell) f_0^\ell g_\sigma^m(z) = x_0$  forment un ensemble dense dans  $J(f_0, g_0)$ . Pour un tel point  $z$ , on a  $g_\sigma^i(z) \in \overset{\circ}{K}(f_0)$  pour  $0 \leq i < m$ , et  $f_{\varepsilon_\nu}^{mn_\nu} \rightarrow g_\sigma^m$  uniformément sur un voisinage de  $z$ . On peut donc trouver une suite  $(z_\nu)$  tendant vers  $z$  telle que  $f_{\varepsilon_\nu}^{mn_\nu + \ell}(z_\nu) = x_{\varepsilon_\nu}$ . Par suite  $d(z, J(f_{\varepsilon_\nu})) \rightarrow 0$ .

Par un raisonnement semblable à celui de la démonstration du théorème 5.1 (b), on montre que

$$\partial(J(f_0, \theta), J(f_{\varepsilon\nu})) \longrightarrow 0. \quad \square$$

## 20. Le cas où le point critique s'échappe

Soit  $\omega$  le point critique de  $f_0$  à savoir  $\omega = -1/2$ . Choisissons  $\sigma \in \mathbb{C}$ .

**Théorème 20.1 (P. Lavaurs).** *Si  $\omega \notin K(f_0, g_0)$ , l'ensemble  $K(f_0, g_\sigma)$  est d'intérieur vide. En d'autres termes on a  $K(f_0, g_\sigma) = J(f_0, J_\sigma)$ .*

Ce résultat est assez délicat à démontrer, et nous nous contenterons d'indiquer les pas de la démonstration. Tous les résultats de ce paragraphe sont tirés de la thèse de Lavaurs.

Nous disons qu'un point  $z$  est périodique pour  $(f_0, g_\sigma)$  si

$$(\exists m, \ell, m + \ell > 0) \quad f_0^\ell \circ g_\sigma^m(z) = z$$

(ce qui signifie que  $f_0^\ell g_\sigma^m(z)$  est défini et  $= z$ ). Le multiplicateur  $\rho$  de  $z$  est alors  $(f_0^\ell \circ g_\sigma^m)'(z)$ , nous disons que  $z$  est répulsif si  $|\rho| > 1$ , etc. Les points périodiques de  $f_0$  sont périodiques pour  $(f_0, g_\sigma)$ , car on peut prendre  $m = 0$ .

Un point périodique pour  $(f_0, g_\sigma)$  est aussi périodique pour  $(f_0, g_{\sigma-1})$  car  $g_\sigma^m = f_0^m g_{\sigma-1}^m$ . Nous dirons que  $z$  est un *point périodique généralisé* pour  $(f_0, g_\sigma)$  si  $z$  est périodique pour  $(f_0, g_{\sigma-k})$  pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ .

Il nous faut également prendre en compte les deux *multiplicateurs virtuels* (ou *multiplicateurs renormalisés*) du point fixe  $\alpha_0$  de  $f_0$ . Ils sont définis de la façon suivante :

L'application  $g_\sigma$  induit un isomorphisme

$$E_\sigma : X_0^- = V^-/f_0 \xrightarrow{\sim} X_0^+ = V^+/f_0.$$

D'autre part un point  $\xi \in X_0^+$  qui est suffisamment voisin d'un des bouts du cylindre est représenté par des points de  $V^+ \cap \mathring{K}(f_0)$  qui sont dans la même orbite, et qui définissent donc un point du quotient  $\mathring{K}(f_0)/f_0$  qui est aussi  $X_0^-$ . On définit de cette façon l'*application des cornes*  $h : X_0^+ - A \rightarrow X_0^-$ , où  $A$  est un anneau compact.

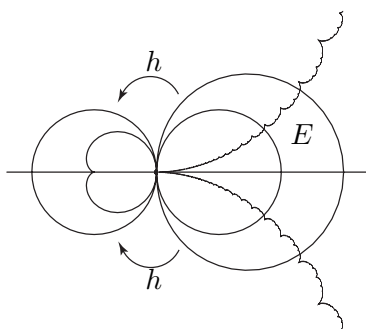


FIGURE 9.

En composant, on obtient une application  $E_\sigma \circ h : X_0^+ - A \rightarrow X_0^+$ . On compactifie  $X_0^+$  en la sphère de Riemann  $\bar{\mathbb{C}}$ , envoyant les deux bouts du cylindres sur 0 et  $\infty$ . On obtient ainsi une application

$$L : \bar{\mathbb{C}} - A \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$$

ayant 0 et  $\infty$  comme points fixes, et que nous appelons la *renormalisée* (parabolique) de  $(f_0, g_\sigma)$ . Les *multiplicateurs virtuels* de  $(f_0, g_\sigma)$  en  $\alpha_0$  sont par définition les multiplicateurs de  $L$  en 0 et  $\infty$ . On dit que  $\alpha_0$  est virtuellement attractif d'un côté et virtuellement répulsif de l'autre si l'un de ces multiplicateurs est de module  $< 1$  et l'autre de module  $> 1$ , etc.

Si  $\alpha_0$  est virtuellement attractif, parabolique ou de Siegel d'un côté, on peut définir son bassin ou son domaine de Siegel de ce côté. Les théorèmes 4.2 et 4.3 de Sullivan et Fatou s'étendent à ce contexte :

**Proposition 20.2.** *Toute composante connexe  $U$  de  $\hat{K}(f_0, g_\sigma)$  est pré-périodique au sens généralisé, c'est-à-dire qu'il existe des entiers naturels  $\ell, m, k$  avec  $\ell + m > 0$  tels que  $f_0^\ell g_\sigma^m(U)$  soit périodique pour  $(f_0, g_{\sigma-k})$ .*

**Proposition 20.3.** *Toute composante connexe périodique de  $\hat{K}(f_0, g_\sigma)$  est de l'un des types suivants :*

(i) *le bassin attractif, le bassin parabolique ou le disque de Siegel d'un point périodique pour  $(f_0, g_\sigma)$  autre que le point fixe parabolique  $\alpha_0$  ;*

(ii) le bassin attractif virtuel, le bassin parabolique virtuel ou le domaine de Siegel de  $\alpha_0$  d'un côté.

Pour obtenir le théorème 20.1, il nous reste à démontrer :

**Proposition 20.4.** *Si  $\omega$  n'est pas dans  $K(f_0, g_\sigma)$ , tous les points périodiques pour  $(f_0, g_\sigma)$  sont répulsifs, sauf le point parabolique  $\alpha_0$  qui, lui, est virtuellement répulsif des deux côtés.*

## 21. Le cas où $\sigma$ est réel

**Proposition 21.1.** *Pour  $\sigma \in \mathbb{R}$ , on a*

$$K(f_0, g_\sigma) = J(f_0, g_\sigma).$$

*Démonstration.* On a  $\hat{\phi}^-(\mathbb{R} \cap \hat{K}(f_0)) = \mathbb{R}$ ,  $T_\sigma(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  et  $\hat{\psi}^+(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ . Donc  $g_\sigma(\omega) \in \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{C} - K(f_0) \subset \mathbb{C} - K(f_0, g_\sigma)$ , et on peut appliquer le théorème 20.1.  $\square$

**Corollaire 21.2.** *Soit  $(\varepsilon_\nu)$  une suite tendant vers 0 dans  $]0, \varepsilon_0]$  telle que  $\tau(\varepsilon_\nu) \rightarrow \theta \in \mathbb{T}$ . Alors  $K(f_{\varepsilon_\nu})$  tend vers  $K(f_0, \theta)$  pour la métrique de Hausdorff.*

*Démonstration.* Ce n'est pas autre chose que la Prop. 19.2, en remarquant que l'on a  $K(f_{\varepsilon_\nu}) = J(f_{\varepsilon_\nu})$  car  $c_{\varepsilon_\nu} = 1/4 + \varepsilon_\nu$  est en dehors de l'ensemble de Mandelbrot, et  $K(f_0, \theta) = J(f_0, \theta)$  d'après la Prop. 21.1.  $\square$

Ce corollaire constitue un raffinement du théorème 11.3, qui est donc démontré (à partir des résultats admis au § 20).

## 22. Et pour $\varepsilon$ non réel ?

Faisons maintenant parcourir à  $\varepsilon$  le secteur  $S \subset \mathbb{C}$  défini par  $|\varepsilon| \leq r_0 = 1/25$  et  $|\text{Arg } \varepsilon| \leq \pi/4$ , soit  $\text{Re } \varepsilon \geq |\text{Im } \varepsilon|$ . L'application  $f_\varepsilon : z \mapsto z + z^2 + \varepsilon$  a deux points fixes  $\alpha = i\sqrt{\varepsilon}$  et  $\alpha' = -i\sqrt{\varepsilon}$ . Entre les deux, on a encore une dynamique de batteur à œufs.

On peut définir pour tout  $\varepsilon \in S^* = S - \{0\}$  des ouverts  $V_\varepsilon^+$  et  $V_\varepsilon^-$  de façon que :

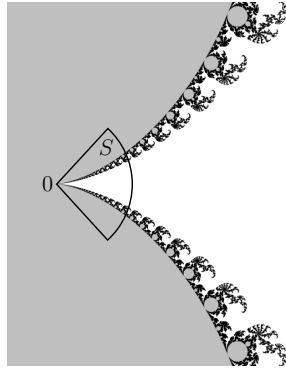


FIGURE 10.

(1)  $V_\varepsilon^-$  tendent vers  $V_0^- = V^-$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  au sens suivant :  $\overline{V_\varepsilon^-} \rightarrow \overline{V_0^-}$  et  $\partial V_\varepsilon^- \rightarrow \partial V_0^-$  pour la métrique de Hausdorff (ce qui entraîne que tout compact de  $V_0^-$  est contenu dans  $V_\varepsilon^-$  pour  $\varepsilon$  assez voisin de 0), de même pour  $V_\varepsilon^+$  ;

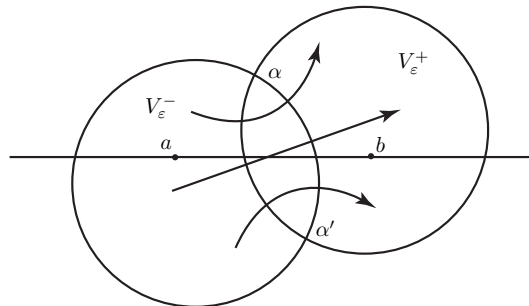


FIGURE 11.

(2)  $V_\varepsilon^-/f_\varepsilon$ ,  $V_\varepsilon^+/f_\varepsilon$  et  $V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+/f_\varepsilon$  soient des cylindres topologiques, et les inclusions de  $V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+$  dans  $V_\varepsilon^-$  et  $V_\varepsilon^+$  induisent des bijections de  $(V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+)/f_\varepsilon$  sur  $V_\varepsilon^-/f_\varepsilon$  et  $V_\varepsilon^+/f_\varepsilon$ .

Cette fois nous ne cherchons pas à définir  $V_\varepsilon^-$  et  $V_\varepsilon^+$  explicitement. On a encore des coordonnées de Fatou  $\phi_\varepsilon^- : V_\varepsilon^- \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\phi_\varepsilon^+ : V_\varepsilon^+ \rightarrow \mathbb{C}$ . Elles sont uniques à une constante additive près et diffèrent par une constante sur  $V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+$ . Pour  $\varepsilon$  assez petit, on a  $a = -1/8 \in V_\varepsilon^-$  et

$b = 1/8 \in V_\varepsilon^+$ , et on peut s'arranger pour que cela ait lieu pour tout  $\varepsilon \in S$ . On normalise  $\phi_\varepsilon^-$  et  $\phi_\varepsilon^+$  par  $\phi_\varepsilon^-(u) = \phi_\varepsilon^+(b) = 0$ , et on définit la phase relevée  $\tilde{\tau}(\varepsilon)$  comme la valeur de  $\phi_\varepsilon^+ - \phi_\varepsilon^-$  sur  $V_\varepsilon^- \cap V_\varepsilon^+$ .

La fonction  $\tilde{\tau}$  est holomorphe, et le développement limité

$$\tilde{\tau}(\varepsilon) = -\pi/\sqrt{\varepsilon} + \eta + o(1)$$

est valable au voisinage 0 sur  $S$ . On définit la *phase complexe*  $\tau(\varepsilon)$  comme la classe de  $\tilde{\tau}(\varepsilon)$  dans  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ .

Dans ce cadre, la proposition 19.2 est valable sans changement, avec la même démonstration. Les résultats du § 20 ont été énoncés avec  $\sigma$  complexe, ils peuvent donc s'appliquer légitimement. Mais les résultats du § 21 sont spécifiques du cas  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $(\varepsilon_\nu)$  suite dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

Prenons maintenant une suite  $(\varepsilon_\nu)$  tendant vers 0 dans  $S^*$ , avec  $\tau(\varepsilon_\nu) \rightarrow \theta \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ .

- Si  $K(f_0, \theta) = J(f_0, \theta)$ , on a  $K(f_{\varepsilon_\nu}) \rightarrow K(f_0, \theta)$  et  $J(f_{\varepsilon_\nu}) \rightarrow J(f_0, \theta) = K(f_0, \theta)$  (cf. proposition 2.1).

- Si l'intérieur de  $K(f_0, \theta)$  consiste exclusivement en bassins attractifs ou virtuellement attractifs, on peut adapter la démonstration du corollaire 6.2 et montrer que  $K(f_{\varepsilon_\nu}) \rightarrow K(f_0, \theta)$  et  $J(f_{\varepsilon_\nu}) \rightarrow J(f_0, \theta)$ .

- Dans le cas général, on peut toujours extraire de  $(\varepsilon_\nu)$  une suite telle que  $f(\varepsilon_\nu)$  et  $J(\varepsilon_\nu)$  aient des limites  $K^*$  et  $J^*$ . On a alors

$$J(f_0) \subsetneq J(f_0, \theta) \subset J^* \subset K^* \subset K(f_0, \theta) \subsetneq K(f_0).$$

Ceci garantit en tout cas qu'on a une discontinuité pour  $f \mapsto K(f)$  et  $f \mapsto J(f)$  le long de la suite  $(\varepsilon_\nu)$ .

### 23. L'éléphant limite

Dans le plan des valeurs de  $\sigma$ , définissons  ${}^\sigma M$  par

$${}^\sigma M = \{\sigma \mid \omega \in K(f_0, g_0)\}.$$

Cet ensemble est invariant par la translation  $T_1 : \sigma \mapsto \sigma + 1$ .

Considérons d'autre part l'ensemble de Mandelbrot  ${}^c M = M$ , qui est le lieu de connexité de la famille  $(z^2 + c)_{c \in \mathbb{C}}$ . Notons  $W_0$  la composante principale de  ${}^c M$  (celle qui contient 0). Soit  ${}^\lambda M$  l'image inverse de  ${}^c M$  par  $\lambda \mapsto c = \lambda/2 - \lambda^2/4$ , qui est le lieu de connexité de la famille  $(\lambda z(1 - 2))_{\lambda \in \mathbb{C}}$ . Correspondant à  $W_0$  il y a dans  ${}^\lambda M$  les deux disques  $D_{0,1}$  et  $D_{2,1}$ . En faisant le nouveau changement de variable

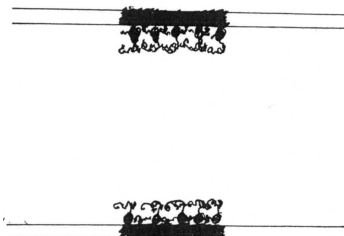


FIGURE 12. :  ${}^{\sigma}M$

$\mu = -2i\pi/(\lambda - 1)$ , on obtient les deux demi plans  $\{\mu \mid \text{Im } \mu > \pi\}$  et  $\{\mu \mid \text{Im } \mu < -\pi\}$ , correspondant aux deux disques. Il contient des « membres » attachés aux points  $x_n \pm i\pi$ ,  $x_n = \pi/\text{tg}(\pi/n)$ , qui ressemblent à des éléphants, avec des bébés éléphants entre eux.

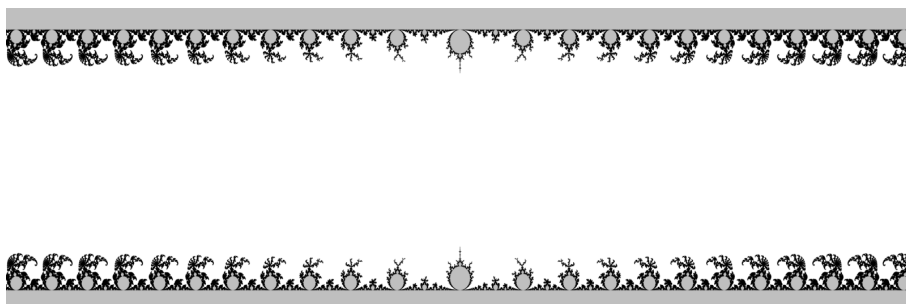


FIGURE 13. :  ${}^{\mu}M$

Si on regarde l'image  $\tilde{\tau}M$  de  $M \cap S^*$  par  $\tilde{\tau} : S^* \rightarrow \mathbb{C}$ , on obtiendra essentiellement la même chose puisque  $c = 1/4 + \varepsilon$  donne  $\mu = -\pi/\sqrt{\varepsilon}$  et qu'on a  $\tilde{\tau}(\varepsilon) = \mu + \eta + o(1)$ . Les dessins d'ordinateur montrent que  ${}^{\mu}M$  ressemble de plus en plus à  ${}^{\sigma}M$  à mesure qu'on se déplace vers la gauche. Pour formuler un énoncé précis, il nous faut définir une topologie sur l'ensemble des fermés non nécessairement compacts de  $\mathbb{C}$ .

Pour  $X \subset \mathbb{C}$  fermé et  $R > 0$ , posons

$$[X]_R = (X \cap D_R) \cup \partial D_R.$$



On dit qu'une suite  $(X_n)$  de fermés tend vers un fermé  $X_0$  si  $[X_n]_R$  tend vers  $[X_0]_R$  pour tout  $R$  fixé au sens de la métrique de Hausdorff.

**Conjecture 23.1.** *Le translaté  $T_{\eta+n}^\mu M$  tend vers  ${}^\sigma M$  quand  $n \rightarrow \infty$ .*

La moitié de cette conjecture peut se démontrer assez facilement.

**Théorème 23.2 (Lavaurs).** *Pour tout  $R > 0$ ,  $\partial([T_{\eta+n}^\mu M]_R, [{}^\sigma M]_R) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .*

C'est un énoncé de semi-continuité supérieure. Le point clé est encore que le fait de s'échapper est une propriété ouverte.

L'autre moitié,  $\partial([{}^\sigma M]_R, [T_{\eta+n}^\mu M]_R) \rightarrow 0$ , semble pour le moment hors d'atteinte. On peut montrer que

$$(\forall R) \quad \partial([\partial {}^\sigma M]_R, [T_{\eta+n} \partial^\mu M]_R) \longrightarrow 0$$

(attention, dans cette formule,  $\partial$  a deux sens différents !). Mais il reste une possibilité que l'intérieur de  ${}^\sigma M$  ait des composantes farfelues qui ne soient pas limites de composantes non hyperboliques de  $M$  ; autant dire que la question est au moins du niveau de la conjecture M.L.C.

## 24. Autres polynômes ayant un cycle parabolique

Regardons d'abord les polynômes quadratiques, qui peuvent toujours par conjugaison affine se mettre sous la forme  $P_c : z \mapsto z^2 + c$ . Soit  $P_{c_0}$  un polynôme ayant un cycle parabolique d'ordre  $k$ , de multiplicateur  $p = e^{2i\pi p/q}$  (avec  $p$  et  $q$  premier entre eux). Dans le plan des paramètres,  $c_0$  est la « racine » d'une « composante hyperbolique » de  $\dot{M}$ , composante connexe de  $\dot{M}$  telle que  $P_c$  a un cycle attractif pour  $c \in W$ .

Il convient de distinguer deux cas :

*Cas primitif.*  $\rho = 1$ ,  $W$  est une composante primitive ;  $\partial W$  a un point de rebroussement aux points  $c_0$ , le cycle attractif de  $P_c$  pour  $c \in W$  est d'ordre  $k$ .

La fermeture de chaque composante connexe de  $\dot{K}(P_{c_0})$  est un « chou-fleur ». Quand  $c$  parcourt un petit secteur de sommet  $c_0$  axé sur le rebroussement, chaque chou-fleur subit une modification semblable à celle du chou-fleur standard  $K(P_{1/4})$ , sauf qu'il n'y a en plus

des filaments qui suivent grossièrement le segment réel axe du chou-fleur et toutes ses images réciproques. Si  $c$  est sur le filament de  $M$  qui mène à  $c_0$ , les filaments dans  $K(P_c)$  maintiennent l'ensemble de Julia connexe.

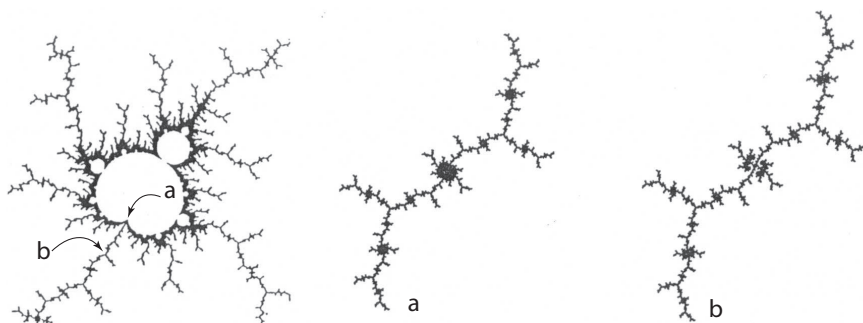


FIGURE 14.

*Cas satellite.*  $\rho = e^{2i\pi p/q}$ ,  $0 < p < q$ ,  $p$  et  $q$  premiers entre eux. La composante  $W$  est attachée en  $c_0$  à une composante  $W_0$  et  $c_0$  a  $p/q$  comme argument interne dans  $W_0$ . La période de  $f_c$  pour  $c \in W$  (resp.  $W_0$ ) est  $k_q$  (resp.  $k$ ). On peut dessiner dans  $\mathbb{C}$  deux secteurs  $S'$  et  $S''$  de sommet  $c_0$ , centrés sur les deux demi-tangentes communes à  $W_0$  et  $W$ .

Quand  $c$  décrit ces secteurs, il se produit pour chaque composante connexe de  $\hat{K}(P_{c_0})$  des phénomènes analogues à ceux qui concernent le chou-fleur standard.

Pour les polynômes quadratiques, le nombre  $Q$  d'axes de répulsion en un point parabolique de multiplicateur  $p/q$  est toujours égal à  $q$ . Pour un polynôme de degré supérieur, on peut seulement affirmer que  $Q$  est multiple de  $q$ . Si  $Q = q$ , il se produit des phénomènes analogues à ceux du cas quadratique, et qui peuvent être analysés par le même méthode. Si  $Q > q$ , la situation est plus compliquée, et n'a jamais été complètement étudiée jusqu'ici. Mais il y a toujours des sous-familles qui peuvent être analysées de cette façon.

En tout cas il y a toujours une discontinuité pour  $f \mapsto K(f)$  et une pour  $f \mapsto J(f)$ , en un point  $f_0$  qui a un cycle parabolique.

## Références

- [1] P. BLANCHARD – « Complex analytic dynamics on the Riemann sphere », *Bull. Amer. Math. Soc.* **11** (1984), p. 85–141.
- [2] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématiques, Topologie générale, Ch. 1*, Hermann, Paris, 1971.
- [3] B. BRANNER – « The Mandelbrot set », in *Chaos and fractals : the mathematics behind the computer graphics*, Proceedings of Symposia in Applied Math., vol. 39, American Mathematical Society, Providence, RI, 1989, p. 75–105.
- [4] H. BROLIN – « Invariant sets under iteration of rational functions », *Arkiv för Mat.* **6** (1965), p. 103–144.
- [5] H. CREMER – « Über der Häufigkeit der Nichtzentren », *Math. Ann.* **115** (1938), p. 573–580.
- [6] A. DOUADY – « Systèmes dynamiques holomorphes », in *Séminaire Bourbaki*, Astérisque, vol. 105-106, Société Mathématique de France, Paris, 1983, Exp. no. 599, p. 39–63.
- [7] ———, « Julia sets and Mandelbrot set », 1986, in [23].
- [8] ———, « Disques de Siegel et anneaux de Hermann », in *Séminaire Bourbaki*, Astérisque, vol. 152-153, Société Mathématique de France, Paris, 1987, Exp. no. 677, p. 151–172.
- [9] ———, « Prolongements de mouvements holomorphes », in *Séminaire Bourbaki*, Astérisque, Société Mathématique de France, Paris, 1993, Exp. no. 775.
- [10] A. DOUADY & J. H. HUBBARD – « On the dynamics of polynomial-like mappings », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **18** (1975), p. 287–343.
- [11] ———, « Itération des polynômes quadratiques complexes », *C. R. Acad. Sci. Paris* **294** (1982), p. 123–126.
- [12] ———, *Étude dynamique des polynômes complexes. Parties I & II*, Publ. Math. Orsay, vol. 84-2 & 85-4, Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1984 & 1985.
- [13] J. ECALLE – « Théorie itérative : introduction à la théorie des invariants holomorphes », *J. Math. Pures Appl.* **54** (1975), p. 183–258.
- [14] P. FATOU – « Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles », *C. R. Acad. Sci. Paris* **143** (1906), p. 546–548.
- [15] ———, « Sur les équations fonctionnelles », *Bull. Soc. Math. France* **47** (1919), p. 161–271, & **48** (1920), p. 33-94 & p. 208-314.
- [16] G. JULIA – « Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles », *J. Math. Pures Appl.* **4** (1918), p. 47–245.
- [17] P. LAVAURS – « Systèmes dynamiques holomorphes : explosion de points périodiques paraboliques », Thèse, Université Paris 11, 1989.
- [18] L. LEAU – « Étude sur les équations fonctionnelles à une ou plusieurs variables », *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **11** (1887), p. 1–110.
- [19] TAN. LEI – « Similarity between the Mandelbrot set and Julia sets », *Comm. Math. Phys.* **134** (1990), p. 587–617.
- [20] M. YU. LYUBICH – « The dynamics of rational transforms : the topological picture », *Russian Math. Surveys* **41** (1986), p. 43–117.
- [21] R. MAÑÉ, P. SAD & D. SULLIVAN – « On the dynamics of rational maps », *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* **16** (1983), p. 193–217.
- [22] J. MILNOR – *Dynamics in one complex variable : Introductory lectures*, Institute for Math. Sci., SUNY, Stony Brook, 1990.
- [23] H.-O. PEITGEN & P. RICHTER – *The beauty of fractals*, Springer-Verlag, 1986.

- [24] M. SHISHIKURA – « The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets », *Annals of Math.* **147** (1998), no. 2, p. 225–267.
- [25] C. L. SIEGEL – « Iteration of analytic functions », *Annals of Math.* **43** (1942), p. 607–612.
- [26] N. STEINMETZ – *Rational iteration (complex analytic dynamical systems)*, de Gruyter, Berlin, 1993.
- [27] D. SULLIVAN – « Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I, Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains », *Annals of Math.* **122** (1985), p. 401–418.
- [28] S. M. VORONIN – « Analytic classifications of germs of conformal mappings of germs  $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  with identity linear part », *Functional Analysis Appl.* **15** (1981), p. 1–13.
- [29] J.-C. YOCCOZ – « Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de  $(\mathbb{C}, 0)$  », *C. R. Acad. Sci. Paris* **306** (1988), p. 55–58.

Adrien Douady, Département de Mathématiques, Bât. 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France