



Journées mathématiques X-UPS

Année 1996

Aspects des systèmes dynamiques: le premier retour

François LAUDENBACH

Équations différentielles

Journées mathématiques X-UPS (1996), p. 1-20.

<https://doi.org/10.5802/xups.1996-01>

© Les auteurs, 1996.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence

LICENCE INTERNATIONALE D'ATTRIBUTION CREATIVE COMMONS BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<https://www.editions.polytechnique.fr>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<https://portail.polytechnique.edu/cmls/>



Publication membre du

Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

www.centre-mersenne.org

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par

François Laudenbach

Table des matières

1. Point de vue qualitatif.....	1
1.1. Équation différentielle du premier ordre autonome	2
1.2. Équation différentielle linéaire.....	4
1.3. Un exemple d'équation différentielle non linéaire provenant de la mécanique.....	5
1.4. Autre exemple dans le plan.....	7
1.5. Théorèmes généraux.....	8
1.6. Conjugaison topologique d'un foyer et d'un nœud.	10
2. Stabilité des équilibres.....	11
2.1. Dynamique de gradient.....	11
2.2. Critère spectral pour la stabilité asymptotique....	14
2.3. Points d'équilibre instables sur deux exemples....	16
2.4. Orbites périodiques attractantes.....	17
Références.....	20

1. Point de vue qualitatif

Avec son mémoire *sur les courbes définies par une équation différentielle*, publié entre 1881 et 1886, Henri Poincaré a ouvert la voie pour une approche des équations différentielles où la priorité n'est plus donnée à la *résolution* mais à une étude plus géométrique (ou topologique) des solutions, en particulier de leurs propriétés asymptotiques.

Publication originelle dans Journées X-UPS 1996. Aspects des systèmes dynamiques : le premier retour. Prépublication du Centre de mathématique de l'École polytechnique, 1996, et Éditions de l'École polytechnique, 2009.

1.1. Équation différentielle du premier ordre autonome

On se donne :

- un ouvert Ω de \mathbb{R}^n ,
- une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 .

Le \mathbb{R}^n contenant la source est un espace affine (ensemble de points). Le \mathbb{R}^n but en est l'espace vectoriel sous-jacent. L'application X est un *champ de vecteurs* défini sur l'ouvert Ω . Le vecteur $X(x)$ est souvent représenté par le bipoint $(x, x + X(x))$.

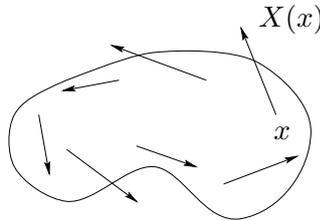


FIGURE 1.

L'équation différentielle associée s'écrit

$$\dot{x} = X(x).$$

Une solution γ est une application différentiable $\gamma : I \rightarrow \Omega$, définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ de la *droite du temps*, telle que

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t)).$$

Remarques

(1) Par la composition $X \circ \gamma$, on voit d'abord que γ est de classe C^1 , puis que γ est C^{k+1} lorsque X est C^k ($k = 1, 2, \dots, +\infty$).

(2) Si γ_0 est une solution définie sur I_0 et si $t_0 \in \mathbb{R}$, alors $\gamma_1(t) = \gamma_0(t - t_0)$ est une solution définie sur $I_1 = I_0 + t_0$. Que la translation dans le temps envoie l'ensemble des solutions en lui-même manifeste le caractère autonome de l'équation différentielle, c'est-à-dire que les vecteurs $X(x)$ ne dépendent que de la position x et pas du temps.

(3) La restriction d'une solution $\gamma : I \rightarrow \Omega$ à un sous-intervalle ouvert J donne évidemment une solution $\gamma|_J : J \rightarrow \Omega$.

Une *solution maximale* est une solution qui n'est pas la restriction stricte d'une autre solution ou encore qui n'admet aucun prolongement. On établit que toute solution est « contenue » dans une solution maximale ; cela résulte du lemme de Zorn, si on tient à ce résultat avant d'avoir le théorème d'unicité locale, celui-ci le donnant à peu de frais. Une *orbite* est l'image d'une solution maximale.

Le *portrait de phases* est la figure formée par l'ensemble des orbites. Du point de vue topologique, une orbite peut être

- un point d'*équilibre* (zéro du champ de vecteurs),
- une orbite *périodique*, image d'une solution maximale périodique de période non nulle (dans ce cas l'orbite est homéomorphe à un cercle),
- l'image d'une solution maximale injective (ce qui n'implique pas que l'orbite soit homéomorphe à \mathbb{R} ; elle peut être *récurrente*, c'est-à-dire repasser une infinité de fois arbitrairement près de chacun de ses points, comme le fait une ligne partout dense dans un tore, et, dans ce cas, un voisinage d'un point dans l'orbite n'est jamais connexe pour la topologie induite).

Cette classification nécessite un argument qui est laissé au lecteur. Par ailleurs, grâce aux arguments de Baire, on peut établir qu'une orbite compacte, non réduite à un point, est une orbite périodique.

Détaillons ce fait rarement traité. Le résultat classique de Baire est le suivant : *Tout compact dénombrable a un point isolé.* Soit maintenant C une orbite compacte d'un champ de vecteurs X donné sur un ouvert de \mathbb{R}^n . La compacité assure l'existence d'un $\varepsilon > 0$ et d'un nombre fini de disques (affines de dimension 2) fermés T_1, \dots, T_k , avec la propriété suivante : si U_i désigne l'intérieur du domaine balayé par T_i , soumis au flot de X dans l'intervalle de temps $]-\varepsilon, +\varepsilon[$ (voir § 1.5), la réunion des U_i recouvre C . Soit T la réunion des T_i ; l'intersection $T \cap C$ est bien compacte. Elle est faite d'un nombre au plus dénombrable de points, car le temps de parcours entre deux passages consécutifs de C sur T est minoré. Cette dénombrabilité permet de diminuer légèrement les rayons des T_i , tout en gardant la propriété de recouvrement, de sorte qu'aucun point de $T \cap C$ ne se trouve au bord d'un des T_i . D'après Baire, $T \cap C$ a un point isolé. Mais tous les points d'une orbite se ressemblent ; donc tous

les points sont isolés et ils sont en nombre fini. La périodicité de l'orbite est alors facile à établir puisqu'un intervalle de temps de longueur $2k\varepsilon$ suffit à la parcourir entièrement, alors même qu'elle porte une solution définie pour tout temps (voir le critère de complétude).

Théorème fondamental (forme faible). *Les orbites forment une partition de Ω . Chaque orbite non réduite à un point est une courbe lisse (sans point double ni point de rebroussement).*

1.2. Équation différentielle linéaire. On se donne un endomorphisme A de \mathbb{R}^n et on considère sur \mathbb{R}^n l'équation différentielle

$$\dot{x} = Ax.$$

Les solutions maximales sont $\gamma(t) = e^{tA}x_0, t \in \mathbb{R}$. L'allure du portrait de phases ne dépend que du spectre, à quelques détails ou exceptions près. La figure suivante rassemble la terminologie en vigueur pour le portrait de phases correspondant à un couple

$$(\text{trace}(A), \text{déterminant}(A)).$$

La parabole correspond aux zéros du discriminant Δ de l'équation caractéristique de A .

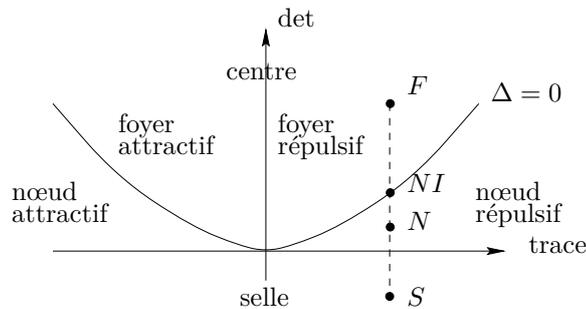
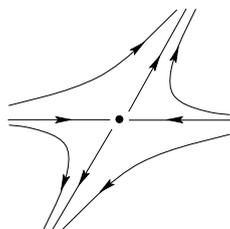
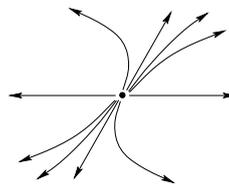
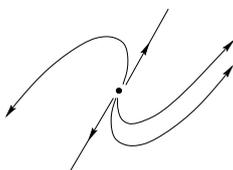
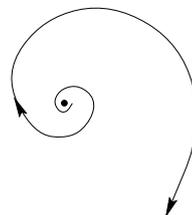


FIGURE 2.

La figure suivante présente les portraits de phases pour chacun des points marqués sur la verticale en pointillés : S, N, NI, F.

Le spectre de A ne dépend pas de l'orientation du plan et donc ne détermine pas le sens de rotation des spirales d'un foyer. Aussi

 S : selle N : nœud NI : en général, nœud
impropre F : foyer ou miroir

peut-on avoir la figure *miroir* de celle dessinée ci-dessus. La diagonalisabilité n'est pas non plus une propriété spectrale ; si la valeur propre est double, le *nœud impropre* correspond au cas non diagonalisable. Enfin il y a quelques cas particuliers :

- si $\text{trace}(A) = 0$, le point d'équilibre est un *centre* ; toutes les orbites, autres que 0, sont périodiques (ellipses) ;
- si A est scalaire, les orbites, autres que 0, sont les demi-droites ouvertes issues de l'origine.

Fait remarquable. Les portraits de phases N , NI et F sont deux à deux *topologiquement conjugués* : il existe un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 envoyant les orbites de l'un sur les orbites de l'autre.

1.3. Un exemple d'équation différentielle non linéaire provenant de la mécanique. L'équation différentielle (du second ordre) du *pendule sans frottement* est

$$\ddot{x} = -\sin x;$$

ici toutes les constantes physiques sont égales à 1. En traitant la vitesse (angulaire) comme une variable indépendante, on se ramène

à une équation différentielle du premier ordre dans \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x\end{aligned}$$

Le plan des (x, y) est l'espace des *phases* (ou des états du système). La variable x parcourt l'espace des *configurations* (ou des positions). Le champ de vecteurs correspondant est noté (x, y) .

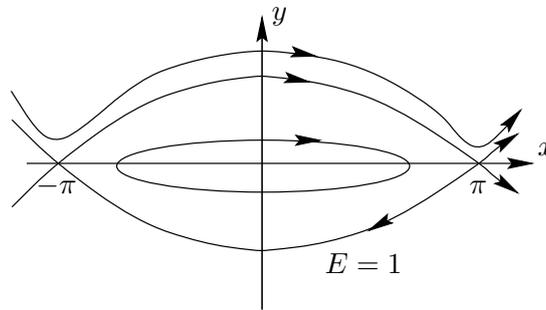


FIGURE 3.

Soit $E(x, y) = y^2/2 - \cos x$ la fonction *énergie*. Comme

$$\langle \text{grad } E(x, y), X(x, y) \rangle = 0$$

identiquement, la fonction E est une *intégrale première* du champ : les orbites sont contenues dans les niveaux $E = \text{constante}$. En fait dans cet exemple chaque orbite s'identifie à une composante connexe par arcs de l'ensemble $\{E(x, y) = \text{const.}\}$ privé des points d'équilibre.

Faisons-le par exemple pour l'arc α , composante de $\{E = +1\}$ dans $\{y > 0\}$ ayant les points $(-\pi, 0)$ et $(\pi, 0)$ dans son adhérence (voir plus loin, critère de complétude). Comme α est d'adhérence compacte, une solution maximale contenue dans α est définie pour tout temps de $-\infty$ à $+\infty$. Si elle ne tendait pas vers les points d'équilibre pour $t \rightarrow \pm\infty$, la vitesse serait minorée en module et la longueur de α serait infinie, ce qui est clairement faux puisque l'adhérence de α est le graphe d'une fonction différentiable au-dessus d'un intervalle fermé borné.

1.4. Autre exemple dans le plan.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

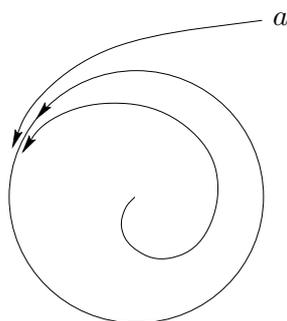


FIGURE 4.

Pour $a \in \mathbb{R}^2$ hors du cercle unité, une solution maximale telle que $\gamma(0) = a$ est définie sur un intervalle $]t_-, +\infty[$ avec $t_- > -\infty$ (*durée de vie* finie dans le passé).

Le théorème de Poincaré-Bendixson énonce que, pour tout champ de vecteurs X de classe C^1 dans le plan ayant des zéros isolés, les orbites ont un comportement asymptotique analogue à ceux rencontrés sur les figures précédentes. Précisément, si γ est une solution de $\dot{x} = X(x)$ (définie jusqu'à $t = +\infty$), on définit son ensemble ω -limite comme l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites $\gamma(t_n)$, $t_n \rightarrow +\infty$. Le théorème énonce que si un tel ensemble est compact, non vide et qu'il ne contient pas de zéros de X , alors il est formé d'une orbite périodique.

En revanche, à partir de la dimension 3, on a des phénomènes beaucoup plus compliqués; les orbites périodiques d'un champ de vecteurs sont loin en général de donner tous ses ensembles ω -limites sans zéros. Par exemple il existe un champ de vecteurs X dans \mathbb{R}^3 avec les propriétés suivantes :

- X est tangent à un tore de révolution $T \cong S^1 \times S^1$.
- Pour tout $a \in T$, l'orbite \mathcal{O}_a est partout dense dans T .

- Le champ X n'a ni zéros ni orbites périodiques dans le tore plein bordé par T (K. Kuperberg, 1993). Ce dernier résultat met un terme à de longues recherches sur une question soulevée par H. Seifert en 1950 concernant la nécessité pour un champ de vecteurs sur la sphère de dimension 3 d'avoir une orbite périodique.
- Même propriété à l'extérieur du tore plein (très facile à obtenir).

1.5. Théorèmes généraux

(1) Théorème local. *Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ avec les propriétés suivantes :*

- la boule fermée $B(x_0, r)$ est contenue dans Ω ;
- pour tout $x \in B(x_0, r)$ il existe une solution $\gamma :]-\varepsilon, +\varepsilon[\rightarrow \Omega$ de condition initiale $\gamma(0) = x$;
- pour tout $\varepsilon' \in]0, \varepsilon]$, toute solution $\gamma' :]-\varepsilon', +\varepsilon'[\rightarrow \Omega$ de condition initiale x est la restriction de γ .

Remarque. Par translation dans le temps, mutatis mutandis, le temps $t = 0$ de la condition initiale peut être remplacé par $t = t_0$.

Conséquence. *Pour tout $x \in \Omega$, il existe une unique solution maximale $\gamma :]t_-(x), t_+(x)[\rightarrow \Omega$ de condition initiale x .*

En effet, si γ_1 et γ_2 sont deux solutions maximales de même condition initiale $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$ définies respectivement sur des intervalles I_1 et I_2 , il y a un plus grand intervalle J , $0 \in J \subset I_1 \cap I_2$, sur lequel $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$. L'intervalle J est fermé dans $I_1 \cap I_2$. Par l'unicité locale, il est impossible que γ_1 et γ_2 diffèrent au-delà d'un temps t_0 . Donc $\sup J = \sup I_i$ pour $i = 1$ ou 2 ; autrement dit, une solution prolonge l'autre. Mais comme les deux solutions sont maximales elles coïncident dans le futur de 0 (idem dans le passé).

Le flot. On note $t \mapsto \varphi(x, t)$ la solution maximale de $\dot{x} = X(x)$ de condition initiale x . Elle vérifie :

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = x \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = X(\varphi(x, t)) \end{cases}$$

Considérer le flot, c'est envisager d'un même coup d'œil toutes les solutions ; en particulier, pour autant qu'elle soit définie pour un certain t , l'application $x \mapsto \varphi(x, t)$ décrit la position au temps t des domaines de Ω entraînés par la dynamique du champ de vecteurs.

Le domaine de définition du flot est $\mathcal{D} \subset \Omega \times \mathbb{R}$:

$$\mathcal{D} = \bigcup_{x \in \Omega} \{x\} \times]t_-(x), t_+(x)[.$$

Le domaine \mathcal{D} est un voisinage de chacun de ses points, donc un ouvert de $\Omega \times \mathbb{R}$. C'est vrai pour $(x, 0)$ d'après le théorème local puis pour (x, t_0) d'après la remarque.

Loi du flot. Si $t_1, t_2, t_1 + t_2 \in]t_-(x), t_+(x)[$, on a

$$\varphi(x, t_1 + t_2) = \varphi(\varphi(x, t_1), t_2).$$

En effet $\varphi(x, t_1 + t)$ et $\varphi(\varphi(x, t_1), t)$ sont solutions de l'équation différentielle et coïncident pour $t = 0$.

(2) Théorème de régularité. *Le flot est de classe C^1 .*

La différentiabilité est difficile mais la continuité résulte de techniques assez élémentaires de majoration a priori (lemme de Gronwall).

Le champ de vecteurs X est dit *complet* si le flot est défini pour tout temps : $\mathcal{D} = \Omega \times \mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé ; on pose $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$. Alors :

- (1) φ_t est un difféomorphisme de Ω
 - bijectif car $\varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \varphi_{-t} = \text{Id}_\Omega$,
 - différentiable comme l'est le flot,
 - d'inverse différentiable car φ_{-t} est différentiable.
- (2) $t \mapsto \varphi_t$ est un homomorphisme de groupes $\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(\Omega)$.

Critère de complétude. *Si l'orbite $\mathcal{O}_x = \bigcup_{t \in]t_-(x), t_+(x)[} \varphi(x, t)$ est d'adhérence compacte, alors $]t_-(x), t_+(x)[= \mathbb{R}$; autrement dit, la durée de vie de l'orbite est infinie dans le futur comme dans le passé.*

Démonstration. Supposons $t_+(x) < +\infty$. Par l'hypothèse de compacité il existe une suite $t_n \rightarrow t_+(x)$ telle que la suite $x_n = \varphi(x, t_n)$ converge ; soit $a = \lim x_n$. On sait que \mathcal{D} contient un voisinage

$V \times]-\varepsilon, +\varepsilon[$ de $(a, 0)$. Pour n assez grand, $x_n \in V$ et $t_+(x) - t_n < \varepsilon$. Les formules

$$t \longmapsto \begin{cases} \varphi(x, t) & \text{si } t \in]t_-(x), t_+(x)[\\ \varphi(x_n, t - t_n) & \text{si } t \in]t_n - \varepsilon, t_n + \varepsilon[\end{cases}$$

donnent deux solutions coïncidant pour $t = t_n$. Donc elles se laissent réunir pour donner une solution de condition initiale x définie sur $]t_-(x), t_n + \varepsilon[$. C'est une contradiction puisque $t_n + \varepsilon > t_+(x)$. \square

1.6. Conjugaison topologique d'un foyer et d'un nœud. Soit $\dot{x} = Ax$ où A est une matrice de similitude dilatante; le flot est $\phi(x, t) = e^{At}x$. Soit $\dot{y} = By$ où B est une matrice diagonale à valeurs propres positives; soit $\psi(y, t) = e^{Bt}y$. On prouve ci-dessous qu'il existe un homéomorphisme h conjuguant les deux flots : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi(h(x), t) = h(\phi(x, t)).$$

Pour tout $x \neq 0$, il existe un unique temps $\theta(x)$ tel que $\phi(x, \theta(x))$ appartienne au cercle unité S^1 . En effet un calcul simple donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \|\phi(x, t)\|^2 > 0, \quad \|\phi(x, t)\| \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \|\phi(x, t)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty;$$

la première inégalité traduit le fait géométrique que le champ de vecteurs, *générateur infinitésimal* du flot ϕ , n'est jamais tangent aux cercles centrés à l'origine. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $\theta(x)$ existe et est unique. Le théorème des fonctions implicites, appliqué à l'équation $\|\phi(x, t)\|^2 - 1 = 0$, donne que θ est C^∞ . Sur $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ la conjugaison cherchée est donnée par

$$h(x) = \psi\left(\phi(x, \theta(x)), -\theta(x)\right).$$

Quand $\|x\| \rightarrow 0$, $\theta(x)$ tend vers $+\infty$ et donc $h(x)$ tend vers 0, parce qu'il appartient à $\psi(S^1, -\theta(x))$. Ainsi h se prolonge en un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 , différentiable partout sauf en 0, en posant $h(0) = 0$. Par construction cet homéomorphisme conjugue les deux flots et donc les portraits de phases.

En revanche, h n'est en général pas différentiable à l'origine. S'il l'est, par dérivation d'application composée, on a

$$Dh(0) \cdot A = B \cdot Dh(0)$$

Comme les spectres de A et de B sont disjoints, cette relation implique $Dh(0) = 0$. Donc même si h est différentiable à l'origine, son inverse ne l'est pas.

La conjugaison topologique entre un foyer et un nœud impropre sera abordée dans la partie suivante.

2. Stabilité des équilibres

Les champs de vecteurs gradients donnent un bon exemple où la dynamique est complètement comprise, d'ailleurs très simple : les ensembles limites sont les points d'équilibre. Pour un tel champ, la stabilité des points d'équilibre consiste seulement à savoir si un point critique de fonction est un minimum local ou non. La discussion de la stabilité des points d'équilibre pour les champs de vecteurs qui ne sont pas des gradients relève d'idées similaires. L'exposé se terminera par un bref aperçu sur la stabilité des orbites périodiques ; on se demandera par exemple à quelle condition une orbite périodique est un *attracteur*, question qui fera entrer dans le monde des dynamiques discrètes.

2.1. Dynamique de gradient. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . On suppose que les sous-niveaux de f sont compacts. (Par définition, le sous-niveau de la valeur $c \in \mathbb{R}$ est $E(c) = f^{-1}(]-\infty, c])$). Soit $X = -\text{grad } f$ (le signe $-$ est l'usage des *topologues*) ; c'est un champ de classe C^1 . Soit ϕ son flot. On a

$$\frac{\partial}{\partial t} (f \circ \phi(x, t)) = -\|\text{grad } f(\phi(x, t))\|^2$$

qui est strictement négatif sauf si x est un point critique de f , c'est-à-dire un point où $\text{grad } f(x) = 0$. Pour x fixé, la demi-orbite des temps ≥ 0 est contenue dans le compact $E(f(x))$. Donc $\phi(x, t)$ est défini pour tout $t > 0$ en vertu du critère de complétude donné précédemment.

Théorème. *On suppose que f n'a qu'un nombre fini de points critiques dans toute partie compacte. Alors $\phi(x, t)$ tend vers un point critique pour $t \rightarrow +\infty$.*

Démonstration

(1) On établit d'abord le fait suivant : si $t_n \rightarrow +\infty$ et si $x_n = \phi(x, t_n) \rightarrow a$, alors $\text{grad } f(a) = 0$.

En effet la suite $f(x_n)$ tend en décroissant vers $f(a)$. Comme $t \mapsto f(\phi(x, t))$ est monotone décroissante, on a $f(\phi(x, t)) > f(a)$ pour tout $t \geq 0$.

Par ailleurs, si a n'est pas un point critique, $f(\phi(a, 1)) < f(a)$. Par continuité du flot, $f(\phi(x_n, 1)) \rightarrow f(\phi(a, 1)) < f(a)$. Mais par la loi du flot, $f(\phi(x_n, 1)) = f(\phi(x, t_n + 1)) > f(a)$. Contradiction.

(2) Si $(\phi(x, t))_{t \geq 0}$ a deux valeurs d'adhérence a_0 et a_1 , on a la figure suivante :

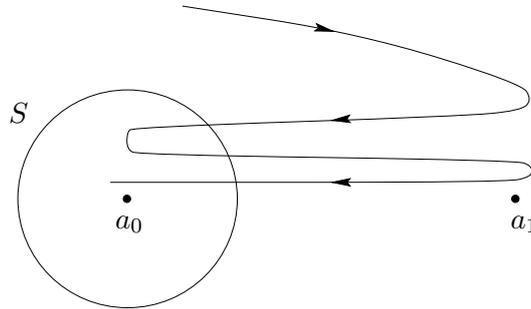


FIGURE 5.

Soit S une petite sphère centrée en a_0 évitant tous les points critiques. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $t \mapsto \|\phi(x, t) - a_0\|^2$, on voit que l'orbite \mathcal{O}_x coupe S une infinité de fois. Comme S est compact, S contient une valeur d'adhérence de \mathcal{O}_x , c'est-à-dire un point critique en vertu du point (1). Contradiction. \square

Les minimums locaux sont des points d'équilibre *asymptotiquement stables*. Les points critiques qui ne sont pas des minimums locaux sont *instables*. Ces concepts sont expliqués ci-dessous.

Définition. Soit X un champ de vecteurs C^1 et soit ϕ son flot. Un point d'équilibre est stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x - a\| \leq \delta \implies \|\phi(x, t) - a\| \leq \varepsilon$$

pour tout $t > 0$ (en particulier $t_+(x) = +\infty$). Le point d'équilibre est asymptotiquement stable, s'il est stable et si, pour tout x assez proche de a , $\phi(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} a$.

Exemple. Pour le pendule sans frottement, le point $(x = 0, y = 0)$ est un point d'équilibre stable et non asymptotiquement stable. Les orbites des points voisins de l'origine sont des courbes fermées dont le diamètre tend vers 0 quand le niveau d'énergie correspondant tend vers le minimum absolu.

Critère de Liapounov. Soit $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, définie sur un voisinage V de a et admettant a pour minimum local strict. On suppose que, pour tout $x \neq a$, $t \mapsto L \circ \phi(x, t)$ est strictement décroissante (sur l'intervalle contenant 0 où elle est définie). Alors a est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

La démonstration est en tout point analogue à celle donnée pour les dynamiques de gradient et n'est pas reproduite ici. Une fonction de Liapounov est une fonction qui satisfait aux hypothèses de ce critère.

Exemple. Le pendule avec frottement, dont le mouvement est régi par l'équation différentielle :

$$\ddot{x} = -\sin x - k\dot{x} \quad (k > 0),$$

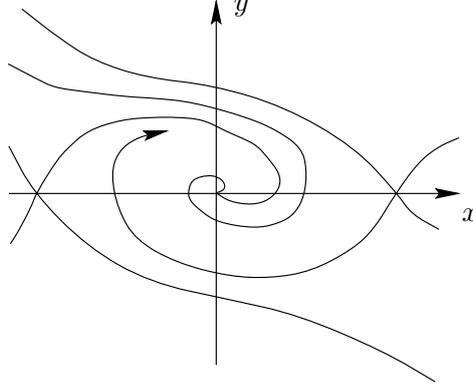
qui équivaut au système du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x - ky. \end{cases}$$

La fonction énergie $E(x, y) = y^2/2 - \cos x$ est une fonction de Liapounov ; en effet

$$\langle \text{grad } E, X \rangle = -ky^2 \leq 0$$

et, hors des points d'équilibre, aucune solution de l'équation différentielle n'est contenue dans un niveau constant de E . D'après le critère, l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

FIGURE 6. : $0 < k < 2$

2.2. Critère spectral pour la stabilité asymptotique. On suppose que $0 \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre. Par un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0, on peut écrire

$$X(x) = Ax + X_1(x)$$

$$\text{avec } X_1(x) = \left(\int_0^1 [DX(tx) - A] dt \right) x = o(\|x\|).$$

Théorème. *Si les valeurs propres de A sont de parties réelles < 0 , l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable.*

Démonstration (d'après Pontryagin). Dans le cas d'un champ linéaire ($X_1(x) = 0$), les solutions sont $x(t) = e^{tA}x_0$. Grâce à la réduction de Jordan de A sur \mathbb{C} on établit que, si les valeurs propres sont majorées par $-a < 0$, il vient

$$(*) \quad \|e^{tA}\| \leq \text{const.} e^{-at}$$

Donc, pour $t \rightarrow +\infty$, on a $\|x(t)\| \rightarrow 0$, ce qui donne le résultat dans le cas linéaire.

Par ailleurs, il existe une fonction de Liapounov naturelle pour le champ $X_0(x) = Ax$, à savoir :

$$L(x) = \int_0^{+\infty} \|e^{tA}x\|^2 dt.$$

Cette intégrale est convergente d'après (*). La fonction L est une forme quadratique définie positive. Enfin,

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } L(x), X_0(x) \rangle &= 2 \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}Ax \rangle dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (\|e^{tA}x\|^2) dt \\ &= -\|x\|^2, \end{aligned}$$

est < 0 si $x \neq 0$, ce qui prouve que L est une fonction de Liapounov pour X_0 . La même fonction est une fonction de Liapounov pour X au voisinage de l'origine. En effet

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } L(x), X_1(x) \rangle &= 2 \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}X_1(x) \rangle dt \\ &= o(\|x\|^2). \end{aligned}$$

Donc $\langle \text{grad } L(x), X(x) \rangle = -\|x\|^2 + o(\|x\|^2)$ est strictement négatif pour x voisin de 0 distinct de 0. \square

Remarque. En considérant une telle fonction de Liapounov on peut construire une conjugaison topologique entre un nœud impropre et un nœud propre.

Précisément soit X et Y deux champs de vecteurs linéaires dont les portraits de phases sont respectivement un nœud impropre et un nœud propre. Quitte à changer l'un ou l'autre de ces champs en son opposé, on peut supposer que l'origine est stable pour les deux. Soient ϕ et ψ les flots respectifs. Soit alors L la fonction donnée par

$$L(x) = \int_0^{+\infty} \|\phi(x, t)\|^2 dt.$$

Il existe une unique fonction $\theta : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\phi(x, \theta(x)) \in L^{-1}(1)$ et cette fonction est différentiable par les mêmes arguments que dans l'exposé précédent. On choisit un difféomorphisme $h_0 : L^{-1}(1) \xrightarrow{\cong} S^1$ entre l'ellipse $L^{-1}(1)$ et le cercle unité. La conjugaison cherchée est donnée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par la formule suivante :

$$h(x) = \psi \left[h_0 \left(\phi(x, \theta(x)) \right), -\theta(x) \right]$$

Elle s'étend continûment à tout le plan en posant $h(0) = 0$.

2.3. Points d'équilibre instables sur deux exemples

(a) *Pendule sans frottement.* Pour connaître le portrait de phases au voisinage du point d'équilibre $(\pi, 0)$, il suffit d'y tracer les courbes d'énergie constante. La fonction énergie E admet $(\pi, 0)$ comme point critique et en ce point la forme quadratique $D^2E(\pi, 0)$ est non dégénérée de signature $(-, +)$. Le lemme de Morse assure qu'il existe un difféomorphisme $g : V \rightarrow W$, où V et W sont des voisinages respectivement de $(\pi, 0)$ et de $(0, 0)$ dans le plan, tel que :

$$g(\pi, 0) = (0, 0)$$

$$Dg(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E(x, y) = q \circ g(x, y), \quad \forall x, y \in V$$

où $q(x, y) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$.

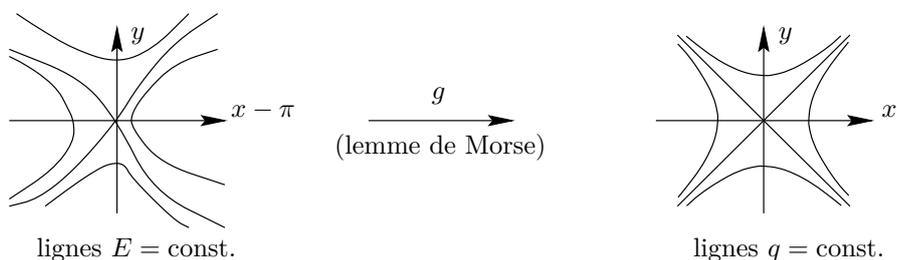


FIGURE 7.

(b) *Pendule avec frottement.* Au voisinage de $(\pi, 0)$ on peut écrire un développement limité du champ de vecteurs :

$$X(x, y) = A \begin{pmatrix} x - \pi \\ y \end{pmatrix} + o(|x - \pi| + |y|), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix}.$$

Le champ de vecteurs $X_0(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est le champ de vecteurs dit *linéarisé* du champ X au point d'équilibre. Le point d'équilibre $(\pi, 0)$ est *hyperbolique*, ce qui signifie que toutes les valeurs propres de A sont de parties réelles non nulles ; ici l'une est réelle positive et l'autre réelle négative. L'hypothèse d'hyperbolicité permet d'appliquer les deux théorèmes suivants :

(1) *Le théorème de la variété stable.* Énoncé en dimension 2 avec deux valeurs propres réelles de signes opposés, il affirme l'existence de 4 *séparatrices* formant deux courbes lisses tangentes au champ X et aux directions propres de A au point d'équilibre. Le théorème général est dû à Hartman, mais on trouve un traitement du cas particulier de la dimension 2 dans le livre de Pontryagin.

(2) *Le théorème de Hartman–Grobman.* Le portrait de phases au voisinage du point d'équilibre est topologiquement conjugué au portrait de phases du champ de vecteurs linéarisé X_0 . En fait il existe un homéomorphisme d'un voisinage du point $(\pi, 0)$ sur un voisinage de $(0, 0)$ conjuguant les flots locaux de X et de X_0 .

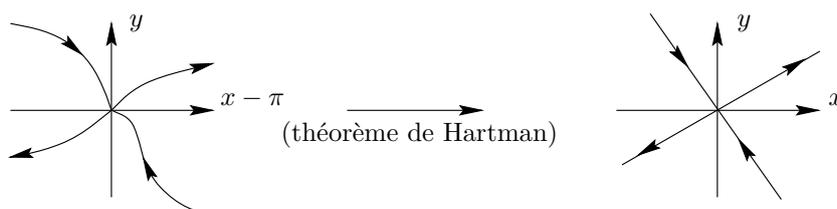


FIGURE 8.

La question de la conjugaison différentiable met en jeu des conditions de *non-résonance* entre les valeurs propres du linéarisé (théorème de S. Sternberg); en un certain sens cette question est au-delà de l'étude qualitative des équations différentielles.

2.4. Orbites périodiques attractantes. Il s'agit de reconnaître quand une orbite périodique est asymptotiquement stable au sens de Liapounov. On se donne un champ de vecteurs X sur un domaine de \mathbb{R}^n . On suppose que l'orbite \mathcal{O}_a du point a est périodique de période T . Soit ϕ le flot de X . La question est de savoir sous quelle condition on peut trouver un voisinage V de \mathcal{O}_a tel que, pour tout $x \in V$, la distance de $\phi(x, t)$ à \mathcal{O}_a tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. On introduit pour cela l'application de Poincaré dite de *premier retour*.

L'application de Poincaré. Soit H un hyperplan affine passant par a et transverse à $X(a)$, ce qui signifie que $X(a)$ dirige un supplémentaire de l'espace vectoriel \vec{H} sous-jacent à H .

Proposition. *Il existe un voisinage ouvert V de a dans H et une fonction C^1 , $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\phi(x, \theta(x)) \in H$, pour tout $x \in V$, et que $\theta(a) = T$.*

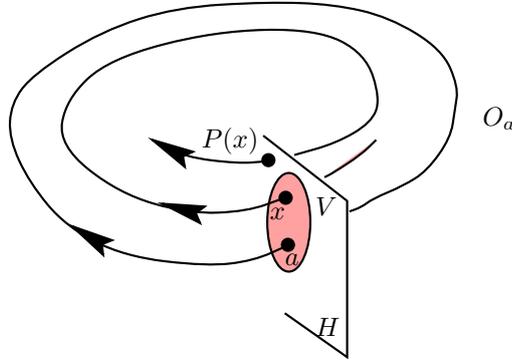


FIGURE 9.

Partant d'un point de H proche de a la solution recoupe H au bout d'un temps voisin de T . L'application $x \in V \mapsto \phi(x, \theta(x))$ est notée P et est appelée l'application de Poincaré de premier retour sur la transversale H .

Démonstration

(1) On commence par trouver un ouvert W de H , voisinage de a , et $\varepsilon > 0$ tels que $\psi := \phi|_{W \times]-\varepsilon, +\varepsilon[} \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit un difféomorphisme sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Cela est donné par le théorème d'inversion locale. Il s'applique car la différentielle $D\psi(a, 0)$ induit l'identité sur \vec{H} et vérifie $\partial\psi/\partial t(a, 0) = X(a)$. L'hypothèse de transversalité assure que $D\psi(a, 0)$ est surjective, donc inversible.

(2) Soit U l'image de ψ . Par continuité de $x \mapsto \phi(x, T)$ on trouve un voisinage ouvert V de a dans W tel que $x \in V$ implique $\phi(x, T) \in U$. Donc

$$\phi(x, T) = \psi(y, \tau)$$

pour un couple $y \in W$, $\tau \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$. Comme ψ est un difféomorphisme, $x \mapsto \tau$ est C^1 . Prenons alors $\theta(x) = T - \tau(x)$. Par la loi du flot, il vient $y = \phi(x, \theta(x))$. \square

La différentielle de P en a est reliée à la différentielle en a de $x \mapsto \phi_T(x) = \phi(x, T)$ de la façon suivante. Dans une base de \mathbb{R}^n dont les premiers vecteurs appartiennent à \vec{H} et dont le dernier est $X(a)$, la matrice jacobienne $D\phi_T(a)$ prend la forme

$$D\phi_T(a) = \begin{pmatrix} & & 0 \\ DP(a) & & \vdots \\ \times & \cdots & \times 1 \end{pmatrix}$$

où $DP(a)$ désigne la matrice jacobienne en a de l'application de Poincaré P .

Par ailleurs, $D\phi_T(a)$ est la solution au temps T de l'équation différentielle linéaire (non autonome, c.-à-d. dépendant du temps) dans l'espace des matrices réelles $n \times n$

$$\dot{M} = DX(\phi(a, t)) \circ M$$

de condition initiale $M(0) = \text{Id}$. Ici \circ désigne le produit matriciel et $DX(\cdot)$ désigne la différentielle de X au point indiqué, c'est-à-dire la matrice des dérivées partielles $\partial X_i / \partial x_j(\cdot)$ où X_1, \dots, X_n sont les composantes de X .

En général, on ne sait pas résoudre explicitement cette équation différentielle. On a seulement le théorème de la *divergence* (théorème de Liouville) :

det $D\phi_T(a)$ est la solution au temps T de l'équation différentielle linéaire dans \mathbb{R} , dépendant du temps,

$$\dot{y} = \text{div}X(\phi(a, t))y$$

de condition initiale $y(0) = 1$. Donc :

$$\det D\phi_T(a) = e^{\int_0^T \text{div}X(\phi(a, t)) dt}.$$

Par exemple si $n = 2$ et si la divergence du champ X est strictement négative le long de l'orbite \mathcal{O}_a , on déduit que $DP(a)$ (qui est un nombre réel, strictement positif parce que $D\phi_T(a) \in Gl_+(n)$) est < 1 .

L'orbite périodique est alors attractante ; c'est ce qui se passe dans l'exemple 1.4.

Théorème de stabilité. *Si le spectre de $DP(a)$ est contenu dans l'intérieur du disque unité, alors il existe un voisinage V de a dans la transversale H avec les propriétés suivantes :*

(1) $P(V)$ est contenu dans V , ainsi $P^n = P \circ \dots \circ P$ est défini sur V pour tout $n > 0$.

(2) Si $x \in V$, $P^n(x) \rightarrow a$ pour $n \rightarrow +\infty$ et la distance $\phi(x, t)$ à \mathcal{O}_a tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Cet énoncé est une version discrète du critère de Liapounov sur la stabilité des équilibres. On notera qu'il y a une exponentielle entre la condition spectrale de Liapounov et la condition ci-dessus. Cela n'a rien d'étonnant car, si a est un point d'équilibre, on a :

$$D\phi_T(a) = e^{TDX(a)}.$$

Références

- [1] V. I. ARNOLD – *Équations différentielles ordinaires*, Éditions Mir, Moscou, traduction française 1974.
- [2] A. AVEZ – *Calcul différentiel*, Masson, Paris, 1983.
- [3] H. CARTAN – *Calcul différentiel*, Hermann, Paris, 1977.
- [4] J.-P. DEMAILLY – *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, 1991.
- [5] M. DEMAZURE – *Catastrophes et bifurcations*, Ellipses, Paris, 1989.
- [6] M. HIRSCH & S. SMALE – *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.
- [7] M. C. IRWIN – *Smooth dynamical systems*, Academic Press, 1974.
- [8] F. LAUDENBACH – *Calcul différentiel et intégral*, Éditions de l'École polytechnique, 2000.
- [9] S. LEFSCHETZ – *Differential equations : geometric theory*, Dover Pub., New York, 1977.
- [10] L. S. PONTRYAGIN – *Ordinary differential equations*, Pergamon Press, 1962, traduction française : *Équations différentielles*, Mir, Moscou, 1969.

François Laudenbach, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, UMR 6629 du C.N.R.S., Université de Nantes, 44322 Nantes, France

E-mail : francois.laudenbach@univ-nantes.fr

Url : <https://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~laudenba/>