INSTITUT POLYTECHNIQUE DE PARIS

Journées mathématiques X-UPS

Année 1996

Aspects des systèmes dynamiques: le premier retour

Martine QUEFFÉLEC

Propriétés spectrales de systèmes dynamiques discrets

Journées mathématiques X-UPS (1996), p. 63-97.
https://doi.org/10.5802/xups.1996-04

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
1996, p. 63–97 doi: 10.5802/xups.1996-04

PROPRIÉTÉS SPECTRALES DE SYSTÈMES DYNAMIQUES DISCRETS

par

Martine Queffélec

Table des matières

Cet exposé fait suite aux exposés de A. Fathi [7] et P. Arnoux [2]. Nous nous proposons d'étudier des systèmes dynamiques qui sont à l'opposé des systèmes chaotiques, et dans lesquels, en particulier, tout point est d'orbite dense (systèmes minimaux). C'est le cas de la rotation irrationnelle agissant sur le cercle. Un système minimal peut également s'obtenir en partant d'une suite à valeurs dans un ensemble fini $\{1, 2, \ldots, s\}$ et en lui associant le système (X, T) où X est l'orbite fermée de la suite dans $\{1, 2, \ldots, s\}^{\mathbb{N}}$ (ou $\{1, 2, \ldots, s\}^{\mathbb{Z}}$), sous l'action du shift unilatéral T (ou bilatéral). Lorsque la suite initiale est uniformément récurrente, c'est-à-dire tout mot de la suite y

Publication originelle dans Journées X-UPS 1996. Aspects des systèmes dynamiques : le premier retour. Prépublication du Centre de mathématique de l'École polytechnique, 1996, et Éditions de l'École polytechnique, 2009.

apparaît avec lacunes bornées, le système est minimal. Pierre Arnoux dans [2] a défini un outil combinatoire : la *fonction complexité*, pour mesurer le degré d'imprévisibilité d'une telle suite, et par là-même la relative richesse du système associé.

On développera ici une approche spectrale de cette tentative de classification : si μ est une mesure sur X invariante par le shift T, on fait une étude fine du spectre de l'opérateur unitaire $f \mapsto f \circ T$ sur $L^2(X, \mu)$, cette étude étant particulièrement significative lorsque le système admet une seule mesure invariante ! Cette analyse peut être menée à bout pour certaines classes de systèmes dont on choisira quelques exemples représentatifs.

Un autre point de vue, considéré initialement par les physiciens, consiste à décrire le spectre de l'opérateur de Schrödinger discret dont le potentiel est une suite à valeurs dans un ensemble fini. Rappelons que cet opérateur H est défini sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ par

$$H\varphi(n) = \varphi(n+1) + \varphi(n-1) + v(n)\varphi(n)$$

où v est le potentiel de H.

Lorsque v est une suite périodique, le spectre de H est absolument continu, alors qu'il est (ps) discret dans le cas aléatoire. Que peut-on dire dans le cas d'une suite « intermédiaire » ?

1. Systèmes dynamiques discrets : propriétés statistiques

Albert Fathi a défini un système dynamique discret comme étant un couple (X, T), où X est un espace topologique et T une application continue de X dans lui-même. Étudier la dynamique du système, c'est étudier le comportement des orbites, c'est-à-dire des itérées $T^n(x)$ suivant le point initial x.

On sera amené à élargir la notion de système dynamique au cadre mesurable et plus seulement topologique, même si les exemples intéressants sont en dynamique topologique.

Rappelons les deux exemples fondamentaux, cités dans [7], qui, du point de vue de la dynamique, sont diamétralement opposés :

- le premier, important car il permet de modéliser de nombreux phénomènes dynamiques, est celui du *shift à n symboles.*

Dans ce cas X est l'espace métrique compact $\{0,1,\ldots,n-1\}^{\mathbb{N}}$, (ou $\{0,1,\ldots,n-1\}^{\mathbb{Z}}$), noté parfois Σ_n et la transformation, T, est le shift unilatéral (ou décalage) défini par

$$T(x)_k = x_{k+1}$$

(ou le même shift bilatéral). Ce système, à lui seul, possède toutes les propriétés caractéristiques du *chaos* tel qu'il est défini dans [6] : il est transitif, sensible aux conditions initiales et l'ensemble des orbites périodiques est dense dans X.

• Le second est celui de la rotation irrationnelle sur le cercle unité, c'est-à-dire l'application R_α définie par :

$$R_\alpha x := x + \alpha \bmod 1$$

avec α irrationnel, si on identifie le cercle unité $\mathbb{T}$ à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Dans cet exemple, tout point initial est d'orbite dense. La dynamique de ce système est donc réduite, puisqu'il n'y a pas d'orbite périodique, pas de sensibilité aux conditions initiales (deux points voisins engendrent des orbites proches). Par contre, l'étude approfondie de l'orbite d'un point a soulevé de nombreuses questions de nature arithmétique (approximation diophantienne, fractions continues).

C'est aux systèmes de cette seconde espèce que nous allons nous intéresser.

Définition 1.1. Un système dynamique (X,T) est dit *minimal* si toute orbite est dense dans X, ou de façon équivalente, si les seuls sous-ensembles fermés E vérifiant

$$T(E) \subseteq E$$

sont X et $\varnothing$.

Les problèmes qui se posent alors sont les suivants :

(1) Peut-on décrire le comportement de chaque orbite, ou, tout du moins, de la plupart d'entre elles ?

(2) Comment mesurer la complexité d'une orbite ? Quels outils utiliser ?

Pour tenter d'apporter des réponses, nous allons, lorsque ce sera possible, munir notre système d'une mesure invariante par T.

1.1. Mesures invariantes. Avant de définir précisément ce qu'est une mesure invariante, rappelons que la notion apparaît naturellement en physique statistique avec la *mesure d'équilibre* μ d'un système physique évoluant au cours du temps. Si le système au temps initial est dans l'état x, il est dans l'état Tx au temps suivant, et T est une transformation de l'espace des états X dans lui-même. Par exemple, lorsque le système est fini et A un ensemble d'états possibles, $\mu(A)$ est la probabilité que le système soit dans l'un de ces états, ceci indépendamment de l'instant considéré. La mesure μ est invariante par T.

Les mesures invariantes apparaissent de façon naturelle en mathématiques également comme nous allons le voir, mais commençons par en donner une définition.

Définition 1.2. Soit X un espace muni d'une tribu $\mathcal{A}$ et T une application mesurable de X dans lui-même. La mesure de probabilité μ définie sur $(X, \mathcal{A})$ est *invariante par* T, ou T*-invariante*, si, pour tout ensemble A de la tribu,

$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A).$$

Revenons à nos deux exemples.

1. *Le shift bilatéral à n symboles.* L'espace métrique compact

$$X = \{0, 1, \ldots, n-1\}^{\mathbb{Z}}$$

est muni naturellement de la tribu de ses boréliens. Cette tribu est engendrée par les cylindres qui sont à la fois ouverts et fermés. Supposons qu'à chaque étape les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$ apparaissent avec probabilités respectives $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ (c'est-à-dire $p_i > 0$ et $\sum p_i = 1$), et ceci indépendamment d'une étape à l'autre. Cela revient à considérer sur le système la mesure produit

$$\mu = \{p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}\}^{\mathbb{Z}} = \bigotimes_{\mathbb{Z}}(p_0\delta_0 + p_1\delta_1 + \cdots + p_{n-1}\delta_{n-1}),$$

qui est clairement invariante par T. On parle alors de *Bernoulli-shift.*

Notons qu'il y a déjà beaucoup de mesures invariantes sur (X, T).

2. *La rotation irrationnelle.* On sait qu'il n'existe qu'une seule mesure de probabilité sur le cercle invariante par toutes les translations, à savoir la mesure de Haar ou de Lebesgue sur $\mathbb{T}$ identifié à $[0,1)$. C'est aussi la seule mesure de probabilité invariante par R_α quand α est irrationnel : il suffit en effet de prouver que la mesure de Lebesgue est la seule mesure de probabilité μ sur $\mathbb{T}$ vérifiant

$$\int f(x+\alpha)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$$

pour n'importe quelle fonction continue f sur $\mathbb{T}$; mais en itérant cette identité, μ vérifie

$$\int f(x+n\alpha)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$$

pour tout n. Par densité modulo 1 de la suite $(n\alpha)$ et en utilisant la continuité uniforme de f, on obtient, quitte à prendre une sous-suite,

$$\int f(x+t)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$$

ceci pour tout t. D'où le résultat. (On peut aussi calculer les coefficients de Fourier de la mesure μ, et vérifier qu'ils sont tous nuls sauf celui d'indice 0.)

M. Keane écrit dans [3] : « measure-preserving transformations are beautiful ! ». J'ajouterais « invariant measures are beautiful too ». Voici donc d'autres exemples pour illustrer cette affirmation.

1. *Fractions continues et mesure de Gauss.* Prenons $X := [0,1] \smallsetminus \mathbb{Q}$ et définissons T par

$$Tx := \{1/x\} = 1/x - [1/x],$$

la partie fractionnaire de $1/x$. Gauss, dans une lettre à Laplace (1812), écrit qu'il a trouvé une probabilité invariante par T ; il s'agit de la mesure à densité

$$\frac{1}{\log 2}\,\frac{1}{1+x}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue m sur X. Malheureusement, il n'explique pas comment il l'a trouvée et c'est beaucoup plus tard qu'on la retrouve comme point fixe d'un opérateur de Perron-Frobenius. C'est donc la seule probabilité T-invariante équivalente à la mesure de Lebesgue m (ayant les mêmes ensembles négligeables). L'opérateur de Perron-Frobenius dans ce cas est l'opérateur Φ défini sur $L^1(X,m)$ par :

$$\Phi f(x) = \sum_{n\geqslant 1} f\Big(\frac{1}{x+n}\Big)\frac{1}{(x+n)^2}$$

et Φ admet un seul point fixe f qui est tel que $\mu = f\cdot m$ est une mesure T-invariante [3].

2. *Produit de Riesz.* On s'intéresse cette fois à la transformation définie par $Tz := z^2$ sur le cercle unité, que l'on préfère voir comme la transformation $Tx := 2x \bmod 1$ sur l'espace $X := \mathbb{T}$ identifié à $[0,1)$. Cette transformation possède de nombreuses probabilités discrètes invariantes, par exemple la probabilité de masses $1/2$ aux points $\{1/3, 2/3\}\ldots$ et une seule probabilité équivalente à la mesure de Lebesgue m, la mesure de Lebesgue elle-même ! Mais elle admet de nombreuses probabilités continues, singulières par rapport à m c'est-à-dire portées par un borélien de mesure de Lebesgue nulle. Un exemple est celui-ci qui apparaîtra naturellement dans la suite. Il s'agit d'une mesure faisant partie d'une classe d'exemples construits par M. Riesz qui, initialement, cherchait une mesure dont on connaisse de façon explicite les coefficients de Fourier.

Notons

$$P_N(t) := \prod_{n=0}^{N-1}(1-\cos 2\pi 2^n t)$$

pour tout $N\geqslant 1$. La suite $(P_N)\cdot m$ converge pré-faiblement dans $M(\mathbb{T})$, espace des mesures bornées sur $\mathbb{T}$, vers une probabilité ρ continue, T-invariante, vérifiant

$$\left.\begin{aligned}\widehat{\rho}(2n) &= \widehat{\rho}(n)\\ \widehat{\rho}(2n+1) &= -\frac{\widehat{\rho}(n)+\widehat{\rho}(n+1)}{2}\end{aligned}\right\}\quad \text{pour } n\geqslant 0,$$

et $$\widehat{\rho}(-n) = \widehat{\rho}(n)$$

On la note abusivement

$$\rho := \prod_{n=0}^{\infty}(1-\cos 2\pi 2^n t).$$

3. *θ-shift.* Considérons le nombre d'or $\theta = (1+\sqrt{5})/2$ et la transformation

$$Tx := \theta x \bmod 1$$

définie sur $X := [0,1)$. Il existe une unique probabilité T-invariante équivalente à la mesure de Lebesgue, qui admet la densité

$$\begin{cases} \dfrac{\theta^3}{1+\theta^2} & \text{si } 0 \leqslant x < \theta^{-1}, \\ \dfrac{\theta^2}{1+\theta^2} & \text{si } \theta^{-1} \leqslant x < 1. \end{cases}$$

Le terme θ-shift sera justifié plus loin.

Remarque. Le problème d'existence ou d'unicité de mesure invariante (finie ou non) reste un problème difficile et crucial puisque, en général, l'espace et la transformation sont donnés, mais pas la mesure invariante. Le problème peut d'ailleurs se poser pour une famille de transformations. Une généralisation de 1. est le résultat suivant (voir par exemple [14]) : Si X est un espace métrique compact et (T_i) une famille d'isométries de X, il existe une mesure invariante par tous les T_i.

On se restreindra aux cas où il existe une mesure de probabilité invariante.

Si X est un espace métrique compact, et T une application continue de X dans lui-même, il existe toujours des probabilités boréliennes préservées par T. Il suffit de prendre une limite pré-faible dans $M(X)$ de la suite de probabilités

$$\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{n<N} \delta_{T^n x}$$

Problème. Pour terminer ce paragraphe citons une conjecture partiellement résolue : une probabilité sur $[0,1)$, continue, qui est à la fois 2- et 3-invariante est-elle nécessairement la mesure de Lebesgue ?

1.2. Ergodicité. On oublie un instant la propriété topologique de minimalité, pour s'intéresser à la propriété d'ergodicité, propriété analogue dans le cadre mesurable, mais qui dépend de la mesure invariante choisie. Soit $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ notre système, où, désormais, μ est

T-invariante ; on veut préciser l'analyse de chaque orbite d'un point de vue statistique si possible.

Question 1. Fixons $B \in \mathcal{A}$ partie mesurable de X ; étant donné $x \in X$, visite-t-il B sous l'action de T et combien de fois ?

Une réponse partielle est fournie par le théorème de récurrence de Poincaré :

***Théorème 1.3* (Poincaré).** *Soit $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ un système dynamique et soit $B \in \mathcal{A}$ une partie de X de mesure > 0 ; alors, pour μ-presque tout $x \in B$*

$$\mathcal{N}(x, B) := \{n \geqslant 0; T^n x \in B\}$$

est infini.

Commentaires

(1) Ce théorème donne une réponse pour les points de B, mais ne dit rien sur les points du complémentaire de B.

(2) La question 1, pour tout x de X, n'a d'intérêt que si X ne se décompose pas en deux morceaux de mesure positive et invariants par T, car alors les orbites pourraient être piégées dans l'un de ces morceaux. C'est l'hypothèse que nous allons faire et qui n'est pas restrictive.

Définition 1.4. La probabilité μ définie sur $(X, \mathcal{A}, T)$ et T-invariante est dite *ergodique* si tout ensemble A de $\mathcal{A}$ vérifiant

$$T^{-1}A \subseteq A$$

est de mesure 0 ou 1.

On remarque que la propriété se teste en fait aussi bien sur les ensembles complètement invariants, c'est-à-dire vérifiant $T^{-1}A = A$.

La réponse à la question 1 est alors donnée par le théorème ergodique (qui est une généralisation de la loi forte des grands nombres) :

***Théorème 1.5* (ergodique de Birkhoff).** *Soit $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ un système dynamique où μ est une probabilité ergodique ; soit B un ensemble fixé dans $\mathcal{A}$. Alors, si on pose*

$$S_n(x) := \#\{0 \leqslant k < n; T^k x \in B\},$$

pour μ-presque tout x,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n(x) = \mu(B).$$

Plus généralement, si f est une fonction μ-intégrable sur X, alors, pour μ-presque tout x,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k<n} f(T^k x) = \int f d\mu.$$

Commentaire. Malgré son nom, ce théorème admet une version plus générale sans l'hypothèse d'ergodicité, et fournit alors une version améliorée du théorème de Poincaré :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#(\mathcal{N}(x,B) \cap [0, n-1]) > 0$$

pour μ-presque tout point x de B.

Exemples

(1) La mesure de Lebesgue est ergodique pour la rotation irrationnelle ; plus généralement, lorsque T admet une unique probabilité invariante, celle-ci est automatiquement ergodique, car les probabilités ergodiques sont les points extrémaux du convexe compact $M_T(X)$ constitué des probabilités T-invariantes sur X. Un tel système (ou plus simplement l'application T) sera dit *uniquement ergodique.*

(2) La mesure de Lebesgue est également ergodique pour la transformation $Tx := 2x \bmod 1$ comme on peut le vérifier en utilisant une définition équivalente de l'ergodicité :

Définition 1.6. Soit $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ un système dynamique. La probabilité μ est ergodique pour T si et seulement si, toute fonction mesurable $f : X \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(Tx) = f(x)$$

μ-presque partout, est égale presque partout à une constante.

Il suffit de le vérifier pour les fonctions bornées sur $\mathbb{T}$ et d'utiliser le développement d'une telle f en série de Fourier.

Le produit de Riesz ρ défini dans le paragraphe précédent est aussi ergodique pour cette transformation (elle possède en fait une propriété plus forte). Or on peut vérifier que deux probabilités ergodiques distinctes du même convexe compact $M_T(X)$ sont nécessairement étrangères (elles habitent sur des boréliens disjoints). Cela prouve que cette mesure est singulière.

On pourrait déduire la singularité du théorème ergodique appliqué à $f(x) := e^{2i\pi x}$ sur $[0,1)$ avec les mesures m et ρ successivement, en remarquant que

$$\int f dm = 0$$

alors que

$$\int f d\rho = \widehat{\rho}(1) = -\frac{1}{3}$$

(3) La mesure de Gauss et la mesure associée au θ-shift sont toutes deux ergodiques et cela peut résulter du théorème de Ruelle-Perron-Frobenius. En appliquant le théorème ergodique à la transformation T de Gauss par exemple, on peut obtenir des résultats presque sûrs sur la répartition des quotients partiels : à tout $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ on associe la suite d'entiers $a_1 = a_1(x) = [1/x]$ et pour $n > 1$, $a_n = a_n(x) = a_{n-1}(Tx)$, appelés *quotients partiels* de x.

Proposition 1.7. *Pour chaque entier $k \geqslant 1$, pour presque tout x, la fréquence relative d'apparition de k parmi les $a_n(x)$ est*

$$\frac{1}{\log 2} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.$$

En particulier presque tout x est à quotients partiels non bornés.

Question 2. Peut-on décider, pour un point initial x fixé, s'il appartient ou non à cet ensemble de mesure pleine pour lequel la limite existe dans le théorème ergodique ?

Définition 1.8. Supposons que X soit un espace métrique compact. Le point x est dit *générique* pour le système dynamique $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k<n} f(T^k x) = \int f d\mu$$

pour toute f continue sur X.

Par le théorème ergodique, μ-presque tout x est générique mais il est difficile d'exhiber un seul point, comme on peut le voir par exemple avec les nombres normaux. On rappelle qu'un nombre est *normal en base* q, si la suite de ses digits en base q est une suite normale, c'est-à-dire telle que, pour chaque n, tout motif de longueur n apparaît dans la suite avec la fréquence q^{-n}. Il résulte du théorème ergodique appliqué à la transformation $x \mapsto qx \bmod 1$ que presque tout nombre est normal en base q (et même en toute base) ; mais on ne sait pas décider si le nombre $\sqrt{2}$ par exemple est normal en base 2, comme le pensait Borel.

Le résultat suivant sera précieux puisqu'il nous permettra d'étudier toute orbite :

***Théorème 1.9* (Oxtoby).** *Supposons l'espace métrique compact et le système uniquement ergodique. Alors tout point est générique ; plus précisément, pour toute f continue sur X*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k<n} f(T^k x) = \int f d\mu$$

uniformément sur X.

Commentaires

(1) Il y a en fait équivalence entre l'unique ergodicité du système et la convergence uniforme vers une constante des moyennes de Birkhoff de toute fonction continue. La démonstration en est assez simple (voir par exemple [13]).

(2) Après cette étude (rapide) on peut dire que la minimalité est la version topologique de l'unique ergodicité, alors que la version topologique de l'ergodicité est la transitivité (existence d'un point d'orbite dense lorsque X est un compact sans point isolé.)

À noter une classe importante d'exemples [6] :

Proposition 1.10. *Tout homéomorphisme du cercle sans orbite périodique — donc de nombre de rotation irrationnel — est uniquement ergodique.*

1.3. Isomorphismes de systèmes et codage. Le problème d'isomorphisme entre systèmes dynamiques est naturel : étant donné un système, n'est-il pas simplement une autre version d'un système déjà connu, dont la dynamique est plus simple à étudier ? Cela peut répondre aussi à un besoin de classification. Enfin, les systèmes symboliques sont relativement bien connus, et un outil pour comprendre un système dynamique abstrait serait une représentation symbolique d'un tel système. Fathi a défini dans [7] la notion de semi-conjugaison et de conjugaison en dynamique topologique, deux systèmes (topologiquement) conjugués ayant la même dynamique.

On va introduire une notion d'isomorphisme pour les systèmes mesurés, moins exigeante que la notion de conjugaison pour les systèmes topologiques et plus adaptée à notre préoccupation. Un tel système, rappelons-le, est muni d'une probabilité invariante.

Définition 1.11. Les systèmes $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ et $(X', \mathcal{A}', T', \mu')$ sont métriquement isomorphes s'il existe une application mesurable

$$h : X \longmapsto X'$$

vérifiant

$$\mu(h^{-1}A') = \mu'(A') \quad \text{pour } A' \in \mathcal{A}'$$

$$h \circ T = T' \circ h$$

et s'il existe $Y \subset X$ et $Y' \subset X'$ vérifiant

$$\mu(Y) = 1 \qquad \mu'(Y') = 1$$

tels que $h : Y \mapsto Y'$ soit bijective et bimesurable (h est une presque-bijection bimesurable).

La théorie ergodique s'intéresse aux propriétés préservées par ce type d'isomorphisme (ergodicité par exemple). L'exemple suivant va éclaircir et justifier cette définition.

Exemple 1. Notons T_2 l'application $x \mapsto 2x \bmod 1$ définie sur X identifié à $[0, 1)$. Il est prouvé dans [7] que le système (X, T_2) est semi-conjugué au 2-shift, (Σ_2^+, T), où Σ_2^+ désigne le compact $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Les rationnels dyadiques admettant deux décompositions, l'application ne peut être bijective ; de toute façon, les deux systèmes ne peuvent être conjugués puisque Σ_2^+ est totalement discontinu.

Par contre, $(\Sigma_2^+, T, \{1/2, 1/2\}^{\mathbb{N}})$ et (X, T_2, m) sont des systèmes métriquement isomorphes. Pour le voir, il suffit de considérer l'application de semi-conjugaison $h : \Sigma_2^+ \mapsto X$ définie par

$$h(u) := \sum_1^\infty \frac{u_n}{2^n}$$

Puis on la restreint au départ à l'ensemble des suites de $0 - 1$ qui, à partir d'un certain rang, ne sont pas identiquement nulles ou identiquement égales à 1, et à l'arrivée, à X privé des rationnels dyadiques. Par ailleurs les mesures sont échangées par h.

La semi-conjugaison s'est révélée un excellent candidat comme isomorphisme de systèmes mesurés, ce qui sera souvent le cas.

Exemple 2. Considérons le système (X, T, μ) où la transformation T est définie sur $X := [0, 1)$ par $Tx := \theta x \bmod 1$, θ étant le nombre d'or $(1 + \sqrt{5})/2$. On a exhibé sur X une probabilité T-invariante (équivalente à la mesure de Lebesgue et unique parmi celles-ci) notée μ. Ce système est (métriquement) isomorphe à un *sous-shift de type fini* appelé le *θ-shift*, muni d'une mesure markovienne.

Rappelons qu'un sous-shift désigne simplement un système topologique constitué d'une partie fermée Y de $X = \{0, 1, \ldots, n-1\}^{\mathbb{N}\,\mathrm{ou}\,\mathbb{Z}}$, invariante par le shift. Le complémentaire de Y dans X étant ouvert, c'est une union dénombrable de cylindres ouverts disjoints, qu'on peut, sans restriction, supposer définis par des contraintes portant sur des coordonnées consécutives ou blocs ; ainsi, le fermé est défini par une liste dénombrable de blocs interdits. Le sous-shift (Y, T) est dit *sous-shift de type fini* lorsque la liste des blocs interdits est finie. À un tel sous-shift est associée une matrice de transition (à coefficients $0 - 1$) M qui contient une grande partie de l'information statistique du système, et de coefficients $M_{ij} = 1$ si ij est un mot permis, 0 sinon. Ainsi $Y := \Sigma_M$ est l'ensemble

$$\{x \in \{0, 1, \ldots, n-1\}^{\mathbb{N}\,\mathrm{ou}\,\mathbb{Z}} : M_{x_i x_{i+1}} = 1\}$$

Le θ-shift est le sous-shift de Σ_2^+ constitué des suites de 0 et de 1 dans lesquelles le bloc 11 n'apparaît pas. On le note Σ_θ. La matrice M correspondante est simplement

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de polynôme caractéristique $X^2 - X - 1 = 0$. À toute suite (x_n) de Σ_θ on peut associer le réel $x = \sum x_n \theta^{-n}$; il est aussi naturel de définir l'application de X dans Σ_θ par

$$x \longmapsto (x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \quad \text{où} \quad x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } T^n x \in [0, \theta^{-1}[, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire la décomposition en base θ, qui est bien définie en dehors des réels admettant deux écritures (les réels de $\mathbb{Q}(\theta)$ ayant une écriture avec un nombre fini de termes non nuls et une se terminant par la suite $0101010101\cdots$).

La mesure invariante sur Σ_θ est la mesure transportée par cette application. C'est une mesure de *Markov* définie sur les cylindres de Σ_θ par

$$\mu([\omega]) = g_{\omega_0} \cdot d_{\omega_\ell} \cdot \frac{1}{\theta^l}$$

si $\omega = \omega_0 \cdots \omega_\ell$ et si $(g_a)_a$, $(d_a)_a$ sont les vecteurs propres à gauche et à droite de la matrice M pour la valeur propre θ, normalisés par $\sum_a g_a d_a = 1$.

Comme application du théorème ergodique, on peut obtenir des résultats sur la fréquence d'apparition d'une lettre ou d'un mot dans le développement de presque tout nombre. Par exemple

Proposition 1.12. *Pour presque tout $x \in [0,1)$, la fréquence d'apparition de 0 dans son développement en base θ est*

$$\frac{\theta^2}{1+\theta^2}$$

Étant donné une partition finie de X,

$$X = X_0 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_p$$

on peut associer à tout x la suite $\omega(x) \in \Omega = \{a_0, a_1, \dots, a_p\}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\omega(x)_n = a_j \quad \text{si} \quad T^n x \in X_j.$$

On a codé l'orbite de x par une suite infinie de Ω, et on dit que la partition est *génératrice* si deux points différents de X ont des codages différents. En général le codage n'est pas défini de manière unique aux points frontières de la partition et en leurs pré-images, ce qui induit au mieux un isomorphisme métrique entre le système initial et le système symbolique.

Exemples. C'est le cas de $x \mapsto 2x$ mod 1 et la partition $X_0 = [0, 1/2[$, $X_1 = [1/2, 1)$ ou $x \mapsto \theta x$ mod 1 et la partition $X_0 = [0, \theta^{-1}[$, $X_1 = [\theta^{-1}, 1)$.

Un autre exemple important est celui du codage de fonction unimodale [6].

Le désordre est plus facile à mesurer pour les systèmes symboliques. C'est un des intérêts du codage.

Un outil pour mesurer la richesse d'un système dynamique est la notion d'entropie, *entropie topologique* h_{top} dans le cadre topologique et *entropie métrique* h_μ dans le cadre d'un système muni d'une mesure μ. Pour un sous-shift X, notons $W(X, k)$ le nombre de blocs de longueur k apparaissant dans X ; alors

$$h_{\text{top}} = \limsup_{k \to \infty} \frac{1}{k} \log W(X, k)$$

que l'on peut adopter comme définition.

Proposition 1.13. *Soit Σ_M un sous-shift de type fini de matrice M* primitive *(une puissance de M a tous ses coefficients > 0). Alors l'entropie topologique est $\log \lambda$ où λ est la valeur propre dominante de la matrice.*

Démonstration. Notons plus simplement $W(X, n)$ par $W(n)$; $W(2)$ est le nombre de 1 dans M et donc

$$W(2) = \sum_{i,j} M_{ij}$$

Maintenant si $n \geqslant 2$,

$$M_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_{n-1}} M_{ii_1} M_{i_1 i_2} \cdots M_{i_{n-1}j}$$

et $M_{ii_1} M_{i_1 i_2} \cdots M_{i_{n-1}j} = 1$ signifie que $ii_1 i_2 \cdots i_{n-1} j$ est un mot de X de longueur $n+1$; $M_{ij}^{(n)}$ est donc le nombre de mots de $W(n+1)$ commençant par i et finissant par j, et

$$W(n+1) = \sum_{i,j} M_{ij}^{(n)}$$

La proposition résulte alors du théorème de Perron-Frobenius [11] :

***Théorème 1.14* (Perron-Frobenius).** *Soit M une matrice carrée, à coefficients positifs, et primitive. Alors M admet une valeur propre dominante strictement positive, racine simple de son polynôme caractéristique, et admettant un vecteur propre à droite et à gauche strictement positifs.*

Si λ est cette valeur propre dominante, on a clairement

$$c \leqslant \frac{W(n+1)}{\lambda^n} \leqslant C$$

où c et C sont deux constantes positives, et la proposition suit. □

La proposition reste vraie lorsque la matrice M est seulement *irréductible* (pour chaque couple (i,j) on peut trouver un entier n tel que M_{ij}^n soit > 0) en utilisant la version du théorème de Perron-Frobenius dans ce cas.

L'entropie topologique est un invariant topologique (pour la conjugaison) et l'entropie métrique un invariant pour l'isomorphisme métrique ; un système d'entropie strictement positive, tel que le sous-shift de type fini, est un système dont l'aléatoire est riche.

1.4. Système associé à une suite. On s'intéresse désormais aux systèmes (X, T, μ) avec X métrique compact et d'entropie topologique nulle. Pour un tel système, l'entropie, quelle qu'elle soit, est un outil insuffisant pour mesurer l'aléatoire qu'il contient. (Pour un espace métrique compact X et un homéomorphisme T,

$$h_{\text{top}} = \sup\{h_\mu ; \mu \in M_T(X)\},$$

ce qui nous dispense d'introduire la notion d'entropie métrique !). De ce point de vue, les systèmes infinis les plus pauvres sont les *systèmes sturmiens*. Un système sturmien est un système engendré par une suite sturmienne, c'est-à-dire une suite de *complexité* minimale parmi les suites non périodiques. Étant donné une suite u ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, on considère pour tout n le nombre $p(n)$ des mots de la suite de longueur n ; la fonction p, appelée fonction complexité, a été étudiée en [2].

Le système engendré par u, est (X, T) avec $X = \overline{\mathrm{Orb}}(u)$, T le shift (unilatéral ou bilatéral) sur X. Par construction de X, une suite x est dans X si et seulement si tout mot $x_i x_{i+1} \cdots x_j$ de x est un mot de la suite initiale.

Les systèmes sturmiens apparaissent lors du codage de la rotation irrationnelle et ont été analysés dans [2]. Rappelons un des résultats :

Proposition 1.15. *Soit R_α la rotation irrationnelle sur $X = [0,1)$, et notons $X_0 = [0, 1-\alpha[,\ X_1 = [1-\alpha, 1)$. Alors le système (X, R_α, m) est métriquement isomorphe à un système sturmien.*

Exemple. Lorsque $\alpha = (3-\sqrt{5})/2$, le codage envoie 0 sur la suite

$$u = 0010010100100101001010010010100100101001 01\cdots$$

et le système initial, sur le système engendré par la suite u, c'est-à-dire (X, T, μ), où μ l'image de m.

Soit plus généralement u une suite de $A^{\mathbb{Z}}$. Le système (X, T) associé à la suite u est minimal si et seulement si tout mot de la suite (ou de n'importe quelle autre suite de X) y apparaît avec des lacunes bornées. Cela résulte d'une caractérisation plus générale de Gottschalk. En combinant ceci avec le théorème d'Oxtoby on obtient alors :

Théorème 1.16. *Le système associé à la suite u est minimal et uniquement ergodique (on dit alors* strictement ergodique*) si et seulement si tout mot de la suite admet une fréquence uniforme > 0 ; plus précisément, si $B = b_1 b_2 \cdots b_\ell$ apparaît dans u,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{k; m+1 \leqslant k \leqslant m+n : u_{k+1}u_{k+2}\cdots u_{k+\ell} = b_1 b_2 \cdots b_\ell\} = d_B > 0$$

uniformément par rapport à m.

Démonstration. B étant un mot de u, notons $[B]$ le cylindre engendré par B. Supposons le système strictement ergodique. Si μ est l'unique probabilité invariante du système, il suffit d'appliquer le théorème d'Oxtoby à la fonction continue $f = \mathbf{1}_{[B]}$ pour obtenir la limite cherchée avec $d_B = \mu([B])$. Par minimalité, cette limite est > 0.

Réciproquement, la fonction d'ensembles d_B vérifie

$$0 \leqslant d_B \leqslant 1, \quad d_B = 1 \textit{ si } B = \varnothing,$$
$$d_B = \sum_{b \in A} d_{Bb} = \sum_{b \in A} d_{bB}.$$

Il existe alors une mesure μ de probabilité T-invariante sur les boréliens de X telle que $\mu([B]) = d_B$ pour tout mot B. Le fait que (X, T) soit uniquement ergodique résulte de la caractérisation d'Oxtoby d'un tel système, et la minimalité découle de la condition $d_B > 0$ pour tout B. À noter que par minimalité, le support fermé de μ est X tout entier. □

Toute l'information statistique d'un système strictement ergodique est contenue dans l'une quelconque des suites $x \in X$. On se restreint à ce type de système lorsque l'on veut étudier le désordre d'une suite ou d'une configuration bien déterminée. C'est une situation très différente de celle d'un Bernoulli-shift par exemple.

Exemples. Certaines classes de suites ont été systématiquement étudiées ; nous allons commencer par des cas particuliers avant de tenter une généralisation.

1. *Suite de Thue-Morse.* Considérons $A^{\mathbb{Z}}$ où $A = \{-1, +1\}$. On définit la suite $(m_n)_{n \geqslant 0}$ par

$$m_n = (-1)^{S_n}$$

où S_n désigne la somme des chiffres de l'entier n écrit en base 2, c'est-à-dire

$$S_n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

lorsque

$$n = n_1 + 2 \cdot n_2 + \cdots + 2^{k-1} \cdot n_k$$

de sorte que les n_i valent 0 ou 1. Il est facile de voir que la suite m est complètement déterminée par les relations

$$m_0 = 1, \ m_{2n} = m_n, \ m_{2n+1} = -m_n, \ n \geqslant 0$$

ce qui implique que la suite est 2-automatique comme nous le verrons plus tard, et aussi bien par les relations

$$m_0 = 1,\ m_{2^{n-1}+k} = -m_k,\ k \geqslant 0,\ n \geqslant 1$$

ce qui signifie que la suite est 2-multiplicative. Cette suite qui a été souvent étudiée et rencontrée dans différents domaines des mathématiques s'appelle *suite de Thue-Morse.*

Proposition 1.17. *La suite m prolongée aux entiers négatifs par $m_n = m_{-n-1}$ engendre sous le shift un système strictement ergodique et l'unique mesure invariante μ sur $(X = \overline{\mathrm{Orb}}(m), T)$ vérifie*

$$\mu([1]) = \mu([-1]) = \frac{1}{2}$$

$$\mu([B]) \in \left\{\frac{1}{3 \cdot 2^k}, \frac{1}{6 \cdot 2^k}\right\}$$

pour tout mot B de m de longueur ℓ, $2^k + 1 \leqslant \ell \leqslant 2^{k+1},\ k \geqslant 1$

La stricte ergodicité n'est pas plus difficile à établir dans un cadre plus général, ce qu'on verra plus loin. La description de μ sur les cylindres a été faite par Dekking et V. Berthé [4].

2. *Suite de Toeplitz.* Considérons la suite définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par

$$t_n = m_n \cdot m_{n-1}$$

Il est facile de voir que

$$t_n = \begin{cases} +1 & \text{si } n = 0, \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair}, \\ (-1)^{k+1} & \text{si } n = 2^k(2m+1),\ k \geqslant 1. \end{cases}$$

On peut construire cette suite ainsi : on se figure les entiers comme des cases à remplir ; on place 1 en case 0, puis -1 dans toutes les cases impaires. On remplit alors une case restante sur deux par 1, puis à nouveau une case restante sur deux par -1, une case restante sur deux par 1, etc. en alternant les 1 et les -1.

Cette suite appelée *suite de Toeplitz* engendre elle aussi un système strictement ergodique, comme on le verra ci-dessous.

On s'aperçoit que le procédé de construction peut être généralisé à d'autres suites, en remplissant différemment les trous ; c'est ainsi, par exemple, qu'on peut construire les suites de *papiers pliés* [1].

3. *Suite de Fibonacci.* Considérons $A = \{a, b\}$ et la suite dite de *Fibonacci* à valeurs dans A définie de proche en proche par le règle suivante : on part de a et on lui substitue le mot ab ; puis on recommence en remplaçant chaque a par ab et chaque b par a. On obtient une suite de mots de longueur tendant vers l'infini, chacun commençant par le précédent, qui converge donc vers la suite u

$$abaababaabaababaababaabaababaabaababa \cdots .$$

La suite des longueurs des mots successifs n'est autre que la suite de Fibonacci d'où le nom de la suite. De la même façon, on obtient

Proposition 1.18. *La suite u engendre sous le shift un système strictement ergodique et l'unique mesure invariante μ sur $(X = \overline{\mathrm{Orb}}(u), T)$ vérifie*

$$\mu([a]) = \theta^{-1},\ \mu([b]) = \theta^{-2}$$

$$\mu([B]) \in \begin{cases} \left\{\dfrac{1}{\theta^{k-1}}, \dfrac{1}{\theta^{k}}\right\} & si\ n = F_k - 1 \\ \left\{\dfrac{1}{\theta^{k-1}}, \dfrac{1}{\theta^{k}}, \dfrac{1}{\theta^{k+1}}\right\} & si\ F_k \leqslant n < F_{k+1} - 1 \end{cases}$$

pour tout mot B de u de longueur $n \geqslant 2$, où θ désigne comme toujours le nombre d'or.

Il est facile d'établir que la fréquence d'apparition de la lettre a est θ^{-1} et celle de b, θ^{-2}. La fréquence de tout mot a été calculée par Dekking et V. Berthé ([4]) a étudié le cas plus général des suites sturmiennes.

4. *Suites substitutives.* Les trois suites précédentes peuvent s'obtenir par un procédé de *substitution*,

$$a \longrightarrow ab,\ b \longrightarrow ba$$

pour la suite de Thue-Morse, et

$$a \longrightarrow ab,\ b \longrightarrow aa$$

pour la suite de Toeplitz.

Plus généralement, A étant un alphabet fini noté simplement $\{0, 1, \ldots, s-1\}$, une substitution ζ est une application de A dans l'ensemble des mots construits sur A, qui se prolonge par juxtaposition, en une application encore notée ζ de $A^{\mathbb{N}}$ dans lui-même. Une suite u est substitutive si elle est point fixe d'une substitution. La substitution est de longueur constante, q, si les mots associés à chacune des lettres de A ont même longueur q ; dans ce cas on désigne par suite q-automatique toute image d'un point fixe par une application de A dans $\mathbb{C}$.

Un critère de Cobbham permet de décider si une suite est q-automatique :

Proposition 1.19. *(u_n) est q-automatique si et seulement si l'ensemble des suites $\{u(q^k n + m)_{n \geqslant 0}\}$ lorsque $k \geqslant 0$ et $m < q^k$ est un ensemble fini.*

On définit la matrice de la substitution $M = M(\zeta)$: c'est une matrice $s \times s$ à coefficients entiers dont le coefficient M_{ij} est le nombre de i dans le mot $\zeta(j)$. Si on itère n fois la substitution ζ, $M(\zeta^n) = M(\zeta)^n$.

On suppose pour simplifier et assurer l'existence d'un point fixe u que, pour une lettre a, le mot $\zeta(a)$ commence par a, et que la suite des longueurs des mots $\zeta^n(b)$ tend vers ∞ avec n, pour $b \in A$. Alors $u = \zeta^\infty(a)$ est un point fixe de ζ. Le système associé à la suite u est comme toujours désigné par $(X = \overline{\mathrm{Orb}}(u), T)$ où, a priori, X est une partie de $A^{\mathbb{N}}$. C'est un sous-shift avec beaucoup plus de contraintes que n'en possède un sous-shift de type fini ; ces contraintes d'ailleurs ne sont pas complètement décrites par la matrice M comme c'était le cas pour un sous-shift de type fini, puisqu'elle ne rend pas compte de l'ordre d'apparition des lettres dans chaque substitué ; c'est toute la différence ! Pour les décrire, il faudrait introduire la matrice des 2-mots. Cependant, on peut déjà établir avec la simple matrice M quelques résultats.

Théorème 1.20. *Si la matrice $M(\zeta)$ est primitive, le système est strictement ergodique.*

La démonstration (due à P. Michel) résulte du théorème de Perron-Frobenius et se trouve dans [10].

Proposition 1.21. *Tout système* $(X = \overline{\mathrm{Orb}}(u), T)$ *est d'entropie nulle, et lorsque la matrice est primitive la fonction complexité est en* $O(n)$.

Démonstration. La fonction complexité d'une suite substitutive est de l'une des formes suivantes : $O(1)$, $O(n)$, $O(n \log\log n)$, $O(n \log n)$, $O(n^2)$, [1] et le fait qu'elle soit de l'ordre de n pour une substitution primitive résulte une fois de plus du théorème de Perron-Frobenius [10]. □

5. D'autres classes de suites sont intéressantes, telles que les suites multiplicatives, les suites de Morses généralisées ou les suites définies par itération d'un cocycle à valeurs dans un groupe fini...

2. Propriétés spectrales

On se place dans ce paragraphe, dans le cadre d'un système dynamique (X, T, μ), avec (X, μ) espace de Lebesgue (isomorphe à l'intervalle unité muni de la tribu de Lebesgue et de la mesure de Lebesgue — ce qui n'est pas très restrictif) et T inversible. L'opérateur U_T défini sur l'espace de Hilbert $L^2(X, \mu)$ par

$$U_T(f) := f \circ T$$

est un opérateur unitaire, auquel on va appliquer la théorie de la décomposition spectrale. Ceci nous fournira un nouveau procédé de classification, qui, comme on le verra, permettra de distinguer les systèmes d'entropie nulle.

Deux systèmes sont *spectralement isomorphes*, si les opérateurs associés sont unitairement conjugués. Il est clair que l'isomorphisme métrique entraîne l'isomorphisme spectral, puisque, avec les notations du paragraphe 1.3, les opérateurs U_T et $U_{T'}$ sont conjugués par l'opérateur V_h de multiplication par h. La réciproque est vraie pour certaines classes de systèmes.

2.1. Généralités sur la théorie spectrale. Rappelons, dans le cas plus général d'un opérateur unitaire U agissant sur un espace de Hilbert séparable H, les principales caractéristiques spectrales. Il faut noter que le spectre ensembliste ne sera d'aucune utilité pour l'opérateur U_T avec T ergodique, car toujours égal à $\mathbb{T}$.

1. On note $[U, h]$, *l'espace cyclique* engendré par h, c'est-à-dire la fermeture de espace vectoriel engendré par les $U^n h$, $n \in \mathbb{Z}$.

L'opérateur U restreint à un espace cyclique $[U, h]$ est isométriquement isomorphe à l'opérateur V de multiplication par la fonction $e^{2\pi it}$ sur le Hilbert $L^2(\mathbb{T}, \sigma_h)$ où σ_h, la *mesure spectrale* de h, est une mesure positive et bornée sur $\mathbb{T}$ définie par ses coefficients de Fourier :

$$\widehat{\sigma_h}(n) := \langle U^n h, h\rangle$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Cela résulte de l'identité

$$\langle P(U) \cdot h, P(U) \cdot h\rangle = \int_{\mathbb{T}} |P(t)|^2 d\sigma_h(t)$$

pour tout polynôme trigonométrique P et h dans H.

2. *Spectre discret.* U est à spectre discret si l'espace vectoriel engendré par les fonctions propres est dense dans H.

3. *Spectre simple.* U est à spectre simple s'il existe $h \in H$ tel que $[U, h] = H$.

4. *Spectre simple de Lebesgue.* U est à spectre simple de Lebesgue, si U est unitairement conjugué à V sur $L^2(\mathbb{T}, m)$, ou encore s'il existe $h \in H$ tel que $(U^n h)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormale de H. Dans ce cas, en effet, $\sigma_h = m$.

5. On dit que U a une composante d'un certain type dans son spectre, si le spectre de la restriction de U à un sous-Hilbert invariant de H est de ce type. Ainsi, U a toujours un spectre discret en restriction à l'espace vectoriel engendré par les fonctions propres.

Le théorème de décomposition spectrale peut s'énoncer ainsi :

Théorème 2.1. *Soit U un opérateur unitaire sur un Hilbert séparable H. Il existe alors une suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de H telle que*

(a) $[U,h_n] \perp [U,h_m]$ *pour tous* $n \neq m$
(b) $H = \bigoplus_{n\geqslant 1}[U,h_n]$
(c) $\sigma_{h_1} \gg \sigma_{h_2} \gg \cdots$

et la suite de mesures (σ_{h_n}) *est unique à une équivalence prés.*

La *multiplicité spectrale* de U est le nombre minimal (fini ou infini) d'éléments $f_1,\ldots,f_m$ pour lesquels il existe une décomposition $H = \bigoplus_{n\geqslant 1}[U,f_n]$.

Revenons au cas d'un système dynamique et de l'opérateur U_T avec T ergodique. Dans ce cas, les fonctions propres, étant de module invariant par T, sont de module constant, que l'on peut choisir égal à 1. Les valeurs propres sont simples et forment un sous-groupe de $\mathbb{T}$, de même que la famille de fonctions propres normalisées.

Citons un premier résultat que l'on peut trouver dans [9] et qui clarifie les choses :

Proposition 2.2. *Soit* (X,T,μ) *avec* T *inversible : ou bien* T *est d'entropie métrique nulle, ou bien* U_T *a une composante de Lebesgue de multiplicité infinie.*

Autrement dit, les systèmes avec composante de Lebesgue de multiplicité infinie sont très riches du point de vue de l'aléatoire. Intuitivement, l'apparition d'une composante de Lebesgue dans le spectre dénote un certain hasard dans la description du système, alors qu'à l'opposé, un spectre discret est le fait d'un système rigide comme nous allons le voir. En fait l'étude spectrale apporte un autre éclairage à l'étude des systèmes de basse complexité, peut-être parce qu'on ne sait pas interpréter celle-ci ? Explorons quelques exemples en entropie nulle.

6. *Spectre discret.* La rotation irrationnelle $R_\alpha x := x+\alpha \bmod 1$ agissant sur $[0,1)$ est à spectre discret ; en effet les fonctions $e^{2\pi nit}$ avec n dans $\mathbb{Z}$ sont fonctions propres de R_α et forment une base de $L^2(\mathbb{T},m)$.

Le résultat suivant est dû à J. von Neumann.

Proposition 2.3. *Toute transformation ergodique à spectre discret est métriquement isomorphe à une rotation sur un groupe métrique compact abélien muni de la mesure de Haar.*

C'est un des cas où les notions d'isomorphisme spectral et d'isomorphisme métrique coïncident. Si Γ est le groupe discret des valeurs propres de la transformation T, toute translation ergodique T_g sur $G = \widehat{\Gamma}$ admet Γ comme spectre. Reste à montrer que deux systèmes discrets avec le même spectre Γ sont métriquement isomorphes ; pour cela on construit à l'aide des fonctions propres normalisées (f_γ) et (g_γ) et de leur propriété de groupe, un isomorphisme des σ-algèbres qu'on étend aux espaces eux-mêmes.

Exemple 1. La transformation de Kakutani définie sur $([0,1[, m)$ par

$$Tx = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2} & \text{si } x < \dfrac{1}{2}, \\ x - \dfrac{1}{4} & \text{si } \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{4}, \\ x - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} & \text{si } \dfrac{3}{4} < x < \dfrac{7}{8} \text{ etc.} \end{cases}$$

est à spectre discret car isomorphe à τ, l'addition de 1 avec retenue sur le groupe Ω des entiers dyadiques muni de sa mesure de Haar.

Rappelons que Ω est l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de l'addition composante par composante avec retenue. Ω est un groupe métrique compact pour la distance dyadique $d(\omega, \omega') = 2^{-\inf\{k,\ \omega_k \neq \omega'_k\}}$. Un élément $\omega \in \Omega$ peut être représenté formellement par la somme infinie $\omega = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i 2^i$, de sorte que les entiers naturels, qui sont les ω avec un nombre fini de 1, sont denses dans (Ω, d). À noter que dans cette représentation, $-1 = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ et $(\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, 1, 1, \dots) = -2^n$.

La mesure de Haar du groupe Ω n'est autre que la mesure produit $\{1/2, 1/2\}^{\mathbb{N}}$. Ce système (uniquement ergodique) (Ω, τ) est appelé le 2-*odomètre.* Voir [8] pour une description géométrique de la transformation de Kakutani, et [9] pour une démonstration directe du fait que le spectre est discret.

Exemple 2. Un exemple important est celui-ci : soit θ le nombre d'or ; on considère X_θ l'ensemble des suites de $0-1$ sans 11 (qui a permis de définir le θ-shift) mais muni cette fois de l'addition T_θ de 1 avec retenue. Il s'agit en fait de la transformation induite par τ sur X_θ, car x étant dans X_θ, $\tau(x)$ y est encore si le mot 11 n'y apparaît pas ; sinon on définit

$$T_\theta(x) = \tau^{n(x)}(x), \quad n(x) = \inf\{n \geqslant 1;\ \tau^n(x) \in X_\theta\}.$$

On peut montrer que le système (X_θ, T_θ) est uniquement ergodique et discret (alors que le θ-shift est d'entropie positive !). On montre pour cela qu'il est isomorphe à la rotation $R_{\overline{\theta}}$ sur $[0,1)$, où $\overline{\theta} = 1/\theta = (\sqrt{5}-1)/2$.

Notons (F_n) la suite de Fibonacci avec $F_{-1} = 0$, $F_0 = F_1 = 1$ et considérons pour $x \in X_\theta$,

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(F_n\overline{\theta} - F_{n-1}) \ (\mathrm{mod} 1).$$

(Rappelons que de la théorie des fractions continues, il résulte $|F_n\overline{\theta} - F_{n-1}| < 1/F_{n+1}$). On montre alors que ϕ est une application continue de X_θ dans $[0,1)$ qui vérifie

$$\phi(T_\theta(x)) = T_\theta(x) + \overline{\theta} \quad (\mathrm{mod}\ 1).$$

Pour établir ce dernier point, soit $x \in X_\theta$ et notons j le premier indice pour lequel $x_jx_{j+1} = 00$; les composantes précédentes de x sont donc $0101\cdots01$ ou $1010\cdots01$ suivant la parité de j puisque 11 n'apparaît pas. Si j n'existe pas, on pose $T_\theta(x) = 0$. Ainsi, pour les autres, $T_\theta(x) = (0\cdots010x_{j+2}\cdots)$ et

$$\phi(T_\theta(x)) = F_j\overline{\theta} - F_{j-1} + \sum_{k=j+2}^{\infty} x_k(F_k\overline{\theta} - F_{k-1}),$$

alors que

$$\phi(x) = F_2\overline{\theta} - F_1 + F_4\overline{\theta} - F_3 + \cdots + F_{j-1}\overline{\theta} - F_{j-2} + \sum_{k=j+2}^{\infty} x_k(F_k\overline{\theta} - F_{k-1}).$$

L'identité découle de la relation $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

On montre enfin que ϕ est injective en dehors des suites $010101\cdots$ et $101010\cdots$ et surjective.

7. *Spectre continu.* Les fonctions constantes étant invariantes par U_T, 1 est toujours valeur propre, et on se restreint à l'orthogonal des constantes. Le spectre est continu si U_T n'admet pas d'autres valeurs propres ; toutes les mesures spectrales sont alors des mesures continues. Le premier exemple de transformation à spectre continu a été donné par Chacon ; son idée était de détruire l'arithmétique de la rotation afin de supprimer les valeurs propres. Il s'agit d'un 3-odomètre perturbé. La construction initiale de Chacon était géométrique (voir [8]), mais on peut la décrire comme le shift d'un système symbolique, et même un système associé à une substitution primitive.

On construit une suite de $0-1$ par blocs de la façon suivante : on part de $B_0 = 0$, $B_1 = 0010$, et de proche en proche, on définit $B_{n+1} = B_n B_n 1 B_n$. Cette suite de blocs converge vers une suite

$$w = 0010001010010001000101001010010001010010 \cdots$$

La longueur du bloc B_n est $(3^n + 1)/2$. La transformation de Chacon est le shift sur le système engendré par w qui est minimal puisque tout mot de w y apparaît avec lacunes bornées. Donnons une idée rapide de l'absence de valeur propre (autre que 1). Soit f une fonction propre associée à la valeur propre λ. Les suites w et $T^{\ell_n} w$ commencent par le même mot B_n et sont donc voisines pour n grand. Supposons que f puisse être choisie continue, de module 1 ; alors

$$f(T^{\ell_n} w) = \lambda^{\ell_n} f(w) \sim f(w)$$

pour n grand et λ^{ℓ_n} tend vers 1, ce qui, compte tenu de l'expression de ℓ_n, implique $\lambda = 1$.

Cette transformation possède d'autres propriétés : on peut établir ainsi que le spectre est simple et singulier (les mesures spectrales sont singulières pour h dans l'orthogonal des constantes). C'est le cas générique pour des transformations ergodiques d'entropie métrique nulle. L'existence d'une transformation à spectre simple de Lebesgue est un problème ouvert, et exhiber une transformation avec une composante de Lebesgue de multiplicité finie est déjà une opération difficile.

2.2. Classification spectrale de suites. On se restreint pour finir aux suites ne prenant qu'un nombre fini de valeurs complexes, d'entropie nulle, et engendrant un système uniquement ergodique, de sorte que toute suite du système a le même comportement. On va essayer de décrire sur des exemples les mesures spectrales, et selon leur nature (discrète, singulière, ou absolument continue), on en déduira une classification de la suite (ou du système) de l'ordre vers le désordre.

Considérons le système associé à la suite u prolongée à gauche de façon à conserver la stricte ergodicité. X est alors l'ensemble des $x \in A^{\mathbb{Z}}$ telles que $x_i x_{i+1} \cdots x_j$ soit un mot de la suite initiale, pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$. Notons μ l'unique mesure invariante du système. Il résulte du théorème ergodique d'Oxtoby que, pour f continue sur X, et pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k<N} f(T^{k+n}x)\overline{f(T^k x)} &= \int f(T^n x)\overline{f(x)} d\mu \\ &= \widehat{\sigma_f}(n)\end{aligned}$$

Si π_0 désigne la projection de X sur la composante d'indice 0, on a en particulier (puisqu'elle est continue sur X)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k<N} \pi_0(T^{k+n}x)\overline{\pi_0(T^k x)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k<N} x_{n+k}\overline{x_k} = \widehat{\sigma_x}(n)$$

où σ_x n'est autre que la mesure de corrélation de la suite x introduite par Wiener. Cette mesure peut aussi se définir comme la limite préfaible dans $M(\mathbb{T})$, quand N tend vers ∞, de la suite de mesures absolument continues $(P_N) \cdot m$ où

$$P_N(t) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n<N} x_n e^{2\pi int}\right|^2$$

La famille de mesures spectrales contient donc la mesure de corrélation de toutes les suites x, la mesure de corrélation de toute suite $h(x)$ où $h : A \mapsto \mathbb{C}$, et beaucoup plus.

Exemple 1 : suites sturmiennes. Elles ont été définies en [2]. Soit donc α et β deux réels de $]0,1[$ avec α irrationnel. On définit sur l'ensemble $\mathbb{T}$ des réels modulo 1

$$f_\beta(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 \leqslant t < \beta, \\ -1 & \text{si } \beta \leqslant t < 1. \end{cases}$$

et la suite a de composante $a_n = f_\beta(n\alpha)$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$. Le système engendré (X, T) est constitué des suites x de la forme

$$x = (f_\beta(t + n\alpha))_{n\in\mathbb{Z}}$$

ou

$$x = (g_\beta(t + n\alpha))_{n\in\mathbb{Z}},$$

g étant la fonction définie par

$$g_\beta(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < t \leqslant \beta, \\ -1 & \text{si } \beta < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Si on pose $\phi(x) = t$, l'application ϕ est un isomorphisme métrique de (X, T) sur $(\mathbb{T}, R_\alpha)$ puisque continue et injective, sauf peut-être pour les x associées à t tel que $t + n\alpha \equiv 0$ ou $t + n\alpha \equiv \beta$ pour un n, auquel cas deux suites distinctes ont même image par ϕ. Mais cet ensemble est dénombrable.

On en déduit que le système est discret, ce qui n'est pas surprenant.

Exemple 2 : suite de Toeplitz. Soit t la suite de Toeplitz définie précédemment et (X_t, S, ν) le système associé. On va montrer que ce système est discret, en établissant un isomorphisme entre ce système et le 2-odomètre (Ω, τ) avec sa mesure de Haar, où τ est l'addition de 1 avec retenue.

Par construction, la suite de Toeplitz est constante sur des progressions arithmétiques de plus en plus lacunaires qui remplissent $\mathbb{N}$. Plus précisément, si $\mathcal{P}_k$ est la progression arithmétique

$$\{2^k(2m + 1),\ m = 0, 1, 2, \dots\},$$

on rappelle que t vaut constamment $(-1)^{k+1}$ sur $\mathcal{P}_k$, ceci pour tout $k \geqslant 0$. Les entiers naturels sont denses dans Ω pour la métrique 2-adique. On définit donc ϕ de X dans $\mathbb{N}$ par

$$\phi(S^n t) = n$$

Il est clair que ϕ échange τ et S. Maintenant, si $S^n t$ et $S^m t$ sont proches dans X_t et commencent par un même bloc de taille 2^k, avec k grand, n et m sont voisins pour la métrique 2-adique, puisque divisibles par une même puissance 2^k. L'application ϕ, uniformément continue, se prolonge donc en une application continue de X_t sur Ω vérifiant encore $\phi \circ S = \tau \circ \phi$. Elle n'est pas injective, car t admet deux prolongements à gauche, selon que l'on choisit $t_1 = 1$ ou $t_1 = -1$ avant de remplir les cases vers la gauche avec la même règle. Ainsi $|\phi^{-1}(-2^n)| = 2$; la mesure de Haar du groupe des entiers dyadiques ne charge pas cet ensemble dénombrable et par unique ergodicité des deux systèmes, les mesures invariantes sont échangées par ϕ. On a bien un isomorphisme métrique. On peut préciser les valeurs propres du système qui sont les rationnels dyadiques.

Exemple 3 : suite de Thue-Morse. Soit m la suite de Thue-Morse définie précédemment et (X_m, T, μ) le système associé. On va décomposer $H = L^2(X_m, \mu)$ en deux sous-espaces invariants sur lesquels le spectre est facile à décrire. L'application ψ définie sur X_m par

$$\psi(x) = (x_{n-1}x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

commute avec le shift et définit donc un homomorphisme de (X_m, T) sur (X_t, S), l'espace associé à la suite de Toeplitz, vérifiant $\psi(x) = \psi(x')$ si et seulement si $x = -x'$.

On décompose $H = H_d \oplus H_c$ où H_d est le sous-espace fermé de H constitué des fonctions paires, et H_c le sous-espace fermé de H constitué des fonctions impaires. Ces espaces sont invariants par T ou U_T et orthogonaux. D'après ce qui précède, U_T sur H_d est spectralement isomorphe à U_S sur $L^2(X_t, \nu)$ et donc à spectre discret. Cela signifie que les fonctions paires sont dans le sous-espace fermé de $L^2(X_m, \mu)$ engendré par les fonctions propres de U_T.

Si f est impaire, $\pi_0 \cdot f$ est une fonction paire et s'approche donc dans $L^2(X_m, \mu)$ par des combinaisons linéaires de fonctions propres. Si g_n est une telle combinaison $\sum_{1\leqslant j\leqslant n} \alpha_j h_j$,

$$\|\sigma_f - \sigma_{\pi_0\cdot g_n}\|_M \leqslant \|f - \pi_0 \cdot g_n\|_{L^2}$$

Par le théorème spectral,

$$\sigma_{\pi_0 \cdot g_n} \ll \sigma_{\pi_0 h_1} + \cdots + \sigma_{\pi_0 h_n}$$

et, si h est une fonction propre de module 1 associée à la valeur propre λ,

$$\widehat{\sigma_{\pi_0 h}}(n) \;=\; \int (\pi_0 h)(T^n x)\overline{(\pi_0 h)(x)}d\mu \;=\; \lambda^n \widehat{\sigma_{\pi_0}}(n).$$

Tout revient à décrire la mesure de corrélation σ de la suite m. Il est facile d'établir à l'aide des propriétés de m, les relations suivantes pour σ :

$$\left.\begin{aligned} \widehat{\sigma}(2n) &= \widehat{\sigma}(n) \\ \widehat{\sigma}(2n+1) &= -\frac{\widehat{\sigma}(n) + \widehat{\sigma}(n+1)}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } n \geqslant 0,$$

et $$\widehat{\sigma}(-n) = \widehat{\sigma}(n)$$

On en déduit

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k<N} |\widehat{\sigma}(k)|^2 = 0$$

et cela prouve que la mesure est continue d'après un critère de Wiener. Le fait qu'elle soit étrangère à la mesure de Lebesgue découle de la théorie ergodique : en effet, σ est invariante et ergodique pour la transformation $x \mapsto 2x \bmod 1$, tout comme la mesure de Lebesgue ; comme elles sont différentes, elles sont étrangères. On peut aussi décrire complètement cette mesure en calculant

$$\begin{aligned} P_{2^{N+1}}(t) &= \frac{1}{2^{N+1}} \Big| \sum_{n<2^{N+1}} m_n e^{2\pi i n t} \Big|^2 \\ &= \frac{1}{2^{N+1}} \Big| \sum_{n<2^{N+1}, n=2k} m_n e^{2\pi i n t} + \sum_{n<2^{N+1}, n=2k+1} m_n e^{2\pi i n t} \Big|^2 \\ &= \frac{1}{2^{N+1}} \Big| \sum_{k<2^N} m_k e^{2\pi i 2kt} - \sum_{k<2^N} m_k e^{2\pi i (2k+1)t} \Big|^2 \\ &= P_{2^N}(2t)(1 - \cos(2\pi t)) = \prod_{n=0}^{N} (1 - \cos 2\pi 2^n t) \end{aligned}$$

On retrouve ainsi le produit de Riesz ρ défini en début de texte.

On déduit de cette analyse que toute fonction de H_c est à mesure spectrale continue, plus précisément, absolument continue par rapport au produit de Riesz ρ. La suite de Morse est donc plus imprévisible que ne le sont les suites sturmiennes ou de Toeplitz. Par là-même le système associé est plus riche qu'il n'y paraît.

Il résulte aussi de cette étude que le système de Morse est une extension par un cocycle au-dessus du système de Toeplitz isomorphe à son facteur discret. Par ce procédé, on a changé la nature du spectre. Un exemple intéressant de Helson et Parry [9] permet d'obtenir une composante dénombrable de Lebesgue par l'extension d'un système discret.

Exemple 4 : suite de Rudin-Shapiro. La suite (r_n) de Rudin-Shapiro est à valeurs ± 1 obtenue de proche en proche comme coefficients d'une suite de polynômes trigonométriques (P_n), (Q_n) vérifiant

$$P_0(t) = Q_0(t) = 1$$
$$P_{k+1}(t) = P_k(t) + e^{2\pi i 2^k t} Q_k(t)$$
$$Q_{k+1}(t) = P_k(t) - e^{2\pi i 2^k t} Q_k(t)$$

pour $k \geqslant 1$. Brillhart et Carlitz ont remarqué que, si n se décompose en $\sum_0^k \varepsilon_j 2^j$,

$$r_n = (-1)^{\varepsilon_0\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k}$$

autrement dit, $r_n = (-1)^{f(n)}$ où $f(n)$ est le nombre de 11 dans l'écriture binaire de n. En particulier, $r_{2a+b} = (-1)^{ab} r_a$, soit

$$r_{2n} = r_n, \quad r_{2n+1} = (-1)^n r_n$$

On démontre que le système engendré est à spectre mixte : une partie discrète et une partie continue qui est Lebesgue de multiplicité 2. Ceci peut s'établir en suivant le schéma de la démonstration pour le système de Morse et en considérant le système associé à la suite de type Toeplitz $(r_{n-1}r_n)$ isomorphe au 2-odomètre. En particulier, on établit que la mesure de corrélation σ de la suite (r_n) est la mesure de Lebesgue. Il y a plusieurs démonstrations possibles de ce résultat ; l'une, due à Kamae et purement arithmétique, utilise l'identité $r_n = (-1)^{f(n)}$. Une autre, plus analytique, part de la définition de la mesure de corrélation comme limite pré-faible de la suite de probabilités à densités

$$R_N(t) = \frac{1}{N}\Big|\sum_{n<N} r_n e^{2\pi int}\Big|^2$$

On utilise pour cela la relation :

$$|P_n|^2 + |Q_n|^2 = 2^{n+1}$$

qui découle de la règle du parallélogramme, de laquelle on déduit $R_N(t) \leqslant C$, pour tout réel t et tout $N \geqslant 1$. Maintenant, si K_L désigne le noyau de Fejer d'ordre L, $(\sigma \star K_L)$ est une suite bornée par C dans L^∞ ; si $f \in L^\infty$ est une valeur d'adhérence pré-faible de cette suite, $\widehat{f} = \widehat{\sigma}$. Par ailleurs, on vérifie que $(1/2^n)(|P_n|^2 + |Q_n|^2)$ converge vaguement vers $2f \cdot m$; comme chaque polynôme vaut identiquement 2, $f = 1$ et $\sigma = m$.

Ce système est particulièrement intéressant de notre point de vue : c'est un système de basse complexité avec cependant une composante de Lebesgue ; cette suite, d'une certaine façon, simule le hasard.

Exemple 5 : substitutions. Les exemples précédents peuvent, je pense, motiver une étude systématique des suites définies par substitution. Si les suites sturmiennes forment une classe beaucoup plus importante du point de vue de la cardinalité que celle des suites substitutives, les autres exemples relèvent des substitutions ; on l'a vu pour les suites de Morse et Toeplitz, mais c'est aussi le cas de la suite de Chacon ou de la suite de Rudin-Shapiro (ci-dessous) ou même des suites de Morse généralisées obtenues par itération de substitutions différentes.

On va exhiber la règle de substitution qui fournit la suite de Rudin-Shapiro. Par le critère de Cobbham, la suite est 2-automatique. Il nous faut donc trouver une substitution de longueur 2 : si V_n désigne le bloc des coefficients de P_n, et W_n le bloc des coefficients de Q_n, tous deux de longueur 2^n, on a :

$$V_0 = W_0 = 1, \quad V_{n+1} = V_n W_n, \quad W_{n+1} = V_n \overline{W}_n$$

où $\overline{W}$ est le mot W dans lequel on a échangé 1 et -1. On code alors les 2-mots $11,\ 1-1,\ -11,\ -1-1$ par $a,\ b,\ \overline{b},\ \overline{a}$ pour obtenir la suite $aba\overline{b}ab\overline{a}baba\overline{b}\overline{a}\overline{b}a\overline{b}\cdots$ d'où la substitution $a \to ab, \quad b \to a\overline{b}$ en composant avec l'opération de symétrie ; la suite de Rudin-Shapiro s'obtient en projetant a, b sur 1, et $\overline{a}, \overline{b}$ sur -1.

La suite de Chacon s'obtient à partir de la substitution définie sur $A = \{a, b, c\}$ par

$$a \longrightarrow ab, \quad b \longrightarrow cab, \quad c \longrightarrow ccab$$

et de la projection $h : A \to \{0, 1\}$ vérifiant $h(a) = 1$, $h(b) = h(c) = 0$.

Pour les substitutions de longueur constante, il existe un critère très simple dû à M. Dekking permettant de vérifier que le système associé est discret (et ainsi toutes les mesures spectrales discrètes)

Théorème 2.4. *Le système associé à la substitution primitive ζ de longueur q sur l'alphabet $A = \{a_1 \cdots a_s\}$ est discret si et seulement si elle admet une coïncidence, c'est-à-dire, si l'on peut trouver n et $k < q^n$ tels que*

$$\zeta^n(a_1)_k = \zeta^n(a_2)_k = \cdots = \zeta^n(a_s)_k$$

(où $\zeta(a)_k$ est la k-ième lettre du mot $\zeta(a)$).

Il en résulte immédiatement que la suite de Toeplitz engendre un système discret.

Par contre il n'existe pas de tel critère pour les substitutions de longueur non constante. Ainsi la suite de Fibonacci engendre un système discret puisqu'elle est sturmienne. On peut aussi établir un isomorphisme entre le système de Fibonacci, et le système discret (X_θ, T_θ) étudié en 2. 1. Cette démonstration conduit à la conjecture suivante :

Conjecture 2.5. *Une substitution primitive dont la valeur propre de Perron-Frobenius est un nombre de Pisot unitaire est à spectre discret.*

Un nombre de Pisot $\theta > 1$ est un entier algébrique dont tous les conjugués sont à l'intérieur du disque ouvert $\{|z| < 1\}$. Il est unitaire si le produit des racines de l'équation vaut ± 1. C'est le cas du nombre d'or θ puisqu'il est racine de $X^2 - X - 1 = 0$ et que son conjugué $\theta' = -1/\theta$.

La question est résolue pour un alphabet de deux lettres mais reste posée dans le cas général. Les questions suivantes sont également ouvertes :

Questions

(1) Peut-on caractériser les substitutions ayant une composante de Lebesgue, produisant ainsi des suites de basse complexité mais imprévisibles ?

(2) (Question attribuée à Banach) Existe-t-il une transformation ergodique à spectre simple de Lebesgue ?

Références

[1] J.-P. Allouche & M. Mendès France – « Automata and automatic sequences », in *Beyond quasicrystals (Les Houches, 1994)*, Springer, Berlin, 1995, p. 293–367.

[2] P. Arnoux – « Complexité de suites à valeurs dans un ensemble fini : quelques exemples », in *Aspects des systèmes dynamiques (des équations différentielles aux itérations de fonctions)*, Journées mathématiques X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 1994, p. 21–40.

[3] K. M. Bedford & C. Series – *Ergodic theory, symbolic dynamics and hyperbolic spaces*, Oxford University Press, 1991.

[4] V. Berthé – « Entropy in deterministic and random systems », in *Beyond quasicrystals (Les Houches, 1994)*, Springer, Berlin, 1995, p. 441–463.

[5] J. P. Cornfeld, S. V. Fomin & Y. G. Sinai – *Ergodic theory*, Springer Verlag, 1982.

[6] R. L. Devaney – *An introduction to chaotic dynamical systems*, Benjamin/Cummings, 1986.

[7] A. Fathi – « Systèmes dynamiques discrets », in *Aspects des systèmes dynamiques : le premier retour*, Journées mathématiques X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 1996, ce volume, p. 21–34.

[8] N. A. Friedman – « Replication and stacking in ergodic theory », *Amer. Math. Monthly* **99** (1992), no. 1, p. 31–41.

[9] W. Parry – *Topics in ergodic theory*, Cambridge University Press, 1981.

[10] M. Queffelec – *Substitution dynamical systems- Spectral analysis*, Lecture Notes Math., vol. 1294, Springer, Berlin, 1987.

[11] E. Seneta – *Non-negative matrices. An introduction to theory and applications*, Allen & Unwin, London, 1973.

[12] A. Sütő – « Schrödinger difference equation with deterministic ergodic potentials », in *Beyond quasicrystals (Les Houches, 1994)*, Springer, Berlin, 1995, p. 481–549.

[13] P. Walters – *Ergodic theory- Introductory lectures*, Lecture Notes in Math., vol. 458, Springer, Berlin, 1975.

[14] C. Zuily & H. Queffelec – *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson, 1995.

Martine Queffélec, UFR de Mathématiques et UMR 8524 du CNRS, UST Lille, F–59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

E-mail : `Martine.Queffelec@univ-lille1.fr`