

# Journées mathématiques X-UPS

Année 1995

## Aspects géométriques et combinatoires de la convexité

Jean-Jacques RISLER

### Construction de courbes réelles

*Journées mathématiques X-UPS* (1995), p. 51-69.

<https://doi.org/10.5802/xups.1995-03>

© Les auteurs, 1995.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence

LICENCE INTERNATIONALE D'ATTRIBUTION CREATIVE COMMONS BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Les Éditions de l'École polytechnique  
Route de Saclay  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<https://www.editions.polytechnique.fr>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz  
CMLS, École polytechnique, CNRS,  
Institut polytechnique de Paris  
F-91128 PALAISEAU CEDEX  
<https://portail.polytechnique.edu/cmls/>



Publication membre du

Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

[www.centre-mersenne.org](http://www.centre-mersenne.org)

## CONSTRUCTION DE COURBES RÉELLES

*par*

Jean-Jacques Risler

---

### Table des matières

1. Introduction.....	51
2. Compactifications de $(\mathbb{R}^*)^2$ .....	54
3. Carte d'un polynôme.....	58
4. Collage de cartes.....	59
5. Applications et compléments.....	64
Références.....	69

### 1. Introduction

L'étude de la topologie des courbes algébriques réelles projectives planes et lisses (et plus généralement des hypersurfaces projectives) a une longue histoire. Il s'agit du problème suivant : quelle peut être la topologie du plongement d'une courbe plane (ou d'une hypersurface) lisse de degré  $d$  dans l'espace projectif ?

Cette question a fait l'objet d'un des problèmes de Hilbert (le 16-ième) qui posait la question pour les courbes de degré 6, et les surfaces de degré 4. Le cas des courbes de degré 6 a été résolu par Gudkov en 1973 (cf. [5]), et celui des surfaces de degré 4 par Kharlamov en 1977 ([8]). Le cas des courbes de degré 7 a été résolu par Viro, et celui

---

*Publication originelle dans* Journées X-UPS 1995. Aspects géométriques et combinatoires de la convexité. Prépublication du Centre de mathématique de l'École polytechnique, 1995.

des courbes de degré 8 n'est pas encore complètement élucidé. Pour des panoramas sur la question, on peut consulter [5], [1], [14] ou [12].

Nous allons dans cet exposé nous restreindre au cas des courbes planes, bien que les techniques indiquées plus bas soient en principe valables en toutes dimensions. On peut justifier ce parti pris par un souci d'alléger l'exposé, et par le fait que les seules applications intéressantes n'ont été jusqu'ici développées que dans le cas des courbes.

Le problème que l'on se pose est le suivant : étant donné un degré  $d$  fixé, quels sont les types possibles des plongements  $C \subset \mathbb{R}P^2$ , où  $C$  est une courbe lisse de degré  $d$  (on préfère  $\mathbb{R}P^2$  à  $\mathbb{R}^2$ , car cela diminue le nombre de cas à considérer ; par exemple les trois types de coniques affines non vides ne se distinguent pas dans  $\mathbb{R}P^2$ ).

Commençons par quelques considérations générales sur la topologie des courbes planes lisses.

Soit  $C \subset \mathbb{R}P^2$  une courbe lisse. Alors  $C$  est une variété (analytique) compacte de dimension 1, donc union (finie, cf. plus bas le théorème de Harnack) de composantes connexes difféomorphes au cercle  $S^1$ .

Topologiquement, il y a deux manières de plonger  $S^1$  dans  $\mathbb{R}P^2$  (cf. par exemple [3]) :

( $\alpha$ ) L'image de  $S^1$  est un *ovale*, homotope à un point, dont le complémentaire a deux composantes connexes, l'intérieur et l'extérieur. Une droite coupe (transversalement) un ovale en un nombre pair de points ; par exemple, une conique lisse est un ovale.

( $\beta$ ) L'image de  $S^1$  est une *pseudo-droite*, son complémentaire est connexe, et deux pseudo-droites se coupent en un nombre impair de points ; par exemple, une droite est une pseudo-droite.

Il résulte de cela qu'une courbe (lisse) de degré pair est réunion de  $p > 0$  ovales, et qu'une courbe de degré impair est réunion d'une pseudo-droite et de  $p > 0$  ovales.

On s'intéresse non seulement à la topologie de la courbe  $C$  (i.e., à son nombre  $p$  d'ovales), mais aussi au type topologique de son plongement (i.e., aux inclusions éventuelles des ovales entre eux).

L'étude de la topologie des variétés algébriques réelles comprend deux parties bien distinctes :

(a) Décrire des « prohibitions », i.e., donner une liste (la plus complète possible) des contraintes sur les types topologiques des plongements.

(b) Construire des courbes lisses de degré  $d$  donné; si l'on peut construire tous les types topologiques non interdits par les prohibitions de (a), le problème posé est considéré comme résolu.

À titre d'exemple (trivial), traitons complètement le cas des courbes de degré 4. Il est à noter que le cas du degré 6 n'est déjà plus trivial du tout (c'était l'objet du 16-ème problème de Hilbert), et que le cas du degré 8 n'est pas complètement élucidé à ce jour.

***Théorème 1.1.*** *Une courbe lisse de degré 4 dans  $\mathbb{RP}^2$  a un nombre  $p$  d'ovales tel que  $0 \leq p \leq 4$ , et les types topologiques des plongements réalisés par des courbes de degré 4 sont les suivants (on dit qu'un ovale est libre s'il n'est contenu dans aucun autre ovale, et s'il n'en contient aucun autre) :*

- *La courbe vide.*
- *Un ovale.*
- *Deux ovales emboîtés.*
- *Deux ovales libres.*
- *Trois ovales libres.*
- *Quatre ovales libres.*

*Démonstration.* Commençons par montrer que les possibilités indiquées ci-dessus sont les seules (raisonnement de type (a)).

(i) Il ne peut y avoir 5 ovales ou plus, car en fixant un point sur chaque ovale, on peut faire passer une conique par cinq de ces points et trouver ainsi une conique coupant la courbe en au moins 10 points, ce qui est exclu par le théorème de Bézout.

(ii) Si  $p > 3$ , les ovales sont nécessairement libres, car dans le cas contraire une droite bien choisie couperait la courbe en au moins 6 points.

Passons maintenant aux raisonnements de type (b), i.e., à la construction des courbes non exclues par les considérations précédentes.

Une quartique avec  $p = 4$  ovales par exemple se construit en déformant légèrement la réunion de deux coniques se coupant en quatre points. Les autres cas sont laissés au lecteur.

Citons maintenant les deux fameux théorèmes de Harnack [7] (qui datent de 1876 !)

**Théorème 1.2.** *Une courbe de degré  $d$  dans  $\mathbb{R}P^2$  a au plus  $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$  composantes connexes.*

**Théorème 1.3.** *Pour tout entier  $d > 1$ , et  $m$  tel que  $1 \leq m \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ , il existe dans  $\mathbb{R}P^2$  une courbe lisse de degré  $d$  avec  $m$  composantes connexes.*

On appellera *M-courbe* une courbe admettant le nombre maximum de composantes connexes pour son degré.

Le théorème 1.2 est un résultat de type (a), et le théorème 1.3 est de type (b). Il résout complètement le problème du type topologique des courbes lisses de degré  $d$  mais ne dit rien sur le type topologique du *plongement*. Il utilise la méthode des « petits paramètres » : on construit une courbe de degré  $d$  en perturbant légèrement l'union d'une courbe de degré  $d - 1$  et d'une droite se coupant transversalement.

Les résultats de type (a) sont nombreux et intéressants ; cependant, le sujet de cet exposé étant un résultat de type (b), je ne prétends pas en faire un résumé, même succinct. Le lecteur intéressé pourra consulter [14], ou [13] pour le cas des courbes.

Je vais dans cet exposé décrire la méthode de Viro de construction de courbes réelles, qui procède d'un esprit très différent des méthodes « à la Harnack » employées jusque là (elle est de nature essentiellement combinatoire), et expliquer quelques applications.

## 2. Compactifications de $(\mathbb{R}^*)^2$

Traditionnellement, on compactifie  $(\mathbb{R}^*)^2$  en le plongeant dans  $\mathbb{R}P^2$ . Il y a bien d'autres façons de faire. Nous allons en décrire deux, adaptées à un polynôme, ou plus exactement à un ensemble fini de monômes, ou aussi de points  $(a_i, b_i) \in \mathbb{N}^2$ .

Notons  $Q_i$  le point de coordonnées  $(a_i, b_i)$ . On associe à l'ensemble des monômes  $(a_i, b_i)$  l'application  $\phi : (\mathbb{R}^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$\phi(x, y) = \frac{\sum |x^{a_i} y^{b_i}| Q_i}{\sum |x^{a_i} y^{b_i}|}.$$

L'image d'un point  $(x, y)$  est donc le barycentre des points  $Q_i$  affectés de la masse  $|x^{a_i} y^{b_i}|$ . Le résultat qui fait tout marcher est le suivant :

**Lemme 2.1.** *Supposons l'intérieur  $\overset{\circ}{\Delta}$  de  $\Delta$  non vide. Alors  $\phi_{|(\mathbb{R}^{+*})^2}$  est un diéomorphisme du premier quadrant (ouvert) sur  $\overset{\circ}{\Delta}$ .*

Ce résultat est une conséquence de résultats profonds de Guillemin-Sternberg sur « l'application des moments » [6]. Je vais en donner ici une esquisse de preuve élémentaire, aimablement communiquée par A. Douady. Dans la suite, nous noterons par la même lettre  $\phi$ , l'application  $\phi$  définie plus haut, et l'application  $\phi_{|(\mathbb{R}^{+*})^2}$  qui sera seule utilisée.

Considérons le polynôme  $\sum_{i=1}^N X^{a_i} Y^{b_i}$  (le raisonnement ci-dessous s'applique aussi au polynôme  $\sum_{i=1}^N \mu_i X^{a_i} Y^{b_i}$  où les  $\mu_i$  sont  $> 0$ ).

Soit  $G = \{(x, y, z) \mid z = \sum_{i=1}^N x^{a_i} y^{b_i}\}$  le graphe de ce polynôme, vu dans  $(\mathbb{R}^{+*})^2 \times \mathbb{R}^{+*}$ , avec coordonnées  $(x, y, z)$ . Faisons le changement de variables  $g : x = e^\xi, y = e^\eta, z = e^{-\zeta}$  (qui est un diféomorphisme de  $(\mathbb{R}^{+*})^2 \times \mathbb{R}^{+*}$  sur  $\mathbb{R}^3$ ). Le graphe  $G$  se transforme en l'ensemble  $H$  d'équation  $\sum e^{a_i \xi + b_i \eta + \zeta} = 1$ . Posons  $h(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^N e^{a_i \xi + b_i \eta + \zeta}$ . Alors  $H$  est le bord de l'ensemble  $\Omega = \{h(\xi, \eta, \zeta) \leq 1\}$  qui est convexe (et même strictement convexe). Soit  $\nabla h$  le gradient de  $h$  :

$$\nabla h(\xi, \eta, \zeta) = \sum e^{a_i \xi + b_i \eta + \zeta} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En revenant aux coordonnées  $(x, y, z)$ , et en restreignant à  $G$ , le gradient  $\nabla h$  s'écrit :

$$\frac{\sum x^{a_i} y^{b_i} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 1 \end{pmatrix}}{\sum x^{a_i} y^{b_i}}$$

car  $z = e^{-\zeta} = \sum_{i=1}^N x^{a_i} y^{b_i}$ . On retrouve donc, dans le plan  $z = 1$ , l'application  $\phi$  qui s'écrit ainsi  $\phi = g \circ \nabla h$ .

De la convexité de  $H$ , on déduit que  $\phi$  est un difféomorphisme local injectif. Il reste à voir la surjectivité. Pour cela, on va montrer que l'image de  $\phi$  est convexe, et que le bord de  $\Delta$  est dans l'adhérence de l'image de  $\phi$ .

Si  $P = \phi(p)$  et  $Q = \phi(q)$  sont dans l'image de  $\phi$ , on considère l'image réciproque  $\phi^{-1}(tP + (1-t)Q)$  ( $t \in [0, 1]$ ) du segment joignant  $P$  à  $Q$ . On voit facilement que si une suite de points  $p_n \in (\mathbb{R}^{+*})^2$  tend vers l'infini ou vers un des axes de coordonnées,  $\phi(p_n)$  se rapproche du bord de  $\Delta$  (cf. plus bas). Ceci montre que tous les points du segment sont dans l'image de  $\phi$ , puisque l'image réciproque de ce segment est alors un chemin compact joignant  $p$  à  $q$ .

Montrons maintenant que les sommets de  $\Delta$  sont dans l'adhérence de l'image de  $\phi$  : si  $(a, b)$  est un sommet de  $\Delta$ , il existe une forme linéaire  $\ell$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que  $\ell(a, b) > \ell(a_i, b_i) \quad \forall (a_i, b_i) \in \Delta$ , tels que  $(a_i, b_i) \neq (a, b)$  (il suffit de considérer une droite d'appui passant par  $(a, b)$ , voir figure 0). Alors, si  $\ell(x, y) = \alpha x + \beta y$ , on pose  $x = t^\alpha, y = t^\beta$ .

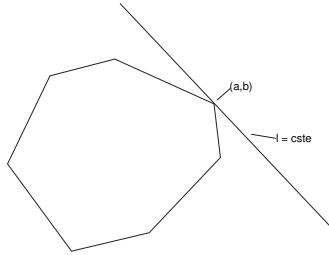


FIGURE 0.

En supposant par exemple  $\alpha$  et  $\beta > 0$ , on voit que lorsque  $t \rightarrow \infty$ , le point  $\phi(x, y)$  tend vers le point  $(a, b)$ , car le terme dominant (en  $t$ ) dans le numérateur de  $\phi(x, y)$  est alors le terme en  $t^{\alpha a + \beta b}$  dont le coefficient est  $\mu\left(\frac{a}{b}\right)$ .

On voit donc par ce lemme que le polygone  $\Delta$  lui-même constitue une compactification naturelle (non algébrique) de  $(\mathbb{R}^{+*})^2$ , évidemment bien adaptée au polynôme  $\sum_{i=1}^N X^{a_i} Y^{b_i}$ .

Si on veut maintenant une compactification de  $(\mathbb{R}^*)^2$ , on note  $\sigma_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) les éléments du groupe  $\Sigma \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  des symétries

engendrées par les deux symétries orthogonales par rapport aux axes de coordonnées. On a alors

$$(\mathbb{R}^*)^2 = \bigcup_i \sigma_i(\mathbb{R}^{+*})^2,$$

et on envoie  $\sigma_i(\mathbb{R}^{+*})^2$  sur  $\sigma_i(\Delta)$  par  $\sigma_i \circ \phi \circ \sigma_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ).

Nous noterons  $C_\Delta = \bigcup_{i=1}^4 \sigma_i(\Delta)$ , et  $\psi_\Delta$  (ou simplement  $\psi$  si le contexte n'est pas ambigu) ce plongement de  $(\mathbb{R}^*)^2$  dans  $C_\Delta$ .

**Exemple 2.2.** Prenons pour  $\Delta$  l'ensemble des monômes en  $(x, y)$  de degré  $\leq d$ . On trouve alors la compactification habituelle de  $(\mathbb{R}^*)^2$  par un carré (homéomorphe au disque), voir figure 1.

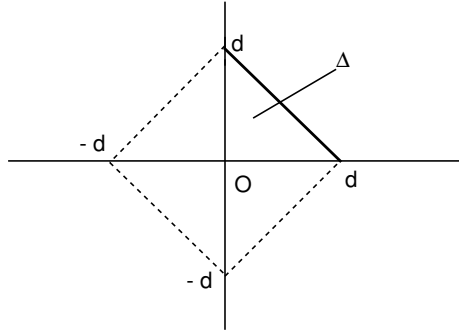


FIGURE 1.

Viro considère une seconde compactification  $C'_\Delta$  de  $(\mathbb{R}^*)^2$  (mais utilise en fait surtout la première) en considérant la partie réelle de la variété torique associée au polytope  $\Delta$  (cf. [4], ou [9]).

**Lemme 2.3.**  $C'_\Delta$  est homéomorphe au quotient de  $C_\Delta$  lorsque l'on identifie les faces de  $C_\Delta$  avec la règle suivante : si  $\Gamma$  est une face de  $C_\Delta$ , pour tout vecteur  $(\alpha_1, \alpha_2)$  à coordonnées entières orthogonal à  $\Gamma$ ,  $\Gamma$  est identifiée avec la face  $\sigma(\Gamma)$ ,  $\sigma$  étant la symétrie  $((-1)^{\alpha_1}, (-1)^{\alpha_2}) \in \Sigma \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ .

**Exemple 2.4.** Dans le cas où  $\Delta$  est le polygone de l'exemple 2.2, on trouve que  $C'_\Delta$  est le plan projectif  $\mathbb{RP}^2$ .



### 3. Carte d'un polynôme

**Définition 3.1.** Soit  $P \in \mathbb{R}[X, Y]$  un polynôme,  $Z(P) \subset \mathbb{R}^2$  l'ensemble de ses zéros,  $\Delta$  un polygone à sommets à coordonnées entières, que nous supposons d'intérieur non vide. On appelle carte de  $P$  associée à  $\Delta$  l'adhérence de  $\psi(Z(P) \cap (\mathbb{R}^*)^2)$  dans  $C_\Delta$ . Cette carte est notée  $C_\Delta(P)$ .

#### Remarques 3.2

(1) Si  $P \in \mathbb{R}[X, Y]$  est un polynôme,  $P = \sum \lambda_i X^{a_i} Y^{b_i}$ , on appelle *polygone de Newton de  $P$*  l'enveloppe convexe dans  $\mathbb{R}^2$  des points  $(a_i, b_i)$  tels que  $\lambda_i \neq 0$ . On note  $\Delta$  (ou  $\Delta(P)$ ) ce polygone, qui ne dépend que de l'ensemble  $(a_i, b_i)$  des monômes intervenant dans l'écriture de  $P$ . Le polygone naturel pour construire la carte de  $P$  est alors son polygone de Newton  $\Delta(P)$ , et sauf mention expresse du contraire, la carte de  $P$  sera toujours considérée dans  $\cup \sigma_i(\Delta(P))$ . Cependant, on peut considérer des cartes  $C_\Delta(P)$  pour d'autres polygones  $\Delta$ ; c'est ce qu'on fera plus bas dans la démonstration du théorème 4.2, avec le polynôme  $T - t$ .

(2) Si  $\dim \Delta(P) = 1$ , il sera commode de parler encore de la carte de  $P$  dans  $C_{\Delta(P)}$ , bien que l'application  $\psi_\Delta$  ne soit plus alors un plongement.

**Exemple 3.3 (carte d'un trinôme).** Supposons que  $P$  soit un trinôme :

$$P = \alpha_1 X^{a_1} Y^{b_1} + \alpha_2 X^{a_2} Y^{b_2} + \alpha_3 X^{a_3} Y^{b_3}$$

et que  $\Delta(P)$  soit d'intérieur non vide. Posons  $(a_i, b_i) = Q_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) et  $\lambda_i = x^{a_i} y^{b_i}$ . On a

$$\phi(x, y) = \frac{\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

i.e., les  $\lambda_i$  sont les coordonnées barycentriques de  $\phi(x, y)$  par rapport au triangle  $\Delta$ . On a  $(x, y) \in Z(P)$  si et seulement si  $\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3 = 0$ . La carte de  $P$  dans le premier quadrant est donc un segment de droite (ou l'ensemble vide) qui s'obtient de la manière suivante : on marque le signe du coefficient  $\alpha_i$  au sommet  $Q_i$ , et si les trois sommets de  $\Delta(P)$  ne sont pas de même signe, on trace un segment de droite joignant les deux côtés dont les sommets sont

de signe opposés. Si les trois sommets sont de même signe, la carte de  $P$  dans  $\Delta$  est vide. Ceci se justifie immédiatement en regardant l'équation de la droite  $\phi(Z(P) \cap (\mathbb{R}^{+*})^2)$ .

Si  $\sigma \in \Sigma$ , on fait de même pour  $\sigma(\Delta(P))$ , avec la règle suivante : si  $Q = (a, b)$  est un sommet de  $\Delta(P)$ , et si  $\sigma = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , le signe de  $\sigma(Q)$  est celui de  $Q$  multiplié par  $\varepsilon_1^{\alpha_1} \varepsilon_2^{\alpha_2}$ .

**Exemple 3.4.** Pour  $P = X^3 - Y^2X^2 + Y^3$ , la carte  $C(P)$  est représentée sur la figure 2.

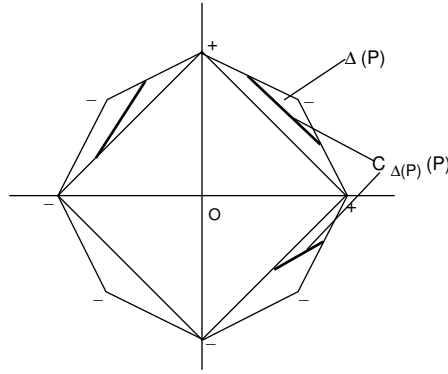


FIGURE 2.

#### 4. Collage de cartes

Soit  $P = \sum \lambda_i X^{a_i} Y^{b_i}$  un polynôme et  $\Delta(P)$  son polygone de Newton (voir remarque 3.2-(1)). Si  $\Gamma$  est une face de  $\Delta(P)$ , on pose

$$P^\Gamma = \sum_{\{i | (a_i, b_i) \in \Gamma\}} \lambda_i X^{a_i} Y^{b_i}.$$

**Définition 4.0.** Un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X, Y]$  est non dégénéré (par rapport à son polygone de Newton  $\Delta$ ) si pour tout côté  $\Gamma$  de  $\Delta$ ,  $P^\Gamma$  n'est pas une puissance (on dit que  $P$  est réduit), et si  $Z(P^\Gamma)$  est lisse (au sens algébrique) dans  $(\mathbb{R}^*)^2$ . Ici, l'intérieur de  $\Delta$  est considéré comme une face de  $\Delta$ .

Remarquons que dans le cas où  $P$  est un trinôme,  $P$  est toujours non dégénéré par rapport à  $\Delta(P)$ , si du moins  $\Delta(P)$  est d'intérieur non vide.

**Définition 4.1.** Soit  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  un polytope convexe à sommets entiers strictement positifs,  $\Delta = \bigcup_{i \in I} \Delta_i$  une décomposition de  $\Delta$  par des polytopes convexes à sommets entiers. On dit que cette décomposition est régulière si :

- (1)  $\overset{\circ}{\Delta}_i \cap \overset{\circ}{\Delta}_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ .
- (2)  $\Delta_i \cap \Delta_j$  est une face commune à  $\Delta_i$  et  $\Delta_j$ .
- (3) Il existe une fonction affine par morceaux concave  $\nu : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que
  - (a)  $\nu|_{\Delta_i}$  soit affine  $\forall i \in I$ .
  - (b)  $\nu|_{\Delta_i \cup \Delta_j}$  ne soit pas affine pour  $i \neq j$ .
  - (c)  $\nu(\Delta \cap \mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ .

Toutes les décompositions ne sont pas régulières. Un exemple classique est donné par la figure 3 (cf. [10]).

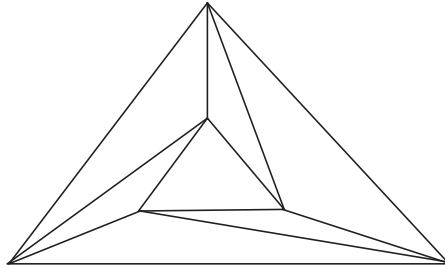


FIGURE 3.

Considérons une décomposition régulière  $\Delta = \bigcup \Delta_i$ , et des polynômes  $P_i$  tels que :

- (a)  $\Delta(P_i) = \Delta_i$  pour tout  $i$ .
- (b) Si  $\Gamma = \Delta_i \cap \Delta_j$ ,  $P_i^\Gamma = P_j^\Gamma$ .
- (c) Les  $P_i$  sont non dégénérés.

Alors les cartes  $C(P_i)$  se recollent en un ensemble contenu dans  $C_\Delta$ , et les  $P_i$  en un polynôme  $P = \sum_{\omega \in \mathbb{Z}^n} a_\omega X^\omega$  tel que  $P^{\Delta_i} = P_i \quad \forall i$ .

Soit  $\nu : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction concave affine par morceaux associée à la décomposition, et posons  $P_T = \sum_{\omega \in Z^n} a_\omega X^\omega T^{\nu(\omega)}$ . On appellera  $P_T$  le « polynôme de Viro » associé à la fonction  $\nu$ .

Le théorème principal de cet exposé est alors :

**Théorème 4.2.** *Avec les hypothèses ci-dessus, il existe  $T_0 > 0$  tel que pour  $t > T_0$  le polynôme  $P_t$  soit non dégénéré, et la carte  $C(P_t)$  équivalente au collage des cartes  $C(P_i)$ .*

**Remarque.** Si on remplace  $\nu$  par une fonction convexe, on a le même résultat que ci-dessus, pour  $0 < t < T_0$ , avec  $T_0$  assez petit.

Ce théorème s'utilise par exemple de la manière suivante. On construit une triangulation à sommets entiers du triangle  $\Delta : x + y \leq d$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ . On choisit des signes aux sommets de  $\Delta$ . On en déduit des signes aux sommets symétriques par rapport aux axes par la règle énoncée plus haut (i.e., si la symétrie  $\sigma$  s'écrit  $\sigma(x, y) = (\varepsilon_1 x, \varepsilon_2 y)$ , avec  $\varepsilon_i = \pm 1$ , le signe de  $\sigma(a, b)$  est celui de  $(a, b)$  multiplié par  $\varepsilon_1^a \varepsilon_2^b$ ).

On construit alors de manière complètement automatique une carte linéaire par morceaux, qui est la carte d'un polynôme  $P_t$  de degré  $d$  ( $P_t$  est le « polynôme de Viro » du théorème). Notons que ce procédé ne donne aucune indication sur les zéros d'un polynôme  $P$  donné à priori. Le polynôme  $P_t$  a les mêmes monômes que  $P$ , mais ses coefficients sont modifiés.

**Exemple 4.3.** À titre d'exercice le lecteur pourra s'amuser à justifier l'exemple suivant, qui décrit une construction des « courbes de Harnack ».

Considérons une triangulation régulière du triangle  $\Delta : x + y \leq d$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$  telle que tous les points entiers du bord et de l'intérieur de  $\Delta$  soient le sommet d'au moins un triangle (ceci revient à dire que tous les triangles sont d'aire  $1/2$ ). À part cette condition, la triangulation est arbitraire, pourvu qu'elle soit régulière. Par exemple, la triangulation la plus simple à laquelle on peut penser, avec des triangles rectangles, est régulière. Un sommet  $(i, j)$  est dit pair si  $i$  et  $j$  sont pairs, impair dans le cas contraire. On attribue le signe –

aux sommets pairs, et le signe  $+$  aux sommets impairs. Supposons  $d$  pair,  $d = 2k$ .

Alors le procédé décrit plus haut construit une carte linéaire par morceaux correspondant, après identification des segments du bord deux à deux pour se retrouver dans l'espace projectif, à une courbe ayant le nombre maximum, i.e.,  $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$  ovals. De plus, appelons pairs les ovals qui sont contenus dans un nombre pair d'ovales (les ovals libres sont pairs), et impairs les autres. Alors il y a  $\frac{3k^2-3k}{2}$  ovals pairs, et  $\frac{(k-1)(k-2)}{2} + 1$  ovals impairs, tous contenus dans un seul ovale pair, l'ovale « à l'infini ». Les autres ovals pairs sont libres, et entourent chacun un sommet marqué du signe  $+$  (dans un des quatre quadrants).

*Démonstration du théorème.* Au lieu de faire la démonstration générale, nous allons traiter un exemple très simple d'un polynôme à une variable, qui fait comprendre le principe de la démonstration, celle-ci étant un peu technique si on veut tout justifier dans le détail. L'exemple traite un polynôme à une variable, car la démonstration consiste à rajouter une variable  $T$ , et on se retrouve ainsi dans les polynômes à deux variables, cadre de cet exposé.

Soit  $X$  la variable et prenons  $\Delta = [0, 3] \subset \mathbb{R}$ ,  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ , avec  $\Delta_1 = [0, 2]$ , et  $\Delta_2 = [2, 3]$ . Cette décomposition de  $\Delta$  est régulière, et on peut poser par exemple  $\nu(0) = 3, \nu(2) = 2, \nu(3) = 0$ .

Posons  $P_1 = 1 - X^2$ ,  $P_2 = -X^2 + X^3$ ; le collage des cartes de  $P_1$  et  $P_2$  est représenté sur la figure 4.

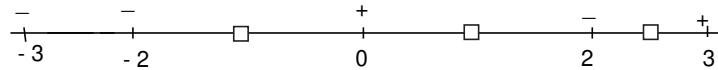


FIGURE 4.

Soit  $G_\nu \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  le graphe de la fonction  $\nu$ , et  $\Delta_\nu$  son enveloppe convexe. Si  $P(X) = 1 - X^2 + X^3$  est le polynôme résultant du « collage » de  $P_1$  et  $P_2$ , notons  $P_T = X^3T^{\nu(3)} - X^2T^{\nu(2)} + T^{\nu(0)} =$

$X^3 - T^2X^2 + T^3$ .  $P_T$  est le polynôme de Viro associé à  $P$ , à la triangulation de  $\Delta$ , et à la fonction  $\nu$ .  $\Delta_\nu$  est le polygone de Newton du polynôme  $P_T$  (figure 5).

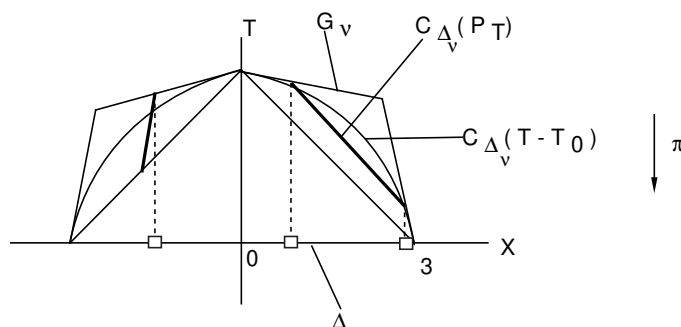


FIGURE 5.

On s'intéresse aux zéros du polynôme  $P_t$  pour  $t$  assez grand : ils correspondent (par l'application  $\psi$ ) à l'intersection de la carte  $C_{\Delta_\nu}(P_T)$  avec la carte  $C_{\Delta_\nu}(T - t)$  du polynôme  $T - t$ . Il faut noter qu'ici la carte  $C_{\Delta_\nu}(P_T)$  est linéaire par morceaux puisque  $P_T$  est un trinôme, mais qu'il n'en n'est pas de même pour la carte  $C_{\Delta_\nu}(T - t)$ , car  $\Delta_\nu$  n'est pas le polygone de Newton de  $T - t$ .

On montre alors sans difficulté que lorsque  $t$  tend vers l'infini, la carte  $C_{\Delta_\nu}(T - t)$  se rapproche du bord supérieur de  $\Delta_\nu$ . Pour  $t$  assez grand, cette carte va donc couper la carte  $C_{\Delta_\nu}(P_T)$  en deux points dans le premier quadrant, et en un point dans le quadrant  $x < 0$ ,  $y > 0$ , comme on le voit sur la figure. C'est là le point délicat à justifier dans le cas général : il faut montrer que l'intersection de  $C_{\Delta_\nu}(T - t)$  avec  $C_{\Delta_\nu}(P_T)$  est homéomorphe (en fait homotope) à l'intersection de  $C_{\Delta_\nu}(P_T)$  et du bord supérieur  $G_\nu$  de  $\Delta_\nu$ , en utilisant le fait que  $C_{\Delta_\nu}(T - t)$  « tend » vers  $G_\nu$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.

Comme on voit sans difficulté que  $G_\nu \cap \overline{C_{\Delta_\nu}(T - t)}$  se projette sur le collage des cartes de  $P_1$  et  $P_2$ , on voit que pour  $t$  assez grand, le polynôme  $P_t$  a 3 racines réelles, deux positives et une négative, ce qu'il fallait démontrer.

**Remarque 4.4.** On peut aussi interpréter le théorème 4.2 comme un théorème sur la « lissification » des singularités, de la manière suivante.

Soit  $P(X_1, \dots, X_n) = 0$  l'équation d'une hypersurface algébrique ayant une singularité à l'origine non dégénérée par rapport à son diagramme de Newton  $N(P)$ . On suppose que  $N(P)$  est compact (i.e., rencontre tous les axes de coordonnées), et l'hypothèse dit que  $P^\Gamma$  est réduit et lisse pour toute face de  $N(P)$  (toutes les faces sont ici de codimension  $> 1$ , contrairement au cas global où l'on avait une face de codimension 0). Soit  $\Delta$  la portion de  $\mathbb{R}^n$  délimitée par  $N(P)$  et les hyperplans de coordonnées; supposons comme dans le théorème 4.2 que l'on ait une décomposition  $\Delta = \cup \Delta_i$ , des cartes  $C(P_i)$  de polynômes  $P_i$  (de polygones de Newton  $P_i$ ) non dégénérés, et une fonction convexe  $\nu$  affine par morceaux définie sur  $\Delta$ . On suppose que  $\nu$  vérifie les conditions de 4.2, et qu'en plus  $\nu$  est nulle sur  $N(P)$ . On construit alors comme plus haut un polynôme  $P_T(X_1, \dots, X_n)$  tel que  $P_0 = P$ , et que pour  $T_0$  assez petit et  $0 < t < T_0$ , l'hypersurface  $P_t(X_1, \dots, X_n) = 0$  soit lisse en 0, et que sa carte soit le collage des cartes  $C(P_i)$ , et de la carte de  $P$  en dehors de  $\Delta$ . (Autrement dit, on a remplacé la singularité par le collage des cartes  $C(P_i)$  dans un voisinage de 0, sans rien changer à l'extérieur). Nous allons en voir des exemples plus bas.

## 5. Applications et compléments

(a) *Lissification de la singularité  $J_{10}^-$ .* Dans [13], Viro classe systématiquement les lissifications de toute une série de singularités (non dégénérées), en suivant la classification d'Arnol'd (cf. [2]). Je prendrai ici comme exemple la singularité  $J_{10}^-$ , dont les lissifications donnent de nouveaux types topologiques de courbes algébriques, lorsque l'on utilise le théorème 4.2.

La singularité notée  $J_{10}^-$  est équivalente à la singularité formée de trois arcs de paraboles tangents (par exemple,

$$(Y - X^2)(Y - 2X^2)(Y - 3X^2)$$

au voisinage de l'origine); elle est non dégénérée, et même quasi-homogène. Viro ([11] ou [13]) dresse une liste complète de ses lissifications (i.e., des types topologiques des « fibres de Milnor réelles ») : il y en a 31. Je vais en indiquer trois seulement, obtenues par la méthode décrite ci-dessus (Viro utilise une méthode « à la Harnack »).

**Lemme 5.1.** *Il existe des lissifications de  $J_{10}^-$  avec les cartes de la figure 6.*

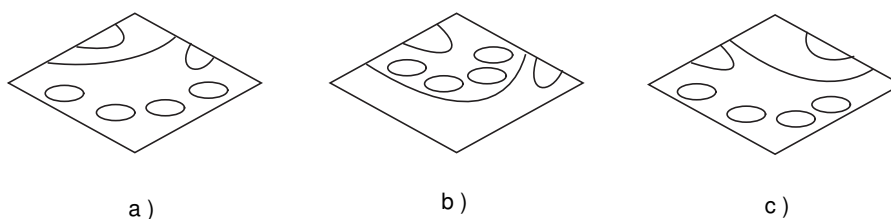


FIGURE 6.

Indiquons par exemple comment obtenir le type (c), en triangulant la partie du plan délimitée par le diagramme de Newton et les deux axes de coordonnées, en indiquant les signes des monômes, et en recollant des cartes de trinômes, comme expliqué plus haut. La triangulation est en pointillés, et la carte obtenue en traits pleins (voir figure 7).

(b) *Courbes de degré 6.* On considère maintenant les trois paraboles ci-dessus dans le plan comme une courbe de degré 6 d'équation  $\phi$  ayant deux singularités de type  $J_{10}^-$  : l'une en 0, et l'autre à l'infini. Soit  $\Delta$  le triangle de sommets  $(0,0)$ ,  $(0,6)$  et  $(6,0)$ . Le polygone de Newton de l'équation  $\phi$  sépare  $\Delta$  en deux triangles :  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$  (figure 8).

D'après le théorème 4.2, on peut utiliser le lemme 5.1, et recoller indépendamment des cartes de type (a) ou (b) dans  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , pour obtenir la carte d'une courbe lisse de degré 6, que l'on pourra considérer dans le disque ou dans  $\mathbb{RP}^2$ .



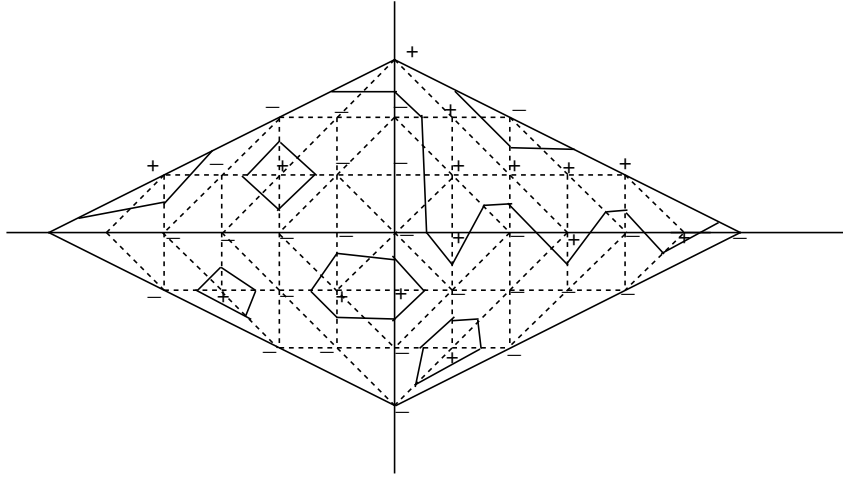


FIGURE 7.

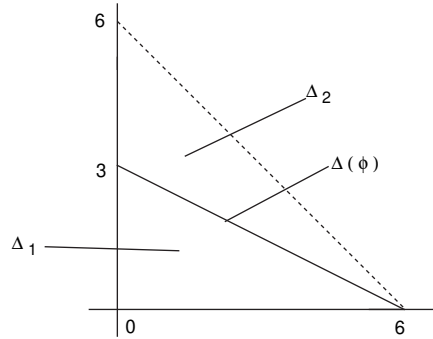
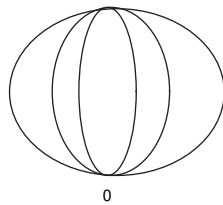


FIGURE 8.

On obtient ainsi les trois types de M-courbes de degré 6 dont les schémas sont indiqués figure 9 (il n'y a que trois types de M-courbes de degré 6).

La courbe du milieu par exemple s'obtient en recollant une carte de type (a) dans  $\Delta_1$  et une carte de type (b) dans  $\Delta_2$  (voir figure 10).

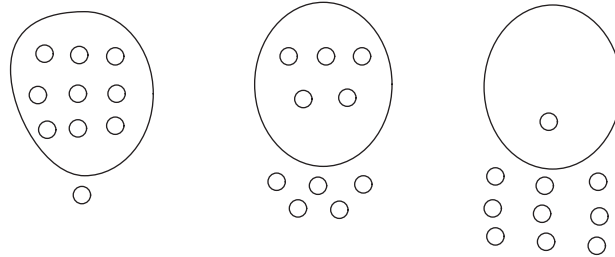


FIGURE 9.

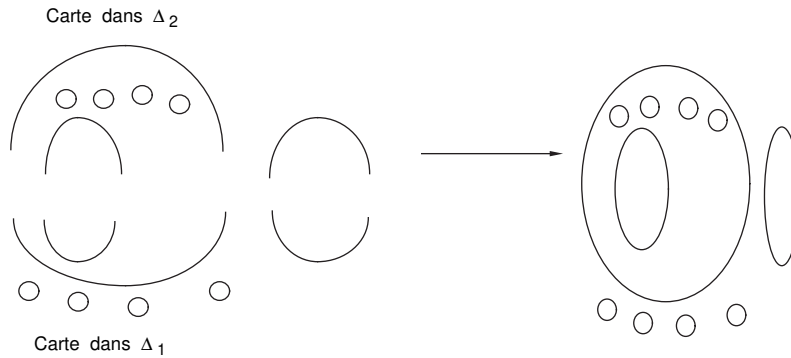


FIGURE 10.

(c) *Courbes de degré 7.* Une courbe plane lisse de degré impair a toujours une composante connexe (et une seule) homotope à une droite projective, appelée pseudo-droite. Les autres composantes sont des ovales. Une courbe de degré 7 est réunion d'une pseudo-droite et d'au plus 15 ovales, d'après l'inégalité de Harnack. Viro a classé toutes les courbes de degré 7 en 1980. Dans la proposition suivante, qui décrit le résultat de Viro, on appelle ovale libre un ovale qui n'est contenu dans aucun autre ovale.

**Proposition 5.2 (Viro [11]).** *Le type topologique du plongement d'une courbe de degré 7 est constitué d'une pseudo-droite, et d'ovales avec l'une des 121 possibilités suivantes :*

- (i) *Un ovale contenant  $a$  ovales, et  $b$  ovales libres, avec  $a + b \leq 14$  et  $1 \leq a \leq 13$ .*

- (ii)  $\alpha$  ovals libres, avec  $0 \leq \alpha \leq 15$
- (iii) 3 ovals emboîtés.

Montrons par exemple comment construire une courbe de degré 7 de type (i), avec  $a = 10$ ,  $b = 4$  (cette courbe était inconnue jusqu'à Viro, et ne peut pas être construite par une méthode « à la Harnack »).

Viro commence par construire une courbe  $\gamma$  de degré 7 avec deux singularités de type  $J_{10}^-$ , dont la carte est représentée (en traits pleins) figure 11. Viro utilise une méthode « classique » pour construire la courbe  $\gamma$  (en partant d'une ellipse et d'une droite transverse), mais on peut aussi la construire en utilisant la méthode du collage des cartes, comme pour la courbe de la figure 7.

En « collant » dans  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  (et leurs symétriques) des cartes de type (b) (figure 6), et en recollant avec la carte de  $\gamma$  à l'aide du théorème 4.2, on obtient une courbe de degré 7 avec  $a = 10$ ,  $b = 4$  (figure 11).

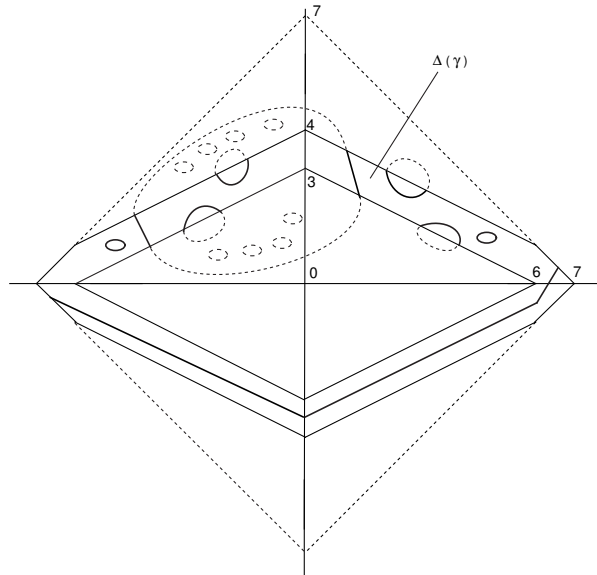


FIGURE 11.

**Remarque 5.3.** Toutes les courbes construites jusqu'ici par la méthode de Viro sont des « T-courbes » (T pour « Triangle »), i.e., des courbes obtenues en collant des cartes de trinômes ayant pour polygones de Newton des triangles d'aire  $1/2$ , comme sur la figure 7. On sait maintenant que tous les types topologiques des M-courbes ne peuvent pas être obtenus avec des T-courbes.

### Références

- [1] V. ARNOL'D & O. OLEINIK – « The topology of real algebraic manifolds », *Moscow Univ. Bull.* **34** (1979), p. 5–17.
- [2] V. ARNOL'D, A. N. VARCHENKO & S. M. GUSEIN-ZADE – *Singularities of differentiable maps, I*, Birkhauser, 1998.
- [3] R. BENEDETTI & J.-J. RISLER – *Algebraic and semi-algebraic sets*, Travaux en cours, Hermann, Paris, 1990.
- [4] V. I. DANILOV – « The geometry of toric varieties », *Russian Math. Surveys* **33** (1978), p. 97–154.
- [5] D. A. GUDKOV – « The topology of real algebraic varieties », *Russian Math. Surveys* **29** (1974), p. 1–79.
- [6] V. GUILLEMIN & S. STERNBERG – « Convexity properties of the moment mapping », *Invent. Math.* **67** (1982), p. 491–513.
- [7] A. HARNACK – « Über Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven », *Math. Annalen* **10** (1876), p. 189–199.
- [8] V. M. KHARLAMOV – « The topological type of non singular surfaces in  $\mathbb{R}P^3$  of degree four », *Funct. Anal.* **10** (1978), p. 295–305.
- [9] T. ODA – *Convex bodies and Algebraic geometry*, Ergeb. Math., vol. 15, Springer-Verlag, 1988.
- [10] D. H. R. CONNELLY – « A convex 3-complex not simplicially isomorphic to a strictly convex complex », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **88** (1980), p. 299–306.
- [11] O. Y. VIRO – « Gluing of plane real algebraic curves and constructions of curves of degrees 6 and 7 », in *Topology (Leningrad, 1982)*, Lect. Notes in Math., vol. 1060, Springer, 1984, p. 185–200.
- [12] ———, « Progress in the topology of real algebraic varieties over the last six years », *Russian Math. Surveys* **41** (1986), p. 55–82.
- [13] ———, « Real algebraic plane curves : constructions with controlled topology », *Leningrad Math. J.* **1** (1990), p. 1059–1134.
- [14] G. WILSON – « Hilbert's sixteenth problem », *Topology* **17** (1978), p. 53–74.

Jean-Jacques Risler, URA 762 du CNRS, DMI, Ecole Normale Supérieure, 45, Rue d'Ulm, 75005 Paris