



Journées mathématiques X-UPS

Année 1996

Aspects des systèmes dynamiques: le premier retour

Patrick FOULON

Systèmes dynamiques hyperboliques

Journées mathématiques X-UPS (1996), p. 35-62.

<https://doi.org/10.5802/xups.1996-03>

© Les auteurs, 1996.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence

LICENCE INTERNATIONALE D'ATTRIBUTION CREATIVE COMMONS BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<https://www.editions.polytechnique.fr>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<https://portail.polytechnique.edu/cmls/>



Publication membre du

Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

www.centre-mersenne.org

SYSTÈMES DYNAMIQUES HYPERBOLIQUES

par

Patrick Foulon

Table des matières

Introduction.....	36
1. Les automorphismes linéaires hyperboliques.....	36
1.1. Le cadre géométrique, les tores.....	36
1.2. La mesure de Haar sur les tores.....	38
1.3. Les automorphismes linéaires des tores.....	38
1.4. Les automorphismes linéaires hyperboliques des tores.....	40
1.5. Variétés stables et instables.....	43
1.6. Transitivité et mélange topologique.....	47
1.7. Les problèmes de moyennes.....	48
1.8. Ergodicité.....	50
2. Non linéarité et stabilité structurelle.....	52
2.1. Le fer à cheval.....	52
2.2. Difféomorphismes d’Anosov – Ensembles hyperbo- liques.....	55
2.3. Dynamique symbolique.....	56
2.4. Codage et partitions de Markov.....	56
2.5. Stabilité des automorphismes hyperboliques.....	58
Références.....	62

Publication originelle dans Journées X-UPS 1996. Aspects des systèmes dynamiques : le premier retour. Prépublication du Centre de mathématique de l’École polytechnique, 1996, et Éditions de l’École polytechnique, 2009.

Introduction

Pour produire des systèmes dynamiques avec un comportement riche et complexe, il faut de la récurrence. Presque toute orbite doit revisiter souvent (indéfiniment) un voisinage de son origine. C'est pour forcer ce retour (de Poincaré) que nous allons travailler avec des modèles linéaires « compactifiés ». Mais ce n'est pas suffisant : il faut aussi une forte sensibilité aux conditions initiales. Les modèles hyperboliques qui présentent une sensibilité exponentielle uniforme sont les exemples les plus simples.

1. Les automorphismes linéaires hyperboliques

1.1. Le cadre géométrique, les tores. Dans cette partie nous présentons brièvement les tores. Plusieurs résultats sont admis ou laissés en exercice.

Le tore \mathbb{T}^k de dimension $k \geq 1$ est le groupe abélien quotient de $(\mathbb{R}^k, +)$ par le sous-groupe abélien $(\mathbb{Z}^k, +)$. On note $\pi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ la projection sur les classes. Comme d'habitude on considère \mathbb{R}^k muni de sa structure euclidienne canonique qui détermine sa topologie. Le tore \mathbb{T}^k est, lui, muni de la *topologie quotient* correspondante, pour laquelle notamment π est continue. Cette topologie est aussi définie par la distance d sur le tore :

$$d(a, b) = \inf\{\|x - x'\|_{\mathbb{R}^k}, \pi(x) = a, \pi(x') = b\}.$$

Nous aurons à considérer des applications continues $f : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$. Il est bon de remarquer qu'il existe alors $F = f \circ \pi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$ elle aussi continue. Nous admettrons (ou exercice)

Proposition 1.1.1. *Soit $f : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$ une application continue. Il existe un relèvement $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ de f , c'est à dire une application continue telle que le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}^k \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{T}^k \end{array} \quad \pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi.$$

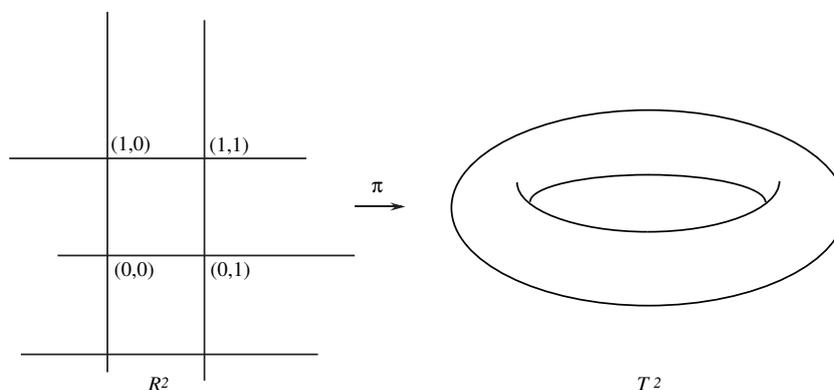


FIGURE 1.

Deux relèvements \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 d'une même application f diffèrent par un entier :

$$\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 + z_0, \quad z_0 \in \mathbb{Z}^k,$$

d'après la relation de commutation.

Pour faire du *calcul différentiel* sur le tore \mathbb{T}^k , il nous faudrait le munir d'une structure de variété différentiable. Par faute de temps et de place nous dirons qu'une application $f : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$ est dans $C^1(\mathbb{T}^k, \mathbb{T}^k)$ si un quelconque de ses relèvements \tilde{f} est continûment différentiable. Nous noterons que la *différentielle* $D_p f$ de f en un point p du tore \mathbb{T}^k est donnée par l'endomorphisme linéaire de \mathbb{R}^k

$$D_p f = D_x \tilde{f}$$

pour un quelconque $x \in \mathbb{R}^k$ tel que $\pi(x) = p$.

Exercice. Vérifier que le terme de droite de cette égalité est bien indépendant du représentant x .

Les mêmes définitions et notations s'étendent sans peine aux applications de classe C^k , et aux fonctions $g : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{C}$ à valeurs dans \mathbb{C} (ou \mathbb{R}).

A plusieurs reprises un point p du tore sera représenté par ses « coordonnées » notées

$$p = (x_1, \dots, x_k) \pmod{1},$$

où $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ et $\pi(x) = p$.

1.2. La mesure de Haar sur les tores. Pour calculer des moyennes il nous sera utile de disposer d'une *mesure* sur le tore \mathbb{T}^k qui présente des propriétés analogues à celle de la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^k (nous utiliserons sans le dire l'identification donnée par le *théorème de représentation* de Riesz).

Théorème 1.2.1. *Il existe une unique mesure de Radon (forme linéaire sur l'espace des fonctions continues à support compact) sur le tore \mathbb{T}^k qui soit invariante par les translations et de masse totale 1.*

On la note m , on l'appelle *mesure de Haar* de \mathbb{T}^k . Elle est donnée par la relation

$$\forall \varphi \in C^0(\mathbb{T}^k, \mathbb{C}), \quad m(\varphi) = \int_{\mathbb{T}^k} \varphi \cdot dm = \int \cdots \int_{[0,1]^k} \varphi \circ \pi(x) \cdot dx_1 \cdots dx_n.$$

Idee de la démonstration. La formule définissante nous donne évidemment une forme linéaire sur $C^0(\mathbb{T}^k, \mathbb{C})$. De plus, comme $\varphi \circ \pi$ est une fonction \mathbb{Z}^k -périodique, nous avons, pour tout $\beta \in \mathbb{R}^k$,

$$\int \cdots \int_{[0,1]^k} \varphi \circ \pi(x + \beta) dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \int_{[0,1]^k} \varphi \circ \pi(x) dx_1 \cdots dx_n.$$

Il en résulte que la mesure de Haar est invariante par les translations car pour tout $\alpha \in \mathbb{T}^k$, si τ_α est la translation de α , il existe $\beta \in \mathbb{R}^k$ tel que $\pi(\beta) = \alpha$ (voir 1.1.1) et

$$\tau_\alpha \circ \pi = \pi \circ \tilde{\tau}_\alpha = \pi \circ \tau_\beta.$$

Nous admettrons l'unicité. Enfin, $m(\mathbb{T}^k) = \int_{\mathbb{T}^k} 1 dm = 1$. □

1.3. Les automorphismes linéaires des tores. Le modèle linéaire servira de fil conducteur tout au long de cet exposé. Tout endomorphisme linéaire L de \mathbb{R}^k tel que $L(\mathbb{Z}^k) \subset \mathbb{Z}^k$ induit naturellement un homomorphisme F_L de \mathbb{T}^k . L'ensemble de ces homomorphismes sera noté $\text{Endom}(\mathbb{T}^k)$. Remarquons que

$$F \in \text{Endom}(\mathbb{T}^k) \iff \exists! L \in \text{Endom}(\mathbb{R}^k), L = \tilde{F}.$$

De plus nous avons

Proposition 1.3.1. *Si $F_L \in \text{Endom}(\mathbb{T}^k)$, alors*

- (i) F_L est continue,
- (ii) F_L est un homéomorphisme si et seulement si $\det L = \pm 1$.

Nous dirons qu'un homomorphisme F_L est dans l'ensemble $\text{Aut}(\mathbb{T}^k)$ des *automorphismes* linéaires du tore si F_L est un *homéomorphisme*.

Démonstration

(i) Soit U un ouvert de \mathbb{T}^k . Sa préimage est, par définition de la topologie induite, un ouvert de \mathbb{R}^k . La projection est ici une application ouverte et il n'y a plus qu'à invoquer la continuité de L .

(ii) Si F_L est un homéomorphisme de \mathbb{T}^k son inverse F_L^{-1} admet un unique relèvement linéaire $B = L^{-1}$. Par conséquent $L^{-1}(\mathbb{Z}^k) \subset \mathbb{Z}^k$. Ainsi L et L^{-1} sont à coefficients entiers dans la base canonique de \mathbb{R}^k . On conclut en remarquant que $\det(L^{-1}) = 1/\det L$ doit lui aussi être un entier.

Réciproquement si $\det L = \pm 1$ alors L^{-1} est à coefficients entiers, et, d'après (i) l'application induite $F_{L^{-1}}$ est continue ainsi que F_L . Elles sont inverses l'une de l'autre. \square

Un automorphisme linéaire du tore nous fournit un nouvelle exemple de transformation préservant la mesure de Haar. Plus précisément nous avons

Proposition 1.3.2. *Si $F_L \in \text{Aut}(\mathbb{T}^k)$ alors $F_{L*}m = m$.*

Démonstration. D'après le théorème de Riesz il faut vérifier que pour toute $g \in C^0(\mathbb{T}^k, \mathbb{R})$ nous avons

$$\int_{\mathbb{T}^k} g \circ F_L \cdot dm = \int_{\mathbb{T}^k} g \cdot dm.$$

En se référant au théorème 1.2.1, il suffit en fait d'observer que $F_{L*}m$ est invariante par translation. Pour tout $\alpha \in \mathbb{T}^k$, et $\beta \in \mathbb{R}^k$ tel que $\pi(\beta) = \alpha$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^k} g \circ \tau_\alpha \circ F_L \cdot dm &= \int \cdots \int_{[0,1]^k} g \circ \tau_\alpha \circ F_L(\pi(x)) \cdot dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int \cdots \int_{[0,1]^k} g \circ \tau_\alpha \cdot \pi(L(x)) \cdot dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int \cdots \int_{[0,1]^k} g(\pi(L(x) + \beta)) \cdot dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int \cdots \int_{[0,1]^k} g(F_L(\pi(x + L^{-1}(\beta)))) \cdot dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{T}^k} g \circ F_L \cdot dm. \end{aligned}$$

L'invariance de la masse est évidente par surjectivité. \square

Encore une propriété générale, les automorphismes linéaires des tores ont beaucoup d'orbites périodiques. Elles sont mêmes partout denses.

Proposition 1.3.3. *Pour tout $F_L \in \text{Aut}(\mathbb{T}^k)$*

- (i) $\mathbb{Q}^k / \mathbb{Z}^k \subset \text{Per}(F_L)$,
- (ii) $\overline{\text{Per}(F_L)} = \mathbb{T}^k$.

Démonstration

- (i) L'ensemble défini pour $q \in \mathbb{Z}$ par

$$\Lambda_q = \left\{ \pi \left(\frac{P_1}{q}, \dots, \frac{P_k}{q} \right), (P_1, \dots, P_k) \in \mathbb{Z}^k \right\}$$

contient q^k éléments. Il est invariant par F_L puisque L est à coefficients entiers et

$$F_L \left(\pi \left(\frac{P_1}{q}, \dots, \frac{P_n}{q} \right) \right) = \pi \left(\frac{1}{q} L(P_1, \dots, P_n) \right).$$

Par conséquent, pour tout $x \in \Lambda_q$ il existe $n_1 < n_2$ dans \mathbb{N} tels que $F_L^{n_2}(x) = F_L^{n_1}(x)$, donc $F_L^{n_2}(x) = x$.

- (ii) est dès lors évident. □

1.4. Les automorphismes linéaires hyperboliques des tores.

Ils vont constituer notre principal exemple de système dynamique. Mais auparavant nous allons faire une digression justifiée par leurs actions, elles aussi hyperboliques, sur certains espaces fonctionnels.

Définition 1.4.1. Un endomorphisme continu $L : E \rightarrow E$ de l'espace de Banach E est dit hyperbolique, s'il existe :

- une décomposition invariante par L en somme de sous-espaces fermés $E = E^s \oplus E^u$,

- une norme $\| \cdot \|$ dite adaptée et qui définit la topologie,

telles que

- (i) l'endomorphisme $L|_{E^u} : E^u \rightarrow E^u$ est inversible, d'inverse continu,

- (ii) les endomorphismes $L|_{E^s}$ et $(L|_{E^u})^{-1}$ sont des contractions (c'est-à-dire que l'on a $\|L|_{E^s}\|, \|(L|_{E^u})^{-1}\| < 1$),

(iii) pour tout $x \in E$, si on écrit $x = x^s + x^u$ avec $x^s \in E^s, x^u \in E^u$, alors $\|x\| = \max(\|x^s\|, \|x^u\|)$.

Par exemple, un automorphisme linéaire de \mathbb{R}^k est hyperbolique si et seulement s'il n'a pas de valeurs propres sur \mathbb{C} de module 1.

Exercice. Le démontrer.

Pour cela, on pourra aussi faire l'exercice suivant.

Exercice. Soient $A \in \text{Endom}(\mathbb{R}^k)$, $\rho(A)$ le maximum des modules des valeurs propres réelles ou complexes de A . Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une norme sur \mathbb{R}^k pour laquelle $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Définition 1.4.2. Un automorphisme linéaire F_L du tore \mathbb{T}^k est dit hyperbolique s'il est induit par un automorphisme linéaire hyperbolique de \mathbb{R}^k . On notera $H(\mathbb{T}^k)$ leur ensemble.

Un exemple bien connu sur le tore T^2 :

$$F_L(x, y) = (2x + y, x + y) \pmod{1}, \text{ avec } L(x, y) = (2x + y, x + y).$$

Les valeurs propres de L sont

$$\lambda_2 = \lambda_1^{-1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1 < \lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

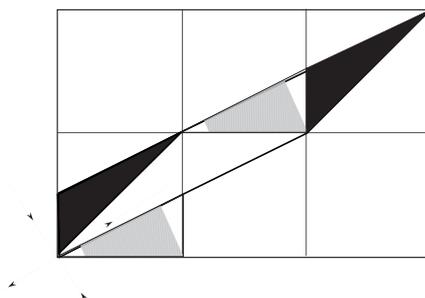


FIGURE 2.

Leurs propriétés dynamiques s'apparentent à celles de l'application expansive sur le cercle unité $z \rightarrow z^p$, elles sont plus complexes que celles des translations des tores, comme nous allons l'observer. Quand

on essaye de dénombrer les orbites périodiques, on s'aperçoit que leur nombre croît (asymptotiquement) exponentiellement. En effet :

Proposition 1.4.3. *Soit F_L un automorphisme linéaire hyperbolique du tore \mathbb{T}^k . Si $N_p(F_L)$ est le nombre de points périodiques de période qui divise l'entier $p > 1$ alors*

$$(i) \quad N_p(F_L) = |\det(L^p - \text{Id}_{\mathbb{R}^k})|$$

$$(ii) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \log N_p(F_L) = \sum_{i=1}^r \mu_i \log |\lambda_i|$$

où les λ_i sont les valeurs propres de L de module $|\lambda_i| > 1$, et μ_i sont les multiplicités correspondantes.

Démonstration

(i) Un point $x \in \mathbb{T}^k$ est périodique de période p si $(F_L^p - \text{Id}_{\mathbb{T}^k})(x) = 0$. L'automorphisme F_L étant hyperbolique, L l'est et par conséquent L^p aussi. Donc $F_L^p - \text{Id}_{\mathbb{T}^k}$ est induit par un automorphisme linéaire de \mathbb{R}^k . Il va nous falloir un lemme (assez amusant) pour compter les pré-images.

Lemme. *Soit $F_A \in \text{Endom}(\mathbb{T}^k)$, tel que de plus $\det A \neq 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{T}^k$ on a $\#F_A^{-1}\{x\} = |\det A|$.*

Preuve du lemme. Comme A est bijective, F_A est surjective donc pour tout $x \in \mathbb{T}^k$, il existe un point $y \in \mathbb{T}^k$ tel que $F_A(x) = y$. Par conséquent $F_A^{-1}\{x\} = y + F_A^{-1}\{0\}$ a un cardinal qui ne dépend pas de x .

Utilisons maintenant le fait que F_A est localement injective. Plus précisément soit $B = B(0, R)$ la boule ouverte dans \mathbb{R}^k de centre 0 de rayon $R < \inf(1/2, 1/2\|A\|)$. La projection π est injective en restriction aux ouverts $V = B \cap A^{-1}(B)$ et $A(V)$.

Pour $X \in V$, si $0 = F_A(\pi(X)) = \pi(A(X))$ alors $A(X) = 0$. Par injectivité de A il vient $X = 0$. Nous en déduisons que si $y, y' \in F_A^{-1}\{x\}$ sont distincts, alors $(y + \pi(V)) \cap (y' + \pi(V)) = \emptyset$. En effet sinon il existe x et x' dans V tels que $y + \pi(x) = y' + \pi(x')$. En appliquant F_A il vient $F_A(\pi(x)) = F_A(\pi(x'))$, soit $\pi(A(x)) = \pi(A(x'))$. Par injectivité de π sur $A(V)$ il vient $A(x) = A(x')$, soit $x = x'$.

Le cardinal de $F_A^{-1}\{x\}$ est donc, par invariance de la mesure de Haar, borné par $1/m(\pi(V))$ ($m(\pi(V)) \neq 0$).

Soient t_1, \dots, t_n les préimages de 0 par F_A . On a

$$F_A^{-1}(F_A(\pi(V))) = \bigcup_{i=1}^n (\pi(V) + t_i)$$

Ce qui nous donne $m(F_A(\pi(V))) = n \cdot m(\pi(V))$, en raison de l'invariance de la mesure de Haar par F_A . Il nous reste à appliquer la formule du changement de variable pour vérifier que $m(F_A(\pi(V))) = |\det A|m(\pi(V))$. \square

(ii) Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_{r'}) \in \mathbb{C}^{r'}$ les valeurs propres de L , (μ_i) leur multiplicités. Un simple développement nous donne

$$|\det(L^p - \text{Id})| = \left| \prod_{i=1}^{r'} (\lambda_i - 1)^{\mu_i} \right|.$$

D'où nous tirons

$$\frac{1}{p} \log |\det(L^p - \text{Id})| = \sum_{i=1}^{r'} \mu_i \frac{\log |\lambda_i^p - 1|}{p}.$$

D'autre part, pour tout nombre complexe qui n'est pas une racine de l'unité,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\lambda^n - 1| = \begin{cases} 0 & \text{si } |\lambda| < 1 \\ \log |\lambda| & \text{si } |\lambda| > 1 \end{cases}$$

d'où le résultat. \square

1.5. Variétés stables et instables.

Définition 1.5.1. Soit f un homéomorphisme d'un espace métrique X .

(i) La variété stable W_x^s du point $x \in X$ est l'ensemble

$$W_x^s = \{y \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}.$$

(ii) La variété instable W_x^u du point x de X est l'ensemble

$$W_x^u = \{y \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}.$$

Dans les applications, on souhaite en fait montrer que ces ensembles ont des propriétés plus fortes, comme par exemple d'être des variétés différentielles.

Ces notions sont particulièrement bien adaptées aux automorphismes linéaires hyperboliques des tores, puisque nous avons le

Théorème 1.5.2. *Pour un automorphisme $F_L : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$ linéaire hyperbolique du tore,*

(i) *les variétés stables et instables de 0 sont respectivement $W_0^s = \pi(E^s)$ et $W_0^u = \pi(E^u)$.*

(ii) *Pour tout point $x \in \mathbb{T}^k$ on a*

$$W_x^s = x + W_0^s, \quad W_x^u = x + W_0^u.$$

(iii) *Soit d une distance provenant d'une norme. Pour ε assez petit on a*

$$\begin{aligned} W_{x,\varepsilon}^s &:= \{y \mid \forall n \in \mathbb{N} \, d(F_L^n(x), F_L^n(y)) \leq \varepsilon\} \subset W_x^s \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_L^{-n} W_{F_L^n(x), \varepsilon}^s. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} W_{x,\varepsilon}^u &:= \{y \mid \forall n \in \mathbb{N} \, d(F_L^{-n}(x), F_L^{-n}(y)) \leq \varepsilon\} \subset W_x^u \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_L^{-n} W_{F_L^n(x), \varepsilon}^u. \end{aligned}$$

(iv) *Si la distance d vient d'une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^k adaptée à L , alors pour tout ε assez petit,*

$$W_{x,\varepsilon}^s = x + \pi(B^s(0, \varepsilon)), \quad W_{x,\varepsilon}^u = x + \pi(B^u(0, \varepsilon))$$

(où $B^s(0, \varepsilon) = \{v \in E^s \mid \|v\| \leq \varepsilon\}$, $B^u(0, \varepsilon) = \{v \in E^u \mid \|v\| \leq \varepsilon\}$).

Démonstration

(iv) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^k adaptée à L . On notera d les distances correspondantes sur \mathbb{R}^k et \mathbb{T}^k .

Soit $\delta = \min\{\|z\| \mid z \in \mathbb{Z}^k - \{0\}\}$. Si $d(0, y)$ et $d(0, F_L(y))$ sont $< \delta \|L\|^{-1}/2$, on peut trouver $v \in \mathbb{R}^k$ et $z \in \mathbb{Z}^k$ tels que :

$$\pi(v) = y; \quad \|v\| = d(0, y), \quad \|L(v) + z\| = d(0, F_L(y)).$$

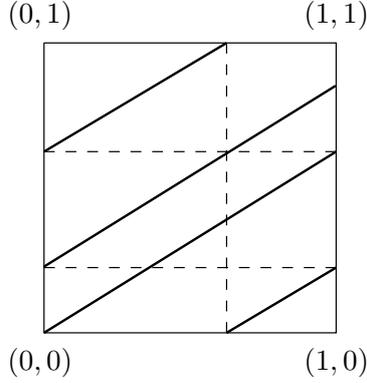


FIGURE 3. $F_L(x, y) = (2x + y, x + y) \bmod (1)$, W_0^u est la droite $y = (\sqrt{5} - 1)x/2 \bmod (1)$

Observons que $z = 0$, car

$$\begin{aligned}
 \|z\| &\leq \|z + L(v)\| + \|-L(v)\| \\
 &\leq d(0, F_L(y)) + \|L\| \|v\| \\
 &= d(0, F_L(y)) + d(0, y) \|L\| \\
 &\leq (d(0, F_L(y)) + d(0, y)) \|L\| \text{ car } \|L\| \geq \|L|_{E^u}\| \geq \|L|_{E^u}^{-1}\|^{-1} > 1 \\
 &< \delta.
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\forall \varepsilon < \delta \|L\|^{-1}/2, \quad W_{x,\varepsilon}^s = \pi \left(\{v \in \mathbb{R}^k \mid \forall n \in \mathbb{N} \|L^n(v)\| \leq \varepsilon\} \right).$$

Mais tout $v \in \mathbb{R}^k$, se décompose en $v = v_s + v_u$, $v_s \in E^s$, $v_u \in E^k$. La norme étant adaptée, nous avons

$$\begin{aligned}
 \|L^{-n}(L^n(v_u))\| = \|v_u\| &\leq \|L|_{E^u}^{-1}\|^n \|L^n(v_u)\| \\
 &\leq \|L|_{E^u}^{-1}\|^n \|L^n(v)\| \\
 &\leq \|L|_{E^u}^{-1}\|^n \cdot \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Le terme de droite de l'inégalité tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Donc $v_u = 0$ et $v \in E^s$ avec $\|v\| \leq \varepsilon$.

Ensuite on revient à la définition. Si un point $y \in W_0^s$, il existe un N tel que $n \geq N$, $d(F_L^n(y), 0) < \varepsilon$, donc $F_L^N(y)$, est dans $W_{0,\varepsilon}^s$. Ce qui prouve (iii) pour l'origine et une distance adaptée.

Par ailleurs, $E^s = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^{-n}(B^s(0, \varepsilon))$, et donc

$$\begin{aligned} \pi(E^s) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \pi(L^{-n}(B^s(0, \varepsilon))) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_L^{-n}(\pi(B^s(0, \varepsilon))) \\ &= W_0^s. \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à considérer la feuille stable d'un point $x \neq 0$. Puisque $F_L^n(x) - F_L^n(y) = F_L^n(x - y)$, on a $y \in W_x^s$ si et seulement si $x - y \in W_0^s$.

Pour conclure (iii), remarquons que si d_1 est une distance pas nécessairement adaptée, mais qui donne la topologie, alors par la compacité de \mathbb{T}^k , il existe $\lambda > 0$, tel que $d_1 \geq \lambda d$. Il en résulte que

$$\{y \mid \forall n \in \mathbb{N} \ d_1(F_L^n(x), F_L^n(y)) \leq \lambda \varepsilon\} \subset W_x^s. \quad \square$$

Pour la suite, voici une importante propriété des feuilles stables (instables).

Proposition 1.5.3. *les variétés stables et instables d'un automorphisme linéaire hyperbolique du tore $F_L : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$ sont denses dans \mathbb{T}^k .*

Démonstration. Il suffit de montrer que la feuille stable (instable) de 0 est partout dense dans \mathbb{T}^k . Choisissons sur \mathbb{R}^k une norme $\|\cdot\|$ adaptée. Pour tout $x \in \mathbb{T}^k$, considérons la suite $x_n = F_L^n(x)$. On peut choisir des relevés $y_n \in [0, 1]^k$, $\pi(y_n) = x_n$. Si on écrit $y_n = y_n^s + y_n^u$ suivant la décomposition $E^s \oplus E^u$, on a, par compacité de $[0, 1]^k$, l'inégalité $\|y_n^u\| \leq \|y_n\| \leq C$. Par conséquent

$$\|L^{-n}(y_n^u)\| \leq \|L_{|E^u}^{-1}\|^n \cdot C \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x &= \pi(L^{-n}(y_n^s) + L^{-n}(y_n^u)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(L^{-n}(y_n^s)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F_L^{-n}(\pi(y_n^s)). \end{aligned}$$

Mais $\pi(y_n^s) \in W_0^s$. □

Cette propriété va nous donner dans le paragraphe suivant des informations sur la dynamique des automorphismes linéaires hyperboliques du tore.

1.6. Transitivité et mélange topologique. La dynamique d'une translation $\tau_\alpha : T^n \rightarrow T^n$ dépend de son vecteur de translation α . Un point $\alpha \in T^n$ est irrationnel si, quelque soit un relevé $\beta \in \mathbb{R}^n$ ($\pi(\beta) = \alpha$) et $k \in \mathbb{Z}^n$, alors $k \cdot \beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Dans ce cas, la dynamique de $\tau_\alpha(x) = x + \alpha$ est minimale, ce qui signifie, rappelons-le, que toutes ses orbites sont denses. Cependant toutes les translations sont des isométries. Ce qui exclut qu'elles puissent assurer un mélange topologique comme le font les automorphismes linéaires hyperboliques.

Définition 1.6.1. Un système dynamique $f : X \rightarrow X$ est dit

(i) topologiquement mélangeant si pour toute paire d'ouverts $U, V \subset X$, il existe un entier N , tel que

$$\forall n > N \quad f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

(ii) topologiquement transitif, si il existe $n_0 > 0$, tel que

$$f^{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

A l'évidence, (ii) est plus faible. Si X est un espace métrique complet, la transitivité topologique entraîne l'existence d'une orbite dense, par le théorème de Baire (exercice).

Proposition 1.6.2

(i) *Les automorphismes linéaires hyperboliques des tores sont topologiquement mélangeant.*

(ii) *Une isométrie n'est pas topologiquement mélangeante.*

En particulier une translation n'est pas topologiquement mélangeante.

Démonstration

(ii) Supposons que l'isométrie $f : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$ est topologiquement mélangeante. Pour tout triplet x, y, z de points de \mathbb{T}^k , posons $\delta = d(y, z)$ et choisissons $\varepsilon < \delta/10$. Par hypothèse il existe N tel que pour

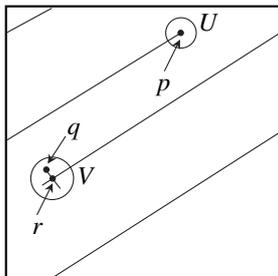


FIGURE 4.

tout $n > N$, il existe $x'_n \in f^n(B(x, \varepsilon)) \cap B(y, \varepsilon)$ et $x''_n \in f^n(B(x, \varepsilon)) \cap B(z, \varepsilon)$. Mais alors $f^{-n}(x'_n)$ et $f^{-n}(x''_n)$ sont dans $B(x, \varepsilon)$ ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \delta = d(y, z) &\leq d(y, x'_n) + d(x'_n, x''_n) + d(x''_n, z) \\ &\leq \varepsilon + d(f^{-n}(x'_n), f^{-n}(x''_n)) + \varepsilon \\ &\leq 3\varepsilon ! \end{aligned}$$

(i) Soient F_L un automorphisme linéaire hyperbolique, U et V deux ouverts non vides de \mathbb{T}^k et $\varepsilon \ll 1$. Par la densité de la variété stable W_0^s de l'origine, il existe un point $x \in U \cap W_0^s$. Dès lors $F_L^n(x) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. On trouve de même un point $y \in V \cap W_0^u$, tel que $F_L^{-n}(y) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Ceci entraîne que pour n suffisamment grand $x + F_L^{-n}(y) \in U$, et $F_L^n(x + F_L^{-n}(y)) = F_L^n(x) + y \in V$. \square

Remarquons que nous avons, hormis la densité des variétés stables, et instables utilisé le fait que 0 est un point fixe.

1.7. Les problèmes de moyennes. L'exemple des automorphismes des tores nous présente une telle complexité topologique qu'il semble naturel d'étudier des moyennes de fonctions plutôt que leurs valeurs ponctuelles. On va observer un caractère « probabiliste » assez marqué de ces systèmes.

Nous supposons donné un ensemble X muni d'une mesure de probabilité μ , i.e., $\mu(X) = 1$, et une transformation $T : X \rightarrow X$

qui préserve la mesure i.e., pour tout ensemble mesurable A , on a $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. Nous noterons ceci (X, μ, T) .

Définition 1.7.1. Soit (X, μ, T) ,

(i) la moyenne temporelle d'une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) est définie lorsqu'elle existe par

$$f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} f(T^p(x)), \quad x \in X, n \in \mathbb{N}.$$

(ii) La moyenne spatiale d'une fonction mesurable $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\bar{f} = \int_X f(x) d\mu.$$

Un des principaux résultats sur les moyennes est donné par le

Théorème 1.7.2 (G.D. Birkhoff, théorème ergodique ponctuel)

Soit $T : X \rightarrow X$ une transformation qui préserve la mesure de probabilité μ et $f \in L^1(X, \mu)$. Alors $f^*(x)$ existe pour μ -presque tout $x \in X$, i.e., il existe $\Omega \subset X$, $\mu(\Omega) = 1$ et pour tout $x \in \Omega$, $f^*(x)$ existe. De plus f^* est sommable et

$$\int_X f^* d\mu = \int_X f d\mu.$$

Nous admettrons ce résultat. Un cas intéressant à considérer est celui où $f = \chi_A$ est la fonction caractéristique d'un ensemble $A \subset X$ mesurable. Il vient alors

$$\chi_A^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq j \leq n-1 \mid T^j(x) \in A\}.$$

Ce qui s'interprète naturellement comme le temps moyen passé par l'orbite \mathcal{O}_x du point x dans l'ensemble A .

Ceci conduit naturellement à la notion d'ergodicité. Mais auparavant nous suggérons au lecteur de tester l'exercice suivant.

Exercice 1.7.3. Soit $F_L(x, y) \rightarrow (2x + y, x + y) \bmod (1)$ l'automorphisme linéaire hyperbolique du tore déjà rencontré. Considérons sur \mathbb{T}^2 la fonction $f(x, y) = e^{2i\pi x}$, $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ et W_0^s la variété stable de $(0, 0)$.

- Montrer que pour $(x, y) \in W_0^s$, $f^*(x, y) = 1$.
- Montrer que $\bar{f} = \int_{T^2} f \cdot dm = 0$. En déduire que f^* et \bar{f} sont différentes sur un ensemble dense. Comparer avec le théorème de Birkhoff et avec ce qui va suivre.

1.8. Ergodicité. Nous allons maintenant étudier la complexité, mais au niveau mesurable. La notion centrale est celle d'ergodicité.

Définition 1.8.1. Soit $T : X \rightarrow X$ une dynamique. Une mesure de probabilité T -invariante μ est ergodique si pour tout ensemble invariant $A \subset X$ on a $\mu(A) = 1$ ou $\mu(A) = 0$.

Nous aurons surtout à l'esprit la proposition suivante.

Proposition 1.8.2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1) (X, T, μ) est ergodique.
- (2) Si $f \in L^1(X, \mu)$ est une fonction T -invariante, alors f est presque partout constante.
- (3) Si $f \in L^2(X, \mu)$ est une fonction T -invariante, alors f est presque partout constante.
- (4) Pour toute fonction $f \in L^1(X, \mu)$ nous avons $f^*(x) = \int_X f d\mu$, μ -presque sûrement.

Remarques

- La propriété n°4 est la plus connue. Elle est fréquemment employée par les physiciens comme base de la thermodynamique statistique.
- Si une mesure a un rôle particulier, comme dans le cas de la mesure de Haar sur les tores, on parle plutôt de transformation ergodique en oubliant souvent par rapport à quelle mesure.

Démonstration

(2) \Rightarrow (3). Comme la mesure est finie on a $L^2(X, \mu) \subset L^1(X, \mu)$. En effet, puisque $|f(x) \cdot 1| \leq (|f(x)|^2 + |1|^2)/2$ on a

$$\int_X |f(x)| \leq \frac{1}{2} \int_X |f(x)|^2 d\mu + \frac{1}{2} \int_X 1 \cdot d\mu < \infty.$$

(3) \Rightarrow (1) Si A est un ensemble mesurable invariant, sa fonction caractéristique $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$ est invariante,

$\chi_A \circ T = \chi_A$ et est évidemment de carré sommable. Elle est donc presque sûrement constante, i.e., $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

(1) \Rightarrow (2) Soit f une fonction réelle, T -invariante, absolument sommable (si f est à valeurs dans \mathbb{C} on fait de même avec les parties réelle et imaginaire). Pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble $A_c = \{x \in X \mid f(x) \leq c\}$ est invariant par T . Donc $\mu(A_c) = 0$ ou 1 . Ce qui permet aisément de conclure.

(2) \Rightarrow (4) Par le théorème de Birkhoff on a $f^* \in L^1(X, \mu)$. De plus $f^* \circ T = f^*$. Donc f^* est μ -presque sûrement une constante, disons égale à c . Il vient, en utilisant une nouvelle fois le théorème de Birkhoff,

$$f^* \stackrel{\mu\text{-ps}}{=} c = \int_X c d\mu = \int f^* d\mu = \bar{f}.$$

(4) \Rightarrow (3) Si une fonction $f \in L^2(X, \mu)$ est invariante, alors

$$s_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x) = f(x)$$

donc $f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$. Mais d'après (4), $f^*(x) = \bar{f}$ μ -presque sûrement. \square

Voici enfin un résultat plus concret.

Proposition 1.8.3. *Un automorphisme linéaire hyperbolique du tore $F_L : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ est ergodique.*

Démonstration. Soit donc $F_L : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$. D'après 1.3.2, $F_{L*} m = m$. Soit par ailleurs $f \in L^2(\mathbb{T}^n, \mu)$. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \pmod{1}$ est un point du tore et $k \in \mathbb{Z}^n$, on peut évaluer son coefficient de Fourier $c_k(f)$ qui est donné par

$$c_k(f) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2i\pi \langle k, x \rangle} dm$$

où $\langle k, x \rangle$ est modulo les entiers le produit scalaire euclidien d'un relevé de x avec le vecteur entier k . On peut écrire de même

$$c_k(f \circ F_L) = \int_{\mathbb{T}^n} f(F_L(x)) e^{-2i\pi \langle k, F_L^{-1} F_L(x) \rangle} dm.$$

Par invariance de la mesure de Haar il vient

$$c_k(f \circ F_L) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2i\pi \langle B(k), x \rangle} dm = c_{B(k)}(f)$$

avec $B = {}^t(L^{-1})$. Si une fonction $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$ est invariante ($f \circ F_L = f$), ses coefficients de Fourier satisfont d'après ce qui précède à

$$c_{B(k)}(f) = c_k(f \circ F_L) = c_k(f).$$

Remarquons par ailleurs que pour tout $k_0 \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$, l'ensemble $\{B^i(k_0) \mid i \in \mathbb{N}\}$ est infini. Sinon, il existerait $i \neq j$ tel que $B^i(k_0) = B^j(k_0)$; mais, par hypothèse, B n'a pas de valeur propre sur le cercle unité. Comme $f \in L^2(\mathbb{T}^n, m)$, on peut pour tout $k_0 \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$ écrire la majoration

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_{B^n(k_0)}(f)|^2 < \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k(f)|^2 = \int_{\mathbb{T}^n} |f|^2 dm < \infty,$$

ce qui implique que $c_{k_0}(f) = 0$. □

2. Non linéarité et stabilité structurelle

2.1. Le fer à cheval. En 1965 S. Smale a construit un difféomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ du plan avec une dynamique très complexe qui admet une infinité d'orbites périodiques de périodes arbitrairement grande.

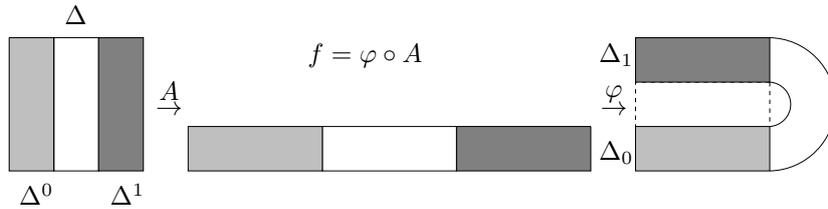


FIGURE 5.

En fait on ne s'intéresse qu'à un difféomorphisme du rectangle $\Delta = [0, 1]^2$ sur son image. La construction s'effectue comme sur la figure par composition d'une application linéaire hyperbolique $A : (x, y) \rightarrow (3x, y/3)$ avec une transformation non linéaire φ , le tout

étant tel que

$$\begin{aligned} f(\Delta^0) &= \Delta_0, & f|_{\Delta^0} : (x, y) &\longrightarrow (3x, \frac{1}{3}y) \\ f(\Delta^1) &= \Delta_1, & f|_{\Delta^1} : (x, y) &\longrightarrow (-3x + 3, -\frac{1}{3}y + 1). \end{aligned}$$

Pour comprendre l'itération de f il est bon de chercher un sous-ensemble Λ de Δ invariant par le difféomorphisme. Remarquons que

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{gris} & \text{blanc} \\ \hline \end{array} & = f^{-1}(\Delta) \cap \Delta = \{x \in \Delta \mid f(x) \in \Delta\} \\ \Delta^0 & \quad \Delta^1 & = \Delta^1 \cup \Delta^0 \end{array}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_0 & \begin{array}{|c|} \hline \text{gris} \\ \hline \end{array} = f(\Delta) \cap \Delta = \{x \in \Delta \mid f^{-1}(x) \in \Delta\} \\ \Delta_1 & \begin{array}{|c|} \hline \text{gris} \\ \hline \end{array} = \Delta_1 \cup \Delta_0 = f(\Delta^1) \cup f(\Delta^0) \end{aligned}$$

Par itération il vient

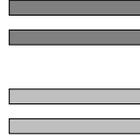
$$\begin{aligned} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{gris} & \text{gris} \\ \hline \end{array} & = f^{-2}(\Delta) \cap f^{-1}(\Delta) \cap \Delta \\ & = \{x \in \Delta \mid f(x) \in \Delta, f^2(x) \in \Delta\} \\ & = f^{-1}(\Delta^1 \cup \Delta^0) \cap (\Delta^1 \cup \Delta^0) = \cup \Delta^{\omega_0, \omega_{-1}}, \\ & \text{avec } \omega_0, \omega_{-1} \in \{0, 1\}, \Delta^{\omega_0, \omega_{-1}} = \Delta^{\omega_0} \cap f^{-1}(\Delta^{\omega_{-1}}). \end{aligned}$$

De la même manière nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} f^{-n}(\Delta) \cap \dots \cap \Delta &= \cup \Delta^{\omega_0, \dots, \omega_{-n}}, \quad (\omega_0, \dots, \omega_{-n}) \in \{0, 1\}^{n+1} \\ \text{et} \quad \Delta^{\omega_0, \dots, \omega_{-n}} &= \bigcap_{i=0}^n f^{-i}(\Delta^{\omega_{-i}}). \end{aligned}$$

La largeur des rectangles verticaux décroît exponentiellement, et $\bigcap_{i=0}^n f^{-i}(\Delta)$ est la réunion de 2^n rectangles verticaux. Lorsque $n \rightarrow \infty$ nous obtenons $\bigcap_{i=0}^{\infty} f^{-i}(\Delta) = K \times [0, 1]$ où K est l'ensemble de Cantor triadique.

De la même manière nous obtenons par image directe des réunions de rectangles horizontaux



$$= \Delta \cap f(\Delta) \cap f^2(\Delta) = \bigcup \Delta_{\omega_1, \omega_2}, \quad (\omega_1, \omega_2) \in \{0, 1\}^2;$$

et plus généralement

$$\Delta \cap f(\Delta) \cap \dots \cap f^n(\Delta) = \bigcup \Delta_{\omega_1, \dots, \omega_n} \quad (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n$$

avec

$$\Delta_{\omega_1, \dots, \omega_n} = \bigcap_{i=1}^n f^i(\Delta^{\omega_i}).$$

A nouveau l'intersection infinie nous donne

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} f^i(\Delta) = [0, 1] \times K.$$

L'ensemble $\Lambda = \bigcap_{-\infty}^{+\infty} f^i(\Delta)$ est un ensemble invariant par f ; de plus $\Lambda = K \times K$. Nous pouvons aussi introduire les ensembles

$$\Delta(\omega_{-n}, \dots, \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n) = \Delta^{\omega_0, \dots, \omega_{-n}} \cap \Delta_{\omega_1, \dots, \omega_n}.$$

Ce qui nous fournit une bijection $h : \Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow K \times K$. En munissant Σ_2 de la topologie produit on peut montrer que h est un homéomorphisme. On obtient surtout le résultat suivant.

Proposition 2.1.1. *Le difféomorphisme f du fer à cheval est, en restriction à l'ensemble invariant Λ , conjugué à un décalage de Bernoulli. Ce qui s'écrit*

$$f|_{\Lambda} \circ h = h \circ \sigma_2.$$

Pour ces notions on peut se reporter à l'exposé de A. Fathi dans ce volume. En utilisant la proposition 1.3.1 qui s'y trouve, on obtient

Corollaire 2.1.2. *Les points périodiques de $f|_{\Lambda}$ sont denses dans Λ , $f|_{\Lambda}$ est topologiquement transitif dans Λ .*

On a même des résultats plus précis : $P_n(f|_{\Lambda}) = 2^n$ et $f|_{\Lambda}$ est topologiquement mélangeant dans Λ .

2.2. Difféomorphismes d'Anosov – Ensembles hyperboliques

Ce qui va suivre s'étendra sans peine aux tores. Mais pour l'instant conservons en tête le modèle du fer à cheval de S. Smale. Supposons que U est un ouvert de \mathbb{R}^k , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ un C^1 -difféomorphisme sur son image, et qu'il existe un sous ensemble $\Lambda \subset U$ compact f -invariant.

Définition 2.2.1. L'ensemble Λ est dit hyperbolique pour l'application f s'il existe $C > 0$, $\lambda \in]0, 1[$ et pour tout $x \in \Lambda$ une décomposition $\mathbb{R}^k = E_x^s \oplus E_x^u$ en sous espaces stables et instables tels que

- (i) pour tout $v \in E_x^s$, $\|D_x f^n(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|$ ($n \geq 0$),
- (ii) pour tout $v \in E_x^u$, $\|D_x f^{-n}(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|$ ($n \geq 0$),
- (iii) $D_x f(E_x^s) = E_{f(x)}^s$, $D_x f(E_x^u) = E_{f(x)}^u$.

Remarque. En fait le choix de la norme importe peu, seul C peut s'en trouver modifié. Plus généralement on choisit pour chaque x un produit scalaire défini positif, i.e., une métrique riemannienne.

Exercice. Montrer que l'ensemble Λ du fer à cheval est un ensemble hyperbolique et que l'on peut choisir $\lambda = 1/3$; que la direction horizontale est la direction instable et la direction verticale est la direction stable.

Définition 2.2.2. Un difféomorphisme du tore $f : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$ est dit d'Anosov si \mathbb{T}^k est un ensemble hyperbolique pour f .

Proposition 2.2.3. Un automorphisme hyperbolique du tore $F_L : \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^k$ est un difféomorphisme d'Anosov.

C'est presque une évidence, puisque nous avons pris dans la section 1.1 une définition qui occulte la réelle difficulté, à savoir faire du calcul différentiel sur un ensemble qui n'est pas naturellement un espace vectoriel. Mais nous n'avons pas ici le temps de développer la théorie des variétés différentiables et de leurs espaces tangents.

L'automorphisme F_L admet un relevé L qui est linéaire. Par conséquent F_L est C^∞ . D'autre part $D_x F_L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ est donné par $D_x F_L(v) = D_x L(v) = L(v)$, puisqu'une application linéaire est sa propre différentielle. Dans ce cas particulier notons que $E_x^s = E^s$ et

$E_x^u = E^u$, de sorte que la décomposition est alors indépendante du point x .

2.3. Dynamique symbolique. Très souvent, les systèmes dynamiques sont codés par des dynamiques symboliques. Un cas particulier a déjà été rencontré avec le fer à cheval. Rappelons les notations. Soit

$$\Omega_N = \{\omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots) \mid \omega_i \in \{0, \dots, N-1\}\},$$

où on met une topologie donnée par la distance

$$d_\lambda(\omega, \omega') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|\omega_n - \omega'_n|}{\lambda^{|n|}} \quad \lambda > 1.$$

Exercice. Montrer que c'est une distance.

La dynamique est donnée par le shift : $\sigma : \Omega_N \rightarrow \Omega_N$, $\sigma(\omega) = \omega'$, $\omega'_n = \omega_{n+1}$.

Les principaux exemples ne sont pas définis sur tout les mots de l'alphabet mais seulement un sous-ensemble déterminé par la donnée d'une matrice A . La procédure est la suivante. Soit $A = (a_{ij})$, $0 \leq i, j \leq N-1$, $a_{ij} = 0$ ou 1 , on considère alors

$$\Omega_A = \{\omega \in \Omega_N \mid a_{\omega_n \omega_{n+1}} = 1, \text{ pour } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Définition 2.3.1. La restriction $\sigma|_{\Omega_A} = \sigma_A$ est appelée une chaîne de Markov topologique, on dit aussi souvent un sous-shift de type fini.

2.4. Codage et partitions de Markov. De la même manière que nous avons pu trouver un codage pour le fer à cheval, nous allons développer très brièvement une approche analogue pour les automorphismes hyperboliques des tores. Des techniques semblables existent pour les difféomorphismes d'Anosov, mais cela nous conduirait un peu loin.

Reprenons notre exemple favori $F_L(x, y) = (2x+y, x+y)$ sur le tore \mathbb{T}^2 , traçons des morceaux des variétés stables W_0^s et instable W_0^u passant par l'origine jusqu'à ce qu'elles se coupent suffisamment de fois pour séparer le tore en rectangles comme par exemple sur la figure 6 extraite de [5]. On obtient, en tenant compte des identifications, une

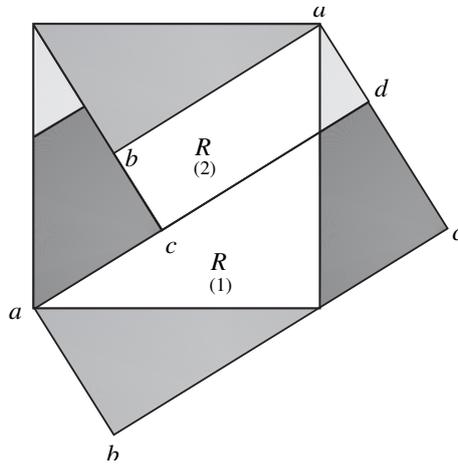


FIGURE 6.

partition de \mathbb{T}^2 en deux rectangles $R^{(1)}$ et $R^{(2)}$. L'image de ces deux rectangles vue dans \mathbb{R}^2 est représentée sur la figure 7 par les symboles $F(R^{(2)})$ et $F(R^{(1)})$. Si on fait le calcul explicite on constate, en uti-

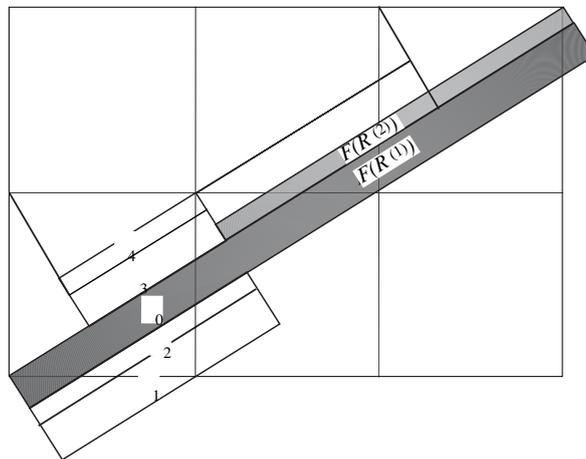


FIGURE 7.

lisant les identifications, que $F(R^{(1)})$ est la réunion de 3 rectangles $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_3$, alors que $F(R^{(2)})$ est la réunion de Σ_2 et Σ_4 . Par un calcul (assez fastidieux) on obtient une matrice $A = (a_{ij}), 1 \leq i, j \leq 5$,

telle que $a_{ij} = 0$ si $F(\Sigma_i) \cap \Sigma_j = \emptyset$, $a_{ij} = 1$ autrement ;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous admettrons le résultat suivant.

Proposition 2.4.1. *L'automorphisme*

$$F_L : (x, y) = (2x + y, x + y) \pmod{1}$$

du tore \mathbb{T}^2 est semi-conjugué au sous-shift de type fini σ_A sur ω_5 .

Un des intérêts de cet exemple est que la semi-conjugaison n'est pas une bijection car le nombre de points périodiques de σ_A de période qui divise p est donné par $N_p(\sigma_A) = \text{tr } A^p = \lambda_1^p + \lambda_1^{-p}$, avec $\lambda_1 = (3 + \sqrt{5})/2$, et satisfait, d'après 1.4.2 (i),

$$N_p(\sigma_A) = N_p(F_L) + 2.$$

Exercice. Montrer que σ_A a trois points fixes alors que F_L n'en a qu'un seul.

2.5. Stabilité des automorphismes hyperboliques. Vous avez déjà rencontré dans le texte [4] les notions de semi-conjugaison et de stabilité structurelle. Le théorème 2.3.1 de l'exposé de A. Fathi montre que le système dynamique $m_p : S \rightarrow S$, $p \geq q$, $z \mapsto z^p$ est structurellement stable. La preuve s'effectue en montrant que la semi-conjugaison cherchée s'obtient comme point fixe d'un certain opérateur contractant dans un espace de fonctions continues. Nous allons développer une stratégie semblable sur le tore \mathbb{T}^n .

Nous allons juste rappeler/admettre quelques résultats sur l'homotopie que nous spécialiserons à notre contexte.

Deux applications continues $f, g : X \rightarrow Y$ où X et Y sont des espaces topologiques, sont homotopes s'il existe une application $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$, continue et telle que

$$H(0, x) = f(x), \quad H(1, x) = g(x).$$

Proposition 2.5.1. *Soient $f, g : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ deux applications continues.*

(i) *Elles sont homotopes si et seulement si leur différence admet un relèvement $\tilde{f} - \tilde{g} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, qui est une application \mathbb{Z}^n périodique, i.e., , pour tout $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$*

$$(\tilde{f} - \tilde{g})(x_1 + z_1, \dots, x_n + z_n) = (\tilde{f} - \tilde{g})(x_1, \dots, x_n).$$

(ii) *De plus une application $f : \mathbb{T}^n \mapsto \mathbb{T}^n$ homotope à l'identité $\text{Id}_{\mathbb{T}^n}$ est surjective.*

Démonstration (partielle). L'homotopie $H : [0, 1] \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ telle que $H(0, \bullet) = f(\bullet)$, $H(1, \bullet) = g(\bullet)$ se relève aussi en une homotopie $\tilde{H} : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\tilde{H}(0, \bullet) = \tilde{f}(\bullet)$ est un relevé de f , $\tilde{H}(1, \bullet) = \tilde{g}(\bullet)$ est un relevé de g .

On a $\tilde{H}(t, y + z) = \tilde{H}(t, y) + A_t(z)$, pour $t \in [0, 1]$, $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{Z}^n$, et A_t est une endomorphisme de \mathbb{R}^n à coefficients nécessairement entiers. Par continuité $A_0(z) = A_1(z)$, pour tout $z \in \mathbb{Z}^n$ et donc $(\tilde{f} - \tilde{g})(y + z) = (\tilde{f} - \tilde{g})(y)$.

Pour la réciproque supposons que $\tilde{f} - \tilde{g} = \tilde{h}$ est une application \mathbb{Z}^n -périodique. Définissons $\tilde{H} : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $\tilde{H}(t, y) = \tilde{g}(y) + (1 - t)\tilde{h}(y)$. On vérifie aisément que \tilde{H} se projette en une homotopie sur \mathbb{T}^n . \square

Voici un premier résultat de stabilité.

Théorème 2.5.2. *Tout difféomorphisme $g : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ homotope à un automorphisme linéaire hyperbolique $F_L : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ admet F_L comme facteur i.e., il existe $h : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ continue surjective telle que $h \circ g = F_L \circ h$. La semi-conjugaison est unique et homotope à l'identité. De plus si g est C^0 -proche de F_L alors la semi-conjugaison est C^0 -proche de l'identité.*

Démonstration. On cherche une application $h : \mathbb{T}^n \mapsto \mathbb{T}^n$, homotope à l'identité et telle que $h \circ g = F_L \circ h$. D'après la proposition 2.5.1, h sera alors surjective et il existera $\hat{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, \mathbb{Z}^n -périodique, telle que $\text{Id}_{\mathbb{R}^n} + \hat{h}$ soit un relevé de h . Comme h et F_L sont homotopes, il existe une application $\hat{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, continue, \mathbb{Z}^n -périodique telle que $L + \hat{g}$ est une relèvement de g . L'équation de semi-conjugaison

qui s'écrit aussi sous la forme $h = F_L^{-1} \circ h \circ g$, se traduit en termes de relèvement en

$$\text{Id}_{\mathbb{R}^n} + \widehat{h} = L^{-1} \circ (\text{Id}_{\mathbb{R}^n} + \widehat{h}) \circ (L + \widehat{g}).$$

Ce qui nous conduit à

$$(*) \quad \widehat{h} = L^{-1} \widehat{g} + L^{-1} \circ \widehat{h} \circ (L + \widehat{g}) := \mathcal{L}(\widehat{h}).$$

Notre espace fonctionnel est l'ensemble \mathcal{F} des applications continues \mathbb{Z}^n -périodiques doté de la distance

$$\|\widehat{\psi} - \widehat{\varphi}\| = \sup_{y \in [0,1]^n} \|\widehat{\psi}(y) - \widehat{\varphi}(y)\|.$$

Il est complet. Malheureusement \mathcal{L} n'est pas un opérateur contractant pour cette distance. Utilisons l'hyperbolicité de L . Il existe une décomposition $\mathbb{R}^n = E^u \oplus E^s$, et au moins une norme adaptée que nous prenons pour définir une distance d_1 sur \mathcal{F} . Nous noterons aussi p_u et p_s le projecteur sur E^u parallèlement à E^s (respectivement sur E^s parallèlement à E^u), $\widehat{h}_u = p_u \circ \widehat{h}$, $\widehat{g}_u = p_u \circ \widehat{g}$, etc. L'équation (*) se décompose en utilisant l'invariance de la décomposition par L en

$$(**) \quad \widehat{h}_u = L_u^{-1} \widehat{g}_u + L_u^{-1} \circ \widehat{h}_u \circ (L + \widehat{g}) := \mathcal{L}_u(\widehat{h}_u)$$

et

$$(***) \quad \widehat{h}_s = L_s^{-1} \widehat{g}_s + L_s^{-1} \circ \widehat{h}_s \circ (L + \widehat{g}) := \mathcal{L}_s(\widehat{h}_s).$$

On vérifie que \mathcal{L}_u est un opérateur contractant car

$$\|\mathcal{L}_u(\widehat{h}'_u) - \mathcal{L}_u(\widehat{h}_u)\| = \|L_u^{-1}(\widehat{h}'_u - \widehat{h}_u) \circ (L + \widehat{g})\| \leq \|L_u^{-1}\| \cdot \|\widehat{h}'_u - \widehat{h}_u\|$$

et $\|L_u^{-1}\| = \lambda < 1$. Il existe donc un unique point fixe \widehat{h}_u . De plus comme quand $n \rightarrow \infty$, $\mathcal{L}_u^n(0) \rightarrow \widehat{h}_u$ nous avons la majoration

$$\begin{aligned} \|\widehat{h}_u\| &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \right) \cdot \|\mathcal{L}_u(0)\| \\ &\leq \frac{1}{1-\lambda} \cdot \|L_u^{-1}\| \cdot \|\widehat{g}_u\| \\ &\leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \|\widehat{g}_u\| \end{aligned}$$

Pour résoudre l'équation (***) il vaut mieux la réécrire en utilisant le fait que $L + \widehat{g}$ est inversible puisque g est un homéomorphisme. On obtient ainsi, en posant $S = (L + \widehat{g})^{-1}$,

$$\widehat{h}_s = L_s \circ \widehat{h}_s \circ S - \widehat{g}_s \circ S := \mathcal{F}_s(\widehat{h}_s).$$

Il s'agit encore d'un opérateur contractant. Pour le point fixe on peut obtenir l'estimée

$$\|\widehat{h}_s\| \leq \frac{\|\widehat{g}_s\|}{1 - \mu} \quad \text{avec} \quad \mu = \|L_s\|.$$

Finalement nous obtenons une solution unique $\widehat{h} = \widehat{h}_s + \widehat{h}_u$, qui est bien \mathbb{Z}^n -périodique, et qui se projette donc sur le tore \mathbb{T}^n . \square

Rappelons une définition.

Définition 2.5.3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n , d la distance sur \mathbb{T}^n qui s'en déduit. On définit une topologie sur $C^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n)$ par la distance $d_{C^1}(f_1, f_2) = \sup_{x \in \mathbb{T}^n} d(f_1(x), f_2(x)) + \sup_{x \in \mathbb{T}^n} \|D_x f_1 - D_x f_2\|$. Cette topologie ne dépend pas du choix de la norme $\|\cdot\|$. On l'appelle C^1 -topologie.

Avec des arguments proches de ceux du théorème on obtiendrait le résultat suivant :

Proposition 2.5.4. *Toute C^1 -application $g : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ suffisamment proche, dans la C^1 -topologie, d'un automorphisme linéaire hyperbolique F_L du tore est un facteur pour F_L , i.e., il existe $h' : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ continue surjective telle que $g \circ h' = h' \circ F_L$.*

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de stabilité structurelle.

Théorème 2.5.5 (Anosov). *Soit $F_L : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ un automorphisme linéaire hyperbolique du tore. Il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset C^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n)$ de F_L dans la C^1 -topologie, tel que toute application $f \in \mathcal{U}$ est topologiquement conjuguée à F_L .*

Démonstration (indication). En combinant le théorème 2.5.2 et la proposition 2.5.4 on obtient deux semi-conjugaisons h et h' . On vérifie aisément que $hh' = h''$ commute avec F_L . Il resterait à vérifier que ceci n'est possible que pour l'identité. \square

Épilogue. Pour conclure, je voudrais citer un résultat dont les techniques sortent du cadre de cet exposé.

Théorème (Franks). *Tout difféomorphisme d'Anosov sur le tore \mathbb{T}^n est topologiquement conjugué à un automorphisme linéaire hyperbolique.*

Remarque finale. Les notes de cet exposé doivent beaucoup à plusieurs ouvrages. Les deux principales sources ont été le livre [5] de A. Katok et B. Hasselblatt et le cours [3] « Systèmes dynamiques ».

Références

- [1] V. ARNOLD – *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Éditions M.I.R., Moscou, 1980/1984.
- [2] V. ARNOLD & A. AVEZ – *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, 1967.
- [3] A. FATHI & F. LEDRAPPIER – *Systèmes dynamiques*, Cours de l'École polytechnique, Département de Mathématiques, École polytechnique, Palaiseau, 1994/1996).
- [4] A. FATHI – « Systèmes dynamiques discrets », in *Aspects des systèmes dynamiques : le premier retour*, Journées mathématiques X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 1996, ce volume, p. 21–34.
- [5] A. KATOK & B. HASSELBLATT – *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopædia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1995.
- [6] R. MAÑÉ – *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer Verlag, 1987.
- [7] W. PARRY & M. POLLICOTT – *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque, vol. 187-188, Société Mathématique de France, Paris, 1990.
- [8] M. SHUB – *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Astérisque, vol. 56, Société Mathématique de France, Paris, 1978.

Patrick Foulon, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et UMR 7501 du CNRS, 7 rue René-Descartes, F-67084 Strasbourg cedex, France

E-mail : patrick.foulon@univ-amu.fr

Url : <https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/patrick.foulon/>